1982 г. Январь Том 136, вып. 1

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

53(092)

ЗАМЕТКИ О ПУТИ, ПРИВЕДШЕМ Э. ФЕРМИ К СТАТИСТИКЕ ФЕРМИ—ДИРАКА*)

Л. Беллони

Ферми опубликовал работу о статистике за несколько месяцев до того, как Дирак проложил свой путь к этой же цели. Поскольку в статье Дирака отсутствует упоминание о вкладе Ферми, Ферми счет необходимым обратить его внимание на свою работу [1]. На самом деле Дирак прочел статью Ферми «О квантовании идеального одноатомного газа». Но он совершенно о ней забыл [2], когда несколькими месяцами позже писал работу «К теории квантовой механики», которая привела к результатам, полученным Ферми совершенно другим путем.

В начале своей научной карьеры Ферми глубоко заинтересовался проблемами термодинамики. Как и многие другие теоретики, он был озабочен определением абсолютного значения константы энтропии идеального газа [3]. Классическая термодинамика оставляла произвольную постоянную в выражении ее величины. В 1912—1913 гг. Сакур и Тетроде вывели формулу, которая соответствовала данным опыта [4]. Их вывод не был, однако, убедительным. В последующие годы были предприняты многочисленные усилия для его усовершенствования. Наиболее удачная попытка принадлежала Штерну [5]; она, как писал Сегре, «оказала значительное влияние на последующие работы: например, ее тщательно изучал Ферми перед открытием статистики, названной его именем» [6]. В 1923 г. Ферми опубликовал заметку о теории Штерна [7], которая может рассматриваться как первый шаг на пути к открытию статистики.

Штерн получил докторскую степень под руководством Сакура. Он написал диссертацию по кинетической теории осмотического давления в концентрированных растворах. После этого он «воспользовался приобретенной экономической независимостью для того, чтобы поехать к Эйнштейну в Прагу ...До этого он не встречался с Эйнштейном, но знал, что тот является великим ученым, работающим на переднем крае развития физики того времени... Штерн оставался у Эйнштейна с весны 1912 г. и до 1914 г.,— сначала в Праге, а затем в Цюрихе ... Этот период оказал на него глубокое влияние» [8]. О чем беседовали Эйнштейн и Штерн? Не об общей теории относительности, поскольку Штерн не любил абстрактного математического формализма; их обоих сближало восхищение Больцманом. Штерн преклонялся перед Эйнштейном за его глубокое знание и понима-

---

*) Belloni L. A Note on Fermi's Route to Fermi — Dirac Statistics.— Scientia, 1978, v. 113, pp. 422—430. — Перевод В. Я. Френкеля.

Лафранко Беллони — сотрудник Института физических наук Миланского университета; существенная часть данной работы выполнена им во время пребывания в Калифорнийском университете в Беркли, США.

ние ценности термодинамики. По утверждению Штерна, Эйнштейн был убежден в том, что термодинамика, в отличие от других областей физики, не претерпит изменений.

Осенью 1913 г. к Эйнштейну в Цюрих надолго приехал Эренфест. Они живо дискутировали проблемы химического равновесия, константу энтропии и, конечно, теорему Нернста. Замечание, сделанное Эренфестом, послужило для Штерна вдохновляющим стимулом для его работы по константе энтропии [9]. Несомненно, что Штерн поначалу заинтересовался квантовыми явлениями, пытаясь вычислить «химическую константу» (как ее затем стали называть), поскольку попытки вывести формулу Сакура и Тетроде методами классической статистики оказались совершенно несостоятельными. Газы не вели себя классически при низких температурах. Штерн обошел эту трудность, использовав два способа определения давления газа, находящегося в термодинамическом равновесии с твердой фазой. В соответствии с первым, проведенным чисто термодинамически, он пришел к выражению с произвольной константой. Спорным вопросом была ее величина. Второй способ штерновского вывода находился в рамках кинетической теории и не был связан с введением какой-либо константы. Сравнивая оба полученных выражения в области температур, в которой справедлив закон Дюлонга и Пти, Штерн получил выражение для константы энтропии [10]. В своих расчетах он трактовал пар как идеальный газ, а твердое тело — как систему монохроматических осцилляторов, колеблющихся независимо друг от друга с одной и той же частотой,— в соответствии с предположением, принятым Эйнштейном в его теории теплоемкости.

Для того чтобы произвести соответствующие термодинамические расчеты, мы начнем с выражения для энтропии S_v, отнесенной к одному молю насыщенного пара при температуре T и давлении p:

$$S_v = \frac{5}{2} R \ln T - R \ln p + R \ln R + S_0, \tag{1}$$

где S_0— константа энтропии газа. Энтропия пара равна энтропии одного моля твердого тела S_s, к которой добавлена энтропия, связанная с испарением:

$$S_v = S_s + \frac{L}{T}, \tag{2}$$

где L — теплота испарения. Энтропия одного моля твердого тела равна

$$S_s = 3R \ln T + S'_0, \tag{3}$$

где S'_0— константа энтропии для твердого тела.

Для вычисления величины S_s Штерн использовал теорему Нернста, в справедливости которой он не сомневался:

$$S_s = \int_0^T \frac{C_s}{T} \, dT.$$

Он воспользовался, далее, выражением Эйнштейна для C_s, т. е. [11]

$$C_s = \frac{3R\,(h\nu/kT)^2\, e^{h\nu/kT}}{(e^{h\nu/kT}-1)^2}.$$

Все это привело к следующему выражению для S_s:

$$S_s = 3R \ln T + 3R - 3R \ln \frac{h\nu}{k}.$$

В это выражение, помимо $k = R/N$, входит также частота ν колебания осциллятора. Сравнивая полученный результат с выражением (3), Штерн нашел

$$S_0' = 3R - 3R \ln \frac{h\nu}{k}. \qquad (4)$$

Штерн продолжил вычисление теплоты парообразования L при температуре T. Процесс парообразования, рассуждал Штерн, может происходить двумя различными путями: испарение одного моля твердого тела при абсолютном нуле температуры с последующим возрастанием температуры до значения T при постоянном давлении или же за счет нагрева твердого тела до температуры T и последующего испарения. Поскольку в обоих случаях затрачивается одно и то же количество тепла, отсюда следует

$$L + \int_0^T C_s \, dT = L_0 + \int_0^T C_V \, dT + RT,$$

где L_0 — теплота испарения при нулевой температуре, а C_V — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Положим $C_V = (3/2)R$ и вновь воспользуемся формулой Эйнштейна для C_s. Получим

$$L = L_0 + \frac{3}{2} RT - \left(3RT - 3N\frac{h\nu}{2}\right) + RT = L_0 + 3N\frac{h\nu}{2} - \frac{1}{2} RT.$$

Штерн приводит аргументы в пользу того, что величина $\lambda_0 = L_0 + 3N(h\nu/2)$ является истинной теплотой испарения при абсолютном нуле температуры, т. е. энергией, необходимой для испарения одного моля твердого тела. Величина λ_0 больше L_0, поскольку при абсолютном нуле молекулы все еще обладают нулевой энергией, равной $3N(h\nu/2)$ [12].

Запишем теперь следующее выражение для давления пара:

$$p = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-\lambda_0/RT} R \exp\left(\frac{S_0 - S_0'}{R} + \frac{1}{2}\right). \qquad (5)$$

Для S_0 мы примем значение, данное этой величине Сакуром и Тетроде:

$$S_0 = \frac{5}{2} R + R \ln \frac{(2\pi mk)^{3/2}}{Nh^3}.$$

Из найденного ранее выражения для S_0' имеем

$$\frac{S_0 - S_0'}{R} + \frac{1}{2} = \ln \frac{(2\pi m)^{3/2} \nu^3}{Nk^{3/2}}.$$

Отсюда окончательно

$$p = (2\pi)^{3/2} \frac{m^{3/2}\nu^3}{k^{1/2}} \frac{1}{T^{1/2}} e^{-\lambda_0/RT}. \qquad (6)$$

Для проведения кинетических расчетов мы должны сконструировать «молекулярно-механическую» модель твердого тела, находящегося в равновесии со своим паром. Штерн разработал следующую модель. В пространстве имеется P точек; каждая притягивает атомы с силой, пропорциональной расстоянию от нее. Эти силы действуют только до определенного максимального расстояния s: следовательно, величина теплоты испарения имеет конечное значение. Таким образом, точки P окружены «сферами притяжения». Внутри этих сфер атомы колеблются как монохроматические осцилляторы. Вне сфер они движутся в свободном пространстве, не будучи подвержены действию каких-либо сил. Поскольку потенциальная энергия атомов в каждой данной точке известна, отношение между числом атомов вне и внутри сфер должно быть вычислено в соответствии с законом Больцмана. Пусть n_0 и ψ_r будут обозначать соответственно число атомов вне сфер и их энергию, а n_r и ψ_0 — то же самое для атомов внутри сфер, отстоящих на расстояние r от точек P. Тогда

$$n_r : n_0 = e^{-\psi_r/kT} : e^{-\psi_0/kT}.$$

Для того чтобы получить абсолютное значение величин n_r и n_0 (а не их отношения), необходимы дальнейшие предположения. Представим себе, что в среднем на каждую сферу приходится одна молекула. Тогда

$$\int\limits_0^s n_r \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \int\limits_0^s n_0 e^{\psi/kT} e^{-\psi_r/kT} \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 1.$$

В соответствии с нашим предположением, атом с массой m притягивается к точке P с силой

$$m\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} = -a^2 r;$$

его потенциальная энергия ψ_r на расстоянии r от P равна поэтому $(a^2/2)\, r^2$, а в «открытом» пространстве она равна $\psi_0 = (a^2/2)\, s^2$.

Теперь мы можем найти выражение для n_0, чтобы подставить его в формулу для давления идеального газа $p = n_0 kT$. Принимая во внимание, что $a^2 = m\,(2\pi\nu)^2$ и что потенциальная энергия одного моля газа, $\psi_0 N$, равна λ_0, получаем

$$p = (2\pi)^{3/2}\frac{m^{3/2}\nu^3}{k^{1/2}}\frac{1}{T^{1/2}} e^{-\lambda_0/RT}.$$

Это выражение совпадает с (6) при условии, что значения m, ν и λ_0 в них одни и те же. Здесь Штерн обращается к выражению (5), которое мы для удобства воспроизведем еще раз:

$$p = \frac{1}{\sqrt{T}} e^{-\lambda_0/RT} R \exp\left(\frac{S_0 - S_0'}{R} + \frac{1}{2}\right).$$

Кинетическая модель позволила получить соотношение между феноменологическими величинами p и T, которое совпадает с соотношением, выведенным термодинамически. Далее, Штерн приравнял не зависящие от T множители в обоих выражениях для p:

$$R \exp\left(\frac{S_0 - S_0'}{R} + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2\pi)^{3/2} m^{3/2}\nu^3}{k^{1/2}}.$$

Следовательно,

$$S_0 = S_0' + R\ln\frac{(2\pi m)^{3/2}\nu^3}{Nk^{3/2}} - \frac{1}{2}R.$$

В последнее соотношение входит частота ν. Примем теперь для S_0' выведенное ранее выражение (4); при этом частота ν будет исключена, и получится формула Сакура — Тетроде:

$$S_0 = \frac{5}{2}R + R\ln\frac{(2\pi mk)^{3/2}}{Nh^3}.$$

Вывод Штерна произвел сильное впечатление на Ферми. В 1923 г. он полагал, что вывод заслуживает дальнейшего рассмотрения, и предложил его улучшенный вариант [13]. Слабым местом вывода с точки зрения Ферми являлось различие между экспонентами в обоих выражениях для p. В термодинамическом экспонента имела вид $e^{-[w+(3/2)h\nu]/kT}$ (w — энергия, необходимая для испарения одного моля твердого тела при температуре абсолютного нуля); в «кинетическом» экспонента имела более простой вид: $e^{-w/kT}$.

Штерн получил соответствие между этими выражениями благодаря понятию о нулевой энергии, согласно которому энергия, необходимая для испарения моля твердого тела при абсолютном нуле, равна не w, а w — $(3N/2)\,h\nu$. Ферми отметил, что молекулы твердого тела движутся только по квантованным орбитам, и показал, что при таком условии в кинетическом выводе выражения для испарения возникает экспонента $e^{-[w+(3/2)h\nu]/kT}$. Таким образом, соответствие было достигнуто без предположения о нулевой энергии. До 1925 г. эта энергия вводилась в рассмотрение ad hoc. У Ферми не было каких-либо специальных оснований для того, чтобы принять ее. Он не находился под влиянием Эйнштейна в той мере, как это было со Штерном в 1913 г. Он мог рассматривать понятие о нулевой энергии как некую «хитрость», с помощью которой удается ликвидировать противоречие, хитрость, подобную придуманным для «вывода» формулы Сакура — Тетроде с помощью классической статистики.

Позднее Ферми вернулся к задаче о константе энтропии [14]. В краткой, но богатой по содержанию статье он обсудил трудности, с которыми встречается приложение зоммерфельдовских правил квантования при применении их к системе идентичных частиц. Ферми отметил, что недостаток, связанный с приложением зоммерфельдовских правил к сложным системам, обычно приписывают невозможности разделить переменные. По его мнению, этот недостаток проистекал от невозможности расчета орбит для системы, содержащей несколько идентичных частиц. Зоммерфельдовские условия не могут быть приложены к таким системам, поскольку они содержат неразличимые частицы; согласно Ферми, именно эта неразличимость частиц и требует модификации «правил квантования». Рассмотрим, например, кольцо с тремя электронами, расположенными в вершинах равностороннего треугольника. Для того чтобы получить первоначальную конфигурацию системы, достаточно ее поворота на угол $2\pi/3$. Электроны не отличаются друг от друга, так что системе не надо поворачиваться на полный оборот, чтобы вернуться к начальным условиям. Пусть p означает угловой момент кольца. Правильно записанные условия квантования должны иметь вид $2\pi p/3 = nh$, где n — целое число, тогда как, по Зоммерфельду, должно иметь место соотношение $2\pi p = nh$. Как в общем случае следует модифицировать правила Зоммерфельда? На этот вопрос Ферми не дает ответа. Он только продолжает вычислять абсолютное значение константы энтропии идеального газа, «выдвинув несколько гипотез на пути к ее квантованию». Он рассматривает идеальный газ, состоящий из n точечных молекул в замкнутом объеме V. Мы можем разделить V на n ячеек и поместить в каждую из них по молекуле. Или же мы можем разделить V на $n/2$ и в каждую из таких ячеек поместить теперь по 2 молекулы. Мы можем также и не подразделять V и рассматривать его как одну большую ячейку, содержащую n молекул. Различные способы квантования газа не эквивалентны; в частности, они дадут и разные значения энтропии. Правильная величина константы энтропии получится только тогда, когда мы делим объем на n ячеек и помещаем по одной молекуле в каждой из них. Это приводит к формуле Сакура — Тетроде. Ферми рассмотрел также и поучительный эксперимент, который позволил бы подойти к проблеме с противоположной стороны. Представим себе смесь двух газов — такую, что в объеме V находится по $n/2$ молекул каждого. (Предполагается, что молекулы имеют одинаковые массы.) Для вычисления энтропии разделим объем на $n/2$ ячеек. В каждую из них поместим по одной молекуле обоих газов. Наша система не состоит из идентичных частиц, так как в каждой ячейке расположены две различные молекулы. При этом правила Зоммерфельда приводят к результатам, согласующимся с данными опыта. Они «не работают» в случае, когда система состоит из идентичных частиц. Или, лучше сказать, они работают также и в этом случае, если обеспечить, чтобы была принята процедура Ферми, предложенная им для вывода величины константы энтропии.

Много лет спустя Ферми говорил Сегре [15], что он мог бы открыть принцип запрета, если бы развил это статистическое рассмотрение. Это представляется правдоподобным. Поскольку он знал принцип Паули, он мог бы «посмотреть, к чему привела бы эта гипотеза также и в случае квантования идеального газа». Вскоре он написал статью (на итальянском языке), которую затем детально разработал в знаменитой публикации в «Zeitschrift für Physik» [16]. Математический аппарат, использованный в этой второй статье, свидетельствует о том, что Ферми изучил вывод Штерна.

Так, для квантования газа он помещает его в специальное потенциальное поле *), а не в ящик с упругими стенками. Он рассматривает молекулы как гармонические осцилляторы, так что частота ν присутствует у него уже на начальных этапах расчета. Однако она исключается при последующих вычислениях, и мы не находим ее в выражении для давления пара, приведенном в конце статьи.

Укажем еще на одну аналогию с приближением Штерна. Ферми должен был распределить между молекулами определенное количество энергии. Он находит выражение для наиболее вероятного числа молекул, энергия которых заключена в данном интервале значений этой энергии. В полученное им выражение входят две константы (α и β). Определяя их связь с температурой, Ферми указывает, что из-за притяжения к O (т. е. к центру притяжения — области «упругого» потенциала) «плотность нашего газа является функцией расстояния, которая обращается в нуль на бесконечно большом расстоянии. Следовательно, при бесконечно больших r вырождение будет снято и статистика нашего газа перейдет в классическую» **). Он находит, далее, величину констант соответствующей процедурой à la Штерн. Он делает тот же вывод, что и Штерн: принимая справедливость законов классической статистики в той области, где они выполняются, он обращается к «квантовой» области.

В числе полученных Ферми с помощью новой статистики результатов мы естественным образом находим и определение константы энтропии для идеального газа. Излишне говорить, что ее величина совпадает с той, которая получилась «у Тетроде и Штерна». Ферми открыл свою статистику, следуя особой присущей ему стратегии исследований. Единственной идеей, которую он позаимствовал у других, был принцип запрета. И он сам был близок к его выводу [17]. Его теоретические исследования были также совершенно независимы от того, что делали его современники. Примечательно, что столь общий результат, каким является установление новой квантовой статистики, он получил, пытаясь решить частную задачу вывода формулы Сакура — Тетроде.

Обратимся теперь к статье Дирака «К теории квантовой механики». Дирак начинает с определения

$$p_r = -ih\frac{\partial}{\partial q_r}, \quad -W = -ih\frac{\partial}{\partial t}$$

и записи уравнения Шрёдингера в следующей форме:

$$[H(q_r, p_r, t) - W]\psi = 0.$$

Ван-дер-Варден справедливо отмечает [18], что первоначально шредингеровское уравнение служило только для определения собственных функ-

*) Ферми накладывает на молекулы специальную упругую связь с фиксированной точкой O (начало координат) так, чтобы каждая молекула образовала гармонический осциллятор. (*Прим. перев.*)

**) Перевод этой цитаты дается по кн.: Ферми Э. Научные труды.— М.: Наука, 1971, т. 1, с. 208, наиболее точное следующей за немецким текстом статьи Ферми.

ций оператора энергии. Уравнение, записанное Дираком, годится для любого состояния.

В следующем разделе своей статьи Дирак рассматривает систему, содержащую идентичные частицы. Он декларирует свою приверженность к гейзенберговской точке зрения, относящейся к роли наблюдаемых величин в физической теории. Затем он приступает к решению самой задачи. Представим себе атом с двумя электронами: один движется по орбите m, другой — по орбите n. Обозначим через $(m\ n)$ состояние системы двух электронов. Это состояние отличается от состояния $(n\ m)$ только перестановкой этих двух электронов. Следует ли оба таких состояния рассматривать как два разные или как одно и то же?

Если они различны, мы должны быть в состоянии различать переходы $(m\ n) \longrightarrow (m'\ n')$ и $(m\ n) \longrightarrow (n'\ m')$. Но мы знаем, что такое различие провести невозможно с помощью физических наблюдений: на опыте мы можем определить только сумму вероятностей переходов. «Поскольку для сохранения основных принципов теории следует вычислять лишь наблюдаемые величины», Дирак рассматривает $(m\ n)$ и $(n\ m)$ как единственное состояние. Он пришел к заключению, что собственные функции совокупности частиц разделяются на две категории, будучи или симметричными, или антисимметричными функциями их координат. Каков, однако, критерий, в соответствии с которым должен проводиться выбор между симметричным или антисимметричным решением? «Представленная теория не может решать, какое из решений является правильным.»

Но антисимметричная функция тождественно обращается в нуль, когда два электрона расположены на одной и той же орбите и имеют тем самым одинаковые квантовые числа. Мы приходим к заключению, что собственные состояния совокупности частиц, подчиняющихся принципу Паули, должны быть представлены антисимметричными функциями. Если бы они описывались симметричными функциями, то одну и ту же орбиту занимало бы произвольное число электронов. Из данных опыта мы знаем, что это невозможно.

Дирак обобщил этот результат на теорию идеального газа, оказавшуюся практически идентичной с теорией Ферми. Имея дело с ансамблем молекул газа, мы сталкиваемся с только что рассмотренной альтернативой. Для представления собственных состояний мы можем выбрать симметричные функции. Тогда мы приходим к статистике Бозе — Эйнштейна. Дирак отметил, что «решение в виде симметричных собственных функций должно быть правильным, когда оно приложено к световым квантам, поскольку известно, что статистическая механика Бозе — Эйнштейна ведет к планковскому закону излучения черного тела».

Альтернативные рассуждения (в виде антисимметричных собственных функций) приводят к статистике другого типа, которая «вероятно, справедлива для молекул газа, поскольку известно, что она справедлива для электронов в атоме и следует ожидать, что молекулы более схожи с электронами, чем со световыми квантами». Полностью забыв результаты Ферми, Дирак вывел их заново.

Поэтому можно заключить, что, в отличие от Ферми, Дирак не пытался решать какую-то конкретную проблему, когда он открыл новый тип статистики. Он просто старался в наиболее общем виде сформулировать свою новую квантовую механику. В результате из его «несколько более общей точки зрения» на уравнение Шрёдингера [19] появилась трактовка свойств идеального газа.

Добавим к этому, что принцип запрета в каждом из случаев сыграл разную роль. У Ферми он был недостающим звеном в цепи уже развитых аргументов. Открытие Ферми сразу привело к решению частной задачи.

С другой стороны, Дирак имел дело с задачей обобщения новой квантовой механики на случай системы многих частиц. Он должен был включить принцип Паули в формализм новой теории. Однако соответствующий успех был ограниченным, поскольку принцип запрета продолжал сохранять эмпирический характер даже и после работы Дирака. Строгий его вывод на основе постулатов квантовой механики требовал дальнейших усилий [20].

Благодарности. Я признателен за полезные обсуждения профессору Пьеро Калдирола из Миланского университета и профессорам Л. Хейлброну и Э. Сегре из Калифорнийского университета в Беркли. Я благодарен также отделу истории физики и техники Калифорнийского университета в Беркли за гостеприимство.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА И ПРИМЕЧАНИЯ

1. 25 *октября* 1926 г. *Ферми писал из* Рима: «В Вашей интересной статье «К теории квантовой механики» (Proc. Roy. Soc., **1926**, v. 112, p. 661) Вы развили теорию идеального газа, основанную на принципе Паули. Теория идеального газа, практически идентичная Вашей, была опубликована мною в начале 1926 г. (Zs. Phys., Bd. 36, S. 902; Lincei Rend., Feb. 1926). Поскольку я полагаю, что Вы не видели моей статьи, я позволяю себе обратить на нее Ваше внимание. Остаюсь, Сэр, искренне Вашим Энрико Ферми». Это письмо хранится в Архиве Истории квантовой физики. Описание и местопребывание архива см. в кн.: Kuhn T. S., Heilbron J. L., Forman P., Allen L. Sources for History of Quantum Physics*): An Inventory and Report.— Philadelphia: The American Philosophical Society, 1967.
2. Интервью П. Дирака.— SHQP, третья сессия, 7 мая 1963 г.
3. а) Fermi E. Collected Papers/Ed. E. Sergè.— (Roma; Chicago.— V. 1, p. 114. б) См. также Segrè E. Otto Stern. 1888—1969.— Biograph. Mem. Nat. Acad. Sci., **1973**, v. 4, p. 217.
4. Sackur O. In: Nernst-Festschrift.— 1912, S. 405.— Ann. d. Phys., **1913**, Bd 40, S. 67; Jahresber. Schles. Ges., 1913.
5. Stern O.— Phys. Zs., **1913**, Bd. **14**, S. 629—632.
6. Segrè F. Otto Stern. 1888—1969.— [3б], p. 218.
7. Fermi E. Sopra la teoria di stern della costante assoluta dell'entropia di un gas perfello monatomico.—Collected Papers.— V. 1, p. 114—117.— Первоначальная публикация: Rend. Acad. Lincei, **1923**, v. 32, nº 2, p. 395—398.
8. Sergè E. Otto Stern. 1888—1969.— [3б], p. 216.
9. Интервью О. Штерна.— SHQP, первая сессия, 29 мая 1962 г.
10. Штерн не разрешил пользоваться магнитофоном, когда его интервьюировал Томас Кун из SHQP-проекта. Запись этой беседы, сделанная Куном, содержит следующий абзац: «В самом начале своей университетской карьеры, когда Штерн уже знал уравнение Клаузиуса, связывающее производную давления пара по температуре с теплотой испарения, с ним произошел случай, который он запомнил на всю жизнь. Во время прогулки в парке он вдруг понял, каким образом можно вывести уравнение Клаузиуса на молекулярном уровне. К этому времени, заметил Штерн, он не знал, что его вывод был плох или уж очень упрощен. Однако даже после того, как он это обнаружил, он сохранил свое отношение к этому эпизоду. Он добился главного. Мое предположение, что его собственная и более поздняя работа содержала это заключение, т. е. повторяла выводы как с чисто термодинамической, так и со статистико-механической позиций,— не встретило никакого отклика».
11. Einstein A. Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme.— Ann. d. Phys., **1907**, Bd. 22, S. 23.— (Перевод: Эйнштейн А. Теория излучения Планка и теория удельной теплоемкости.— Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1966.— Т. 3, с. 134 **).)
12. В 1913 г. наряду с работой о давлении пара Штерн написал совместно с Эйнштейном статью: Einige Argumente für Annahme einer Molekularen Agitation beim absoluten Nullpunkt.— Ann. Phys., **1913**, Bd. 40. S, 551.— (Перевод: Собрание научных тру-

---

*) *Далее обозначено как* SHQP — *«Источники по истории* квантовой физики». (*Прим. перев.*)

**) Указания переводов добавлены переводчиком. (*Прим. ред.*)

дов.—М.: Наука, 1966,.— Т. 3, с. 314.) Авторы исходили из выполненных в то время измерений удельной теплоемкости H_2 для обоснования гипотезы о нулевой энергии.

13. См. [7]. Ферми сохранил интерес к штерновскому выводу и позднее: см. обсуждение этого вопроса в третьей главе его книги «Molecole e cristalli» (английский перевод: Molecules, Crystals and Quantum Statistics.— N. Y., 1966.— Русский перевод: Ферми Э. Молекулы и кристаллы.— М.: ИЛ, 1947.) См. также Note on Thermodynamics and Statistics.— Chicago: Univ. of Chicago press, 1966.— P. 117. Эти заметки, опубликованные Серге после кончины Ферми, составлены на основе курса лекций, прочитанных Ферми незадолго до смерти.
14. Fermi E. Considerazioni sulla quantizzazione dei sistemi che contengono degli elementi identici.— Collected Papers.— V. 1, p. 124—129.— Первоначально опубликовано: Nuovo Cimento, **1924**, v. 1, p. 145—152.— (Русский перевод: Ферми Э. О квантовании систем, содержащих тождественные элементы. Научные труды.— М.: Наука, 1972.— Т. 1, с. 154—159).
15. Fermi E.— Collected Papers.— V. 1, p. 178.— (См. примечание Разетти к статье Ферми в т. 1 его «Научных трудов», с. 199.— *Перев.*)
16. Fermi E. Sulla quantizzazione del gas perfello monatomico.— Collected Papers.— V. 1, p. 181—185.— Первоначально опубликовано: Rend. Lincei, **1926**, v. 3, p. 145—149. Впервые представлено на собрании Academia dei Lincei 7 февраля 1926 г. См. также Fermi E. Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases.— Collected Papers.— V. 1, p. 186—195.— (Перевод: Ферми Э.— Научные труды.— Т. 1, с. 203—213.) Первоначально опубликовано в Zs. Phys. **1926**, Bd. 36, S. 902—912. Статья была получена редакцией журнала 26 марта 1926 г. См. также введение к этой статье, написанное Разетти (Fermi E. Collected Papers.— V. 1, p. 178).
17. Разетти отмечает: «Теория Эйнштейна, опиравшаяся на данную Бозе трактовку излучения черного тела как фотонного газа, на Ферми как будто особого влияния не оказала, хотя он и указывает на аналогию между двумя формами статистики». (См. Ферми Э Научные труды.— Т. 1, с. 199.)
18. См. Приложение к интервью Дирака. — SHQP.
19. Ван-дер-Варден подчеркивает (см. предыдущее примечание), что в § 2 этой статьи Дирака, после небольшого обобщения уравнения Шрёдингера, Дирак выдвигает следующую идею: «Таким образом, если мы найдем постоянные интегрирования a, b, ... такие, что $a\psi_n = a_n\psi_n$ и т. д., где a_n, b_n, . . .— численные постоянные, то мы можем сказать, что ψ_n представляет состояние, в котором a, b, . . . имеют численные значения a_n, b_n, . . .». См. Dirac P. A. M., On the Theory of Quantum Mechanics.— Proc. Roy. Soc., **1926**, v. 112, p. 666.
20. Caldirola P. The Historical Evolution of the Exclusion Principle in Physics.— Scientia, **1975**, v. 110, p. 69—81.