1981 г. Сентябрь *Том 135, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.111

О НЕОДНОЗНАЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАГНИТНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МАТЕРИАЛЬНЫХ СРЕД

А. М. Игнатов, А. А. Рухадзе

1.В учебниках по электродинамике материальных сред для описания реакции пространственной однородной и стационарной среды на внешнее монохроматическое поле, зависящее от времени и координат в виде

$$A\ (\omega, \mathbf{k}) \exp\ (-i\omega t + i\mathbf{kr}) \tag{1}$$

(в таком виде принимается ниже зависимость всех электродинамических величин, в том числе и внешних источников поля ρ_0 и $\mathbf{j}_0$), обычно вводятся две независимые тензорные величины $\varepsilon_{ij}\ (\omega, \mathbf{k})$ и $\mu_{ij}\ (\omega, \mathbf{k})$, называемые соответственно тензорами диэлектрической и магнитной проницаемости. При этом уравнения поля в среде записываются с использованием двух дополнительных полей — электрической индукции $\mathbf{D}$ и магнитного поля $\mathbf{H}$:

$$\begin{gathered}\mathbf{kD} = -4\pi i\rho_0, \quad [\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c}\mathbf{B},\\ \mathbf{kB} = 0, \quad [\mathbf{kH}] + \frac{\omega}{c}\mathbf{D} = -\frac{4\pi i}{c}\mathbf{j}_0,\\ D_i = \varepsilon_{ij}E_j, \quad B_i = \mu_{ij}H_j.\end{gathered} \tag{2}$$

С другой стороны, известно [1], что отклик среды на внешнее поле можно выразить одной связью $\mathbf{j} = \mathbf{j}\ (\mathbf{E})$, поскольку магнитная индукция $\mathbf{B}$ согласно уравнениям Максвелла для нестационарных процессов всегда может быть выражена через электрическое поле $\mathbf{E}$. Поэтому в линейной электродинамике пространственно однородных и стационарных сред все влияние поля на среду должно описываться только одним тензором проводимости $\sigma_{ij}\ (\omega, \mathbf{k})$. Плотность заряда ρ с помощью уравнения непрерывности выражается через плотность тока $\mathbf{j}$ и для уравнений поля в среде имеем *)

$$\left.\begin{gathered}\mathbf{kE} = -4\pi i\,(\rho + \rho_0), \quad [\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c}\mathbf{B},\\ \mathbf{kB} = 0, \quad [\mathbf{kB}] + \frac{\omega}{c}\mathbf{E} = -\frac{4\pi i}{c}(\mathbf{j} + \mathbf{j}_0),\\ j_i = \sigma_{ij}E_j, \quad \omega\rho = \mathbf{kj};\end{gathered}\right\} \tag{3}$$

здесь уравнения записаны для электрического поля $\mathbf{E}$ и магнитной индукции $\mathbf{B}$, которые только и имеют непосредственный физический смысл, определяя силу Лоренца, действующую на макроскопический заряд q,

*) Заметим, что для стационарных полей материальные уравнения $\rho = \rho\ (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ и $\mathbf{j} = \mathbf{j}\ (\mathbf{E}, \mathbf{B})$ могут быть получены из уравнения $j_i = \sigma_{ij}E_j$, либо из $D_i = \varepsilon_{ij}E_j$ и $B_i = \mu_{ij}H_j$ соответственно, предельным переходом к $\omega \to 0$.

движущийся в среде со скоростью $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{F} = q\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]\right\}. \tag{4}$$

В связи с записью уравнений поля в форме (3) возникает вопрос о независимости тензоров ε_{ij} и μ_{ij} и их связи с тензором σ_{ij} при произвольных ω и $\mathbf{k}$.

2. В монографии [1] для случая изотропной среды, когда

$$\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{k_i k_j}{k^2}\sigma^l(\omega, \mathbf{k}) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\sigma^{tr}(\omega, \mathbf{k}), \tag{5}$$

принимается $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon$, $\mu_{ij} = \delta_{ij}\mu$. Тогда из эквивалентности систем (2) и (3) легко показать, что

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma^l \equiv \varepsilon^l(\omega, k),$$

$$\mu^{-1} = 1 - \frac{4\pi i\omega}{c^2k^2}(\sigma^{tr} - \sigma^l) \equiv 1 - \frac{\omega^2}{c^2k^2}[\varepsilon^{tr}(\omega, k) - \varepsilon^l(\omega, k)]. \tag{6}$$

Такой выбор, однако, даже в случае изотропной среды произволен, поскольку тензор ε_{ij} следовало бы выбирать в виде (5), т. е. состоящим из двух скалярных функций; из-за поперечности вектора индукции $\mathbf{B}$ тензор μ_{ij} в изотропной среде всегда пропорционален единичному тензору. При этом уже не удалось бы установить соотношение типа (6).

С другой стороны, задавшись тензором μ_{ij} для произвольной анизотропной среды, можно выразить тензор ε_{ij} через μ_{ij} и σ_{ij}. Так, если принять

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij} + \frac{c^2}{\omega^2}e_{ikl}k_k(\delta_{lm} - \mu^{-1}_{lm})e_{mnj}k_n, \tag{7}$$

где e_{ijk} — единичный полностью антисимметричный тензор ($e_{123} = 1$, $e_{213} = -1$), то уравнения (2) и (3) окажутся эквивалентными. Напротив, считая произвольным тензор ε_{ij}, выразить μ_{ij} через ε_{ij} и σ_{ij} уже нельзя, поскольку в принятой форме материальных уравнений (1) вектор $\mathbf{H}$ не зависит от потенциальной части электрического поля $\mathbf{E}$ (которую нельзя выразить через $\mathbf{B}$). Заметим, что при таком подходе тензор μ_{ij} можно выбирать совершенно произвольным образом.

Для случая изотропной среды, когда σ_{ij} представляется в виде (5) $\mu_{ij} = \delta_{ij}\mu$, соотношение (7) принимает вид

$$\varepsilon_{ij} = \frac{k_i k_j}{k^2}\varepsilon^l + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right)\left[\varepsilon^{tr} - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\right]. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, видна непоследовательность выбора $\varepsilon_{ij} = \delta_{ij}\varepsilon$. Тензор ε_{ij} в изотропной среде, так же, как и σ_{ij}, состоит из двух функций и представляется в виде (5).

Таким образом, процедура определения тензоров ε_{ij} и μ_{ij} через σ_{ij}, а вместе с тем и определение векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$, всегда неоднозначна. Этот произвол в общем виде можно продемонстрировать переходом к новым величинам $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{H}'$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}' &= \mathbf{D} - [\mathbf{kf}], \\ \mathbf{H}' &= \mathbf{H} + \frac{\omega}{c}\mathbf{f}, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\mathbf{f}$ — произвольный вектор, зависящий от $\mathbf{B}$. Можно показать, что поля $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{H}'$ удовлетворяют тем же уравнениям (1) при соответствующем изменении ε_{ij} и μ_{ij}. Это как раз и означает неоднозначность определения тензоров ε_{ij} и μ_{ij} без каких-либо дополнительных условий. Иначе говоря, индуцированный в среде ток $\mathbf{j}$ нельзя без каких-либо дополнительных предположений разделить на ротор намагниченности и производную по времени от поляризации, т. е. записав ток в виде $\mathbf{j} = -i(\omega/c)\,\mathbf{P} + ic\,[\mathbf{kM}]$, — вектор $\mathbf{P}$ будет определен с точностью до произвольного поперечного вектора.

3. Рассмотрим несколько возможных определений $\mathbf{H}$ и $\mathbf{D}$. Прежде, однако, заметим, что часто в электродинамике материальных сред полагают $\mu_{ij} = \delta_{ij}$. При этом согласно (7)

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega}\sigma_{ij} \tag{10}$$

Следует подчеркнуть, что это вовсе не означает пренебрежение магнитными свойствами среды — все магнитные свойства среды включены в тензор ε_{ij}. Такая форма записи материальных уравнений, однако, не очень удобна при исследовании магнитных свойств среды в квазистатическом пределе. Тензор μ_{ij} следует построить так, чтобы в статическом пределе ($\omega/k \to 0$, $k \to 0$) получалось выражение для используемой обычно квазистатической магнитной проницаемости:

$$\mu_{ij}^{-1} = \frac{\partial}{\partial B_i}(B_j - 4\pi M_j). \tag{11}$$

Намагниченность среды $\mathbf{M}$, вообще говоря, может зависеть не только от магнитной индукции, но и от напряженности потенциального электрического поля $\mathbf{E}^{\mathrm{l}}$. В статическом пределе можно наложить два разных условия на электрическом поле, либо $\mathbf{E}^{\mathrm{l}} = \mathrm{const}$, либо $\mathbf{D}^{\mathrm{l}} = \mathrm{const}$. Поэтому имеет смысл рассматривать два разных тензора магнитной проницаемости.

Переходя к произвольным частотам и волновым векторам, разделим полный ток, индуцированный в среде на продольную и поперечную части $\mathbf{j} = \mathbf{j}^{\mathrm{l}} + \mathbf{j}^{\mathrm{tr}}$, где

$$\mathbf{j}^{\mathrm{l}} = \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot\mathbf{j})}{k^2}, \quad \mathbf{j}^{\mathrm{tr}} = \mathbf{j} - \mathbf{j}^{\mathrm{l}}. \tag{12}$$

Поперечную часть тока $\mathbf{j}^{\mathrm{tr}}$ можно представить в виде $\mathbf{j}^{\mathrm{tr}} = ic\,[\mathbf{kM}]$. В результате имеем

$$M_i = \frac{i}{ck^2}[\mathbf{k}\mathbf{j}^{\mathrm{tr}}]_i = \frac{i}{ck^2} e_{ijk}k_j\sigma_{kl}E_l. \tag{13}$$

Представив, далее, $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{\mathrm{l}} + \mathbf{E}^{\mathrm{tr}}$ и учитывая, что $\mathbf{E}^{\mathrm{tr}} = -(\omega/ck^2)\,[\mathbf{kB}]$, определим μ_{ij}^{-1} при $\mathbf{E}^{\mathrm{l}} = \mathrm{const}$

$$\mu_{ij}^{-1} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{c^2k^4} e_{ikl}k_k\sigma_{ln}e_{nmj}k_m. \tag{14}$$

Условие $\mathbf{E}^{\mathrm{l}} = \mathrm{const}$ означает, что фиксированы потенциалы внешних источников. В этом случае согласно (7)

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega}\left[\sigma_{ij} - \left(\delta_{il} - \frac{k_ik_l}{k^2}\right)\sigma_{lm}\left(\delta_{mj} - \frac{k_mk_j}{k^2}\right)\right]. \tag{15}$$

В изотропной среде формулы (14) и (15) принимают вид

$$\mu_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \frac{4\pi i\omega}{c^2k^2}\sigma^{\mathrm{tr}}\delta_{ij} = \delta_{ij}\left[1 - \frac{\omega^2}{c^2k^2}(\varepsilon^{\mathrm{tr}} - 1)\right],$$

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega}\frac{k_ik_j}{k^2}\sigma^{\mathrm{l}} = \delta_{ij} + \frac{k_ik_j}{k^2}(\varepsilon^{\mathrm{l}} - 1); \tag{16}$$

здесь мы учли, что μ_{ij}^{-1} действует всегда на поперечный вектор $\mathbf{B}$.

Определим теперь μ_{ij}^{-1}, считая $\mathbf{D}^l = \mathrm{const}$, т. е. при фиксированных внешних зарядах. При этом в среде возникает потенциальное поле $\mathbf{E}^l$, зависящее от магнитной индукции $\mathbf{B}$. Определив далее из уравнения $\mathbf{kD}^l = -4\pi i\rho_0$ продольное поле $\mathbf{E}^l$ и используя (13), легко находим

$$\mu_{ij}^{-1} = \delta_{ij} + \frac{4\pi i\omega}{c^2k^4} e_{ikl}k_k\sigma_{ln}e_{nmj}k_m - \frac{i}{c^2k^6\varepsilon^l} e_{ikl}k_k\sigma_{lm}k_mk_n\sigma_{ns}e_{sjt}k_t, \qquad (17)$$

где $\varepsilon^l = 1 + (4\pi i/\omega)\, k_i\sigma_{ij}k_j/k^2$ — «продольная» диэлектрическая проницаемость анизотропной среды. Теперь, следуя (17), находим тензор ε_{ij}, который мы здесь не будем выписывать. Очевидно, что в изотропной среде выражения (17) и (14) совпадают, а поэтому соотношения (16) справедливы и при $\mathbf{D}^l = \mathrm{const}$.

Хотя выбор того или иного вида тензора μ_{ij} является в значительной степени делом вкуса, нам кажется наиболее естественным тензор μ_{ij}, даваемый формулой (17). При отличном от нуля волновом векторе $\mathbf{k}$ единственным реализуемым практически условием является постоянство внешних зарядов, то есть $\mathbf{D}^l = \mathrm{const}$ [2], и тензор μ_{ij}, даваемый формулой (17), удовлетворяет условию причинности и соотношениям Крамерса — Кронига. Тензор (16) может рассматриваться как функция отклика только при $\mathbf{k} = 0$.

Таким образом, уравнения электродинамики материальных сред могут быть сформулированы с использованием тензоров ε_{ij} и μ_{ij}, учитывающих как частотную, так и пространственную дисперсию. Однако выбор той или иной формулировки в значительной степени произволен, определение тензоров ε_{ij} и μ_{ij} неоднозначно. Требование перехода к определенным измеряемым на опыте величинам в статическом пределе не снимает произвола. В частности, согласно (9), для однозначности μ_{ij} в статическом пределе $\omega/k \to 0$, $k \to 0$ достаточно потребовать, чтобы $\mathbf{f} \to 0$. Вместе с тем, нам хотелось подчеркнуть, что определение (17) с физической точки зрения наиболее обоснованно, как соответствующее реальной постановке задачи.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред.— М.: Атомиздат, 1961.
2. Киржниц Д. А.— УФН, 1976, т. 119, с. 357.