1982 г. Март *Том 136, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОДХОД К КАЛИБРОВОЧНЫМ ТЕОРИЯМ ТИПА ЯНГА — МИЛЛСА*)

М. Даниэль, С. М. Виалле

СОДЕРЖАНИЕ

---

*) Daniel M., Viallet C. M. The Geometrical Setting of Gauge Theories of the Yang — Mills Type.— Rev. Mod. Phys., 1980, v. 52, No. 1, p. 175—197.— Перевод А. Д. Долгова.

М. Даниэль и С. М. Виалле — сотрудники Лаборатории теоретической физики и физики высоких энергий (Париж).

ВВЕДЕНИЕ. ПОЧЕМУ ВОЗНИКАЮТ РАССЛОЕННЫЕ ПРОСТРАНСТВА?

Теория полей Янга — Миллса, определенная в четырехмерном евклидовом пространстве, сама по себе обладает богатой и интересной структурой даже на классическом уровне. Открытие регулярных решений полевых уравнений Янга — Миллса, соответствующих абсолютным минимумам действия, сделанное в работе Белавина, Полякова, Шварца и Тюпкина [1], привело к интенсивному изучению классической теории калибровочных полей. Можно полагать, что глубокое понимание классической теории будет совершенно необходимо для последовательного квантования теории.

Все известные в настоящее время решения, отвечающие конечному действию, характеризуются топологической величиной, называемой числом инстантонов, индексом Понтрягина или вторым классом Чженя. Эта топологическая величина является проявлением нетривиальных граничных условий, которые накладываются на калибровочные потенциалы требованием конечности действия. Поэтому мы приходим к довольно сложной глобальной топологической задаче.

В математике существует достаточно общий подход к задачам такого рода. Это — теория расслоенных пространств, которая первоначально была введена для постановки и решения глобальных топологических задач. Понятие расслоения весьма полезно также для рассмотрения локальных задач дифференциальной геометрии и теории поля (в частности, теории калибровочных полей). Таким образом, создалась удачная ситуация, когда уже существующая математическая теория могла быть использована как инструмент изучения топологических аспектов теории полей Янга — Миллса.

В этом обзоре с самого начала принимается точка зрения теории расслоенных пространств. Благодаря этому, калибровочному потенциалу придается геометрический смысл: калибровочные потенциалы становятся координатами формы связности на главном расслоении. Из хорошо известного закона калибровочных преобразований

$$A_\mu(x) \to {}^gA_\mu(x) = g^{-1}(x)\, A_\mu(x)\, g(x) + g^{-1}(x)\, \partial_\mu g(x)$$

очевидно, что из-за наличия неоднородного члена $g^{-1}\partial_\mu g$ поле A_μ не имеет тензорной природы. Указанный закон преобразования характерен для других геометрических объектов типа коэффициентов связности.

Однако реальная сила принятого языка выявляется лишь из следующего соображения: конечность действия (требование интегрируемости и, следовательно, некоторое аналитическое граничное условие) определяет (при разумных физических предположениях) асимптотическое поведение евклидовых потенциалов. В свою очередь это асимптотическое поведение дает возможность в действительности построить главное расслоение над соответствующей компактификацией четырехмерного евклидова пространства. При этом глобальные граничные условия учитываются автоматически.

Обращение к теории расслоенных пространств неизбежно также при исследовании группы $\mathcal{G}$ всех калибровочных преобразований. В пространстве R^4 группу $\mathcal{G}$ можно описать вполне непосредственно. Однако при компактификации R^4 группа $\mathcal{G}$ приобретает нетривиальную топологию. В связи с этим изучение пространства орбит, т. е. пространства всех калибровочно неэквивалентных потенциалов, на котором вычисляются континуальные интегралы, требует особой тщательности. По-видимому, здесь не обойтись без языка теории расслоенных пространств.

Приложения топологии и дифференциальной геометрии к исследованию солитонов описаны в ясном и лаконичном обзоре Сторы [2]. Более обширный обзор применения метода расслоенных пространств к калибровочным теориям можно найти в работе Майера [3]. Некоторые из наиболее ранних работ, в которых использовались расслоенные пространства, в физической литературе принадлежат Кернеру [4,5], Траутману [6], Чжо[7], Езава и Цзе[8] *).

1. СОЧЕТАНИЕ ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ С ИЗОТОПИЧЕСКОЙ СИММЕТРИЕЙ: ГЛАВНОЕ РАССЛОЕНИЕ (ГЕОМЕТРИЯ БЕЗ МАТЕРИИ), АССОЦИИРОВАННОЕ РАССЛОЕНИЕ (ГЕОМЕТРИЯ С МАТЕРИЕЙ)

а) Прямое произведение пространства-времени и изопространства; обобщение — расслоенное пространство

Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство-время R^4. Нас интересуют калибровочные теории типа Янга — Миллса (ЯМ) в пространстве R^4.

Основная идея калибровочной теории состоит в том, что изотопическое вращение в каждой точке пространства-времени, действующее на калибровочные потенциалы и поля, приводит к различным описаниям одной и той же физической реальности.

Любое подобное преобразование описывается гладким заданием элементов калибровочной группы в каждой точке пространства-времени, иными словами, отображением $R^4 \to G$. Можно представить себе графики этих отображений в пространстве $P = R^4 \times G$ (рис. 1).

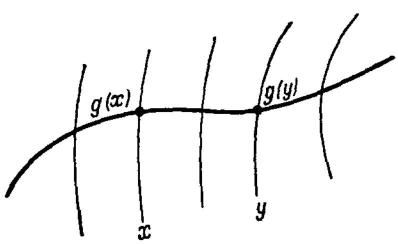

Рис. 1.

Рассмотрим теперь пространство P, возникающее при этом умножении. Группа G действует на P естественным образом.

Если $p \in P$, то $p = (x, g)$, где $x \in R^4$, $g \in G$.

Для любого $a \in G$ определим отображение R_a: $P \to P$, так что $R_a(p) = pa = (x, ga)$. Группа G действует на P *свободно*, т. е. если имеется какой-либо элемент $p \in P$, для которого $R_a(p) = p$, то $a = e$ (e — единичный элемент группы G).

Таким образом, определяется соотношение эквивалентности между точками P: $p \sim p' \Leftrightarrow$ существует такой элемент $a \in G$, что $p' = pa$.

*) См. также статью М. А. Ольшанецкого «Краткий путеводитель для физиков по современной геометрии», опубликованную в этом же выпуске УФН, с. 421. (*Прим. перев.*)

Сразу видно, что классы эквивалентности соответствуют точкам R^4. Иными словами, фактор-пространство P по указанному соотношению эквивалентности совпадает с R^4.

Заметим также, что это соотношение эквивалентности устанавливает каноническую проекцию π: $P \to R^4$, так что $\pi(x, g) = x$, т. е. две эквивалентные точки (x, g) и (x, ga) проектируются в одну и ту же точку $x \in R^4$.

Множество $\pi^{-1}(x)$ называется слоем над точкой x, оно изоморфно группе G.

Тройка (P, G, π) — это пример тривиального главного расслоения над R^4 со структурной группой G и проекцией π.

Описанная структура — естественна, потому что слой $\pi^{-1}(x)$ воспроизводит свободу в выборе локальной калибровки в точке x, устанавливая в этой точке калибровочную группу. Фактически каждый слой совпадает с группой G, причем неважно, который элемент — единица (см.

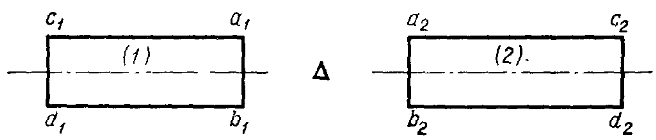

Рис. 2.

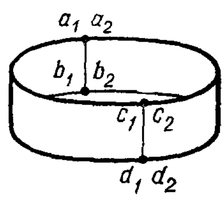

Рис. 3.

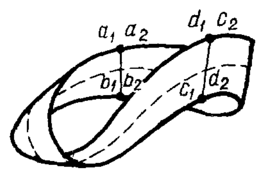

Рис. 4.

например, книгу Нельсона [9]). Но именно такой подход находится в полном согласии с тем, что желательно с физической точки зрения. Чтобы убедиться в этом, представим себе, что в каждой точке пространства-времени имеется некоторое пространство V_x, пространство представлений группы G. Такое векторное пространство реализуется в присутствии полей материи. В пространстве V_x можно выбрать некоторую систему координат. Если этот выбор уже сделан, то между множеством координатных систем и группой устанавливается взаимно однозначное соответствие: элементы группы переводят фиксированную систему координат в другие системы. Именно так обстоит дело для слоя $\pi^{-1}(x)$ в случае главного расслоения: если на слое выбрана какая-то точка, то в любую другую точку (того же) слоя можно прийти применением (единственного) элемента группы.

Прежде чем перейти к определению расслоения в его полной общности, мы хотели бы отметить, что расслоение (над R^4) является обобщением прямого произведения, допускающим возможность скручивания в пространстве в целом, и потому приводит к нетривиальному слиянию пространства-времени с изопространством.

Рассмотрим для наглядности пример из книги Кириллова [10]. Представим себе две полоски бумаги, (*1*) и (*2*) (рис. 2). Эти полоски можно склеить так, чтобы совпали точки a_1 и a_2, b_1 и b_2, c_1 и c_2, d_1 и d_2. Тогда получится цилиндр (рис. 3). Однако полоски (*1*) и (*2*) можно склеить и с перекручиванием, так что по-прежнему a_1 совпадает с a_2, а b_1 — с b_2, но c_1 совпадает с d_2, а d_1 — с c_2. При этом получится лист Мёбиуса (рис. 4).

Рассмотрим теперь границы B и B' на рис. 3 и 4 соответственно. B состоит из двух замкнутых кривых, а B' — из одной замкнутой кривой.

Глядя на исходные полоски бумаги (см. рис. 2), можно определить действие группы $G = \{+1, -1\}$ (группа, состоящая из двух элементов) на точки B и B' следующим образом:

$+1$ = тождественное преобразование,

-1 = отражение относительно оси Δ.

Очевидно, что B — прямое произведение замкнутой петли C на группу G, а B' не является подобным прямым произведением. Тем не менее, если мы отождествим точки B (соответственно B'), связанные групповой операцией, то получится одна и та же замкнутая кривая (рис. 5 и 6).

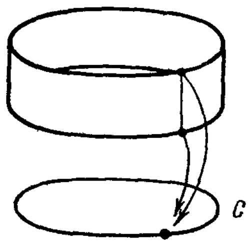

Рис. 5.

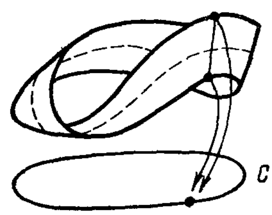

Рис. 6.

Мы будем говорить, что B и B' — расслоения со структурной группой G и базой — замкнутой кривой C. При этом B — тривиальное расслоение, это *прямое произведение*, B' таковым не является.

Примем теперь общее определение главного расслоения прямо из книги Кобаяси и Номидзу [11].

Определение. Пусть P — некоторое многообразие, и G группа Ли. Дифференцируемое главное расслоение над M с группой G состоит из многообразия P и действия группы G на P, удовлетворяющего условиям:

А. Группа G свободно действует на P справа: отображение $P \times G \to P$ означает, что $(u, a) \in P \times G \to ua \in P$.

Б. M — фактор-пространство многообразия P по соотношению эквивалентности, порождаемому группой G, $M = P/G$, и каноническая проекция $\pi\colon P \to M$ — дифференцируема;

В. Многообразие P — *локально тривиально*, т. е. каждая точка $x \in M$ обладает окрестностью U такой, что $\pi^{-1}(U)$ — изоморфно произведению $U \times G$ в следующем смысле: существует диффеоморфизм ψ: $\pi^{-1}(U) \to U \times G$ такой, что $\psi(u) = (\pi(u), \varphi(u))$, где φ — отображение $\pi^{-1}(U)$ в группу G, удовлетворяющее условию $\varphi(ua) = \varphi(u) \cdot a$ для всех $u \in \pi^{-1}(U)$ и $a \in G$.

Главное расслоение будет обозначаться $P(M, G)$ или просто P. Иногда мы будем называть $P(M, G)$ G-расслоением над M. P называется полным пространством или расслоенным пространством, M — базовым пространством, G — структурной группой, а π — проекцией.

Для любого $x \in M$ — $\pi^{-1}(x)$ — замкнутое подмногообразие в P, называемое слоем над x. Очевидно, что если u — точка слоя $\pi^{-1}(x)$, то $\pi^{-1}(x)$ — множество точек вида ua, где $a \in G$, и называется слоем, проходящим через точку u. Каждый слой диффеоморфен группе G.

б) Примеры главных расслоений

1) Случай, рассмотренный в начале этого раздела, где расслоенное пространство P — прямое произведение $R^4 \times G$, это пример тривиального G-расслоения над R^4. На рис. 5 B — также тривиальное расслоение.

2) Рассмотрим окружность S^1 и группу $G = \{+1, -1\} = Z_2$ (т. е. группу с двумя элементами), действующую на S^1 следующим образом: $+1$ = тождественное отображение, -1 = отображение точки в диаметрально противоположную. Группа G действует свободно. $M = S^1/G = P^1$ — одномерное проективное пространство (множество всех диаметров); проекция π точки x окружности S^1, $\pi(x)$-диаметр, проходящий через эту точку. Теперь надо проверить локальную тривиальность. Если задан элемент P^1, т. е. ось в пространстве R^2, проходящая через начало координат 0, то всегда существует открытый конус U (в пространстве R^2), содержащий эту ось, причем $\pi^{-1}(U) = U \times \{+1, -1\}$ (рис. 7). Следовательно, S^1 — полное пространство главного расслоения с группой G над базовым пространством P^1. Это расслоенное пространство обозначается $S^1(P^1, Z_2)$.

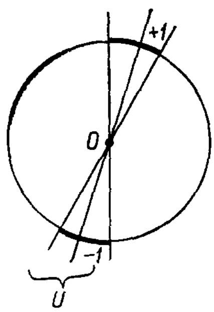

Рис. 7.

Эту окружность (вместе с действием группы Z_2) можно отождествить с кривой B' (с группой, действие которой было определено выше), так как они гомотопически эквивалентны.

в) Новые определения

1) Сечение в главном расслоении. *Определение*: Секущей поверхностью (глобальной) главного расслоения называется отображение σ базового пространства на полное пространство P такое,

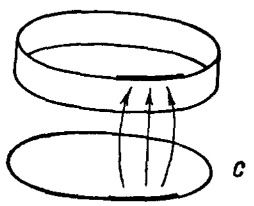

Рис. 8.

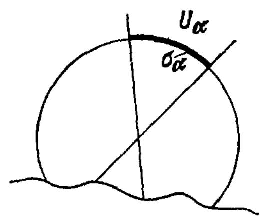

Рис. 9.

что $\pi(\sigma(x)) = x$ при всех $x \in M$ (локальное сечение над $U_\alpha \subset M$ — это отображение σ_α: $U_\alpha \to P$ такое, что $\pi(\sigma_\alpha(x)) = x$ для любого $x \in U_\alpha$). Пример: на рис. 8 показано сечение пространства B. Другой пример: на рис. 9 показано локальное сечение расслоения $S^1(P^1, Z_2)$ над конусом U_α.

Следует отметить, что условие локальной тривиальности для главного расслоения (см. условие B в определении главного расслоения) выделяет некоторое множество локальных сечений. Действительно, при заданной точке x в пространстве M всегда существует такое множество U_α, что $x \in U_\alpha$. Выберем в $\pi^{-1}(x)$ точку u и определим

$$\sigma_\alpha(x) = u \cdot \varphi_\alpha^{-1}(u).$$

Это определение имеет смысл, так как $u \cdot \varphi_\alpha^{-1}(u)$ не зависит от выбора точки u в слое. Чтобы убедиться в этом, достаточно использовать свойство отображения φ_α:

$$\varphi_\alpha(ua) = \varphi_\alpha(u)\cdot a, \ \forall a \in G,$$

любую точку в слое $\pi^{-1}(x)$ можно представить в виде $v = ua$. Тогда

$$v\cdot\varphi_\alpha^{-1}(v) = u\cdot\varphi_\alpha^{-1}(u).$$

Кроме того, $\pi(\sigma_\alpha(x)) = x$.

Заметим, что $\psi_\alpha(\sigma_\alpha(x)) = (x, e)$, т. е. локальная секущая поверхность σ_α при диффеоморфизме ψ_α: $\pi^{-1}(U_\alpha) \to U_\alpha \times G$ соответствует $U_\alpha \times \{e\}$.

2) *Функции перехода.* Предположим, что M допускает покрытие, как указано выше. Пусть $\{U_\alpha\}$, $\alpha \in A$ — подобное покрытие M, U_α — открытые множества. Будем использовать выделенную систему локальных сечений $\sigma_\alpha(x) = u\cdot\varphi_\alpha^{-1}(u)$.

Пусть $x \in U_\alpha \cap U_\beta$. Тогда

$$\sigma_\beta(x) = \sigma_\alpha(x)\,\varphi_\alpha(u)\cdot\varphi_\beta^{-1}(u).$$

Так как действие группы G на P — свободно, а σ_α и σ_β зависят только от x, то можно определить

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \varphi_\alpha(u)\cdot\varphi_\beta^{-1}(u).$$

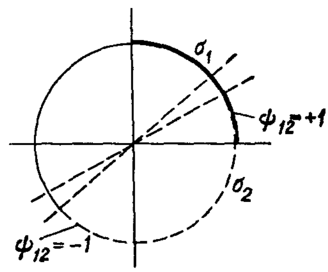

Рис. 10.

Эти соображения $\psi_{\alpha\beta}$: $U_\alpha \cap U_\beta \to G$ называются **ф у н к ц и я м и п е р е х о д а**. Эти функции удовлетворяют так называемому коцикличеcкому условию

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x)\cdot\psi_{\gamma\beta}(x), \qquad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma.$$

Функции перехода — дифференцируемы.

Пример функции перехода для расслоения $S^1(P^1, Z_2)$ показан на рис. 10.

3) Г л а в н о е к о о р д и н а т н о е р а с с л о е н и е. Пусть $P(M, G)$ — главное расслоение и $\{U_\alpha\}$ — некоторое покрытие M (как и выше). Рассмотрим функции перехода $\psi_{\alpha\beta}$, соответствующие этому покрытию и построенные с помощью выделенной системы секущих поверхностей σ_α. Мы будем говорить, что система $(M, G, \{U_\alpha\}, \psi_{\alpha\beta}\}$ образует *главное координатное расслоение* в смысле Стинрода [12]. Подчеркнем, что существование этого координатного расслоения является составной частью определения главного расслоения. Однако наличие группового действия в расслоенном пространстве P обеспечивает возможность других координатных расслоений.

Предположим, что мы построили другую систему локальных секущих поверхностей σ'_α $(a \in A)$, используя это групповое действие. Разумеется, $\sigma'_\alpha(x) = \sigma_\alpha(x)\cdot g_\alpha(x)$, где $g_\alpha(x) \in G$. Действительно, $\sigma_\alpha(x)$ и $\sigma'_\alpha(x)$ проектируются в одну и ту же точку x, и поэтому принадлежат одному и тому же слою. Используя новую систему локальных секущих поверхностей, можно построить другую систему функций перехода $\psi'_{\alpha\beta}$. Эти функции перехода связаны со старыми,

$$\psi'_{\alpha\beta}(x) = g_\alpha^{-1}(x)\,\psi_{\alpha\beta}(x)\,g_\beta(x).$$

Мы будем говорить, что главные координатные расслоения $(M, G, \{U_\alpha\}, \psi_{\alpha\beta})$ и $(M, G, \{U_\alpha\}, \psi'_{\alpha\beta})$ — *эквивалентны* (это соотношение эквивалентности). Действительно, исходное главное расслоение является классом эквивалентности для этих координатных расслоений.

Отметим, что покрытие базового пространства открытыми множествами вместе с соответствующими функциями перехода, удовлетворяющими коциклическому условию, полностью определяет главное расслоение.

Существует «теорема реконструкции», согласно которой любой набор функции $\psi_{\alpha\beta}$ (со значениями в группе G), заданный на покрытии $\{U_\alpha\}$ пространства M и удовлетворяющий условию

$$\psi_{\alpha\beta}(x) = \psi_{\alpha\gamma}(x)\cdot\psi_{\gamma\beta}(x), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \quad (\forall\alpha, \ \forall\beta, \quad \forall\gamma)$$

однозначно определяет главное расслоение $P(M, G)$ с функциями перехода $\psi_{\alpha\beta}$ относительно покрытия $\{U_\alpha\}$.

Пример. У и Янг [13], исследуя статический монополь Дирака, использовали главное координатное расслоение ($M = R^3 - \{0\}$, $G = U(1)$, $\{U_1, U_2\}$, $\psi_{12} = e^{in\alpha}$). Здесь U_1 (соответственно U_2) содержит точки пространства R^3 за вычетом начала координат 0, не принадлежащие верхней полé конуса C_1 (соответственно нижней полé C_2) (см. рис. 11); n — целые числа. В этом случае главное расслоение имеет вид $P(R^3 - \{0\}, U(1))$. Его базовое пространство — все трехмерное евклидово пространство за вычетом точки, в которой расположен монополь (эта точка принята за начало координат в R^3). Структурная группа $U(1)$ — абелева группа калибровочных преобразований (фазовые преобразования полей материи).

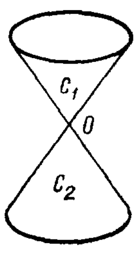

Рис. 11.

Использованный У и Янгом термин «глобальная калибровка» соответствует понятию о главном расслоении. В их формализме условие квантования Дирака (а именно, $2eg = n$, где e — электрический заряд, а g — магнитный заряд) возникает из требования однозначности функции перехода ψ_{12}. Оно связано с классификацией $U(1)$-расслоений над сферой S^2, ретрактом пространства $R^3 - \{0\}$ (см. гл. 3).

г) Тривиальное главное расслоение

Главное расслоение P — *тривиально*, если исходя из него можно построить (вышеописанным способом) такое главное координатное расслоение, что все функции перехода равны единице, $\psi_{\alpha\beta}(x) = e$. В этом случае P диффеоморфно $M \times G$ и допускает глобальную секущую поверхность (см. книгу Стинрода [12]). Тривиальное расслоение называется также *прямым произведением*.

Следовательно, расслоение $S^1(P^1, Z_2)$ — нетривиально, так как оно не допускает непрерывного глобального сечения: чтобы получить такую секущую поверхность, надо было бы развернуть конус C, доведя угол раствора θ до величины π, см. рис. 12. Сечение σ не может быть непрерывным, так как оно не замыкается при $\theta = \pi$.

Рис. 12.

Топология введенных нами расслоенных пространств оказывается тесно связанной с исследованием топологически стабильных конфигураций рассматриваемых калибровочных полевых теорий (см. гл. 3). Однако расслоенное пространство не возникает само по себе. Обычно исходными пунктами являются пространство-время и калибровочная группа симметрии. Эти объекты объединяются при помощи некоторых функций перехода. Мы увидим, как эти функции перехода связаны с граничными значениями, накладываемыми на калибровочные потенциалы. Прежде всего строится главное координатное расслоение, а затем, естественным образом, главное расслоение (с помощью теоремы о реконструкции). Топология расслоенного пространства определяется топологией базового пространства, топологией группы и функциями перехода.

Существует гомотопическая классификация всех главных расслоений с заданным базовым пространством и заданной структурной группой. Она связана как с возможной нетривиальной гомотопией функций перехода, так и с препятствиями, возникающими при попытках расширить локальную секущую поверхность до глобальной.

Для включения в рамки теории расслоенных пространств полей материи необходимо понятие о расслоении, ассоциированном с заданным главным расслоением. Хотя целью настоящего обзора является исследование чистой теории Янга — Миллса (без полей материи), введение ассоциированного расслоения оказывается полезным для изучения группы всех калибровочных преобразований и для геометрической интерпретации уравнений движения (разделы 4 и 5).

д) Ассоциированное расслоение

Предположим, что группа G действует в пространстве F. Это пространство может быть, например, пространством линейного представления группы G, подобно векторным пространствам, используемым для описания полей материи.

Любое главное расслоение можно использовать для построения копии пространства F в каждой точке M, но таким образом, чтобы сохранить (возможно нетривиальную) топологию пространства P (или хотя бы ее часть). Таким образом, завершается обобщение произведения пространств, построенное для групп в виде главных расслоений. Подобное расслоенное пространство E будет обобщением произведения $M \times F$. E называется *расслоением, ассоциированным* с P, со стандартным слоем F.

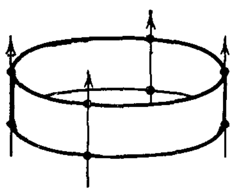

Рис. 13.

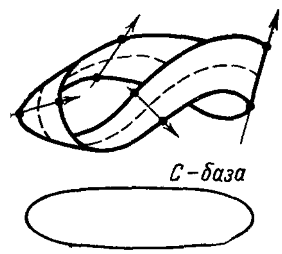

Рис. 14.

Прежде чем дать определение (также взятое из книги Кобаяси и Номидзу [11]) ассоциированного расслоения, рассмотрим два различных расслоения над окружностью со стандартным слоем R (вещественная прямая). Можно использовать тривиальное главное расслоение B, показанное на рис. 5. Ассоциированное расслоение E (B, R) получается приклеиванием вещественной прямой ко всем парам соответствующих точек на B, как показано на рис. 13. Если же использовать главное расслоение B' (см. рис. 6), то получается конструкция, показанная на рис. 14. Расслоенное пространство E — прямое произведение $R \times$ (замкнутая кривая C). Пространство E' не является подобным прямым произведением. Нетривиальность E' проявляется в том, что невозможно выбрать ориентацию прямой вдоль C непрерывным образом. Однако секущие поверхности в E' существуют, как и в E.

Определение. Пусть P (M, G) — главное расслоение с проекцией π: $P \to M$, и F — многообразие, на котором группа G производит левые сдвиги (действие элемента группы a на элемент $\xi \in F$ обозначается $a\xi$). Зададим действие групповых элементов $a \in G$ в пространстве $P \times F$ следующим образом:

$$(p, \xi) \to (pa, a^{-1}\xi).$$

Этим устанавливается соотношение эквивалентности между точками пространства $P \times F$.

По определению, расслоенное пространство, ассоциированное с P, со стандартным слоем F — это пространство $E(M, G, F, P) = P \times F/G$, снабженное следующей дифференцируемой структурой. Если определить проекцию (π_E: $E \to M$) так: π_E (класс эквивалентности элемента (u, ξ)) $= \pi(u)$, то для E вновь будет справедливо свойство локальной тривиальности. А именно, для любого $x \in M$ существует открытое множество $U_x \subset M$, $x \in U_x$ такое, что $\pi_E^{-1}(U_x) \approx U_x \times F$.

Дифференцируемая структура в E вводится требованием, чтобы $\pi_E^{-1}(U_x)$ было открытым подмногообразием в E. При этом проекция π_E — дифференцируемое отображение E в M. Сечение в расслоенном пространстве $E(M, G, F, P)$ — это вновь отображение σ: $M \to E$ такое, что $\pi_E \cdot \sigma$ — тождественное отображение M на себя.

На рис. 13 и 14 показаны расслоения, ассоциированные с B и B', со стандартным слоем R. В тривиальном случае рис. 13 полем является функция, отображение M на F. Это секущая поверхность в пространстве E. Обобщение на нетривиальный случай состоит в том, что поле над M описывается как секущая поверхность некоторого расслоения $E(M, G, F, P)$, а не как функция на M со значениями в многообразии F. Таким образом возникают «скрученные поля» (см. лекции Ависа и Ишама [14]), мы, однако, не будем углубляться здесь в изучение этих объектов.

Заметим, что такие сечения *локально* являются отображениями M на F. Глобально же они такими отображениями не становятся. Нетривиальность возникает из-за приклеивания копий многообразия F к каждой точке M при сооружении расслоенного пространства E.

Завершая описание ассоциированных расслоений, приведем одну техническую лемму, которая будет использована ниже (в гл. 4 и 5).

Лемма. Пусть P — главное расслоение с базовым пространством M и структурной группой G, и F — многообразие, на котором действует группа G. Существует взаимно однозначное соответствие между секущими поверхностями в пространстве $E(M, G, F, P)$ и функциями φ, отображающими P на F, которые обладают свойством $\varphi(ua) = a^{-1} \cdot \varphi(u)$, $\forall u \in P$, $\forall a \in G$.

Доказательство. Предположим, что φ — такая функция. Для любого $x \in M$ в P можно выбрать точку u, так что $\pi(u) = x$. Пара $(u, \varphi(u))$ определяет точку в E, а именно, класс точек в $P \times F$ вида $(ua, a^{-1}\varphi(u))$. Очевидно, что этот класс не зависит от выбора u в слое $\pi^{-1}(x)$. Иными словами, мы построили сечение E. Обратно, если дано сечение E, то можно определить отображение φ: $P \to F$ такое, что $\varphi(ua) = a^{-1}\varphi(u)$, $\forall u \in P$, $\forall a \in G$.

2. ФОРМА СВЯЗНОСТИ: ГЕОМЕТРИЗАЦИЯ КАЛИБРОВОЧНОГО ПОТЕНЦИАЛА

а) Ускоренный курс дифференциальной геометрии

1) Векторы. Мы будем предполагать известным понятие n-мерного дифференцируемого многообразия M. Это топологическое пространство с локальными координатами. Под существованием локальных координат мы подразумеваем возможность покрытия пространства открытыми множествами (координатными окрестностями), каждое из которых гомеоморфно открытому подмножеству вещественного пространства R^n.

Рассмотрим точку p в многообразии M и все гладкие кривые, проходящие через p. Каждой такой кривой можно сопоставить операцию производной в точке p по заданному направлению от любой гладкой вещественной функции f, заданной на M. Этим определяется вектор X_p, касательный к кривой в точке p: $X_p f$ — производная функции f в точке p по заданному направлению. Касательные векторы в данной точке образуют n-мерное вещественное векторное пространство, обозначаемое $T_p(M)$.

Пусть $u^1, \ldots, u^n$ — локальная система координат в окрестности U точки p. Тогда система $\partial/\partial u^1, \ldots, \partial/\partial u^n$ образует базис в пространстве $T_p(M)$.

Векторное поле X на гладком многообразии M — это задание векторов $X_p \in T_p(M)$ во всех точках p многообразия M. Это значит, что локально, в заданной координатной окрестности, поле X имеет вид

$$X = \sum_{j=1}^{n} \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j},$$

где ξ^j — функции, заданные в этой окрестности. Поле X действует на гладкие функции на M. Результат этого действия мы будем обозначать $X \cdot f$.

Векторные поля образуют бесконечномерный модуль *) над кольцом гладких вещественных функций на M. Помимо обычных операций, определенных на модулях, в этом множестве задана еще одна важная операция, *лиево* произведение. А именно, для любых двух векторных полей X, Y на M определяется новое векторное поле, их «скобка Ли» $[X, Y]$, следующим образом:

$$[X, Y] \cdot f = X \cdot (Y \cdot f) - Y \cdot (X \cdot f).$$

2) Формы. Рассмотрим теперь n-мерное пространство $T_p^*(M)$, дуальное к $T_p(M)$, пространство ковекторов в точке p. Пусть $du^1, \ldots$ $\ldots, du^n$ — базис в $T_p^*(M)$, дуальный к $\partial/\partial u^1, \ldots, \partial/\partial u^n$:

$$du^i(\partial/\partial u^j) = \delta^i_j.$$

1-формой на M называется приписывание некоторого ковектора к каждой точке $p \in M$. Локально 1-форму можно записать в виде

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} f_j \, \mathrm{d}u^j.$$

На основе $T_p^*(M)$ строится внешняя алгебра $\bigwedge T_p^*(M)$ (которая антисимметрична).

r-форма ω — это задание элемента алгебры $\bigwedge T_p^*(M)$ степени r в каждой точке M. Локально

$$\omega = \sum_{i_1 < \ldots < i_r} f_{i_1 \ldots i_r} \, \mathrm{d}u^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}u^{i_r}.$$

Разумеется, функция $f_{i_1} \ldots f_{i_r}$ антисимметрична относительно перестановки любой пары индексов.

3) d-операция. Любой дифференцируемой вещественной функции f на M можно поставить в соответствие ее полную производную $\mathrm{d}f$, которая является 1-формой, и для любого векторного поля X $\mathrm{df}(X) = X \cdot f$.

Важной операцией на формах является внешнее дифференцирование. Прекрасное введение в теорию форм и объяснение геометрической природы

*) Модуль — это векторное пространство с некоторой дополнительной структурой. Пусть $\mathcal{X}(M)$ — множество всех дифференцируемых векторных полей на M. Это вещественное векторное пространство. Кроме того, если f — функция и X — векторное поле на M, то $fX \in \mathcal{X}(M)$ по определению, это поле имеет вид $(fX)_p = f(p) X_p$.

внешнего дифференцирования см. в книге Мизнера, Торна и Уилера [15]. См. также книгу Фландерса [16].

Эта операция обозначается линейным оператором d, который называется *внешней производной* и действует на формы (0-формы — это просто функции). При этом а) r-форма переходит в $(r+1)$-форму, б) функции переходят в их полные производные, в) если α — некоторая r-форма, то $d(\alpha\wedge\beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^r \alpha \wedge d\beta$, г) $d(d\omega) = d^2\omega = 0$ для всех ω. Указанные свойства полностью определяют d-операцию независимо от выбора координат. Локально, если ω — r-форма, то

$$d\omega = \sum_{i_1<\ldots<i_r} \frac{\partial f_{i_1\ldots i_r}}{\partial u^{i_0}} du^{i_0} \wedge du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_r}.$$

Иными словами, компоненты $d\omega$ имеют вид

$$(d\omega)_{i_1\ldots i_{r+1}} = \sum_{s=1}^{r+1} (-1)^{s+1} \frac{\partial f_{i_1\ldots i_{s-1} i_{s+1}\ldots i_{r+1}}}{\partial u^{i_s}}.$$

4) Операция $*$ (дуальность форм). Если M — риманово многообразие, снабженное метрикой, то на формах можно задать другую важную операцию: переход к сопряженной форме. Пусть g_{ij} — метрический тензор на M. Определим, следуя де Раму [17],

$$e_{1\ldots n} = \sqrt{\begin{vmatrix} g_{11} & \ldots & g_{1n} \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ g_{n1} & \ldots & g_{nn} \end{vmatrix}}, \quad e_{i_1\ldots i_n} = \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_n} e_{1\ldots n},$$

где символ Кронекера $\delta^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p}$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ задан следующим образом:

а) символ $\delta^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p}$ антисимметричен по индексам i_k и по индексам j_k; б) при $i_1 < \ldots < i_p$, $j_1 < \ldots < j_p$,

$$\delta^{j_1\ldots j_p}_{i_1\ldots i_p} = \begin{cases} 1, & \text{если } i_k = j_k, \quad k = 1,2,\ldots,p; \\ 0, & \text{если } i_k \neq j_k. \end{cases}$$

Элемент объема на многообразии M задается в локальных координатах формой

$$dM = e_{1\ldots n}\, dx^1 \wedge dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Рассмотрим теперь p-форму α, локально определенную так:

$$\alpha = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \alpha_{i_1\ldots i_p} du^{i_1} \wedge \ldots \wedge du^{i_p}.$$

Форма, *сопряженная* α, $*\alpha$, — это $(n-p)$-форма, определяемая локально

$$*\alpha = \sum_{j_1<\ldots<j_{n-p}} (*\alpha)_{j_1\ldots j_{n-p}} du^{j_1} \wedge \ldots \wedge du^{j_{n-p}} \tag{2.1}$$

при

$$(*\alpha)_{j_1\ldots j_{n-p}} = \sum_{i_1<\ldots<i_p} \delta^{1\ldots n}_{i_1\ldots i_p j_1\ldots j_{n-p}} e_{1\ldots n} \alpha^{i_1\ldots i_p} \tag{2.2}$$

и

$$\alpha^{i_1\ldots i_p} = g^{i_1k_1} \ldots g^{i_pk_p} \alpha_{k_1\ldots k_p}. \tag{2.3}$$

Теперь можно определить *внутреннее произведение* двух p-форм α и β в случае, когда многообразие M компактно. Непосредственная проверка показывает, что $\alpha \wedge * \beta = \beta \wedge * \alpha$. Определим

$$(\alpha, \beta) = \int_M \alpha \wedge * \beta.$$

Об определении интегралов на многообразии см. в книге Шоке-Брюа и др. [18], а также приведенные там ссылки. Произведение (α, β) обладает свойствами скалярного произведения. Легко видеть, что

а) $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$,

б) $(\alpha, \alpha) \geqslant 0$, $(\alpha, \alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$,

в) $(*\alpha, *\beta) = (\alpha, \beta)$.

5) Линейный дифференциал. Пусть M и N — дифференцируемые многообразия размерности m и n соответственно, и пусть φ — отображение M на N. Определим *линейный дифференциал* φ_* от φ в точке $p \in M$ как линейное отображение φ_*: $T_p(M) \to T_{\varphi(p)}(N)$ вида

$$(\varphi_* X) \cdot f = X (f \cdot \varphi)$$

для любого вектора $X \in T_p(M)$ и любой вещественной функции f на многообразии M.

Транспозиция. φ_* в точке p — это линейное отображение пространства $T^*_{\varphi(p)}(N)$ на $T^*_p(M)$, определенное следующим образом: по заданной r-форме ω' на N мы определяем r-форму $\varphi^*\omega'$ на M формулой

$$(\varphi^*\omega')(X_1, \ldots, X_r) = \omega'(\varphi_* X_1, \ldots, \varphi_* X_n), \quad \forall X_1, \ldots, X_r \in T^*_p(M).$$

Иногда говорят, что форма $\psi^*\omega'$ индуцирована формой ω'. Заметим, что транспозиция обладает следующими свойствами:

$$\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*(\omega_1) \wedge \varphi^*(\omega_2),$$
$$\mathrm{d}(\varphi^*\omega) = \varphi^*(\mathrm{d}\omega).$$

б) Калибровочная группа G и ее алгебра Ли $\mathcal{A}(G)$

Приведенные выше понятия дифференциальной геометрии будут использованы в случае калибровочной группы G, которую мы будем считать группой Ли: G — конечномерное дифференцируемое многообразие, и действие групповой операции — дифференцируемо. Обозначим через L_a левый сдвиг элементом a, иными словами, отображение G на G вида

$$L_a g = ag.$$

Пусть e — единица в группе G. При заданном векторе $A \in T_e(G)$ можно построить вектор в пространстве $T_a(G)$, применяя к A линейный дифференциал $(L_a)_*$. Таким образом, получается векторное поле на G, если a пробегает все точки G. По построению такое поле — лево-инвариантно. Алгебра Ли группы G, обозначаемая $\mathcal{A}(G)$, по определению,— это множество лево-инвариантных векторных полей на G. Если G — n-мерная группа, то $\mathcal{A}(G)$ — n-мерное векторное пространство, изоморфное $T_e(G)$.

Естественно, алгебра Ли замкнута относительно операции коммутирования (произведения Ли). Иными словами, если X и Y — лево-инвариантные векторные поля на G, то $[X, Y]$ — также лево-инвариантное векторное поле на G. Следовательно, если задан базис $(A_1, \ldots, A_n)$

в алгебре Ли $\mathcal{A}(G)$, то существуют структурные постоянные C_{ij}^k такие, что

$$[A_i, A_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k A_k.$$

Существует *присоединенное отображение* группы G на себя (внутренний автоморфизм). Любому элементу группы a соответствует $\mathrm{Int}_a(g) = aga^{-1}$. Это отображение через его линейный дифференциал Ad_a индуцирует также автоморфизм алгебры Ли, т. е. изоморфизм $\mathcal{A}(G)$ на себя. Кроме того, отображение Ad группы G на группу Aut $\mathcal{A}(G)$ (группу автоморфизмов алгебры $\mathcal{A}(G)$) является групповым гомоморфизмом и определяет так называемое (линейное) присоединенное представление группы G. Очевидно, ядро этого гомоморфизма — *центр* Z группы, т. е. множество элементов, коммутирующих со всеми элементами группы G ($Z = \{a \in G \mid ab = ba, \ \forall b \in G\}$).

Форма ω на группе G называется лево-инвариантной, если $L_a^*\omega = \omega$ для любого $a \in G$. Векторное пространство $\mathcal{A}^*(G)$, образованное всеми лево-инвариантными 1-формами на G (формами *Маурера — Картана*) — пространство, дуальное $\mathcal{A}(G)$. Если $A \in \mathcal{A}(G)$ и $\omega \in \mathcal{A}^*(G)$, то $\omega(A)$ — постоянная на G.

в) Теория связностей в главном расслоении

Обратимся теперь к главному расслоению $P(M, G, \pi)$.

Любому элементу A алгебры Ли $\mathcal{A}(G)$ поставим в соответствие векторное поле $\Sigma(A)$ на P, *фундаментальное векторное поле*, соответствующее A. На самом деле, поле $\Sigma(A)$ порождается действием группы G в пространстве P: если $A \in \mathcal{A}(G)$, то $\exp(tA)$ — одно-параметрическая подгруппа G. Эта подгруппа действует на P. Через любую точку $u \in P$ можно провести кривую $u_t = R_{\exp(tA)}(u)$, используя правое действие группы G в расслоении P. Тогда для любой вещественной функции f на P по определению

$$\Sigma(A)_u \cdot f = \frac{d}{dt} f(u_t)|_{t=0}.$$

Очевидно, что $\Sigma(A)_u$ — вектор, касательный к многообразию P в точке u. На самом деле, это касательный вектор к слою, проходящему через u, в точке u. (Этот слой рассматривается здесь как подмногообразие P.)

Обозначим через G_u подпространство векторов, касательных к слою, проходящему через u, в точке u. Σ — *изоморфное отображение алгебры* $\mathcal{A}(G)$ *на подпространство* G_u. *Связность* в P — это некоторый выбор линейного подпространства Q_u, дополнительного к G_u в $T_u(P)$:

$$T_u(P) = Q_u \oplus G_u.$$

При этом Q_u обладает следующими свойствами: а) $Q_{ua} = (R_a) * Q_u$, б) Q_u дифференцируемым образом зависит от u.

Пространство Q_u называется *горизонтальным подпространством* в точке u (пространством *горизонтальных векторов*) и имеет то же число измерений, что M. Пространство G_u называется *вертикальным подпространством* в точке u (пространство, касательное к слою).

Отметим, что поле горизонтальных подпространств, вообще говоря, не является интегрируемым (см. книгу Шевалле [19]).

Хотя выбор линейного подпространства Q_u в каждой точке P — довольно простое и естественное действие (дело сводится к выбору базиса в пространстве $T_u(P)$), указанная неинтегрируемость является проявлением богатой геометрической структуры главного расслоения. Физический смысл этой неинтегрируемости лучше всего выясняется в присутствии полей материи. Указанное обстоятельство связано с *группой голономии* (см. ниже раздел ж) гл. 2) и отражает нетривиальность параллельного переноса по замкнутому контуру (см. работу Лооса [20]).

Ф о р м а с в я з н о с т и. Указанное расщепление касательного к P пространства на горизонтальное и вертикальное подпространства можно реализовать с помощью так называемой формы связности. Это 1-форма ω со значениями в алгебре Ли, обладающая следующими свойствами:

а) применение формы ω к любому фундаментальному полю $\Sigma(A)$ восстанавливает A, т. е. $\omega(\Sigma(A)) = A$;

б) $(R_a^* \omega)(X) = \mathrm{Ad}_{a^{-1}}\omega(A)$. Горизонтальное подпространство Q_u является ядром ω, т. е. поле X_u — горизонтально тогда и только тогда, когда $\omega(X_u) = 0$.

Выразим теперь ω, форму связности на P, через семейство локальных форм, каждая из которых определена на открытом подмножестве базового многообразия M. Мы увидим, что эти локальные формы удовлетворяют некоторым условиям совместности, которые формулируются с помощью определенных в разделе 1 функций перехода, и наоборот, что любое множество локальных форм, удовлетворяющих этим условиям, определяет единственную форму связности в пространстве P.

Пусть $\{U_\alpha\}$ — некоторое покрытие многообразия M, аналогично пункту 3) определения главного расслоения в разделе а) гл. 1. Выделим в P набор локальных сечений σ_α и соответствующих функций перехода (раздел в) гл. 1). Определим для любого α 1-форму на U_α со значениями в алгебре Ли следующим образом: $\omega_\alpha = \sigma_\alpha\omega$.

Т е о р е м а. Локальные формы ω_α удовлетворяют условию совместности

$$\omega_\beta = \mathrm{Ad}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}} \cdot \omega_\alpha + \psi_{\alpha\beta}^{-1}\, d\psi_{\alpha\beta}$$

в области перекрытия $U_\alpha \cap U_\beta$ (где символ d означает внешнюю производную на M).

О б р а т н а я т е о р е м а (или еще одна т е о р е м а р е к о н с т р у к ц и и). Пусть дан набор локальных форм ω_α на M, удовлетворяющих указанным условиям совместности. Тогда существует единственная форма связности ω на P, порождающая это семейство локальных форм на M (т. е. $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*\omega$, $\forall\alpha$).

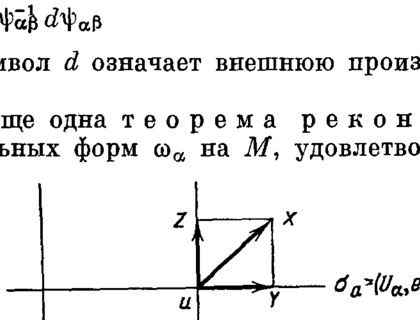

Рис. 15.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что форма ω задана. Тогда можно построить локальные формы ω_α на M. Учитывая, что на каждом открытом множестве $\pi^{-1}(U_\alpha)$ имеется отображение φ_α: $\pi^{-1}(U_\alpha) \to G$, на $\pi^{-1}(U_\alpha)$ можно определить 1-форму

$$\varphi = \mathrm{Ad}_{\varphi_\alpha^{-1}}(\pi^*(\omega_\alpha)) + \varphi_\alpha^{-1}\, \mathrm{d}_P\varphi_\alpha$$

(где d_P означает внешнюю производную в расслоенном пространстве).

Предположим теперь, что X — вектор, касательный к расслоенному пространству в некоторой точке u, и $u = \sigma_\alpha(\pi(x))$, т. е. $\varphi_\alpha(u) = e$, см. рис. 15. Вектор X можно единственным образом разложить в сумму $X = Y + Z$, где Y — вектор, касательный к сечению σ_α в точке u, вектор Z — вертикальный. При этом $Y = \sigma_*(\pi_*(Y))$ и $\pi_*(Z) = 0$. Кроме того, существует единственный элемент A алгебры Ли, такой, что вектор Z

совпадает с фундаментальным векторным полем, присоединенным к A в точке u. Следовательно,

$$\varphi(X) = \omega_\alpha(\pi_*(Y)) + \varphi_\alpha^{-1} d_P \varphi_\alpha(Z).$$

В силу свойств преобразования отображения φ_α (а именно, $\varphi_\alpha(ua) = \varphi_\alpha(u)\cdot a$), имеем

$$\varphi_\alpha^{-1} d_P \varphi_\alpha(Z) = A = \omega(Z),$$

так что

$$\varphi(X) = \omega(Y) + \omega(Z) = \omega(X),$$

и формы φ и ω совпадают в каждой точке сечения σ_α. К тому же формы φ и ω одинаково преобразуются под действием R_a. Таким образом, они совпадают в $\pi^{-1}(U_\alpha)$.

По построению форма ω_α действует на векторы, касательные к базовому пространству в области U_α. Если $V \in T_x(M)$ и $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то обе формы ω_α и ω_β действуют на V. Приведенная выше формула связывает $\omega_\alpha(V)$ и $\omega_\beta(V)$ для любого такого вектора V. Заметим, что $\psi_{\alpha\beta}^{-1} d\psi_{\alpha\beta}$ — это 1-форма на множестве $U_\alpha \cap U_\beta$, принимающая значения в пространстве, касательном к группе в ее единице e, которое является алгеброй Ли $\mathscr{A}(G)$.

В пространстве $\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ мы имеем два описания формы ω:

$$\omega = \mathrm{Ad}_{\varphi_\alpha^{-1}}(\pi^*(\omega_\alpha)) + \varphi_\alpha^{-1} d_P \varphi = \mathrm{Ad}_{\varphi_\beta^{-1}}(\pi^*(\omega_\beta)) + \varphi_\beta^{-1} d_P \varphi_\beta.$$

Отсюда следует

$$\pi^*(\omega_\beta) = \mathrm{Ad}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}}(\pi^*(\omega_\alpha)) + \varphi_\beta(\varphi_\alpha^{-1} d_P \varphi_\alpha - \varphi_\beta^{-1} d_P \varphi_\beta)\varphi_\beta^{-1},$$

т. е.

$$\pi^*(\omega_\beta) = \mathrm{Ad}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}}(\pi^*(\omega_\alpha)) + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d_P \psi_{\alpha\beta}.$$

Из инвариантности отображения $\psi_{\alpha\beta}$ относительно правых сдвигов ($\psi_{\alpha\beta}$ — функция, заданная на базовом пространстве) следует, что на множестве $U_\alpha \cap U_\beta$

$$\omega_\beta = \mathrm{Ad}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}}(\omega_\alpha) + \psi_{\alpha\beta}^{-1} d_M \psi_{\alpha\beta}.$$

Таким образом, мы показали, что это условие совместности — необходимо и достаточно для существования хорошо определенной формы связности на P такой, что $\omega_\alpha = \sigma_\alpha^*(\omega)$ на любом U_α.

Заметим, что полученное соотношение между формами ω_α и ω_β очень похоже на формулу обыкновенного калибровочного преобразования, однако возникает оно как условие *совместности*.

Если, однако, ω — форма связности на $P = R^4 \times G$, то по глобальному сечению σ_1 пространства P можно построить форму на R^4: $\omega_1 = \sigma_1^*(\omega)$. Если использовать теперь функции g на пространстве R^4 со значениями в группе G, чтобы преобразовать сечение σ_1 в σ_2, $\sigma_2(x) = \sigma_1(x) \times g(x)$, то можно определить *новую* 1-форму на R^4: $\omega_2 = \sigma_2^*(\omega)$. Легко видеть, что на R^4

$$\omega_2 = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}\omega_1 + g^{-1} dg.$$

Это соотношение возникает уже как формула преобразования, а не как условие совместности. (Определение калибровочного преобразования см. ниже, в разделе б) гл. 3.)

г) Геометрический смысл калибровочных потенциалов

Предположим, что M — четырехмерное многообразие (например, R^4, S^4 или P^4) с локальными координатами x_μ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) в множестве U_α. Если ω_α — некоторая 1-форма в U_α, то ее можно записать через ее компоненты (функции со значениями в алгебре Ли):

$$\omega_\alpha = \sum_\mu A_\alpha^\mu (x)\, \mathrm{d}x_\mu. \tag{2.4}$$

Преобразуем теперь σ_α в σ'_α с помощью некоторого g:

$$\sigma'_\alpha (x) = \sigma_\alpha (x) \cdot g (x).$$

Тогда

$$\omega'_\alpha = \sigma'^*_\alpha \omega = A'^\mu_\alpha \, \mathrm{d}x_\mu,$$

и мы имеем

$$A'_\mu = g^{-1} A_\mu g + g^{-1} \partial_\mu g.$$

Таким образом, в точности воспроизводится формула преобразования для калибровочных потенциалов (пока мы еще не определили, что называется калибровочным преобразованием).

Предположим, что $M = R^4$ и $P = R^4 \times G$. Выбор глобального сечения σ в P задает систему координат в P и устанавливает взаимно однозначное соответствие между спроектированными формами $A^\mu \, dx_\mu$ и формами связности ω: если задано сечение σ, то $\sigma^* \omega$ определено, и можно найти A^μ; если заданы потенциалы A^μ, то существует единственная форма связности ω на P такая, что $A^\mu \, dx_\mu = \sigma^* \omega$ (см. теорему реконструкции).

Изменение σ под действием некоторой функции g, заданной на R^4, со значениями в группе G, можно рассматривать как замену переменных в P, и оно индуцирует преобразование компонент A^μ, аналогичное обычным калибровочным преобразованиям потенциалов.

Если связать теперь калибровочные преобразования и изменение секущей поверхности в главном расслоении P, то калибровочный потенциал естественным образом становится компонентой геометрического объекта определенного типа: компонентной формы связности на P (в действительности слово «компонента» не вполне уместно здесь, и все же мы будем его использовать). Следует добавить, что форма связности имеет глобальный смысл и потому представляет собой особый интерес в проблемах, связанных с топологией.

Геометризация калибровочных потенциалов будет завершена в разделе 3, где будет дано определение калибровочных преобразований.

д) Ковариантная производная в главном расслоении

Введем прежде всего понятие горизонтального поднятия, или попросту поднятия для векторов, касательных к базовому пространству, и покажем, что ковариантная производная $\mathscr{D}_\mu$ — это поднятие производной ∂_μ.

Определение. Поднятием $\widetilde{X}$ векторного поля X на многообразии M называется единственное горизонтальное поле на P, которое проектируется на X, т. е.

$$\pi_* (\widetilde{X}_u) = X_{\pi(u)}, \quad \forall u \in P.$$

Это определение предполагает, разумеется, наличие в P некоторой формы связности ω.

Пусть x^μ — локальные координаты в окрестности U_α, как вводилось в пункте B определения главного расслоения в разделе а) гл. 1. Векторное поле $\partial_\mu = \partial/\partial x_\mu$ в окрестности U_α обладает поднятием $\widetilde{\partial}_\mu$ в пространстве $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Предположим, что σ_α — секущая поверхность над U_α. Тогда из формулы (2.4) следует

$$\omega_\alpha(\partial_\mu) = \omega(\sigma_{\alpha *}\partial_\mu) = A_{\mu\alpha} = \omega(\Sigma(A_{\mu\alpha})),$$

где $\Sigma(A)$ — фундаментальное векторное поле, присоединенное к A. Следовательно,

$$\omega(\sigma_{\alpha *}\partial_\mu - \Sigma(A_{\mu\alpha})) = 0,$$

и $\sigma_{\alpha *}\partial_\mu - \Sigma(A_{\mu\alpha})$ — горизонтальное поле, проекцией π_* отображаемое на ∂_μ, так как $\pi_*\Sigma = 0$. Поэтому

$$\widetilde{\partial}_\mu|_u = \sigma_{\alpha *}\partial_\mu - \Sigma(A_{\mu\alpha}),$$

где $u = \sigma_\alpha(x)$. Мы можем отождествить $\sigma_{\alpha *}\partial_\mu$ с ∂_μ, а фундаментальное векторное поле $\Sigma(A_\mu)$ с элементом алгебры Ли A_μ, и восстановить таким образом обыкновенную ковариантную производную $\mathscr{D}_\mu = \partial_\mu - A_\mu$, как будет показано ниже.

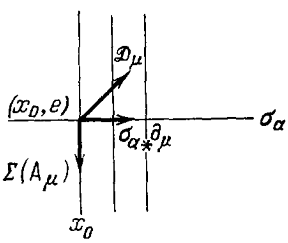

Рис. 16.

Задание локального сечения σ_α эквивалентно тривиализации расслоения P над U_α. Пространство $\pi^{-1}(U_\alpha)$ можно рассматривать как прямое произведение $U_\alpha \times G$. Точки на σ_α имеют координаты (x_0, e), как показано на рис. 16, и сечение σ_α воспроизводит множество U_α в расслоенном пространстве. Следовательно, мы можем отождествить ∂_μ и $\sigma_{\alpha *}\partial_\mu$.

Чтобы описать действие $\Sigma(A_\mu)$ (это вектор в расслоении) в точке $u_0 = \sigma_\alpha(x_0) = (x_0, e)$, надо провести в расслоенном пространстве кривую

$$u_t = u_0 \exp(tA_\mu) = (x_0, \exp(tA_\mu))$$

и использовать ее для вычисления производной по направлению. Действительно, u_t лежит в слое $\pi^{-1}(x_0)$. Рассмотрим какую-либо функцию f, заданную в пространстве $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Сужение этой функции на слой $\pi^{-1}(x_0)$, если использовать указанные координаты, становится некоторой функцией F, определенной на группе G. Производная по направлению u_t, очевидно, определяется действием на F элемента алгебры Ли A_μ в точке e (см. определение алгебры Ли).

Таким образом, $\mathscr{D}_\mu = \partial_\mu - A_\mu$ — это сокращенная запись лифта ∂_μ в точке $\sigma_\alpha(x)$. Заметим, что результат зависит от секущей поверхности: в некоторой другой точке $\sigma_\alpha(x)\cdot g(x)$ того же слоя $\widetilde{\partial}_\mu$ можно записать в виде $\mathscr{D}'_\mu = \partial_\mu - A'_\mu$, где

$$A'_\mu = g^{-1}A_\mu g + g^{-1}\partial_\mu g. \tag{2.5}$$

Коммутатор двух фундаментальных векторных полей — это вновь фундаментальное векторное поле, и отображение Σ обладает не только структурой векторного пространства (линейной структурой), но также и структурой алгебры Ли. Неверно, однако, было бы утверждать, что коммутатор двух горизонтальных векторных полей (даже если это лифты векторных полей на базовом многообразии) будет горизонтальным полем.

В действительности, если X и Y — коммутирующие векторные поля на базовом многообразии, то $[\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$ — вертикальное поле.

Например, поле $[\hat{\partial}_\mu, \widetilde{\partial}_\nu]$ вертикально. Чтобы вычислить этот коммутатор, можно использовать локальное выражение $\mathscr{D}_\mu = \partial_\mu - A_\mu$, учитывая, что A_μ меняется вдоль слоя согласно формуле (2.5). При этом

$$[\mathscr{D}_\mu, \mathscr{D}_\nu] = -(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]).$$

Здесь в правой части стоит фундаментальное вертикальное поле на расслоенном пространстве, записанное как элемент алгебры Ли. Приведенный вывод использует, в основном, связь между фундаментальными векторными полями и элементами алгебры Ли, заданную изоморфизмом Σ.

Для пояснения этого пункта рассмотрим один полезный пример действия поля $\mathscr{D}_\mu$. Предположим, что ψ — функция со значениями в группе $G = \mathrm{SU}(N)$, заданная на P и удовлетворяющая условию $\psi(ua) = a^{-1}\psi(u)\,a$. Предположим также, что группа G и ее алгебра Ли заданы в матричном представлении (одной и той же размерности):

$$\mathscr{D}_\mu\psi|_{u_0} = \partial_\mu\psi - \lim_{t\to 0}\,[e^{-tA_\mu}\psi(u_0)\,e^{+tA_\mu} - \psi(u_0)]\,t^{-1} = \partial_\mu\psi + [A_\mu, \psi].$$

Очевидно, что действие фундаментального векторного поля $-\Sigma(A_\mu)$ можно отождествить с действием оператора $+[A_\mu, \cdot]$, где A_μ рассматривается как элемент алгебры Ли.

Реальное действие поля $-\Sigma(A_\mu)$ существенно зависит от природы функций, к которым оно прилагается. В большинстве случаев эти функции обладают определенными трансформационными свойствами, и, следовательно, могут рассматриваться как сечения в некотором ассоциированном расслоении, где поле $\mathscr{D}_\mu$ будет действовать как *ковариантная производная в ассоциированном расслоении* (см. определение ниже в разделе з) гл. 2).

Элемент алгебры Ли

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

— это обыкновенное калибровочное поле. Оно определяется на любой координатной области U_α, если заданы локальные сечения над U_α. Строго говоря, поле $F_{\gamma\nu}$ надо было бы снабдить индексом, указывающим эту область, и записывать в виде $F_{\alpha\mu\nu}$. При этом поля $F_{\alpha\mu\nu}$ и $F_{\beta\mu\nu}$ связаны соотношением

$$F_{\beta\mu\nu} = \mathrm{Ad}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}} \cdot F_{\alpha\mu\nu}. \tag{2.6}$$

е) Форма кривизны

1) Построение формы кривизны (работы Попова [21] и Чженя [22]). По калибровочным полям $F_{\mu\nu}$ можно построить 2-форму в *расслоенном пространстве* со значениями в $\mathscr{A}(G)$, которая будет формой кривизны и обозначается Ω.

Прежде всего определим 2-формы Ω_α со значениями в алгебре Ли в координатных областях *базового пространства*. По определению

$$\Omega_\alpha = \frac{1}{2} F_{\alpha\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

Заметим, что из (2.6) следует

$$\Omega_\beta = \mathrm{Ad}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}} \Omega_\alpha. \tag{2.7}$$

Напомним, что в $\pi^{-1}(U_\alpha)$ мы имеем отображение φ_α на группу G, которое устанавливает систему координат в каждом слое.

На секущей поверхности σ_α функция φ_α принимает постоянное значение e (см. раздел в) гл. 1). Для любой точки $u \in \pi^{-1}(U_\mu)$ справедливо тождество

$$u = \sigma_\alpha(\pi(u)) \cdot \varphi_\alpha(u).$$

Функцию φ_α мы используем для построения формы Ω в $\pi^{-1}(U_\alpha)$. Пусть $\Omega = \mathrm{Ad}_{\varphi_\alpha^{-1}}(\pi^*\Omega_\alpha)$. В силу (2.7), возможные различные определения согласованы во всех пересечениях областей. Точнее, если Y и Z — векторы, касательные к расслоенному пространству в области $\pi^{-1}(U_\alpha \cap \cap U_\beta)$, то

$$\mathrm{Ad}_{\varphi_\alpha^{-1}}(\pi^*\Omega_\alpha)(Y, Z) = \mathrm{Ad}_{\varphi_\beta^{-1}}(\pi^*\Omega_\beta)(Y, Z).$$

Следовательно, Ω — хорошо определенная 2-форма в расслоенном пространстве.

2) Соотношения между формой кривизны и формой связности. Внешнее ковариантное дифференцирование. Форма кривизны Ω может быть также выражена (глобально) через форму связности ω следующим образом:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega].$$

Если X и Y — векторы, касательные к расслоению, то

$$\Omega(X, Y) = d\omega(X, Y) + \frac{1}{2}[\omega(X), \omega(Y)],$$

где скобка [,] означает лиево произведение в алгебре $\mathcal{A}(G)$. Разлагая X и Y в этой формуле на горизонтальную и вертикальную части (hX, hY, vX, vY) и используя билинейность формы Ω, получаем

$$\Omega(X, Y) = d\omega(vX, vY) + \frac{1}{2}[\omega(vX), \omega(vY)] + \\ + d\omega(vX, hY) + d\omega(hX, vY) + d\omega(hX, hY).$$

Здесь отличен от нуля лишь последний член в правой части, так что

$$\Omega(X, Y) = d\omega(hX, hY). \tag{2.8}$$

Определение. Пусть φ — некоторая r-форма в главном расслоении P, снабженном связностью, и $(r+1)$-форма $\mathcal{D}\varphi$ в пространстве P имеет вид

$$\mathcal{D}\varphi(X_1, \ldots, X_{r+1}) = d\varphi(hX_1, \ldots, hX_{r+1}).$$

Операция $\mathcal{D}$ называется *внешним ковариантным дифференцированием.*

Из (2.8) легко видеть, что $\Omega = \mathcal{D}\omega$. Необходимо отметить, что $\mathcal{D}^2 \neq \neq 0$, в то время как $d^2 = 0$. Однако $\mathcal{D}\Omega = 0$, это соотношение справедливо для любой связности и называется тождеством Бьянки (см. например, книгу Кобаяси и Номидзу [11]).

3) Форма кривизны как форма на пространстве-времени со значениями в сечении. Рассмотрим ассоциированное с главным расслоением P пространство E со стандартным слоем $\mathcal{A}(G)$, на котором действует присоединенное представление группы G. Пусть $\Gamma(E)$ — множество сечений расслоения E. Каждой связности на P можно поставить в соответствие некоторую 2-форму на M со значениями в $\Gamma(E)$ следующим образом.

Пусть X и Y — векторные поля на M. Их поднятия $\tilde{X}$ и $\tilde{Y}$ являются право-инвариантными векторными полями на P. Тогда $\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})$ — отображение P в алгебру $\mathcal{A}(G)$, обладающее тем свойством, что

$$\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})|_{ua} = \mathrm{Ad}_{a^{-1}}\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y})|_u.$$

Из доказанной в разделе 1) леммы следует, что такой функции можно поставить в соответствие некоторое сечение S расслоения E.

Определим теперь 2-форму R на многообразии M со значениями в $\Gamma(E)$:

$$R(X, Y) = S.$$

Заметим, что, строго говоря, форма R принимает значения в E, но при применении к векторному *полю* его значения лежат в $\Gamma(E)$. Связь между Ω и R — очень проста, так как локально форму Ω можно описать ее проекцией

$$\Omega_\alpha = \sigma_\alpha^*\Omega = F_{\alpha\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu.$$

С другой стороны, $\pi_E^{-1}(U_\alpha) \approx U_\alpha \times \mathcal{A}(G)$. Форму R также можно было бы локально записать в виде $E_{\alpha\,\mu\nu}\, dx^\mu \wedge dx^\nu$. Операцию $*$ и внутреннее произведение можно применять также и для форм на M со значениями в $\Gamma(E)$. Компоненты таких форм — функции со значениями в алгебре Ли.

Формулы (2.1) — (2.3) применимы буквально. Мы используем матричное (присоединенное) представление алгебры $\mathcal{A}(G)$.

Чтобы определить скалярное произведение двух p-форм α и β, заменим $\int_M \alpha\wedge *\beta$ на $\int_M \mathrm{tr}(\alpha\wedge *\beta)$. При этом мы полагаем, что если α — r-форма и α' — r'-форма, то $\alpha\wedge\alpha'$ — $(r+r')$-форма вида

$$\alpha\wedge\alpha'(X_1, \ldots, X_{r+r'}) =$$
$$= [(r+r')!]^{-1}\sum \varepsilon(j, k)\,\alpha(X_{j_1}, \ldots, X_{j_r})\cdot\alpha'(X_{k_1}, \ldots, X_{k_{r'}}),$$

где сумма пробегает по всем разбиениям множества $\{1, \ldots, (r+r')\}$ на $\{j_1, \ldots, j_r\}$ и $\{k_1, \ldots, k_{r'}\}$, $\varepsilon(j, k)$ — сигнатура перестановки $1, \ldots, (r+r') \to j_1, \ldots, j_r, k_1, \ldots, k_{r'}$. Операция tr означает взятие следа матрицы. При указанном определении $(\alpha, \beta) = \int_M \mathrm{tr}(\alpha\wedge *\beta)$ является скалярным произведением. При этом существенно используется риманова структура многообразия M и внутреннее произведение в алгебре $\mathcal{A}(G)$.

Заметим, что это скалярное произведение можно продолжить до соболевского пополнения множества C^∞ форм на многообразии M, используя понятие модифицированного интеграла (см. в книге Шоке-Брюа и др.[18]).

В частности, мы будем использовать форму $*R$ и скалярное произведение

$$(R, R) = \int_M \mathrm{tr}(R\wedge *R)$$

в компонентах, $(R, R) = \int F^2$, это *функция действия* для калибровочного поля. Отметим, что компоненты формы $*R$ имеют вид

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\,\varepsilon_{\gamma\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}.$$

ж) Группа голономии связности

Связность в расслоении $P(M, G)$ можно использовать для определения понятия параллельного переноса.

Предположим, что x_t — кривая в многообразии M. Поднятие этой кривой в пространство P — это такая кривая u_t в P, что $\pi(u_t) = x_t$ и все векторы, касательные к u_t — горизонтальны. Для любой кривой x_t в M и любой точки u_0 (при $\pi(u_0) = x_0$) существует единственное поднятие кривой x_t, проходящее через u_0 (рис. 17).

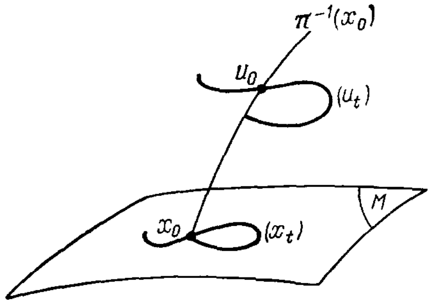

Рис. 17.

Пусть u — точка P и $x = \pi(u)$. Построим все замкнутые петли в M, с началом и концом в точке x. Все эти кривые имеют поднятия, исходящие из u_0 и заканчивающиеся в некоторой точке $v \in \pi^{-1}(x)$. При этом существует элемент $g \in G$ такой, что $v = ug$. Множество всех этих элементов g образует, очевидно, подгруппу в группе G. Эта группа называется *группой голономии* (заданной связности) в точке u: $\Phi(u)$.

Оказывается, что если $\Phi(u) = G$ в некоторой точке и если многообразие M — односвязно, то группа Φ не зависит от u. В этом случае связность называется *неприводимой*, и любые две точки в пространстве P можно соединить горизонтальной кривой.

Алгебра Ли группы голономии в точке u порождается полем $F_{\mu\nu}(u)$ и всеми его ковариантными производными $\mathscr{D}_\rho F_{\mu\nu}(u)$, $\mathscr{D}_\rho\mathscr{D}_\sigma F_{\mu\nu}(u)$, ... (см. работу Лооса [20]).

з) Ковариантная производная и внешнее ковариантное дифференцирование в ассоциированном расслоении

Пусть P — расслоение над M со структурной группой G, снабженной связностью, и $\mathscr{E}$ — расслоение, ассоциированное с P, со стандартным слоем F. $\Gamma(\mathscr{E})$ — множество всех сечений $\mathscr{E}$.

1) Ковариантная производная ∇. Любому сечению $\varphi \in \Gamma(\mathscr{E})$ можно поставить в соответствие 1-форму на M со значениями в $\Gamma(\mathscr{E})$, обозначаемую $\nabla\varphi$ и определенную следующим образом.

Пусть X — векторное поле на M. В пространстве P имеется единственное поднятие $\tilde{X}$ поля X. Из леммы 1.5 следует, что сечению φ можно поставить в соответствие функцию f на P со значениями в многообразии F, причем $f(ua) = a^{-1}f(u)$. Тогда $f' = \tilde{X}f$ — также функция на P со значениями в F, и $f'(ua) = a^{-1}f'(u)$. Применяя вновь эту лемму, строим по функции f' сечение пространства $\mathscr{E}$, обозначаемое $\nabla\varphi(X)$.

Заданное таким образом отображение $X \to \nabla\varphi(X)$ линейно по X. Таким образом, построена 1-форма $\nabla\varphi$ на M со значениями в $\Gamma(\mathscr{E})$ для заданного сечения φ. Сечение $\nabla\varphi(X)$ обозначается также $\nabla_X(\varphi)$. Операция ∇ называется ковариантной производной, любому элементу множества $\Gamma(\mathscr{E})$ она ставит в соответствие 1-форму на M со значениями в $\Gamma(\mathscr{E})$.

Пример: если $\mathscr{E} = E$ (см. выше) и $X = \partial_\mu$, то локально $\nabla_\mu = \partial_\mu + [A_\mu, \cdot]$.

2) Внешнее ковариантное дифференцирование $\mathscr{D}$. Определим операцию $\mathscr{D}$ следующим образом: $\mathscr{D}$ превращает r-форму со значением в $\Gamma(\mathscr{E})$ в $(r+1)$-форму со значением в $\Gamma(\mathscr{E})$. Эта операция переводит сечение φ пространства $\mathscr{E}$ в его ковариантную производную $\nabla\varphi$. Пусть α — некоторая r-форма, тогда

$$\mathscr{D}\alpha(X_1, \ldots, X_{r+1}) = \sum (-1)^{j+1} \nabla_{X_j}\alpha(X_1, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{r+1}) + \\ + \sum (-1)^{i+j} \alpha([X_i, X_j], X_1, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}, X_{j+1}, \ldots, X_{r+1}),$$

где ковариантная производная определена с помощью связности в пространстве $\mathscr{E}$ и римановой связности на многообразии M.

Замечание. Было показано, что если M — компактное многообразие, обладающее римановой метрикой, то множество форм на M со значениями в $\Gamma(\mathscr{E})$ обладает скалярным произведением. Оператору $\mathscr{D}$ можно поставить в соответствие сопряженный оператор $\mathscr{D}^*$ таким образом, что если α — произвольная r-форма, а β — $(r+1)$-форма, то

$$(\mathscr{D}\alpha, \beta) = (\alpha, \mathscr{D}^*\beta).$$

При этом для любой r-формы α можно записать

$$\mathscr{D}^*\alpha(X_1, \ldots, X_{r-1}) = -\sum_{i=1}^{n} \nabla_{e_i}\alpha(e_i, X_1, \ldots, X_{r-1}),$$

где $\{e_i\}$ — ортогональный базис в пространстве $T(M)$. Отметим также, что тождество Бьянки $\mathscr{D}\Omega = 0$ можно записать в виде $\mathscr{D}R = 0$.

3. ВАЖНОСТЬ ГЛОБАЛЬНОГО ПОДХОДА

а) Эквивалентность калибровочных потенциалов и форм связности

Обычно калибровочный потенциал задается не как связность в главном расслоении, а как векторная функция A_μ со значениями в алгебре Ли,

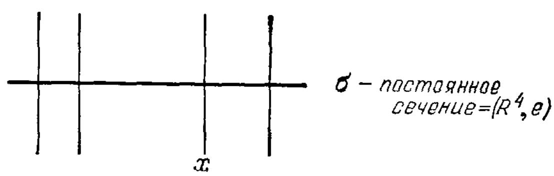

Рис. 18.

заданная на пространстве R^4. Однако всегда можно рассматривать $A_\mu(x)$ как «компоненты» формы связности на тривиальном главном расслоении $P = R^4 \times G$.

Прежде всего введем $\omega_\sigma = A_\mu dx^\mu$ как 1-форму на R^4. В пространстве P определяется единственная форма связности ω такая, что $\omega = \sigma^*(\omega)$. Однако эта форма связности на P, очевидно, зависит от выбора сечения σ. Эта зависимость связана со свободой выбора калибровки (рис. 18).

б) Калибровочные преобразования на R^4

Калибровочное преобразование связано с отображением λ: $R^4 \to G$, определяющим изоспиновые вращения в каждой точке пространства-времени. Действие отображения γ в пространстве $P = R^4 \times G$ будет использовано для определения калибровочного преобразования формы ω.

1) Определение калибровочного преобразования, зависящее от системы координат. Предположим, что задано глобальное сечение пространства P, σ. Обозначим через σ' другое сечение P, причем $\sigma'(x) = \sigma(x)\cdot\gamma(x)$. По компонентам $A_\mu(x)$ и сечению σ можно построить форму ω, как было показано выше. Однако с теми же A_μ, но используя σ', можно построить другую форму связности ω', причем $\sigma^*(\omega) = \sigma'^*(\omega')$.

Временное определение. Мы будем называть форму ω' результатом калибровочного преобразования, произведенного с помощью γ^{-1} над формой ω; обозначение $\gamma^{-1}\omega$.

В сущности, сечение σ (соответственно σ') устанавливает систему координат в пространстве P таким же образом, как введение базиса в трехмерном пространстве определяет координаты каждого вектора. В преобразованной координатной системе форма ω' имеет те же компоненты, какие имеет форма ω в исходной системе, по аналогии с вращениями трехмерного пространства, когда повернутый вектор и исходный вектор характеризуются одинаковыми компонентами, но отнесенными к разным системам осей координат.

Заметим, что компоненты формы ω, связанные с сечением σ, преобразуются по формуле

$$A'_\mu = \mathrm{Ad}_\gamma \cdot A_\mu + \gamma\partial_\mu\gamma^{-1}.$$

При таком определении калибровочное преобразование можно рассматривать как преобразование сечения σ в другое сечение расслоения P, индуцирующее преобразование связностей.

2) Необходимость определения, не зависимого от выбора сечения σ. Та же форма связности ω имеет другие «координаты» B_μ, отнесенные к сечению $\Sigma = \sigma\cdot\varphi$:

$$B_\mu = \mathrm{Ad}_{\varphi^{-1}} \cdot A_\mu + \varphi^{-1}\partial_\mu\varphi.$$

Форма ${}^\gamma\omega$, определенная выше, имеет координаты B'_μ для сечения Σ:

$$B'_\mu = \mathrm{Ad}_{\varphi^{-1}\gamma\varphi} \cdot B_\mu + (\varphi^{-1}\gamma\varphi)\,\partial_\mu(\varphi^{-1}\gamma^{-1}\varphi).$$

Поэтому необходимо приписать этому сечению Σ *новую* функцию со значениями в группе

$$\Gamma(x) = \varphi^{-1}(x)\,\gamma(x)\,\varphi(x),$$

чтобы форма связности подвергалась тому же преобразованию *).

Таким образом, оказывается, что калибровочное преобразование можно описать *зависящей от сечения* функцией на R^4 со значениями в группе.

Дадим теперь *глобальное* определение калибровочного преобразования.

---

*) В действительности, $\Gamma(x) = (\varphi^{-1}\gamma\varphi)\cdot c(\Sigma, \sigma)$, где c — элемент центра группы G, удовлетворяющей условию

$$c(\sigma(x), \Sigma(x))\cdot c(\Sigma(x), \sigma(x)) = e \qquad (3.1)$$

Определение. Калибровочное преобразование пространства P — это отображение f: $P \to P$ такое, что (1) $\forall u \in P$, $\exists g(u) \in G \mid f(u) = u \cdot g(u)$, (2) $g(ua) = a^{-1} \cdot g(u) \cdot a$, $\forall u \in P$, $\forall a \in G$. Заметим, что $f(ua) = f(u) \cdot a$. Отображение f называется *эквивариантным*.

Эквивалентное определение (из работы Атья, Хитчина и Зингера [23]). Калибровочное преобразование P — это эквивариантный изоморфизм расслоения, индуцирующий тождественное отображение базового пространства.

Действие калибровочного преобразования на форму связности индуцируется указанным автоморфизмом пространства P (путем «возврата», см. п. 5) в разделе и) гл. 2).

Введенная в начале функция γ имеет вид $\gamma(x) = g(\sigma(x))$. Эквивариантность отображения f сводится к предположению, что

$$\Gamma(x) = \varphi^{-1}(x) \cdot \gamma(x) \cdot \varphi(x),$$

см. выше.

Суть этого глобального (не зависящего от координат) определения состоит в том, что оно применимо для нетривиальных расслоений.

в) Конечность действия. Топология на множестве связностей

Множество $\mathscr{C}$ форм связности на $P = R^4 \times G$ — аффинное (выпуклое) пространство, и потому топология его тривиальна. Заметим, что если ω_0 и ω_1 — формы связности на P, то и $\omega_t = (1 - t)\,\omega_0 + t\omega_1$ — также форма связности на P, хотя $\mathscr{C}$ и не является векторным пространством.

Однако требование конечности действия $\int \operatorname{tr} F^2 < \infty$, приводит к ограничению в множестве связностей, и при этом возникает нетривиальная топология.

Предположим, что для описания связностей с помощью калибровочных потенциалов в пространстве P задано сечение σ. Так как

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu],$$

то задача состоит в исследовании множества потенциалов A, удовлетворяющих условию

$$\int \operatorname{tr} [\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]]^2 < \infty.$$

Ясно, что это непростая задача, но мы можем приступить к ней следующим образом.

Предположим, что $F_{\mu\nu}$ спадает на бесконечности в пространстве R^4 быстрее, чем $|x|^{-2}$. Могли бы существовать такие поля, для которых это было неверно, а интеграл $\int \operatorname{tr} F^2$, тем не менее, был конечен. Наше предположение состоит в том, что F стремится к нулю на больших расстояниях.

Решение уравнения

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu]$$

относительно A при $F_{\mu\nu} = 0$ известно. Это общее решение имеет вид $A_\mu = g \cdot \partial_\mu g^{-1}$, где g — отображение $R^4 \to G$, т. е. потенциал A сводится к чистой калибровке. Отсюда можно получить приближенное выражение для A_μ на больших расстояниях. По крайней мере вне некоторой конечной области пространства можно записать

$$A_\mu = g \cdot \partial_\mu g^{-1} + B_\mu,$$

где B_μ — «малы» на больших расстояниях.

Разумеется, мы не предлагаем какой-либо канонической процедуры разложения A на две подобные части. Важно лишь, что член вида $g \cdot \partial_\mu g^{-1}$ приводит к сокращениям в выражении для $F_{\mu\nu}$. Таким образом, убывание $F_{\mu\nu}$ на бесконечности тесно связано с поведением B_μ.

Рассмотрим для примера одно-инстанстонное решение уравнений движения (по работе Белавина и др. [1])

$$A_\mu = \frac{x^2}{x^2+a^2}\, g\partial_\mu g^{-1},$$

где $g(x) = (x_0 + i\mathbf{x}\boldsymbol{\sigma})/|x|$, $\boldsymbol{\sigma}$ — матрицы Паули, $G = \mathrm{SU}(2)$. Очевидно,

$$A_\mu = g\partial_\mu g^{-1} + B_\mu, \quad B_\mu = (x^2 + a^2)^{-1}\, g\partial_\mu g^{-1},$$

и B_μ — сингулярно при $x = 0$. При $|x| \to \infty$

$$A_\mu \backsim |x|^{-1}, \quad B_\mu \backsim |x|^{-3}.$$

Первый член не давал бы конечного действия, если бы он не имел вида $g\partial_\mu g^{-1}$.

Во всяком случае, мы будем считать функцию g определенной (и гладкой) вне некоторой сферы конечного радиуса, т. е. в области пространства R^4, топологически эквивалентной $S^3 \times R$.

Если g известно, то определен элемент гомотопической группы $\pi_3(G)$. Действительно, предположим, что функция g известна на расстояниях (от начала координат), больших ρ_0. Тогда для любого $\rho \geqslant \rho_0$ сужение g_ρ функции g на сферу радиуса ρ определяет отображение $S^3 \to G$. Из непрерывности g следует, что любое изменение ρ вызывает непрерывную деформацию g_ρ. Следовательно, гомотопический класс g_ρ не зависит от ρ и является свойством g, а в конечном счете — свойством A. (Мы избегаем увеличения сферы до бесконечности и не предполагаем, что g_ρ имеет определенный предел при $\rho \to \infty$.) В приведенном выше примере функция g вообще не зависит от ρ.

Чтобы связать полученный таким образом элемент группы $\pi_3(G)$ с *формой связности* на P, рассмотрим эффект изменения сечения в P. Предположим, что σ' — другое сечение в P, причем $\sigma'(x) = \sigma(x)\cdot\gamma(x)$. Если A_μ — компоненты формы ω относительно сечения σ, то компоненты этой формы относительно сечения σ' имеют вид

$$A'_\mu = (g\gamma)^{-1}\, \partial_\mu (g\gamma) + \gamma^{-1} B_\mu \gamma.$$

Элемент группы $\pi_3(G)$, отвечающий функции $g\gamma$, как объяснялось выше, совпадает с элементом, отвечающим g, так как функция γ — непрерывна в пространстве R^4. Если группа G — компактная простая группа Ли, то, как известно, $\pi_3(G) \approx Z$.

Таким образом, множество связностей в $P = R^4 \times G$ разбивается на бесконечное счетное множество подпространств (Белавин и др. [1]).

г) Конечность действия. Компактификация пространства R^4

До сих пор обсуждалось асимптотическое поведение евклидовских калибровочных потенциалов, обусловленное конечностью действия при разумных (с физической точки зрения) предположениях о поведении $F_{\mu\nu}$ на больших расстояниях. Короче говоря, это асимптотическое поведение выделяет область V в пространстве R^4 условием $|x| > \varepsilon^{-1}$, где ε — достаточно малое число, и определяет отображение области V на группу G. В последующем мы воспользуемся этим асимптотическим условием, чтобы *построить* расслоение, возможно нетривиальное.

Так как g^{-1} действует на σ в V естественным образом, то возникает изменение компонент формы ω:

$$A \to A' = gBg^{-1},$$

причем A' стремится к одному и тому же пределу по всем направлениям, $A'(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Естественно рассматривать A' на пополненном множестве.

$$V_\infty = \{|x| > \varepsilon^{-1}\} \cup \{\infty\},$$

где ∞ — точка, добавляемая к пространству R^4, так что ее открытые окрестности имеют вид областей $|x| > \eta^{-1}$, и A' определены в окрестности ∞.

При указанной топологии $R^4 \cup \infty$ является компактным пространством. Если ввести также дифференцируемую структуру, то это пространство эквивалентно сфере S^4 (см. работу Люшера и Мака [24]).

Главное расслоение $P(S^4, G)$ над S^4 можно построить, покрывая S^4 двумя областями, R^4 и V_∞, и используя g как функцию перехода, заданную в пересечении $V_\infty \cap R^4 = \{|x| > \varepsilon^{-1}\}$. Пространство P восстанавливается по координатному расслоению $(S^4, G, \{R^4, V_\infty\}, g)$. При этом A и A' — компоненты формы связности в $P(S^4, G)$, соответствующие естественным локальным сечениям, связанным с указанным покрытием S^4.

Такая компактификация базового пространства вполне удовлетворительна, однако при этом можно получить больше того, что было заложено вначале, а именно, требования конечности действия. Благодаря компактности, на сфере S^4 сходимость интеграла $\int \operatorname{tr} F^2$ является, например, следствием непрерывности подынтегрального выражения. Однако мы будем использовать на S^4 локально функции из класса C^∞. В частности, условие принадлежности к C^∞ вблизи точки ∞ — это сильное ограничение на поведение функций на больших расстояниях в пространстве R^4. Чтобы убедиться в этом, можно воспользоваться стереографической проекцией сферы S^4 на R^4 (см. работу Джэкива и Ребби [25]).

К тому же уравнения движения (см. раздел 4) — конформно инвариантны. Использование S^4 дает нам пространственно-временное многообразие, в котором естественным образом действуют конформные преобразования.

На самом деле, введение S^4 оправдывает использование теории расслоений, так как топология множества калибровочных потенциалов, отвечающих конечному действию, описывается путем классификации главных расслоений со структурной группой G над S^4.

Известно, что множество неэквивалентных классов главного расслоения с группой G над сферой S^4 находится во взаимно однозначном соответствии с гомотопической группой $\pi_3(G)$ (см. книгу Стинрода [12] и работу Ботта и Матеу [26]). Отметим, что указанная конструкция главного координатного расслоения $(S^4, G, \{R^4, V_\infty\}, g)$ дает представителей для всех этих классов эквивалентности (см. ниже раздел е) гл. 3).

д) Калибровочное преобразование на сфере S^4

Предложенное в разделе б) гл. 3 глобальное определение буквально применимо для расслоения $P(S^4, G)$: калибровочное преобразование — это эквивариантный автоморфизм f пространства P, индуцирующий тождественное отображение базового пространства (с таким f связано отображение γ: $P \to G$).

Так как, вообще говоря, не существует глобального сечения P, то калибровочное преобразование описывается парой зависящих от сечения функций со значениями в группе.

Пусть $\{U_1, U_2\}$ — некоторое покрытие S^4, и $\{\sigma_1, \sigma_2\}$— локальные сечения над U_1 и U_2. (Можно считать, например, что $U_1 = R^4$, $U_2 = V_\infty$.) Калибровочное преобразование описывается двумя функциями γ_1 и γ_2, которые определены соответственно на U_1 и U_2:

$$\gamma_1(x) = \gamma(\sigma_1(x)), \quad \gamma_2(x) = \gamma(\sigma_2(x)),$$

а сечения σ_1 и σ_2 связаны функцией перехода ψ_{12} на пересечении $U_1 \cap U_2$. Вследствие эквивариантности f, функции γ_1 и γ_2 также связаны в области $U_1 \cap U_2$:

$$\gamma_2(x) = \psi_{12}^{-1}(x)\ \gamma_1(x) \cdot \psi_{12}(x).$$

Группа калибровочных преобразований будет рассмотрена в разделе 4.

е) Сфера S^4 или евклидово пространство R^4

Отметим, что калибровочное преобразование f не изменило бы координатного расслоения, определенного с помощью двух локальных сечений σ_1 и σ_2, так как эквивариантность f подразумевает сохранение функции перехода

$$\sigma_2(x)\,\gamma(x) = \sigma_1(x)\,\gamma_1(x) \cdot \psi_{12}(x), \qquad \forall x \in U_1 \cap U_2.$$

Можно сказать, что калибровочные преобразования — это преобразования, сохраняющие координатные расслоения.

Вернемся к случаю $P = R^4 \times G$. Пусть σ — глобальное сечение этого пространства. Одно-инстантонный калибровочный потенциал (см. выше) дает нам функцию g, хорошо определенную всюду кроме начала координат. Обозначим через V_1 открытое множество $R^4 - \{0\}$, а V_0 — внутренность сферы единичного радиуса. Можно построить сечение σ_1 над V_1, и g действует на σ следующим образом: $\sigma_1(x) = \sigma(x)\,g(x)$, $\forall x \in V_1$. Пространство P можно описать с помощью координатного расслоения $(R^4, G, \{V_0, V_1\}, \psi_{01} = g)$. Ясно, что каждой функции на множестве $V_0 \cap \cap V_1$ (как ψ_{01}, см. выше) можно поставить в соответствие целое число, элемент гомотопической группы $\pi_3(G)$, рассматривая сужение на сферу радиуса ρ $(0 < \rho < 1)$. Мы знаем также, что эквивалентные координатные расслоения получаются при замене локальных сечений σ (над V_0) и σ_1 (над V_1):

$$\sigma \to \sigma'(x) = \sigma(x)\,g_0(x), \quad \forall x \in V_0.$$

$$\sigma_1 \to \sigma_1'(x) = \sigma_1(x)\,g_1(x), \quad \forall x \in V_1.$$

При этом функции перехода связаны следующим образом:

$$\psi_{01}' = g_0^{-1} \cdot \psi_{01} \cdot g_1.$$

Над областью V_1 можно выбрать $g_1 = g$, но это становится невозможным, если к R^4 присоединяется точка ∞, так как при этом функция g_1 была бы непрерывна в этой точке. В сущности, при замене R^4 на S^4 мы накладываем на g_1 условие гладкости в пространстве $V_\infty = V_1 \cup \infty$.

Число, связанное с функцией g_1, должно быть нулем, так как любую сферу радиуса ρ можно стянуть в точку в пространстве V. Так как в произведении $g_0^{-1} \cdot \psi_{01} \cdot g_1$ эти числа складываются (алгебраически), то нуль соответствует также функциям ψ_{01}' и ψ_{01}.

В компактном случае топология S^4 такова, что эквивалентность между координатными расслоениями в той же мере сохраняет топологию расслоения, что и калибровочное преобразование. В этом суть дела: с точки зрения существующей теории расслоенных пространств, расслоение над S^4 со структурной группой G более содержательно топологически, чем расслоение над R^4.

ж) Классификация главных расслоений

Проблема классификации главных расслоений, т. е. описание всех неэквивалентных главных расслоений над многообразием M со структурной группой G, связана с тонкими взаимоотношениями между топологическими структурами M и G.

Мы приводим здесь некоторые свойства и построения, используемые для этой классификации. Вводятся необходимые определения, однако теоремы не доказываются. Понятия *гомотопии* и *точной последовательности* предполагаются известными; с гомотопической точки зрения множества считаются пунктированными (см. подробнее в книге Стинрода [12]).

Предварительное определение. Рассмотрим вначале главное G-расслоение ξ (B, G). Для любого отображения f: $M \to B$ можно построить *индуцированное расслоение* f^* (ξ) над M, приклеивая к каждой точке $x \in M$ копию слоя над $y = f(x)$. Расслоение f^* (ξ) называется также возвратом ξ с помощью отображения f.

Оказывается, что описание всех классов эквивалентности расслоений над M с группой G может быть построено путем вышеописанного индуцирования всех возможных главных расслоений из так называемого *универсального* расслоения.

Теорема (конструкция Милнора, см. работы Милнора [27, 28] и книгу Хьюзмоллера [29]). Для любого главного расслоения со структурной группой G над паракомпактным пространством M существует универсальное расслоение EG (BG, G), обладающее следующими свойствами: а) Для любого главного расслоения ξ (M, G) существует отображение f: $M \to BG$ такое, что ξ и его возврат f^* (EG) изоморфны. б) Если f_1 и f_2 — отображения $M \to BG$ такие, что f_1^* (EG) и f_2^* (EG) изоморфны, то f_1 и f_2 гомотопны.

Таким образом, схема классификации, которая нас интересует, сводится к исследованию гомотопических классов отображений $M \to BG$. Пространство BG, которое, вообще говоря, не является многообразием, называется классифицирующим пространством для группы G.

Обозначая множество классов эквивалентности G-расслоений над M через $\mathscr{B}_G(M)$, и через $[M, BG]$ — множество гомотопических классов отображений f: $M \to BG$, мы получаем, в силу приведенной теоремы, взаимно однозначное соответствие между $[M, BG]$ и $\mathscr{B}_G(M)$.

1) G-расслоения над S^4. Пусть теперь $M = S^4$. Существование слоения EG с группой G и базовым пространством BG порождает последовательность расслоения EG (см. книги Стинрода [12] и Кобаяси и Номидзу [30]):

$$\to \pi_k(EG) \to \pi_k(BG) \to \pi_{k-1}(G) \to \pi_{k-1}(EG) \to .$$

Если G — компактная, простая и односвязная группа Ли (например, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{Sp}(n)$, $\mathrm{Spin}(n)$, $n \geqslant 7$, G_2, F_4, E_8, $\bar{E}_6$, $\bar{E}_7$), то $\pi_1(G) = \pi_2(G) = 0$, и $\pi_3(G) \neq 0$. На самом деле $\pi_3(G) \approx Z$. Поэтому из универсальности EG вытекает следующая короткая точная последовательность:

$$0 \to \pi_4(BG) \to \pi_3(G) \to 0.$$

Из точности этой последовательности получаем $\pi_4(G) \approx \pi_3(G) \approx Z$. Однако $\pi_4(BG) \equiv [S^4, BG]$, и потому

$$\mathscr{B}_G(S^4) \approx \pi_3(G) \approx Z.$$

Таким образом, существует бесконечное счетное множество неэквивалентных G-расслоений над сферой S^4.

Приведенная классификация допускает также описание с помощью когомологий. Из данного анализа ясно, что гомотопические группы порядка старше 4 не играют существенной роли. Возникает мысль приблизить BG, топологически сложное пространство, так называемой системой Постникова (см. работу Ависа и Ишама [14] и цитированную литературу). В результате, если G — выше указанного типа, то можно показать, что

$$\mathscr{B}_G(S^4) \approx H^4(S^4, Z),$$

где $H^4(S^4, Z)$ — группа когомологии 4-го порядка для сферы S^4 со значениями в Z.

В заключение отметим, что классификация расслоений связана с когомологией базового пространства со значениями в группе Z, которая зависит от гомотопических свойств структурной группы. Это находится в соответствии с приведенными в разделе г) гл. 1 замечаниями, в которых указывалось, что топология расслоенного пространства возникает из топологии базового пространства и топологии структурной группы.

2) Вычисление класса эквивалентности: теория характеристических классов Вейля — Чженя. Из теоремы де Рама (см. книгу де Рама [17]) известно, что классы вещественной когомологии, т. е. элементы $H^*(M, R)$, могут быть представлены замкнутыми формами на M. С помощью связностей, заданных на определенном главном расслоении $P(M, G)$, можно построить выделенную систему замкнутых форм четной степени на M, используя гомоморфизм Вейля. Их классы когомологий не зависят от выбора связности в P, но лишь от свойств самого пространства P. Следовательно, данному расслоению $P(M, G)$ можно поставить в соответствие элемент $H^*(M, R)$.

Кроме того, оказывается, что эти элементы $H^*(M, R)$ удовлетворяют аксиомам, определяющим так называемые классы Чженя. Они принадлежат $H^*(M, Z)$ и используются для классификации $P(M, G)$, где G — одна из групп указанного вида.

3) Гомоморфизм Вейля (см. книгу Кобаяси и Номидзу [30] и работу Дюпона [31]). Предположим, что G — замкнутая подгруппа $GL(n, C)$. Рассмотрим вещественную симметрическую мультилинейную функцию $W_k(A_1, \ldots, A_k)$ такую, что для любого $g \in G$

$$W_k(\mathrm{Ad}_g \cdot A_1, \ldots, \mathrm{Ad}_g \cdot A_k) = W_k(A_1, \ldots, A_k),$$

и аргументы которой принадлежат алгебре Ли $\mathscr{A}(G)$. Можно сказать, что функция W_k инвариантна относительно присоединенной группы ad G. Пусть $I^k(G)$ — множество всех таких функций. Множество $I(G) = \sum_{k=0}^{\infty} I^k(G)$ обладает естественной структурой алгебры, произведение в которой определяется следующим образом:

$$f \cdot g(t_1, \ldots, t_{\varkappa+\rho}) = [(\varkappa+\rho)!]^{-1} \sum_{\sigma} f(t_{\sigma(1)}, \ldots, t_{\sigma(\varkappa)})\, g(t_{\sigma(\varkappa+1)}, \ldots, t_{\sigma(\varkappa+\rho)})$$

для любых $f \in I^{\varkappa}(G)$, $g \in I^{\rho}(G)$, $f \cdot g \in I^{\varkappa+\rho}(G)$.

Предположим, что в пространстве P задана связность ω. Так как форма кривизны Ω принимает значения в алгебре Ли $\mathcal{A}(G)$, то можно определить $2k$-форму $W_k(\Omega)$ в расслоенном пространстве:

$$W_k(\Omega)(X_1, \ldots, X_{2k}) =$$
$$= [(2k)!]^{-1} \sum_\sigma \varepsilon_\sigma W_k(\Omega(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}), \ldots, \Omega(X_{\sigma(2k-1)}, X_{\sigma(2k)})),$$

где имеется в виду суммирование по всем перестановкам чисел $(1, 2, \ldots \ldots, 2k)$ и ε_σ — знак перестановки σ.

Теорема. 1) Для любой инвариантной функции W_k соответствующая $2k$-форма $W_k(\Omega)$ на P проецируется на единственную замкнутую $2k$-форму $\overline{W}_k$ на M, причем $W_k(\Omega) = \pi^* \cdot \overline{W}_k$, где π — проекция, определенная в расслоении P. 2) Класс когомологии де Рама для замкнутой формы $\overline{W}_k$ не зависит от выбора связности в P. При этом отображение W: $I(G) \to H^*(M, R)$ является алгебраическим гомоморфизмом (гомоморфизм Вейля).

Можно показать, что множество $I(G)$ идентифицируется с алгеброй инвариантных (относительно присоединенной группы ad G) полиномиальных функций на алгебре Ли $\mathcal{A}(G)$, так что можно ввести базис в этой алгебре.

Определим функции $f_0, \ldots, f_n$ на алгебре Ли $\mathcal{A}(G)$ следующим образом:

$$\det\left(\lambda I_n - \frac{1}{2i\pi} X\right) = \sum_{k=0}^{n} f_k(X)\,\lambda^{n-k}, \qquad X \in \mathcal{A}(G).$$

Функция f_k принадлежит множеству $I^k(G)$. При любом k существует единственная замкнутая $2k$-форма γ_k на многообразии M такая, что $\pi^*\gamma_k = f_k(\Omega)$.

Теорема. Формы γ_k порождают алгебру характеристических классов пространства $P(M, G)$. Форму γ_k можно выразить через матричную 2-форму Ω^i_j:

$$\pi^*\gamma_k = [(-2i\pi)^k \cdot k!]^{-1} \sum \delta^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_k} \Omega^{i_1}_{j_1} \wedge \ldots \wedge \Omega^{i_k}_{j_k}, \qquad (3.2)$$

где произведено суммирование по всем упорядоченным подсистемам $(i_1, \ldots, i_k)$, состоящим из k элементов набора чисел $(1, \ldots, n)$, и по всем подстановкам $(i_1, \ldots, i_k) \to (j_1, \ldots, j_k)$. Заметим, что все $2k$-формы в (3.2) — калибровочно инвариантны.

Полезно переписать (3.2) в локальной форме. Пусть U — какая-либо открытая область, принадлежащая покрытию M. В подпространстве $\pi^{-1}(U)$ существует функция φ_U со значениями в группе (см. выше определение главного G-расслоения)

$$\pi^*(\gamma_k|_U) = f_k(\Omega|_{\pi^{-1}(U)}),$$
$$\Omega|_{\pi^{-1}(U)} = \mathrm{Ad}_{\varphi_U^{-1}} \pi^*\Omega_U.$$

Легко видеть, что

$$\gamma_k|_U = [(-2i\pi)^k \cdot k!]^{-1} \sum \delta^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_k} (\Omega_U)^{i_1}_{j_1} \wedge \ldots \wedge (\Omega_U)^{i_k}_{j_k},$$

где

$$(\Omega_U)^i_j = \frac{1}{2} F^a_{\mu\nu} (T_a)^i_j \, dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad T_a \in \mathcal{A}(G).$$

Пример. $M = S^4$,

$$\gamma_1|_U = -\frac{1}{2i\pi}\operatorname{tr}\Omega_U; \quad \gamma_1 = 0, \text{ если } G = \mathrm{SU}(n);$$

$$\gamma_2 = (8\pi^2)^{-1}\operatorname{tr}(\Omega_U \wedge \Omega_U) = (32\pi^2)^{-1}\sqrt{g}\,\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^a_{\mu\nu}F^{a\alpha\beta}\,d^4x;$$

$$\gamma_k = 0, \forall k \geqslant 3.$$

Расслоения P (S^4, SU (n)) характеризуются формой γ_2, рассматриваемой как представитель элемента H^4 (M, Z). В силу калибровочной инвариантности, форму γ_2 можно было бы, в принципе, использовать как часть плотности лагранжиана в функции действия для полей Янга — Миллса.

Расслоения P (S^4, SU (n)) характеризуются целым числом $n = \int\limits_M \gamma_2$, которое называется также числом Чженя или числом инстантонов. Это число выражается через интеграл в евклидовом пространстве

$$n = \frac{1}{32\pi^2}\int \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^a_{\mu\nu}F^a_{\alpha\beta}\,d^4x \equiv \frac{1}{16\pi^2}\int \operatorname{tr} F\cdot\tilde{F}\,\mathrm{d}^4x.$$

Остается лишь показать, что n является элементом группы π_3, соответствующим связности, используемой для построения расслоенного пространства над базой S^4. Это было сделано в работах Белавина и др. [1] и Крютера [32].

Замечание. 1) Очень важно указать, в каком смысле использование сферы S^4 в качестве пространственно-временного многообразия позволяет сохранить топологию пространства связностей. Было показано, что возникает расщепление множества связностей на $P = R^4 \times G$ на счетное бесконечное множество подпространств (в предположении, что $F \to 0$ на бесконечности). Теперь ясно, что все связности, принадлежащие к к одному из этих подпространств, могут быть перенесены на *единственное* G-расслоение над S^4. Две связности с различными n не определены на одном и том же расслоении над S^4. Будет показано также, что использование S^4 существенно для определения множества допустимых калибровочных преобразований, приобретающего, таким образом, некоторую топологию, которой вначале множество калибровочных преобразований для R^4 не обладало.

Замечание 2. Было принято неявное допущение, что связность в расслоении $P = R^4 \times G$, порождающая калибровочное поле F, достаточно быстро спадающее на бесконечности, приведет к целому значению для интеграла по всему пространству R^4:

$$n = \frac{1}{16\pi^2}\int \operatorname{tr} F\cdot\tilde{F}\,\mathrm{d}^4x.$$

Заранее ясно, что одна лишь сходимость действия $a = \int \operatorname{tr} F^2\,\mathrm{d}^4x$ обеспечивает, во-первых, сходимость интеграла $\int \operatorname{tr}(F\cdot\tilde{F})\,\mathrm{d}^4x$ и, во-вторых, неравенство $|n| \leqslant a$. Однако еще надо показать, какие дополнительные предположения следует присоединить к требованию конечности действия, чтобы сделать возможным построение некоторого расслоения над S^4 и с необходимостью обеспечить целость числа n. Может быть, быстрого падения F на бесконечности и достаточно, однако это не доказано.

4. ГРУППА КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

а) Групповая операция в множестве калибровочных преобразований $\mathcal{G}$

Калибровочные преобразования были определены как эквивариантные автоморфизмы некоторого G-расслоения P, при которых базовое пространство отображается тождественно. Важнейшие геометрические объекты, заданные на P, это 1-формы связности, компоненты которых — калибровочные потенциалы. Следует подчеркнуть, что выбор определенного G-расслоения над S^4 сводится к выбору некоторого класса Чженя, т. е. числа инстантонов. В дальнейшем мы будем понимать под расслоением P пространство P_k, $k \in Z$.

Определим произведение двух калибровочных преобразований как композицию соответствующих отображений $P \to P$. В результате этой композиции возникает калибровочное преобразование, так что множество $\mathcal{G}$ всех калибровочных преобразований обладает групповой структурой.

Любое калибровочное преобразование f: $P \to P$ может быть эквивалентно описано с помощью отображения γ: $P \to G$. Напомним, что для любого $u \in P$ имеем $f(u) = u \cdot \gamma(u)$ и $\gamma(ua) = a^{-1}\gamma(u)\, a$. Групповая операция в множестве $\mathcal{G}$ дает точечное произведение элементов γ: если $f_1(u) = u \cdot \gamma_1(u)$ и $f_2 = u \cdot \gamma_2(u)$, то $f_2 \cdot f_1(u) = u \cdot (\gamma_1 \cdot \gamma_2)(u)$.

Наконец, само отображение γ: $P \to G$ может быть задано через систему локальных отображений для некоторого покрытия, γ_α: $U_\alpha \to G$ (функции на базовом пространстве со значениями в структурной группе), при наличии условий совместности

$$\gamma_\beta(x) = \psi_{\alpha\beta}^{-1}(x)\, \gamma_\alpha(x)\, \psi_{\alpha\beta}(x), \quad \forall x \in U_\alpha \cap U_\beta.$$

Последнее описание эквивалентно следующему. Построим расслоение $\mathcal{B}$, ассоциированное с P, со стандартным слоем G, причем группа G действует сама на себя как группа присоединенных преобразований, $a(g) = \mathrm{Int}_a\, g = aga^{-1}$. Из леммы раздела b) гл. 1 следует, что существует взаимно однозначное соответствие между отображениями γ: $P \to G$, которые описывают калибровочные преобразования, и сечениями расслоения $\mathcal{B}$. Следовательно, группа $\mathcal{G}$ калибровочных преобразований может быть отождествлена с множеством $\Gamma(\mathcal{K})$ сечений расслоения $\mathcal{B}$. Чтобы рассмотреть композицию в множестве $\Gamma(\mathcal{B})$, надо использовать локальную тривиализацию пространства $\mathcal{B}$ относительно некоторого покрытия $\{U_\alpha\}$ базового пространства, и выполнить операцию точечного умножения в группе G. Заметим, что отсутствие противоречия между двумя возможными определениями в каждом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ следует из свойства

$$\mathrm{Int}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}}(\gamma_1\gamma_2) = \mathrm{Int}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}}(\gamma_1) \cdot \mathrm{Int}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}}(\gamma_2).$$

Заметим также, что, хотя слоем в пространстве $\mathcal{B}$ является группа G, это расслоение не главное, так как в этом случае группа G действует на себя не свободно. Пространство $\mathcal{B}$ имеет глобальные сечения. Предположим, кроме того, что некоторая точка $b \in \pi_{\mathcal{B}}^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$ имеет координаты (x, e) над областью U_α. Тогда она обязательно имеет также координаты (x, e) над областью U_β. Следовательно, в таком расслоенном пространстве понятие единичного элемента обладает глобальным смыслом. На самом деле, то же относится и ко всем элементам центра Z группы G: мы можем говорить о сечениях пространства $\mathcal{B}$, принимающих значение z для любого $z \in Z$. Единичное сечение (всюду равное единичному элементу) — это единичный элемент группы $\mathcal{G}$. Множество сечений со значениями в Z образует центр группы $\mathcal{G}$. Мы будем обозначать его $\mathcal{Z}$.

б) Алгебра Ли группы $\mathcal{G}$

Рассмотрим постоянное единичное сечение s в пространстве $\mathcal{B}$. Через любую точку $\mathcal{B}$ проходит один слой. Используя локальную тривиальность расслоения $\mathcal{B}$ над U_α, мы можем отождествить этот слой с группой G. В любой точке сечения s можно построить векторы, касательные к слою. Групповая операция и ее линейный дифференциал позволяют перенести эти векторы в любую точку и задать векторные поля на $\mathcal{B}$. Сужение такого векторного поля на слой $\pi_{\mathcal{B}}^{-1}(x)$ можно отождествить с элементом A_α алгебры Ли $\mathcal{A}(G)$, здесь $x \in U_\alpha$. Если $x \in U_\alpha \cap U_\beta$, то это же векторное поле на слое $\pi_{\mathcal{B}}^{-1}(x)$ можно отождествить с другим элементом A_β той же алгебры Ли при условии, что используется тривиализация пространства $\pi_{\mathcal{B}}^{-1}(U_\beta)$. Справедлива формула

$$A_\beta = \mathrm{Ad}_{\psi_{\alpha\beta}^{-1}} \cdot A_\beta.$$

Следовательно, векторное поле, которое мы задали на $\mathcal{B}$, можно рассматривать как сечение на расслоении E, ассоциированном с P, со стандартным слоем $\mathcal{A}(G)$, в котором действует присоединенное представление группы G (см. раздел е) гл. 2).

Пусть $\Gamma(E)$ — множество сечений пространства E. Это множество является алгеброй Ли группы $\mathcal{G} = \Gamma(\mathcal{B})$ и бесконечномерным модулем. Любое сечение $\mathcal{B}$ можно записать в виде $\exp(\sigma)$, где $\sigma \in \Gamma(E)$. Чтобы определить операцию вычисления экспоненты от сечения пространства E, нужно вновь использовать локальную тривиальность ассоциированного расслоения: локально σ определяет отображения $U_\alpha \to \mathcal{A}(G)$. Отображения $U_\alpha \to G$ можно определить, используя экспоненциальное представление элементов группы. Эти отображения удовлетворяют надлежащим условиям совместности в каждой области пересечения $U_\alpha \cap U_\beta$; таким образом, они определяют сечение s пространства $\mathcal{B}$. Мы будем считать, что $s = \exp(\sigma)$. Если группа G — односвязна (именно этот случай будет рассмотрен), то любой элемент G можно записать в виде элемента алгебры Ли $\mathcal{A}(G)$. В этом случае любое сечение пространства $\mathcal{B}$ можно представить в виде $s = \exp(\sigma)$, $\sigma \in \Gamma(E)$.

в) Влияние топологии пространства-времени на группу калибровочных преобразований

Предположим, что пространство-время — сфера S^4. Как было показано, калибровочное преобразование описывается двумя отображениями: $\gamma_1\colon U_1 \to G$ и $\gamma_2\colon U_2 \to G$, где $U_1 \approx R^4$ и $U_2 \approx V_\infty$. Очевидно, что γ_1 определяет калибровочное преобразование над R^4, однако не все калибровочные преобразования над R^4 могут быть получены таким способом: γ_1 удовлетворяет условиям совместности

$$\gamma_1(x) = \psi_{12}^{-1}(x) \cdot \gamma_2(x) \cdot \psi_{12}(x), \quad \forall x \in U_1 \cap U_2.$$

Одно лишь условие непрерывности отображения γ_2 в точке ∞ уже является сильным ограничением на поведение γ_1 «на бесконечности».

Предположим, например, что расслоение P тривиально. Тогда $\psi_{12} = e$, и если $g = \gamma_2(\infty)$, то при $|x| \to \infty$ имеем $\gamma_1(x) \to g$. Отображение

γ_1 должно быть определено на сфере S^4. Топология множества функций на S^4 со значениями в группе G гораздо богаче, чем топология таких функций на евклидовом пространстве R^4. Топология пространства $\mathcal{G}$ будет исследована более подробно для случая S^4, но предлагаемый метод является обычным в теории расслоенных пространств и применим к другим базовым пространствам. Это исследование дано в работе Зингера [33] для группы $G = \mathrm{SU}(n)$ (см. далее раздел 4.3).

5. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОЛЕЙ ЯНГА — МИЛЛСА БЕЗ МАТЕРИИ

а) Уравнения движения и (анти-) самодуальность

Классические уравнения движения для калибровочных полей или калибровочных потенциалов — это уравнения Эйлера — Лагранжа, получаемые при минимизации действия $a = \int \mathrm{tr}\, F^2\, \mathrm{d}^4x$.

Пусть P — главное G-расслоение над сферой S^4. Выбор расслоения P фиксирует число инстантонов. Действие является функционалом на множестве связностей в P.

В разделе е) гл. 2 была построена форма $R(\omega)$ на многообразии M со значениями в множестве $\Gamma(E)$ и было показано, что $a = (R, R)$:

$$a = \int_{S^4} \mathrm{tr}\,(R \wedge {*R})\, \mathrm{d}M.$$

Решения уравнений движения — это критические точки функционала a (в смысле Морса, см. книгу Милнора [34]).

Отметим, что отыскание критических точек функции обычно связано с исследованием топологии пространства, на котором эта функция задана [34]. Однако пространство $\mathscr{C}$ форм связности на P — это аффинное пространство, оно стягивается в точку и имеет тривиальную топологию $\pi_j(\mathscr{C}) = 0$, $\forall_j \in N$. Существенно здесь то, что функционал $a(\omega)$ — калибровочно инвариантен.

Предположим, что $\omega \in \mathscr{C}$ и ω' — результат применения к ω калибровочного преобразования. Тогда $a(\omega') = a(\omega)$, так что функционал a в действительности определен на фактор-пространстве $\mathscr{C}/\mathcal{G}$. Это пространство уже имеет нетривиальную топологию *), так как группа $\mathcal{G}$ обладает нетривиальной гомотопией (см. гл. 6).

Локальная форма уравнений движения может быть получена из выражения $a = \int \mathrm{tr}\, F_{\mu\nu}^2\, \mathrm{d}^4x$. Эти уравнения известны,

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0,$$

где $\mathscr{D}_\mu$ — ковариантная производная, действующая на $\mathscr{F}_{\mu\nu}$.

Нетрудно убедиться, что эти уравнения могут быть записаны глобально с использованием введенной ранее формы R и оператора $\mathscr{D}^*$, сопряженного внешнему ковариантному дифференцированию $\mathscr{D}$, а именно

$$\mathscr{D}^* R = 0,$$

*) Этот факт не имеет отношения к топологии, введенной в разделе б) гл. 3. В гл. 3 обсуждалось расщепление множества связностей на $P = R^4 \times G$ на бесконечное множество подпространств. Это расщепление привело к различным расслоениям над S^4. Теперь расслоение над S^4 уже выбрано, а топология возникает при устранении избыточной информации в описании полей, которая связана с калибровочной инвариантностью. В разделе 4 было показано, насколько существенно введение сферы S^4.

или эквивалентно

$$\mathscr{D}(*R) = 0.$$

Как легко проверить, на многообразии S^4 операция $*$ является инволюцией, $(*)^2 = 1$.

Пространство A^2 2-форм на S^4 со значениями в $\Gamma(E)$ можно разложить в сумму двух дополнительных линейных подпространств, $A^2 = A^2_+ \oplus A^2_-$, в которых формы соответственно самодуальны и антисамодуальны. Самодуальная форма удовлетворяет условию $*\varphi = \varphi$, антисамодуальная — условию $*\varphi = -\varphi$.

Непосредственно видно, что если форма R — самодуальна (соответственно антисамодуальна), то из тождества Бьянки следует, что уравнения движения удовлетворяются. До сих пор не выяснено, существуют ли решения уравнений движения, соответствующие форме, которая не была бы ни самодуальной, ни антисамодуальной (см. работы Бургийона, Лоусона и Симонса [35], Даниэля, Миттера и Виалле [36], Флюма [37]).

Существует много работ, посвященных геометрическому смыслу уравнений самодуальности. Получено полное описание множества решений. построен даже явный вид этих решений. Мы не будем вдаваться здесь в обсуждение этого вопроса, подробно рассмотренного в литературе. См. работы Атья, Хитчина и Зингера [23], Атья и Уорда [38], Атья, Хитчина, Дринфельда и Манина [39], Корригэна, Фэрли, Годдара и Йейтса [40], Корригэна, Фэрли, Темплтона и Годдара [41], Криста, Стэнтона и Вейнберга [42], Бернара, Криста, Гута и Вейнберга [43], Мадора, Ришара и Стора [44].

б) Первая и вторая вариации действия для полей Янга — Миллса на евклидовой сфере

В предыдущем разделе было показано, что действие для полей Янга — Миллса на евклидовой сфере является действием на аффинном пространстве $\mathscr{C}$. Если зафиксировать в $\mathscr{C}$ какую-либо точку, то $\mathscr{C}$ превращается в бесконечномерное векторное пространство, изоморфное пространству гладких 1-форм на S^4 со значениями в $\Gamma(E)$ (см. п. 1) в разделе г) гл. 2). Действительно, рассмотрим семейство A^t связностей, лежащих на прямой, проходящей через точку A,

$$A^t = A + t\eta.$$

В локальной записи $(A^t_{\alpha\mu} - A_{\alpha\mu})\,dx^\mu$ — это 1-форма, принимающая значения в алгебре Ли калибровочной группы в присоединенном представлении, откуда следует приведенное выше утверждение.

Воспользуемся теперь этим свойством связностей, чтобы вычислить первую и вторую вариации действия. Очевидно, что эти вариации играют важную роль в физике. Первая вариация приводит к динамическим уравнениям движения, а вторая вариация определяет оператор, описывающий квантовые флуктуации на фоне классического решения (т. е. соответствующего связности A вектор-потенциала).

Заметим, что достаточно рассматривать вариации действия вдоль прямых линий, так как $\mathscr{C}$ — аффинное пространство.

Пусть R^t— форма кривизны, соответствующая связности A^t. Тогда

$$R^t = R + t\mathscr{D}\eta + \frac{1}{2}t^2[\eta, \eta],$$

где $\mathscr{D}$ — внешняя ковариантная производная, действующая на 1-формы, принимающие значения в алгебре Ли (см. раздел 2.8, б)). Следовательно, как указано в работах Атья и Ботта [45] и Бургийона и др. [35],

$$a(A^t) = a(A) + t(\mathscr{D}\eta, R) + t^2\{(\mathscr{D}\eta, \mathscr{D}\eta) + (\eta, *[*R, \eta])\} + O(\eta^3).$$

Поэтому

$$\left.\frac{\mathrm{d}a(A^t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = (\mathscr{D}\eta, R).$$

Таким образом, если A соответствует стационарной точке, то первая вариация должна исчезать. Следовательно, $(\mathscr{D}\eta, R) = 0$ или $(\eta, \mathscr{D}^*R) = 0$. Уравнения движения принимают вид

$$\mathscr{D}^*R = 0,$$

где $\mathscr{D}^*$ — оператор, сопряженный $\mathscr{D}$. Можно показать, что в случае S^4 справедливо тождество $\mathscr{D}^* = -*\mathscr{D}*$.

Вторая вариация дает

$$\left.\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2(A^t)}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t=0} = (\eta, \mathscr{D}^*\mathscr{D}\eta + *[*R, \eta]).$$

Отсюда непосредственно возникает гессиан действия в виде квадратичной формы в пространстве, касательном к пространству связностей в точке A. Таким образом, получается явное выражение для оператора флуктуаций, который описывает квантовые флуктуации вокруг фонового поля A.

Интересно рассмотреть случай, когда A отвечает k-инстантонной конфигурации. Иными словами, A порождает самодуальную форму кривизны $R^* = R$, соответствующую числу инстантонов k. В этом случае оператор флуктуаций $\tilde{\Delta}^1_A$ (индекс 1 указывает, что этот оператор действует на 1-формы) сводится к следующему:

$$\tilde{\Delta}^1_A = 2\mathscr{D}^*P\mathscr{D},$$

где $P = (1 - *)/2$ — оператор проекции на антисамодуальные 2-формы со значениями в алгебре Ли.

Если теперь вариация $A^t = A + t\eta$ такова, что R^t — решение уравнений движения, то

$$\tilde{\Delta}^1_A\eta = 0.$$

Решения этого уравнения описывают пространство, *касательное* к пространству самодуальных решений уравнений Янга — Миллса. Однако действие для полей Янга — Миллса калибровочно инвариантно. Вариация вдоль орбиты (см. гл. 6), проходящей через точку A, приведет, разумеется, к решению, которое получается из A калибровочным преобразованием. Такие вариации следует устранить. Это можно сделать, используя фоновую калибровку (см. работы Шварца [46], Даниэля и Виалле [47]). При этом возникает пара уравнений

$$\tilde{\Delta}^2_A\eta = 0, \quad \mathscr{D}^*\eta = 0,$$

или эквивалентное уравнение

$$\Delta^1_A\eta = 0,$$

где

$$\Delta^1_A = \mathscr{D}^*\mathscr{D} + \mathscr{D}\mathscr{D}^* - \mathscr{D}^**\mathscr{D};$$

Здесь $\mathscr{D}^*\mathscr{D} + \mathscr{D}\mathscr{D}^*$ — ковариантный лапласиан, действующий на 1-формы со значениями в алгебре Ли, а $\mathscr{D}^**\mathscr{D}$ — оператор нулевой степени. Следовательно, Δ^1_A — эллиптический оператор и может иметь конечное число нулевых мод. Например, если группа $G = \mathrm{SU}(n)$, и A содержит

k инстантонов, то нулевое подпространство оператора имеет $(4Nk-N^2+1)$ измерений.

Заметим, что Δ_A^1 — один из лапласианов, которые могут быть построены на основе комплекса Атья, Хитчина и Зингера [23]:

$$0 \to A^0 \xrightarrow{d^0} A^1 \xrightarrow{d^1} A^2_- \to 0,$$

где d^0— оператор $\mathscr{D}$, действующий в пространстве $\Gamma(E)$, d^1 — оператор $\mathscr{D}$, действующий в пространстве 1-форм со значениями в $\Gamma(E)$, A^2_- — гильбертово пространство антисамодуальных 2-форм со значениями в $\Gamma(E)$.

Пусть $g_{\mu\nu}$ — метрический тензор на сфере S^4, полученный из стереографических координат. Разумеется, тензор $g_{\mu\nu}$ описывает конформно плоскую метрику и имеет вид

$$g_{\mu\nu} = \Omega(x)\, d_{\mu\nu},$$

где $\Omega(x) = 4a^4(a^2+x^2)^{-2}$, a — радиус сферы S^4. В этой системе локальных координат мы получаем, используя формулы раздела з) гл. 2, 2),

$$(\Delta_A^1)_{\mu\nu} = -\Omega^{-1}[\delta_{\mu\nu}\mathscr{D}_\sigma\mathscr{D}_\sigma + (\Omega\partial_\mu\Omega^{-1})\mathscr{D}_\nu - \\ - (\Omega\partial_\nu\Omega^{-1})\mathscr{D}_\mu - \Omega\partial_\nu\partial_\mu\Omega^{-1} + F_{\mu\nu} + {*F_{\mu\nu}}].$$

О важной роли оператора Δ_A^1 для проблемы квантовых флуктуаций вокруг многоинстантонного решения см. в работе Шварца [48], содержащей ссылки на другие работы по этому вопросу.

6. ПРОБЛЕМА ФИКСАЦИИ КАЛИБРОВКИ

а) Понятие фиксации калибровки

Так как все физические величины должны быть калибровочно инвариантны, то нас интересуют не сами связности, а семейства связностей, получаемых друг из друга калибровочными преобразованиями (в некотором расслоении со структурной группой G). Пусть $\mathscr{C}$ — множество связностей на P, тогда эти семейства, орбиты относительно группы $\mathscr{G}$ калибровочных преобразований, являются элементами фактор-пространства $\eta = \mathscr{C}/\mathscr{G}$. Существует каноническая проекция p: $\mathscr{C} \to \eta$.

Здесь естественно возникает задача выбора представителя в $\mathscr{C}$ для каждой орбиты. Мы будем считать, что калибровка фиксирована, если выбран единственный представитель (некоторая связность на P) от каждого класса эквивалентности относительно калибровочных преобразований в множестве связностей.

Обычно калибровка фиксируется существенно локальным образом: на компоненты A_μ накладывается некоторое условие, например, вида $\partial_\mu A_\mu = 0$.

Строго говоря, фиксация калибровки — это построение отображения φ: $\eta \to \mathscr{C}$ такого, что $p\cdot\varphi$ — тождественное отображение пространства $\mathscr{C}$. Эта задача в значительной мере напоминает построение сечения в (бесконечномерном) главном расслоении $\mathscr{C}$ над η со структурной группой $\mathscr{G}$. К сожалению, помимо того факта, что мы еще не определили понятия расслоения в $\mathscr{C}$, надо еще ограничиться неприводимыми связностями и заменить группу некоторым ее сужением, чтобы иметь возможность построить красивое (бесконечномерное) главное расслоение со свободным действием группы в нем.

б) Сужение группы калибровочных преобразований и ограниченное множество связностей

Локально калибровочные преобразования действуют на компоненты A^{α}_{μ} следующим образом:

$$A^{\alpha}_{\mu} \to A'^{\alpha}_{\mu} = g_{\alpha} A^{\alpha}_{\mu} g^{-1}_{\alpha} + g_{\alpha} \cdot \partial_{\mu} g^{-1}_{\alpha}.$$

Очевидно, что если g — постоянное преобразование, принадлежащее центру Z, то $A'^{\alpha}_{\mu} = A^{\alpha}_{\mu}$ для любого α. Любое такое калибровочное преобразование не меняет ни одну из связностей. Заметим, что условие $A'_{\mu} = A_{\mu}$ можно записать в виде

$$\partial_{\mu} g_{\alpha} + [A^{\alpha}_{\mu},\ g_{\alpha}] \equiv \mathscr{D}^{\alpha}_{\mu} g_{\alpha} = 0,$$

или $\nabla g = 0$.

Действительно, условие $\nabla g = 0$ указывает, что преобразование g принадлежит к центру группы голономии рассматриваемой связности. Чтобы убедиться в этом, достаточно применить локально операторы $\mathscr{D}_{\mu}$ и $\mathscr{D}_{\nu}$, антисимметризуя по μ и ν, мы получим условие $[F_{\mu\nu},\ g] = 0$. Дальнейшие применения ковариантных производных показывают, что элемент g коммутирует со всеми элементами алгебры группы голономии этой связности (см. работу Лооса [20]). В частности, если связность — неприводима, то элемент g обязательно принадлежит центру группы G (предполагается, что группа G — односвязная).

Как указывалось выше, сечения пространства $\mathscr{B}$ со значениями в Z хорошо определены: множество этих сечений образует абелеву подгруппу $\mathfrak{Z}$ в группе $\mathscr{G}$. Обозначим через $\tilde{\mathfrak{Z}}$ множество *постоянных* сечений пространства $\mathscr{B}$ со значениями в Z. Заранее не очевидно, что сечение $\mathscr{B}$ со значением в Z будет постоянным, однако в случае группы $SU\,(N)$, центр которой — дискретная (конечная) подгруппа Z_N, из непрерывности сечений следует, что такие сечения — постоянны, и, следовательно, $\tilde{\mathfrak{Z}} = \mathfrak{Z}$. Фактор-пространство $\tilde{\mathfrak{Z}} = \mathscr{G}/\tilde{\mathfrak{Z}}$ является хорошо определенной группой. Эта группа свободно действует в множестве $\mathscr{C}'$ неприводимых связностей на P.

З а м е ч а н и е. Замена группы $\mathscr{G}$ на $\tilde{\mathscr{G}}$ оказывается естественной с того момента, когда мы заметили, что формула для преобразования потенциалов не определяет глобальных калибровочных преобразований полностью (см. формулу (3.1)). Тем не менее следует отметить, что роль центра не вполне ясна, хотя он возможно весьма существен для интерпретации калибровочных теорий (см. работы Мака [49], и 'т Хоофта [50]). Добавим также, что если структурная группа G — абелева, то ее центр совпадает с ней самой и группа $\tilde{\mathscr{G}}$ — тривиальна, т. е. состоит из одного элемента.

в) Универсальное расслоение для группы калибровочных преобразований

В множестве связностей на P (класса C^{∞}) можно ввести расстояние, если заметить, что для двух заданных форм связности ω и ω' на P их разность $\tau = \omega' - \omega$ — форма на P со значениями в алгебре Ли, которую можно рассматривать также как 1-форму на M со значениями в $\Gamma\,(E)$. Скалярное произведение $(\tau,\ \tau)$ хорошо определено, и естественным образом возникает расстояние между ω и ω' в виде $d\,(\omega,\ \omega') = \sqrt{(\tau,\ \tau)}$. Определенное в $\mathscr{C}$ расстояние применимо также в пространстве $\mathscr{C}'$.

Утверждение. Пространство $\mathscr{C}'$ является главным расслоением над $\eta' = \mathscr{C}'/\tilde{\mathscr{G}}$ со структурной группой $\tilde{\mathscr{G}}$. Кроме того, $\pi_j(\mathscr{C}') = 0$ для любого $j \in N$.

Мы не приводим доказательства этого утверждения, см. работу Зингера [33].

Замечание. Очевидно, что пространство $\mathscr{C}'$ $(\eta', \tilde{\mathscr{G}})$ является универсальным расслоением со структурной группой $\tilde{\mathscr{G}}$.

Этот результат интересен с точки зрения проблемы фиксации калибровки по следующей причине. Существование непрерывного отображения $\eta \to \mathscr{C}$, т. е. фиксация калибровки, согласно нашему определению, обеспечивало бы существование глобального сечения пространства $\mathscr{C}'$, и, следовательно, расслоение $\mathscr{C}'$ $(\eta', \tilde{\mathscr{G}})$ при этом было бы тривиально. Поэтому

$$\pi_j(\mathscr{C}') \approx \pi_j(\eta') \oplus \pi_j(\tilde{\mathscr{G}}), \quad \forall j.$$

Выполнить последнее условие невозможно, так как некоторые гомотопические группы множества $\tilde{\mathscr{G}}$ нетривиальны, как показал Зингер [33].

Зингер вводит группу $\mathscr{G}_\infty$ калибровочных преобразований, совпадающих с единицей на бесконечности и следующие две последовательности расслоений:

$$0 \to \tilde{\mathfrak{Z}} \to \mathscr{G} \to \tilde{\mathscr{G}} \to 0,$$
$$0 \to \mathscr{G}_\infty \to \mathscr{G} \to \mathrm{SU}(N) \to 0.$$

Эти последовательности связывают гомотопические группы многообразия $\tilde{\mathscr{G}}$ с гомотопическими группами многообразия $\mathscr{G}_\infty$. Последние непосредственно связаны с гомотопическими группами для группы SU (N). Точнее,

$$\pi_j(\mathscr{G}_\infty) \approx \pi_{j+4}(\mathrm{SU}(N)).$$

При $N > 2$ имеем

$$\pi_0(\mathscr{G}) \approx \pi_0(\mathscr{G}_\infty) \approx \pi_4(\mathrm{SU}(N)) \approx 0.$$

Последовательность

$$\pi_1(\tilde{\mathscr{G}}) \to \pi_0(\tilde{\mathfrak{Z}}) = Z_N \to \pi_0(\mathscr{G}) \approx 0$$

является точной. Поэтому $\pi_1(\tilde{\mathscr{G}}) \neq 0$.

Для группы SU (2) имеем $\pi_j(\tilde{\mathscr{G}}) = \pi_j(G)$ из рассмотрения первой последовательности $(j > 1)$. Последовательность

$$\pi_3(\mathscr{G}) \to \pi_3(\mathrm{SU}(2)) \to \pi_2(\mathscr{G}_\infty) \to \pi_2(\mathscr{G})$$

является точной, т. е. последовательность

$$\pi_3(\mathscr{G}) \to Z \to Z_{12} \to \pi_2(\mathscr{G})$$

— точная. Так как $Z \neq Z_{12}$, то группы $\pi_2(\tilde{\mathscr{G}})$ и $\pi_3(\tilde{\mathscr{G}})$ не могут одновременно зануляться. Следовательно, либо $\pi_2(\tilde{\mathscr{G}}) \neq 0$, либо $\pi_3(\tilde{\mathscr{G}}) \neq 0$.

Нетривиальность гомотопии группы $\tilde{\mathscr{G}}$ указывает на нетривиальность отображения $\mathscr{C}' \to \eta'$, что делает невозможным *непрерывное* фиксирование калибровки.

Эта изящная «запрещающая теорема» Зингера является примером того, какие результаты можно получить из теории расслоений: эти результаты существенно *глобальны*, относятся к гладким объектам и, как правило, используют гомотопию.

Отметим также следующее. Так называемая грибовская неоднозначность (см. работу Грибова [51]) связана с топологическим препятствием, возникающим при попытке продолжить локальное сечение в расслоении $\mathscr{C}' \to \eta'$ до глобального. Из проведенного Зингером анализа ясно, что это препятствие обусловлено нетривиальной топологией группы $\tilde{\mathscr{G}}$. Было показано, что группа $\tilde{\mathscr{G}}$ обладает нетривиальными гомотопическими группами. Следует подчеркнуть, что эта топология группы $\tilde{\mathscr{G}}$ обусловлена заменой пространства R^4 компактным многообразием S^4. *Она не имеет отношения к наличию инстантонов.* Даже в секторе, где число инстантонов равно нулю, топология группы $\tilde{\mathscr{G}}$ нетривиальна. Это может быть непосредственно подтверждено следующим доводом. В этом секторе расслоение тривиально, $P = S^4 \times G$. При этом группа $\mathscr{G}_\infty$ совпадает с множеством отображений g: $(S^4, \infty) \to (G, e)$. Эти отображения распадаются на два класса, и потому группа $\tilde{\mathscr{G}}$ обладает нетривиальной топологией.

г) Пространство орбит η'

В предыдущем разделе утверждалось, что множество неприводимых связностей является главным расслоением со структурной группой $\tilde{\mathscr{G}}$. Базовое пространство этого расслоения, $\eta' = \mathscr{C}'/\tilde{\mathscr{G}}$, является множеством калибровочно неэквивалентных неприводимых связностей. Пространство η' представляет не только академический интерес: фейнмановский континуальный интеграл для калибровочных теорий — это в сущности интеграл по пространству η. Вместо η можно, однако, рассматривать η', так как η' — всюду плотно в η (см. работу Зингера [33]).

Чтобы разобраться в структуре пространства η', можно использовать последовательность для расслоения $\mathscr{C}' \to \eta'$ с группой $\tilde{\mathscr{G}}$:

$$\to \pi_k(\mathscr{C}') \to \pi_k(\eta') \to \pi_{k-1}(\tilde{\mathscr{G}}) \to \pi_{k-1}(\mathscr{C}') \to .$$

Так как $\pi_k(\mathscr{C}') = 0$ для всех k, то получается следующая точная последовательность:

$$0 \to \pi_k(\eta') \to \pi_{k-1}(\tilde{\mathscr{G}}) \to 0,$$

и потому

$$\pi_k(\eta') \approx \pi_{k-1}(\tilde{\mathscr{G}}).$$

Отсюда непосредственно следует, что множество калибровочно неэквивалентных неприводимых связностей, т. е. пространство неприводимых орбит, обладает нетривиальной топологией.

Известно, что в пространстве η' можно ввести локальные координаты, фиксируя калибровку локально, иными словами, задавая локальные сечения в расслоении $\mathscr{C}' \to \eta'$ (см. работу Даниэля и Виалле [47]). Данная орбита может иметь различные координаты, если она принадлежит пересечению различных координатных областей, хотя все ее точки связаны калибровочными преобразованиями.

7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОЕ ЗАМЕЧАНИЕ

Все время предполагалось, что полевые конфигурации принадлежат классу C^∞, т. е. класс полей был существенно ограничен. Использование лишь гладких объектов обусловлено тем, что рассматривались только классические поля без источников.

При обращении к квантовой теории, вводя фейнмановский континуальный интеграл, необходимо расширить конфигурационное пространство. Возможный путь к этому — замена конфигураций класса C^∞ некоторым соболевским пополнением H_k этого пространства. Как показали Нарашиман и Рамадас [52], это обобщение не портит структуру классической теории. Поэтому мы можем надеяться, что результаты, относящиеся к структуре классической теории, могли бы пролить новый свет на квантовую теорию полей Янга — Миллса по крайней мере на уровне квазиклассического приближения. Например, можно использовать богатую топологию классической теории, чтобы уяснить вид меры интегрирования в функциональном пространстве

$$d\mu = Z^{-1} \exp\left[-a(A)\right] [dA],$$

где $a(A)$ — функционал действия для полей Янга — Миллса (см. раздел а) гл. 5), а Z — нормировочный множитель. Вид меры $d\mu$ представляет интерес с точки зрения статистической механики для калибровочных потенциалов в евклидовом пространстве. Имея статистическую механику в пространстве связностей, можно на основе подхода Остервальдера — Шрадера построить и разумную квантовую теорию в пространстве Минковского.

Во всяком случае, теория расслоенных пространств остается адекватным языком для описания как локальных, так и глобальных аспектов теории классических калибровочных полей. Предстоит еще разобраться в том, к каким физическим следствиям приводят уже полученные в этом подходе результаты, однако уже теперь ясно, что геометрический метод позволил существенно углубить наше понимание теории калибровочных полей.

Благодарности

Мы хотели бы выразить признательность П. К. Миттеру за плодотворные обсуждения. Один из нас (М. Д.) хотел бы поблагодарить проф. М. Гурдена и проф. М. Леви за гостеприимство в Лаборатории теоретической физики и физики высоких энергий и выразить признательность Национальному центру Научных Исследований за финансовую поддержку.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwarz A. S., Tyupkin Yu. S.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 59, p. 85.
2. Stora R.— In: Lectures at the International School of Mathematical Physics. Erice, 1977.
3. Mayer M. E.— In: Fiber Bundle Techniques in Gauge Theories: Lectures in Mathematical Physics at the University of Texas at Austin/Ed. A. Boehm, J. D. Dollard, Berlin: Springer-Verlag, 1977.
4. Kerner R.— Ann. Inst. Henri Poincaré Ser. A, 1968, t. 9, p. 143.
5. Kerner R.— C. R. Ac. Sci., 1970, t. 270, p. 000.
6. Trautman A.— Rept. Math. Phys., 1970, v. 1, p. 29.
7. Cho Y. M.— J. Math. Phys., 1975, v. 16, p. 2029.
8. Ezawa Z. F., Tze H. C.— J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 2228.
9. Nelson E. Tensor Analysis: Mathematical Notes.— Princeton: Princeton University Press, 1967.
10. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1972.—С. 92.
11. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. V. 1 — N. Y.: J. Wiley, 1963.
12. Steenrod N. The Topology of Fibre Bundles.— Princeton: Princeton University Press, 1951.— (Princeton Math. Series V. 14).— (Перевод: Стинрод Н. Топология косых произведений.— М.: ИЛ, 1953 *)).

*) Переводы книг на русский язык указаны переводчиком данной статьи. (*Прим. ред.*)

13. Wu T. T., Yang C. N.— Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 12, p. 3845.
14. Avis S. J., Isham C. J.— In: Lectures delivered at the Cargèse Summer School on Recent Advances in Gravitation, 1978.
15. Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., Gravitation.— San Francisco: Freeman, 1973.— (Перевод: Мизнер Ч., Торн К., Уилер Дж. Гравитация. Т. 1—3.— М.: Мир, 1977).
16. Flanders H. Differential Forms.— N. Y.: Academic Press, 1963.
17. De Ram G. Variétés Différentiables.— Paris; Hermann, 1960.— (Перевод: де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия.— М.: ИЛ, 1956).
18. Choquet-Bruhat Y., de Witt-Morette C., Dillard-Bleick M. Analysis, Manifolds and Physics.— Amsterdam: North-Holland, 1977.
19. Chevalley C. Theory of Lie Groups.— Princeton: Princeton University Press, 1946.— (Перевод: Шевалле К. Теория групп Ли.— М.: ИЛ, 1948).
20. Loos H. G.— J. Math. Phys., 1967, v. 8, p. 2114.
21. Попов Д. А.— ТМФ, 1975, т. 24, с. 347.
22. Chern S. S. Complex Manifolds without Potential.— Princeton: Van Nostrand, 1967.— (Перевод: Чжень Шен-шень. Комплексные многообразия.— М.: ИЛ, 1961).
23. Atiya M. F., Hitchin N. J., Singer I. M.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1978, v. 362, p. 425.
24. Lüscher M., Mack G.— Comm. Math. Phys.. 1975, v. 41, p. 203.
25. Jackiw R., Rebbi C.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 14, p. 517.
26. Bott R., Matheu J.— In: Batelle Rencontres 1967/Ed. C. de Witt-Morette, J. Wheeler, N. Y.: W. Benjamin, 1968.
27. Milnor J. W.— Ann. Math. (2), 1956, v. 63, p. 272.
28. Milnor J. W.— Ibid., p. 430.
29. Husemoller D. Fibre Bundles.— N. Y.: McGraw Hill, 1966.— (Перевод: Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1970).
30. Kobayashi S., Nomizu K. Foundations of Differential Geometry. V. II — N. Y.: J. Wiley, 1969
31. Dupond J. L.— In: Curvature and Characterisitc Classes/Ed. A. Dold, B. Eckmann, Berlin: Springer-Verlag, 1978.
32. Crewther R. J.— In: Facts and Prospects of Gauge Theories/ Ed. P. Urban.— Acta Physica Austriaca, Suppl., 1978, v. 19, p. 47.
33. Singer I. M. — Comm. Math. Phys., 1978, v. 60, p. 7.
34. Milnor J. W. Morse Theory: Annals of Math. Studies 51.— Princeton: Princeton University Press, 1963.— (Перевод: Милнор Дж. Теория Морса.— М.: Мир, 1965).
35. Bourguignon J. P., Lawson H. B., Simons J.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1979, v. 76, p. 1550.
36. Daniel M., Mitter P. K., Viallet C. M.— Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 77, p. 77.
37. Flume R.— Ibid., 1978, v. 76, p. 593.
38. Atiya M. F., Ward R. S.— Comm. Math. Phys., 1977, v. 55, p. 117.
39. Atiya M. F., Hitchin N. J., Drinfeld V. G., Manin Yu. I.— Phys. Lett. Ser. A, 1978, v. 65, p. 185.
40. Corrigan E. F., Fairlie D. B., Goddard P., Yates R. G.— Comm. Math. Phys., 1978, v. 58, p. 223.
41. Corrigan E. F., Fairlie D. B., Templeton S., Goddard P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 140, p. 31.
42. Christ N. H., Stanton N. K., Weinberg E. J.— Phys. Rev. Ser. D, 1978, v. 18, p. 2013.
43. Bernard C. N., Christ N. H., Guth A. H., Weinberg E. J.— Ibid., 1977, v. 16, p. 2967.
44. Madore J., Richard J. L., Stora R.— In: Feynman Path Integrals/ Ed. S. Albeverio et al, Berlin: Springer-Verlag, 1979.
45. Atiya M. F., Bott R. 1978 (unpublished).
46. Schwarz A. S.— Phys. Lett. Ser. B, 1977, v. 67, p. 172.
47. Daniel M., Viallet C. M.— Ibid., 1978, v. 76, p. 45.
48. Schwarz A. S.— Comm. Math. Phys., 1979, v. 64, p. 233.
49. Mack G.— Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 78, p. 263.
50. 't Hooft G.— Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 138, p. 1.
51. Грибов В. Н.— В кн.: Физика элементарных частиц: XII школа ЛИЯФ, Л.: ЛИЯФ, 1977.—С. 147.
52. Narashiman M. S., Ramadas T. R.— Comm. Math. Phys., 1979, v. 67, p. 121.
53. Babelon O., Viallet C. M.— Phys. Lett. Ser. B, 1979, v. 85, p. 246.