

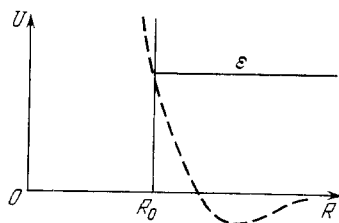
МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

533.9

МОДЕЛЬ ТВЕРДОЙ СФЕРЫ В ФИЗИКЕ ПЛАЗМЫ И ГАЗА**Б. М. Смирнов**

1. Модель твердой сферы — распространенная физическая модель в задачах о рассеянии атомных частиц (см., например, ¹⁻⁴). Простые выражения для сечений столкновения позволяют в рамках этой модели получать аналитические выражения для макроскопических величин, в частности для коэффициентов переноса. Достоинство модели твердых сфер не

Рис. 1. Потенциал взаимодействия частиц в модели твердой сферы (сплошная кривая) и реальный потенциал взаимодействия атомов (штриховая).



только в ее простоте, но и в том, что она дает возможность находить численные значения макроскопических параметров. Все это и объясняет популярность модели твердой сферы.

На рис. 1 представлены потенциал взаимодействия классических частиц в модели твердых сфер и реальный потенциал взаимодействия атомов. Если интересующий нас макроскопический параметр определяется отталкивательной областью потенциала взаимодействия частиц, разумно заменить реальный потенциал взаимодействия модельным и перейти к модели твердых сфер. Такая операция тем удачнее, чем резче изменяется потенциал взаимодействия частиц, т. е. она требует малости параметра

$$\xi = \left| \frac{d \ln U}{d \ln R} \Big|_{R_0} \right|^{-1} \ll 1, \quad (1)$$

где U — потенциал взаимодействия частиц, R — расстояние между ними. Очевидно, модель твердой сферы соответствует нулевому приближению в разложении по малому параметру.

Переход от реального потенциала к модельному в модели твердых сфер вызывает некоторую неопределенность в величине радиуса твердой сферы. Эта неопределенность устраняется при нахождении следующего члена разложения рассматриваемой величины по малому параметру (1). Учет первых двух членов разложения по малому параметру (1) возвращает нас к реальному потенциалу взаимодействия частиц в отталкивательной области. При этом выражения для макроскопических величин оказываются

такими же, что и в модели твердой сферы, но требуется нахождение эффективного радиуса твердой сферы. Тем самым такая модифицированная модель твердой сферы сохраняет простоту модели твердой сферы и позволяет учитывать реальный резко меняющийся потенциал взаимодействия атомов. Такая модифицированная модель твердой сферы и будет далее рассмотрена.

Т а б л и ц а I

Значения параметра $n^*)$

Взаимодействующие атомы	He	Ne	Ar	Kr	Xe
He	7,6	8,1	8,8	8,2	7,6
Ne	—	7,0	8,3	9,4	8,8
Ar	—	—	7,5	9,0	7,7
Kr	—	—	—	7,2	9,1
Xe	—	—	—	—	9,6

*) Параметры потенциала отталкивательного взаимодействия атомов взяты из обзора В. Б. Леонаса⁵.

Возникает вопрос, насколько справедлива модель твердой сферы в реальных случаях. В табл. I приведены значения параметра

$$n(R_0) = - \frac{d \ln U(R)}{d \ln R} \Big|_{R_0}$$

в случае взаимодействия двух атомов инертного газа при расстоянии между ядрами, где потенциал взаимодействия $U(R_0)$ равен 0,1 эВ. Как видно, условия применимости модели твердой сферы ($\xi = 1/n \ll 1$) в области отталкивательного потенциала реально хорошо выполняются.

2. Получим выражения для сечений столкновения в рамках модели твердой сферы. Рассмотрим сначала столкновение классических частиц:

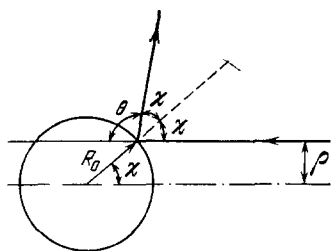


Рис. 2. Рассеяние классических частиц в модели твердой сферы:

r_0 — радиус твердой сферы, ρ — прицельный параметр столкновения, θ — угол рассеяния.

с резко отталкивательным потенциалом взаимодействия. Характер рассеяния частиц в этом случае представлен на рис. 2, откуда находим для дифференциального сечения рассеяния частиц в системе центра инерции

$$d\sigma = 2\pi\rho d\rho = \frac{\pi R_0^2}{2} d \cos \theta. \quad (2)$$

При этом использовано, что $\theta = \pi - 2\chi$ и $\rho = R_0 \sin \chi$. Как видно, дифференциальное сечение рассеяния не зависит от угла рассеяния. Выражение (2) позволяет определить интегральные сечения рассеяния частиц.

В частности, транспортное, или диффузионное, сечение рассеяния равно

$$\sigma^* = \int (1 - \cos \theta) d\sigma = \pi R_0^2. \quad (3)$$

Сечение рассеяния, входящее в выражения для коэффициентов теплопроводности и вязкости газа, равно

$$\sigma^{(2)} = \int (1 - \cos^2 \theta) d\sigma = \frac{2}{3} \pi R_0^2. \quad (4)$$

Интегральные сечения столкновения не зависят от скорости сталкивающихся частиц. Таким образом, особенность модели твердых сфер связана с тем, что дифференциальное сечение рассеяния частиц в этой модели не зависит ни от угла рассеяния, ни от скорости частиц, а интегральные сечения рассеяния не зависят от скорости частиц.

Эти свойства относятся не только к рассеянию частиц, движущихся по классическому закону. Рассмотрим рассеяние медленного электрона на атоме или молекуле. Амплитуда рассеяния медленного электрона равна ⁶

$$f(\theta) = -L, \quad (5)$$

где L — длина рассеяния электрона на атомной частице. Отсюда получаем для дифференциального сечения рассеяния электрона на атоме или молекуле

$$d\sigma = 2\pi |f(\theta)|^2 d\cos\theta = 2\pi L^2 d\cos\theta. \quad (6)$$

Как видно, дифференциальное сечение рассеяния медленного электрона на атоме или молекуле не зависит ни от угла рассеяния, ни от скорости электрона, а интегральные сечения от скорости электрона. Тем самым рассеяние медленного электрона на атоме или молекуле проявляет свойства модели твердой сферы.

3. Рассмотрим конкретные физические задачи, в которых удобно использовать модель твердой сферы. Один круг задач связан с вычислением коэффициентов переноса в газе. Коэффициенты переноса в газе и слабоионизованной плазме выражаются через сечения столкновения атомных частиц. Рассмотрим случай, когда эти сечения определяются отталкивательным и резко меняющимся потенциалом взаимодействия частиц, который мы будем аппроксимировать зависимостью *)

$$U(R) = Ae^{-\alpha R}. \quad (7)$$

Такая зависимость имеет место, например, в случае, когда взаимодействие определяется перекрытием электронных оболочек взаимодействующих частиц (обменное взаимодействие). Ясно, что параметры потенциала взаимодействия A , α порядка соответствующих атомных величин. Поэтому, если нас интересует, например, столкновение частиц с тепловыми энергиями, то сечение рассеяния будет определяться характерными расстоя-

*) Отметим, что такая аппроксимация справедлива для любого монотонно изменяющегося потенциала в некоторой области расстояний. Именно,

$$U(R) = U(R_0) \exp[-\alpha(R - R_0)],$$

где $\alpha = -d \ln U/dR|_{R_0}$, и такая аппроксимация справедлива в области $\Delta R = |R - R_0| < [d^2 \ln U/dR^2|_{R_0}]^{-1/2}$. Например, потенциал $U(R) = BR^{-n}$ может аппроксимироваться зависимостью (7) в области $|R - R_0| < R_0/\sqrt{n}$. Как видно, в этой области расстояний $|\ln(U(R)/U(R_0))| < \sqrt{n}$, т. е. в случае резко меняющегося потенциала сам потенциал взаимодействия в этой области может существенно измениться.

ниями между частицами R_0 , определяемыми соотношением

$$U(R_0) \sim \varepsilon. \quad (8)$$

Поскольку $\varepsilon \ll A$, то $\alpha R_0 \gg 1$, т. е. выполнены условия применимости модели твердой сферы (1). При этом формула (8) определяет радиус твердой сферы, который может быть использован далее в формулах для сечений, например в формулах (3), (4).

Таким образом, если интересующие нас макроскопические характеристики газа определяются отталкивательной частью потенциала взаимодействия атомов *), для расчета сечений рассеяния частиц можно использовать модель твердой сферы. При этом, поскольку мы располагаем малым параметром, естественным желанием является написать следующий член разложения для сечения рассеяния в формулах (3), (4). Это позволит дать более определенное выражение для радиуса твердой сферы. Определим величину r_0 — радиус твердой сферы в нулевом приближении — на основании соотношения

$$U(r_0) = \varepsilon.$$

Очевидно, при вычислении соответствующего интегрального сечения (например, диффузионного) в следующем приближении получим:

$$\sigma^* = \pi \left(r_0 + \frac{a}{\alpha} \right)^2 \equiv \pi R_0^2, \quad (9a)$$

где a — численный коэффициент порядка единицы, $(\alpha r_0)^{-1}$ — малый параметр разложения. Отсюда в соответствии с формулой (7) имеем

$$U(R_0) = U(r_0) e^{-a} = \varepsilon e^{-a}. \quad (9b)$$

Тем самым удобным способом определения интегрального сечения (в рассматриваемом случае диффузионного) является форма (9). В приложении представлено вычисление сечений $\sigma^*(\varepsilon)$ и $\sigma^{(2)}(\varepsilon)$ для резко меняющегося потенциала и проведено их усреднение по максвелловскому распределению.

Отметим, что форма представления сечения в рассматриваемом случае не зависит от вида потенциала при условии, что он резко меняется. Покажем это, аппроксимируя потенциал взаимодействия вместо зависимости (7) зависимостью $U(R) = BR^{-n}$. Условием резкого изменения потенциала является $n \gg 1$, т. е. малый параметр теории в данном случае $1/n$. С учетом этого вместо формулы (9a) имеем

$$\sigma^* = \pi r_0^2 \left(1 + \frac{a}{n} \right)^2 = \pi R_0^2,$$

так что

$$U(R_0) = U(r_0) \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{-n} = \varepsilon e^{-a}.$$

Таким образом, мы снова получили формулу (9b).

В табл. II представлены формулы для вычисления некоторых кинетических коэффициентов переноса в рамках модели твердой сферы. Учет следующего члена разложения представлен в таблице как модифицированная модель твердой сферы. При этом аргумент в сечении столкновения определяется как зависимостью сечения рассеяния от энергии или скорости столкновения, так и видом функции распределения частиц по энергиям. Для атомов и молекул эта функция распределения максвелловская, в случае рассеяния медленных электронов на атомах она зависит от способа

*) Реально критерием применимости этого является $\varepsilon \ll D$, где D — глубина ямы в потенциале взаимодействия частиц.

Таблица II

Формулы для кинетических коэффициентов переноса в модели твердой сферы

Величина	Формула ^{1-4, 7}	Формула для модели твердой сферы ^{1-4, 7}	Выражения для сечения в модифицированной модели твердой сферы ⁸⁻¹⁰
1. Коэффициент диффузии частиц в газе *)	$D = \frac{3 \sqrt{\pi T}}{8 N \sigma^* \sqrt{2\mu}},$ $\bar{\sigma}^* = \int_0^\infty e^{-x} x^2 \sigma^*(x) dx,$ $x = \frac{\mu v^2}{2T},$ $\sigma^* = \int (1 - \cos \theta) d\sigma$	$D = \frac{3 \sqrt{\pi T}}{8 N \sigma_1 \sqrt{2\mu}},$ $\sigma_1 = \pi R_0^2$	$\sigma_1 = \pi r_1^2,$ <p>где $U(r_1) = 2,2T$</p>
2. Коэффициент теплопроводности газа *)	$\kappa = \frac{25 \sqrt{\pi T}}{32 \sqrt{M} \sigma^{(2)}},$ $\bar{\sigma}^{(2)} = \int_0^\infty e^{-x} x^2 \sigma^{(2)}(x) dx,$ $x = \frac{M v^2}{4},$ $\sigma^{(2)} = \int (1 - \cos^2 \theta) d\sigma$	$\kappa = \frac{25 \sqrt{\pi T}}{32 \sqrt{M} \sigma_2},$ $\sigma_2 = \frac{2}{3} \pi R_0^2$	$\sigma_2 = \frac{2}{3} \pi r_2^2,$ <p>где $U(r_2) = 0,83T$</p>
3. Коэффициент вязкости *)	$\eta = \frac{5 \sqrt{\pi T M}}{24 \sigma^{(2)}}$	$\eta = \frac{5 \sqrt{\pi T M}}{24 \sigma_2}$	
4. Дрейфовая скорость электрона в газе в постоянном электрическом поле **)	$w = \frac{eE}{3mN} \left\langle \frac{1}{v^2} \frac{d}{dv} \left(\frac{v^2}{\sigma_e^*} \right) \right\rangle$	$w = \frac{2eE}{3mN} \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle \frac{1}{\sigma_e^*},$ $\sigma_e^* = 4\pi L^2,$ <p>L — длина рассеяния электрона на частице газа.</p>	$\sigma_e^* = \sigma_e(v_0), \quad v_0 =$ $= \frac{3}{2 \left\langle \frac{1}{v} \right\rangle}, \quad v_0^M =$ $= \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2\pi T_e}{m}} \quad ***)$ $\sigma_e^* = \sigma_e(v_0),$ $v_0 = \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle}, \quad v_0^M =$ $= \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2\pi T_e}{m}} \quad ***)$
5. Коэффициент поперечной диффузии электронов в газе в постоянном электрическом поле **)	$D_\perp = \frac{1}{3N} \left\langle \frac{v}{\sigma_e^*} \right\rangle$	$D_\perp = \frac{\langle v \rangle}{3N \sigma_e^*}$	$\sigma_e^* = \sigma_e(v_0),$ $v_0 = \frac{\langle v^2 \rangle}{\langle v \rangle}, \quad v_0^M =$ $= \frac{3}{4} \sqrt{\frac{2\pi T_e}{m}} \quad ***)$
6. Потеря энергии электрона в единицу времени за счет упругого рассеяния на частицах газа **)	$\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{\text{упр}} = \frac{m^2}{M} N \langle v^3 \sigma_e^* \rangle$	$\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{\text{упр}} =$ $= \frac{m^2}{M} N \langle \sigma_e^* v^3 \rangle$	$\sigma_e^* = \sigma_e(v_0),$ $v_0 = \frac{\langle v^4 \rangle}{\langle v^3 \rangle}, \quad v_0^M =$ $= \frac{15}{16} \sqrt{\frac{2\pi T_e}{m}} \quad ***)$

*) Здесь T — температура газа, N — плотность частиц газа, M — масса частицы газа, μ — приведенная масса сталкивающейся частицы и частицы газа, v — относительная скорость столкновения.

**) Здесь e — заряд электрона, E — напряженность электрического поля, m — масса электрона, N — плотность частиц газа, v — скорость электрона, σ_e^* — диффузионное сечение рассеяния электрона на атомной частице, M — масса частицы газа; угловые скобки означают усреднение по скоростям электрона.

***) v_0^M — значение скорости в аргументе сечения для максвелловской функции распределения электронов с температурой электронов T_e .

установления равновесия для электронов. В табл. II приведены конкретные значения аргумента в сечении для максвелловской функции распределения электронов.

Зависимость сечения столкновения тяжелых атомных частиц определяется формулами (9). Из них следует, что с точностью до двух первых членов разложения по малому параметру сечение рассеяния частиц в модифицированной модели твердой сферы для резко меняющегося потенциала взаимодействия частиц равно

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon_0) \left(1 + \frac{2}{\alpha R_0} \ln \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right). \quad (10)$$

Такой вид сечения использовался при усреднении по максвелловскому распределению частиц в табл. II (см. приложение 1). В случае рассеяния медленных электронов на атоме или молекуле диффузионное сечение имеет вид (см., например, ⁷)

$$\sigma^* = 4\pi \left(L^2 + \frac{4\pi}{5} \beta v L + \frac{\pi^2 \beta^2 v^2}{6} \right), \quad (11)$$

где L — длина рассеяния на атоме или молекуле, v — скорость электрона β — поляризуемость атома или молекулы; здесь использованы атомны

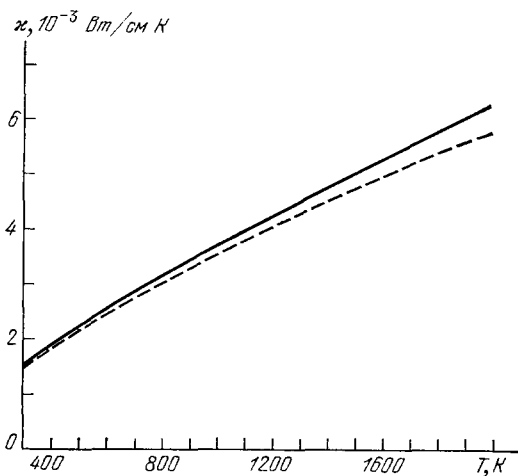


Рис. 3. Коэффициент теплопроводности гелия.

Штриховая кривая — эксперимент ^{11, 12}, сплошная — расчет по формуле табл. II. Использование потенциала взаимодействия в форме (7) с параметрами $A = 196$ эВ, $\alpha = 4,21$ Å, которые взяты из обзора ⁸, приводит в этом случае к следующему аналитическому выражению для коэффициента теплопроводности: $\kappa = 7,37 \sqrt{T} / (14,82 - \ln T)^2$, где температура гелия T — в К, а коэффициент теплопроводности — в 10^{-3} Вт/см·К.

единицы $\hbar = m_e = e^2 = 1$. Тем самым разложение сечения при малых энергиях электрона имеет вид $\sigma(v) = \sigma_0 + Av$, где σ_0 — сечение рассеяния при нулевой скорости столкновения, $A = d\sigma/dv|_{v=0}$. Такой вид сечения использовался при усреднении в табл. II.

Удобство модифицированной модели твердых сфер можно видеть из табл. II. Учет следующего члена разложения по малому параметру теории не изменяет выражений для макроскопических параметров в рамках модели твердых сфер, а уточняет радиус твердой сферы, в случае, когда этот параметр определяется столкновением тяжелых атомных частиц, или же указывает, при каких скоростях столкновения следует брать сечения в выражениях для параметров, определяемых столкновением медленных электронов с атомами.

На рис. 3 проводится сравнение значений коэффициентов теплопроводности гелия, вычисленных по асимптотической формуле табл. II, с экспериментальными значениями. В рассматриваемом случае тепловые энергии атомов гелия значительно превышают глубину ямы в потенциале взаимодействия двух атомов. Поэтому коэффициент теплопроводности

определяется отталкивательной областью потенциала взаимодействия. Простой вид потенциала взаимодействия позволяет получить простую аналитическую формулу для коэффициента теплопроводности.

4. Таблица III содержит другой пример рассматриваемого типа, относящийся к коэффициентам переноса ионов в постоянном электрическом поле

Таблица III

m/M	$\ll 1$	0,1	0,2	0,5	0,8	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	$\gg 1$
A	$0,897 \left(\frac{m}{M}\right)^{1/4}$	0,490	0,572	0,701	0,777	0,811	0,864	0,893	0,925	0,943	1,000
c	$1,120 \sqrt{\frac{m}{M}}$	3,75	2,79	1,84	1,47	1,34	1,17	1,09	1,02	0,977	0,867

напряженностью E в атомном газе. Эти величины определяются сечением упругого столкновения ионов с частицами газа. В данном случае средняя энергия ионов оказывается порядка $\bar{\epsilon} \sim eE\lambda$ ($\bar{\epsilon}$ — энергия, набираемая ионом в поле между соседними столкновениями, где $\lambda \sim (N\sigma)^{-1}$ — длина свободного пробега, σ — сечение столкновения). Дрейфовая скорость ионов по порядку величины составляет $w \sim \sqrt{eE\lambda/m}$, где m — масса иона, а коэффициент диффузии ионов в газе $D \sim \sqrt{eE/m\lambda}$. В этих оценках мы полагаем, что масса иона и частицы газа одного порядка. Ясно, что коэффициенты пропорциональности в этих формулах зависят от отношения массы иона m к массе атома газа M . Представим выражение для дрейфовой скорости иона в виде

$$w = A \sqrt{\frac{eE}{\mu N \sigma^* (cw)}}, \quad w \gg \sqrt{\frac{T}{M}}, \quad (12)$$

где μ — приведенная масса иона и атома газа, σ^* — диффузионное сечение столкновения этих частиц, A , c — численные параметры, значения которых зависят от отношения, массы иона m к массе атома M и приведены в таблице III. *) Отметим, что в рассматриваемом случае диффузионное сечение рассеяния иона на атоме равно

$$\sigma^* = \pi R_1^2, \quad U_1(R_1) = 0,81c^2 \frac{\mu w^2}{2}. \quad (13)$$

Тем самым соотношения (12), (13) дают однозначную связь потенциала взаимодействия иона на атоме и дрейфовой скорости иона при высоких напряженностях поля.

5. Модель твердых сфер может представлять интерес не только для задач столкновения атомов с отталкивательным резко изменяющимся потенциалом взаимодействия, но и для задач, где результат определяется самим взаимодействием. Рассмотрим один из примеров такого рода — уравнение состояния в газе с высокой температурой и малой плотностью, которое с учетом первого члена разложения по малой плотности имеет вид (см. например, ¹⁵)

$$P = NT (1 + NB); \quad (14)$$

*) Эти величины получены на основе данных Скалерада ¹³, который рассчитал искомые характеристики методом Монте-Карло для потенциала взаимодействия иона и атома $U \sim R^{-n}$. Результаты этих расчетов были обработаны в рамках модифицированной модели твердой сферы в работе ¹⁴.

здесь P — давление газа, T — температура газа, N — плотность атомов в газе, B — второй вириальный коэффициент:

$$B(T) = \frac{1}{2} \int \left\{ 1 - \exp \left[-\frac{U(R)}{T} \right] \right\} dR, \quad (15)$$

где U — потенциал взаимодействия двух атомов, R — расстояние между ними. В рассматриваемом случае тепловая энергия атомов значительно превышает глубину ямы их потенциала взаимодействия. Поэтому значение вириального коэффициента определяется отталкивательной частью потенциала взаимодействия и согласно формуле (15) равно

$$B(T) = \frac{2\pi R_0^3}{3}, \quad U(R_0) = cT, \quad (16)$$

и значение безразмерного коэффициента $c \sim 1$. Расчет этого коэффициента, проведенный в приложении II, дает $c = 1,78$.

6. Ясно, что модель твердой сферы можно использовать в области ее применимости, где потенциал взаимодействия классических частиц резко меняется с расстоянием между ними или сечение рассеяния электронов на атомах или молекулах слабо зависит от скорости столкновения. При этом возникает практический вопрос о точности модели. Ее можно установить, сравнивая точное сечение столкновения с рассчитанным по формулам (П1.12), (П1.16) в рамках модели твердой сферы. Такое сравнение проводится в табл. IV. Еще более показательным является сравнение

Таблица IV

Сечения столкновений в модели твердых сфер и точные сечения для потенциала взаимодействия классических частиц $U(R) = BR^{-n}$. Сечение упругого столкновения частиц равно $\sigma = C(B/\varepsilon)^{2/n}$, где ε — энергия в системе центра инерции. В таблице приводятся значения коэффициента C , а также отношение сечения в модели твердых сфер σ_{ac} к точному сечению σ_T . Точные сечения взяты из ^{3, 4, 16-18}, модельные рассчитаны по формулам (П1.12) и (П1.16)

n	Точное сечение		Сечение в модели твердой сферы		Отношение сечений	
	σ_T^*	$\sigma_T^{(2)}$	σ_{ac}^*	$\sigma_{ac}^{(2)}$	σ_{ac}^*/σ_T^*	$\sigma_{ac}^{(2)}/\sigma_T^{(2)}$
4	3,75	3,87	3,33	4,37	0,888	1,127
6	3,49	3,24	3,27	3,42	0,936	1,056
8	3,39	2,95	3,23	3,02	0,953	1,025
10	3,32	2,76	3,22	2,81	0,969	1,016
12	3,29	2,65	3,20	2,68	0,974	1,010
14	3,26	2,56	3,19	2,58	0,972	1,008

физических характеристик, рассчитанных на основании модели твердых сфер, и точных решений в тех случаях, когда таковые имеются. Далее мы проведем сравнение коэффициентов переноса для модели твердых сфер и модели Максвелла. В модели Максвелла сечение столкновения зависит от скорости столкновения по закону $\sigma \sim 1/v$. Такая зависимость позволяет получить простые аналитические выражения для коэффициентов переноса.

Достоинство модели Максвелла в задачах, связанных с движением электронов в газе, вытекает из приведенных в табл. II формул. Считая, что $v = N\nu\sigma^*$ (ν не зависит от скорости, сразу же получаем для дрейфовой скорости, коэффициента поперечной диффузии и потери энергии электрона в единицу времени в результате упругих соударений

$$w = \frac{eE}{mv}, \quad D_{\perp} = \frac{\langle v^2 \rangle}{2\nu} = \frac{2\bar{\varepsilon}}{3mv}, \quad \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_{\text{уп}} = \frac{m^2}{M} \nu \langle v^2 \rangle = 2 \frac{m}{M} \bar{\varepsilon} \nu, \quad (17)$$

где $\bar{\epsilon}$ — средняя энергия электронов, и приведенные выражения не связаны с функцией распределения электронов по энергиям.

Удобство модели Максвелла в случае столкновения тяжелых частиц связано с тем, что в этом случае можно получить аналитические выражения для интегральных соотношений от интеграла столкновений частиц. Это позволяет получить аналитические выражения для коэффициентов переноса частиц в газе. В приложении 3 представлен один из примеров такого рода — вычислена дрейфовая скорость ионов в газе, которая равна

$$w = \frac{eE}{\mu\nu}; \quad (18)$$

здесь μ — приведенная масса газа, $\nu = N\nu\sigma^*(v)$ (ν — частота столкновений ионов с атомами газа (ср. с формулой (15))). Отметим, что это выражение справедливо при любой напряженности электрического поля, причем для определения дрейфовой скорости не требуется знание функции распределения ионов по скоростям.

Используя это выражение при малой напряженности поля и также учтя соотношение Эйнштейна

$$\frac{w}{E} = \frac{eD}{T}, \quad (19)$$

получим для коэффициента диффузии ионов в газе

$$D = \frac{T}{\mu\nu}. \quad (20)$$

Эта формула справедлива и в пределе, когда заряд иона стремится к нулю, т. е. формула (20) определяет коэффициент диффузии атомов или молекул в газе.

Табл. V содержит сводку формул для коэффициентов переноса в случае модели Максвелла. Соответствующие выражения для них в модели

Таблица V

Формулы для коэффициентов переноса в модели Максвелла

Величина	Формула для модели Максвелла	Отношение величины, вычисленной для модели твердой сферы, к величине в модели Максвелла
1. Коэффициент диффузии частиц в газе	$D = \frac{T}{\mu\nu}, \nu = N\nu\sigma^*(v)$	1,18
2. Коэффициент теплопроводности газа	$\kappa = \frac{5T}{Mk^{(2)}}, k^{(2)} = \nu\sigma^{(2)}(v)$	0,935
3. Коэффициент вязкости газа	$\eta = \frac{4T}{3k^{(2)}}$	0,935
4. Дрейфовая скорость электрона *)	$w = \frac{eE}{m\nu}$	1,00
5. Коэффициент поперечной диффузии электронов *)	$D_{\perp} = \frac{2\bar{\epsilon}}{3m\nu}$	1,00
6. Потеря энергии электронов в единицу времени *)	$\left(\frac{d\epsilon}{dt}\right)_{\text{уп}} = 2 \frac{m}{M} \bar{\epsilon} \nu$	0,906

*) Электрон движется в газе в постоянном электрическом поле; $\bar{\epsilon}$ — средняя энергия электрона, M — масса частицы газа.

твердой сферы содержатся в табл. II. В табл. V проведено сравнение значений коэффициентов переноса, вычисленных в рамках модели твердой сферы, и их точных значений в случае, когда справедлива модель Максвелла. Как видно, хотя условия применимости модели твердой сферы в этом случае нарушаются, результаты модели твердой сферы практически вполне приемлемы.

Проведенный анализ показывает, что использование модели твердой сферы с учетом двух членов разложения по малому параметру в выражениях для сечений столкновения и макроскопических величин газов является привлекательным. Эта операция не изменяет выражений для соответствующих макроскопических параметров по сравнению с выражениями традиционной модели, а уточняет значения аргументов, при которых берутся сечения, или значение радиуса твердой сферы. Тем самым разложение макроскопических величин по малому параметру модели твердой сферы, не усложняя общих выражений, позволяет хорошо описать реальную ситуацию.

7. Выясним теперь надежность использования модели твердых сфер для расчета коэффициентов переноса в реальном случае. Недостатки асимптотического подхода в модели твердых сфер связаны с двумя обстоятельствами. Во-первых, выражения для сечений могут медленно сходиться к своему пределу, для которого малый параметр теории обращается в нуль. Во-вторых, в реальном потенциале взаимодействия атомных частиц имеется область притяжения, тогда как в рассматриваемой модели мы считаем взаимодействие отталкивательным во всей области расстояний между частицами. Наличие ямы в потенциале взаимодействия будет вносить свои коррективы даже в случае, когда ее глубина мала по сравнению с тепловой энергией сталкивающихся частиц.

Для выяснения характера сходимости усредненных сечений к асимптотическому пределу представим их выражения в той же форме *), что в табл. II:

$$\Omega^{(1,1)} = \pi R_1^2, \quad U(R_1) = a_n T, \quad (21)$$

$$\Omega^{(2,2)} = \frac{2}{3} \pi R_2^2, \quad U(R_2) = b_n T. \quad (22)$$

В табл. VI представлены значения коэффициентов a_n , b_n , полученные из точных выражений для Ω — интегралов в случае отталкивательного потен-

Таблица VI

n	4	6	8	10	12	14	∞
a_n	1,59	1,71	1,76	1,83	1,85	2,05	2,25
b_n	0,975	0,907	0,864	0,851	0,838	0,835	0,826

циала взаимодействия частиц $U(R) = BR^{-n}$. Как видно из этой таблицы, для усредненного сечения $\Omega^{(1,1)}$ коэффициент a_n медленно сходится к своему асимптотическому пределу при $n \rightarrow \infty$. Поэтому реально удобнее выбрать

*) Эта форма представления сечения удобна, ибо в ней область взаимодействия, ответственная за данный процесс, автоматически сводится к одной точке. Поэтому в дальнейшем при учете дополнительных факторов мы будем стремиться сохранить эту форму выражений.

значение a_n для большого, но реального значения n . Полученное таким способом значение a_n отличается от его асимптотического значения.

Далее для усредненного сечения $\Omega^{(1,1)}$ выясним возможность грубого учета ямы в потенциале взаимодействия в случае, когда рассеяние определяется отталкивательной областью. Тогда в области рассеяния потенциал взаимодействия удобно аппроксимировать зависимостью $U(R) = BR^{-n} - C(R)$, где $n \gg 1$ и функция $C(R)$ слабо изменяется с расстоянием R ,

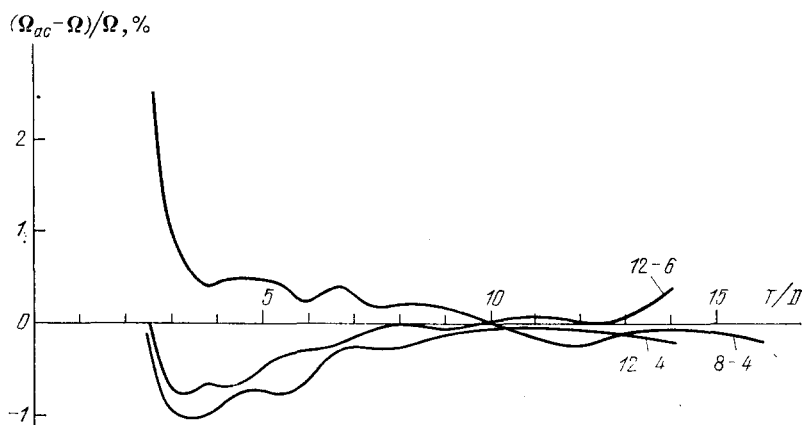


Рис. 4. Сравнение усредненного сечения $\Omega^{(1,1)}$ (Ω_{ac}), рассчитанного по формуле (24) для соответствующего потенциала взаимодействия частиц, с табличными значениями Ω для этого потенциала взаимодействия.

так что ее можно считать константой. Второе слагаемое, приводящее к «смещению» потенциала взаимодействия частиц, учитывает его реальное поведение в области отталкивания. Включая эту часть потенциала взаимодействия, преобразуем соотношение (21) к виду

$$\Omega^{(1,1)} = \pi R_1^2, \quad U(R_1) = aT - F. \quad (23)$$

Ясно, что значение параметра F порядка глубины ямы потенциала взаимодействия D . Для реального потенциала можно предложить следующее эмпирическое соотношение, связывающее усредненное сечение и потенциал взаимодействия частиц:

$$\Omega_{ac}^{(1,1)} = \pi R_1^2, \quad U(R_1) = 1,9(T - 2,5D). \quad (24)$$

На рис. 4, 5 приводятся результаты расчета по этим формулам для модельных потенциалов 12—6, 12—4 и 8—4, которые соответственно имеют вид

$$\left. \begin{aligned} U_{12-6} &= D(x^{-12} - 2x^{-6}), \\ U_{12-4} &= \frac{D}{2}(x^{-12} - 3x^{-4}), \\ U_{8-4} &= D(x^{-8} - 2x^{-4}), \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

где $x = R/R_m$, R — расстояние между частицами, R_m — расстояние между частицами в минимуме потенциала взаимодействия, т. е. $U'(R_m) = 0$. На рис. 4 вычисленные по формуле (24) значения $\Omega^{(1,1)}$ сравниваются с точными значениями для этих потенциалов³. На рис. 5 проводится сравнение восстановленных значений для потенциалов взаимодействия и их точных значений. Потенциалы взаимодействия U_{ac} восстанавливались по формуле (24), в которых использовались табличные значения Ω — интегралов³ для соответствующих потенциалов взаимодействия.

Из проведенных сопоставлений можно сделать вывод, что соотношение (24) позволяет с хорошей точностью вычислять усредненное сечение и связанный с ним коэффициент диффузии по известному потенциалу взаимодействия частиц. Как видно из рис. 4, точность этой операции не хуже 1%, если $T > 3D$, что отвечает отталкивательной области взаимодействия.

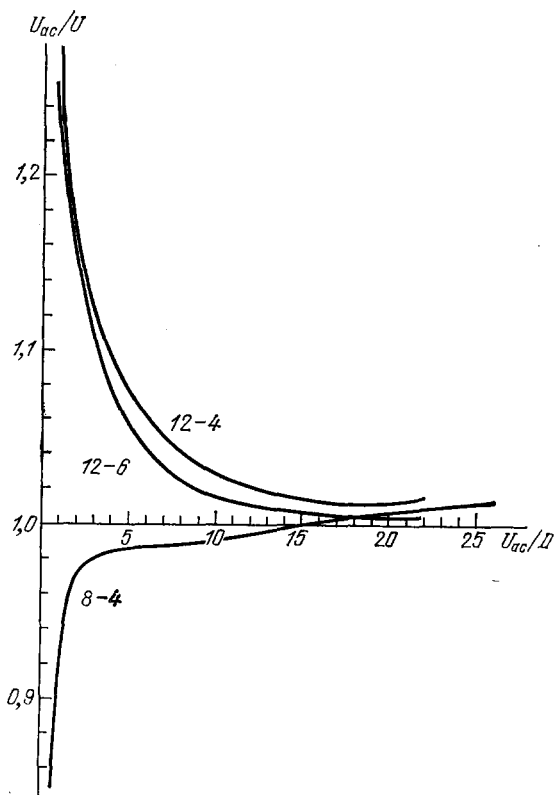


Рис. 5. Сравнение потенциала взаимодействия U_{ac} , восстановленного по формуле (24) с использованием табличных значений $\Omega^{(1,1)}$ для заданного взаимодействия U , с этим потенциалом взаимодействия.

Обратная операция — восстановление потенциала взаимодействия частиц по измеренным значениям коэффициента диффузии — гораздо менее точна. К тому же она требует знания дополнительного параметра — глубины потенциальной ямы. Поэтому восстановление потенциала взаимодействия по измеренным значениям коэффициентов переноса менее удобно, чем по дифференциальному сечению рассеяния частиц. Последний и является современным способом нахождения потенциалов взаимодействия атомных частиц.

Подводя итоги проведенного анализа, приходим к заключению, что модифицированная модель твердой сферы, учитывающая реальный характер взаимодействия сталкивающихся частиц, оказывается удобной при вычислении коэффициентов переноса и других характеристик взаимодействия и столкновения частиц. Основу данной модели составляет то, что

рассеяние частиц определяется отталкивательной частью потенциала взаимодействия. Это и позволяет установить простые соотношения между потенциалом взаимодействия частиц и усредненными сечениями, входящими в выражения для кинетических коэффициентов переноса. Однако еще большее значение имеют простые выражения для дифференциального сечения рассеяния, которые необходимы для определения свойств неравновесного газа и плазмы, а также для нахождения параметров протекающих в них процессов.

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. ВЫЧИСЛЕНИЕ ДИФфуЗИОННОГО СЕЧЕНИЯ ДЛЯ РЕЗКО МЕНЯЮЩЕГОСЯ ПОТЕНЦИАЛА

Диффузионное сечение рассеяния равно

$$\sigma^* = \int (1 - \cos \theta) \cdot 2\pi r dr, \quad (\text{П1.1})$$

где ρ — прицельный параметр столкновения, θ — угол рассеяния, определяемый соотношением¹⁹

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_0}^{\infty} \left[1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{U(R)}{\varepsilon} \right]^{-1/2} \frac{\rho dR}{R^2}; \quad (\text{П1.2})$$

здесь R — расстояние между частицами, ε — энергия столкновения в системе центра инерций, $U(R)$ — потенциал взаимодействия, r_0 — расстояние наибольшего сближения, удовлетворяющее соотношению

$$1 - \frac{\rho^2}{r_0^2} - \frac{U(r_0)}{\varepsilon} = 0. \quad (\text{П1.3})$$

Разложим сечение (П1.1) по малому параметру $1/n$, где $n = -d \ln U(R)/d \ln R$. В нулевом приближении будем считать $U(R) = 0$, $r > r_0$; $U(R) = \infty$, $r \leq r_0$. С учетом этого получим

$$\theta = \pi - 2 \arcsin \frac{\rho}{r_0} = 2\Delta\theta, \quad (\text{П1.4})$$

$$\Delta\theta = \int_{r_0}^{\infty} \left\{ \left[1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{U(R)}{\varepsilon} \right]^{-1/2} - \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right)^{-1/2} \right\} \frac{\rho dR}{R^2}. \quad (\text{П1.5})$$

Соотношения (П1.4), (П1.5) точные. Такое представление угла рассеяния удобно, ибо в нашем случае $\Delta\theta = 1/n$. Чтобы избавиться от расходимостей при вычислении интеграла (П1.5), воспользуемся соотношением

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \int_{r_0}^{\infty} \left[\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right)^{1/2} - \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{U(R)}{\varepsilon} \right)^{1/2} \right] dR = \\ = - \frac{dr_0}{d\rho} \left(1 - \frac{\rho^2}{r_0^2} \right)^{1/2} - \int_{r_0}^{\infty} \left\{ \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right)^{-1/2} - \right. \\ \left. - \left[1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{U(R)}{\varepsilon} \right]^{-1/2} \right\} \frac{\rho dR}{R^2}, \end{aligned}$$

откуда имеем

$$\Delta\theta = \frac{dr_0}{d\rho} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}} + \frac{d}{d\rho} \int_{r_0}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{U(R)}{\varepsilon}} \right] dR. \quad (\text{П1.6})$$

Учитывая, что последний интеграл сходится вблизи $R = r_0$ ($R - r_0 \sim 1/n$), находим его с точностью до $1/n$:

$$\begin{aligned} \int_{r_0}^{\infty} \left[\sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} - \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{R^2} - \frac{U(R)}{\varepsilon}} \right] dR \approx \\ \approx \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}} \int_{r_0}^{\infty} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_0}{R} \right)^n} \right] dR = \\ = \sqrt{r_0^2 - \rho^2} \int_0^1 \frac{(1 - \sqrt{1 - x}) dx}{n x^{1+(1/n)}} = \frac{2}{n} (1 - \ln 2) \sqrt{r_0^2 - \rho^2}, \end{aligned}$$

где

$$x = \left(1 - \frac{\rho^2}{r_0^2} \right)^{-1} \frac{U(R)}{\varepsilon} = \frac{r_0^n}{R^n}.$$

Отсюда находим

$$\Delta\theta = \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{r_0^2}} \frac{dr_0}{d\rho} + \frac{2(1 - \ln 2)}{n} \frac{d}{d\rho} (\sqrt{r_0^2 - \rho^2}). \quad (\text{П1.7})$$

Формулы (П1.3), (П1.4) и (П1.7) позволяют получить выражение для угла рассеяния в случае резко меняющегося отталкивательного потенциала. Вводя $u = U(R_0)/\varepsilon$,

имеем на основании указанных формул

$$\theta = 2 \arcsin \sqrt{u} - 2 \left[\frac{2 - (n-2) \ln 2}{n} \right] \frac{\sqrt{u(1-u)}}{1 + [(n-2)/2]} \approx$$

$$\approx 2 \arcsin \sqrt{u} - 2 \ln 2 \frac{\sqrt{u(1-u)}}{1 + (n/2)u}, \quad (\text{П1.8})$$

где $n = -d \ln u / d \ln r_0$. Это выражение имеет самостоятельное значение, позволяя найти зависимость угла рассеяния от прицельного параметра столкновения ρ , который связан с расстоянием наименьшего сближения r_0 формулой (П1.3):

$$1 - \frac{\rho^2}{r_0^2} = u. \quad (\text{П1.9})$$

На рис. 6 сравниваются точные значения угла рассеяния для потенциала взаимодействия $U(R) = AR^{-12}$, которые взяты из ²⁰, с рассчитанными по формуле (П1.8). Как

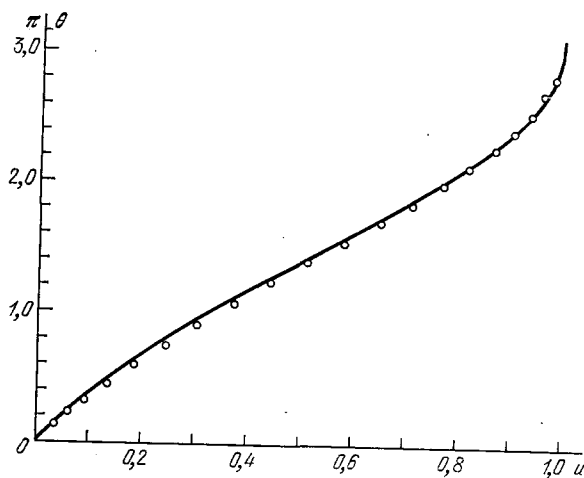


Рис. 6. Угол рассеяния θ в системе центра инерции для потенциала взаимодействия $U = AR^{-12}$.

На абсциссе $u = U(r_0)/E$, где r_0 — расстояние наибольшего сближения частиц, E — кинетическая энергия частиц в СЦИ. Сплошная кривая — расчет в рамках модифицированной модели твердой сферы по формуле (П1.8), кружки — точный результат ²⁰.

видно, расхождение между этими значениями в области параметров столкновения, где рассеяние заметно, не превышает 3%.

При вычислении диффузионного сечения рассеяния учтем, что основной вклад в сечение вносит область значений $u \sim 1$, в которой выражение (П1.8) имеет вид

$$\theta = 2 \arcsin \sqrt{u} - \frac{4 \ln 2}{n} \sqrt{\frac{1-u}{u}}. \quad (\text{П1.10})$$

Считая второе слагаемое малым, имеем с точностью до членов $\sim 1/n$

$$\sigma^* = \int_0^\infty (1 - \cos \theta) \pi \rho^2 d\rho = \pi \int \left[2u [(1-u) dr_0^2 - r_0^2 du] + \right.$$

$$\left. + \pi \int \frac{4 \ln 2}{n} \sqrt{\frac{1-u}{u}} \cdot 2 \sqrt{u(1-u)} r_0^2 du \right]$$

При этом на основании (П1.9) мы воспользовались соотношением $d\rho^2 = (1-u) dr_0^2 - r_0^2 du$ и учли, что первое слагаемое составляет $\sim 1/n$ от второго. Вычисляя в первом слагаемом интеграл по du по частям, имеем *)

$$-\int_0^1 2\pi r_0^2 u du = \pi R_0^2 u^2 \Big|_0^1 - \int_0^1 \pi u^2 \cdot 2r_0 dr_0 =$$

$$= \pi R_0^2 + \int_0^1 2\pi u r_0^2 \frac{du}{n} = \pi R_0^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right),$$

*) Отметим, что $\rho = 0$ соответствует $u = 1$, а $\rho = \infty$ отвечает $u = 0$.

где $u(R_0) = 1$, т. е. $U(R_0) = \varepsilon$. Повторяя эти выкладки для других интегралов и ограничиваясь членами $\sim 1/n$, получим окончательно

$$\sigma^* = \pi R_0^2 \left(1 + \frac{3 - 4 \ln 2}{n} \right). \quad (\text{П1.11})$$

Представим диффузионное сечение в виде $\sigma^* = \pi R_1^2$, т. е.

$$R_1 = R_0 + \frac{1,5 - 2 \ln 2}{n}.$$

Имеем

$$u(R_1) = \left(\frac{R_0}{R_1} \right)^n \approx \exp \left(-\frac{3}{2} + 2 \ln 2 \right) = 4e^{-3/2} = 0,89.$$

Таким образом, диффузионное сечение рассеяния равно ⁶

$$\sigma^* = \pi R_1^2, \quad \text{где} \quad \frac{U(R_1)}{\varepsilon} = 0,89. \quad (\text{П1.12})$$

Проведем усреднение сечения по максвелловскому распределению частиц. Определим среднее сечение, входящее в выражение для коэффициента диффузии:

$$\overline{\sigma^*}(T) = \frac{1}{2} \int_0^\infty \sigma^*(\varepsilon) e^{-x} x^2 dx, \quad (\text{П1.13})$$

где $x = \varepsilon/T$, T — температура газа. Из формулы (П1.12) следует, что $\sigma^*(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-2/n}$, так что

$$\sigma^*(\varepsilon) = \sigma^*(\varepsilon_0) \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{2/n} = \sigma^*(\varepsilon_0) \left[1 - \frac{2}{n} \ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right]. \quad (\text{П1.14})$$

Эта формула справедлива в области $\varepsilon \sim \varepsilon_0$, где второе слагаемое значительно меньше первого. Подставляя (П1.14) в (П1.13), получим для среднего сечения,

$$\overline{\sigma^*}(\varepsilon) = \sigma^*(\varepsilon_0) \left(1 + \frac{2}{n} \ln \frac{\varepsilon_0}{T} - \frac{1}{n} \int_0^\infty x^2 \ln x e^{-x} dx \right).$$

Выберем значение ε_0 таким, чтобы второе и третье слагаемые скомпенсировали друг друга. Получим $\varepsilon_0 = T \exp [\psi(3)]$, где $\psi(3) = -C + (3/2)$ — производная гамма-функции, $C = 0,577$ — постоянная Эйлера. Таким образом, имеем

$$\overline{\sigma^*}(\varepsilon) = \sigma^* \left[T \exp \left(-C + \frac{3}{2} \right) \right]$$

и с учетом формулы (П1.12) получим для усредненного диффузионного сечения

$$\overline{\sigma^*} = \pi r_1^2, \quad \frac{U(r_1)}{T} = 4e^{-C} = 2,25. \quad (\text{П1.15})$$

Представленный метод позволяет получить выражения и для других сечений рассеяния на большой угол при наличии резкого потенциала взаимодействия частиц. В частности, для сечения, входящего в выражения для коэффициентов теплопроводности и вязкости, имеем ⁷

$$\sigma^{(2)} = \int (1 - \cos^2 \theta) d\sigma = \frac{2}{3} \pi R_2^2, \quad \frac{U(R_2)}{T} = 0,23. \quad (\text{П1.16})$$

Усредненное сечение равно

$$\overline{\sigma^{(2)}} = \frac{2}{3} \pi r_2^2, \quad \frac{U(r_2)}{T} = 0,83. \quad (\text{П1.17})$$

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ВТОРОГО ВИРИАЛЬНОГО КОЭФФИЦИЕНТА

Определим значение второго вириального коэффициента (16),

$$B(T) = \int_0^\infty 2\pi R^2 dR (1 - e^{-U/T}), \quad (\text{П2.1})$$

для резко меняющегося с расстоянием R между атомами потенциала взаимодействия $U(R)$. В модели твердой сферы этот интеграл равен половине объема, ограниченного сферой $(2\pi/3) R_0^3$, где $U(R_0) \sim T$. Необходимо определить этот объем более точно, т. е. учесть первые два члена разложения для искомого интеграла по малому параметру. Для этой цели будем аппроксимировать потенциал взаимодействия в области, где $U(R) \sim T$, зависимостью $U(R) = AR^{-n}$, причем для резко меняющегося потенциала $n \gg 1$. Вычисляя интеграл (П2.1), получим

$$B = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{C}{T} \right)^{3/n} \Gamma \left(1 + \frac{3}{n} \right).$$

Как видно, $B = \frac{2\pi}{3} R_0^3$, где

$$\frac{U(R_0)}{T} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\Gamma \left(1 + \frac{3}{n} \right) \right]^{-n/3} = e^{-\psi(1)} = e^C = 1,78; \quad (\text{П2.2})$$

здесь $\psi(1)$ — логарифмическая производная от гамма-функции. Соотношение (П2.2) позволяет установить объем, который и входит в выражение для второго вириального коэффициента в случае реального резко изменяющегося отталкивательного потенциала взаимодействия между частицами.

ДРЕЙФОВАЯ СКОРОСТЬ ИОНА В ГАЗЕ

Выведем формулу для дрейфовой скорости иона в газе в постоянном электрическом поле для модели Максвелла. Воспользуемся уравнением Больцмана:

$$\frac{e\mathbf{E}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}_1} = J_{\text{ст}}, \quad (\text{П3.1})$$

где $f(\mathbf{v}_1)$ — функция распределения ионов по скоростям, m — масса иона, $J_{\text{ст}}$ — интеграл столкновений, который имеет вид

$$J_{\text{ст}} = \int [f(\mathbf{v}_1) \varphi(v_2) - f(\mathbf{v}'_1) \varphi(v'_2)] N v d\sigma d\mathbf{v}_2; \quad (\text{П3.2})$$

здесь $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — скорость иона и частицы газа до столкновения, $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$ — те же величины после столкновения, $v = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ — относительная скорость столкновения, $\varphi(v_2)$ — максвелловская функция распределения по скоростям для частиц газа, N — плотность частиц газа, функции распределения нормированы на единицу.

Умножим уравнения Больцмана на импульс иона $m\mathbf{v}_1$ и проинтегрируем по скоростям иона. Получим

$$e\mathbf{E} = \int m\mathbf{v}_1 J_{\text{ст}} d\mathbf{v}_1. \quad (\text{П3.3})$$

Левая часть этого соотношения представляет собой силу, действующую на ион со стороны электрического поля, правая часть представляет силу трения в газе, возникающую в результате соударений иона с частицами газа и уравновешивающую силу за счет поля. Наша задача раскрыть правую часть соотношения.

Выпишем правую часть соотношения (П3.3) и, учитывая обратимость законов механики по времени при упругом столкновении частиц, сделаем во втором слагаемом замену $\mathbf{v}_{1,2} \rightleftharpoons \mathbf{v}'_{1,2}$. Получим

$$\int m\mathbf{v}_1 J_{\text{ст}} d\mathbf{v}_1 = \int m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) f(\mathbf{v}_1) \varphi(v_2) N v d\sigma d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2. \quad (\text{П3.4})$$

Проведем интегрирование по углам рассеяния, выделив ту часть, которая от них зависит. Вычислим интеграл $\int m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) d\sigma$. Воспользуемся соотношением

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_{\text{ци}} + \frac{M}{m+M} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}_{\text{ци}} + \frac{M}{m+M} \mathbf{v}',$$

где M — масса частицы газа, $\mathbf{v}_{\text{ци}}$ — скорость центра инерции сталкивающихся частиц, \mathbf{v}, \mathbf{v}' — относительная скорость иона и частицы газа до и после столкновения. С учетом этого получим

$$\int m(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1) d\sigma = \int \mu(\mathbf{v} - \mathbf{v}') d\sigma,$$

где $\mu = mM/(m+M)$ — приведенная масса сталкивающихся частиц. Далее, $\mathbf{v}' = \mathbf{v} \cos \theta + k v \sin \theta$, где θ — угол рассеяния, \mathbf{k} — единичный вектор, перпендикуляр-

ный \mathbf{v} . Поскольку все перпендикулярные к относительной скорости направления равновероятны, то после интегрирования по углам рассеяния находим

$$\int m (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1') d\sigma = \mu \mathbf{v} \int (1 - \cos \theta) d\sigma = \mu \nu \sigma^*,$$

где $\sigma^*(v)$ — диффузионное сечение рассеяния иона на частице газа. Учитывая это в соотношении (ПЗ.4), получим

$$\int m \mathbf{v}_1 J_{CT} d\mathbf{v}_1 = \mu \int \mathbf{v} f(\mathbf{v}_1) \phi(v_2) N \nu \sigma^* d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2.$$

Воспользуемся теперь условиями модели Максвелла, согласно которым величина $\nu \sigma^*(v)$ не зависит от относительной скорости частиц. Введем частоту столкновения иона с частицами газа

$$\nu = N \nu \sigma^*(v)$$

и вынесем ее из под знака интегрирования. Учитывая, что $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$, получим

$$\int m \mathbf{v}_1 J_{CT} d\mathbf{v}_1 = \mu \nu \langle \langle \mathbf{v}_1 \rangle \rangle - \langle \mathbf{v}_2 \rangle \rangle,$$

где угловые скобки означают усреднение по распределению ионов и частиц газа. Вводя дрейфовую скорость иона $\mathbf{w} = \langle \mathbf{v}_1 \rangle$ и учитывая, что средняя скорость частиц газа равна нулю ($\langle \mathbf{v}_2 \rangle = 0$), получим на основании формулы (ПЗ.3)

$$e\mathbf{E} = \mu \nu \mathbf{w},$$

откуда находим дрейфовую скорость иона

$$\mathbf{w} = \frac{e\mathbf{E}}{\mu \nu}. \quad (\text{ПЗ.5})$$

Отметим, что это простое выражение справедливо только в рамках модели Максвелла, которая позволила разделить подынтегральное выражение на сомножители, зависящие только от углов рассеяния или только от скоростей частиц.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. — М.: ИЛ, 1961.
2. Чемпен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. — М.: ИЛ, 1960.
3. Мак-Даниель И, Мэзон Э. Подвижность и диффузия ионов в газах. М.: ИЛ, 1976.
4. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория переноса в газах. — М.: Мир, 1976.
5. Леонас В. Б. — УФН, 1972, т. 107, с. 29.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Наука, 1974.
7. Смирнов Б. М. Физика слабоионизованного газа. — М.: Наука, 1972.
8. Палкина Л. А., Смирнов Б. М., Чибисов М. И. — ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 340.
9. Палкина Л. А., Смирнов Б. М. — ТВТ, 1974, т. 12, с. 37.
10. Елецкий А. В., Палкина Л. А., Смирнов Б. М. Явление переноса в слабоионизованной плазме. — М.: Атомиздат, 1975.
11. Варгафтик Н. Б. и др. Теплопроводность газов и жидкостей. — М.: Комитет стандартов, 1970.
12. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. — М.: Наука, 1972.
13. Skullerud H. R. — J. Phys., Ser. B, 1973, v. 9, p. 535.
14. Бычков В. Л., Радциг А. А., Смирнов Б. М. — ТВТ, 1978, т. 16, с. 713.
15. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1. — М.: Наука, 1976.
16. Kihara T., Taylor M. H., Hirschfelder J. O. — Phys. Fluids, 1960, v. 3, p. 715.
17. Higgins L. D., Smith F. J. — Mol. Phys., 1968, v. 14, p. 399.
18. Smith F. J., Mason E. A., Munn R. J. — J. Chem. Phys., 1965, v. 42, p. 1334.
19. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика. — М.: Наука, 1973.
20. См. ¹ — С. 891.