

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

523.76

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОЛНЦА И ПЛАНЕТ-ГИГАНТОВ**С. В. Воронцов, В. Н. Жарков****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение	675
2. Теоретический аппарат	677
а) Уравнения малых адиабатических колебаний дифференциально вращающейся звезды (677). б) Теория возмущений (679). в) Задача при отсутствии вращения. Классификация колебаний (680). г) Влияние вращения (690). д) Возбуждение колебаний (692).	
3. Собственные колебания Солнца	694
а) 5-минутные колебания (694). б) Колебания с периодами 7—70 минут (698). в) 160-минутные колебания (700).	
4. Теоретические спектры колебаний Юпитера и Сатурна	703
а) Модели внутреннего строения (703). б) Спектры колебаний (703). в) Взаимодействие мод (706).	
Цитированная литература	707

1. ВВЕДЕНИЕ

Совсем недавно проблема внутреннего строения Солнца считалась в основном решенной. С использованием лабораторных и теоретических данных о сечениях ядерных реакций и о среднемассовых коэффициентах радиационного поглощения (непрозрачности), а также на основе представлений о структуре конвективной зоны (теория длины перемешивания) были рассчитаны детальные эволюционные модели внутреннего строения Солнца. Эти модели, которые часто называют стандартными моделями Солнца, построены в предположении однородности химического состава во время образования Солнца и в предположении о том, что вещество Солнца глубже конвективной зоны не подвергалось перемешиванию в процессе эволюции, т. е. продукты термоядерных реакций накапливаются в областях их образования. Рассчитывалась эволюция такой модели, и путем подбора начального содержания гелия удавалось получить современную светимость Солнца при возрасте 4,7 млрд. лет, а варьированием свободного параметра в теории конвективной зоны (отношение длины пути перемешивания к шкале высот по давлению) — радиус Солнца. Считалось, что небольшие неопределенности, связанные с неточностью использованных физических параметров, удастся устранить без радикального пересмотра исходных положений. Исследования последних лет, однако, не только не оправдали возлагавшихся надежд, а скорее инициировали интерес к пересмотру исходных представлений о строении и эволюции Солнца.

Ждет своего решения проблема солнечных нейтрино ¹. Стандартные модели предсказывают поток энергичных нейтрино, в 2,6—4,0 раза превышающий данные наблюдений, если считать, что генерируемые в недрах Солнца нейтрино без изменений проходят свой путь до Земли ²⁷.

Вторая проблема связана с палеоклиматологией. Стандартные модели предсказывают значительный рост светимости Солнца на протяжении истории Земли. Миллиард лет назад светимость должна была быть на 10% ниже современной, а четыре миллиарда лет назад — на 30–40% ниже. Первые количественные модели земного климата показали, что уменьшение светимости Солнца всего на 2% при современном составе атмосферы привело бы к глобальному оледенению Земли. Даже при последующем увеличении светимости до современного значения, Земля оставалась бы покрытой снегом благодаря высокому альбедо. С другой стороны, возраст древнейших форм жизни оценивается по меньшей мере в три миллиарда лет. Некоторые древние горные породы обладают морфологией, требующей жидкой воды. Изотопные анализы указывают на то, что в прошлом климат был даже несколько теплее современного. Кроме того, некоторые черты марсианских каналов указывают на существование в прошлом жидкой воды на Марсе и, следовательно, более теплого климата, что также трудно согласовать с низкой светимостью Солнца. Теоретическое моделирование климата на больших шкалах времени связано пока с целым комплексом нерешенных проблем, и надежность таких выводов не следует переоценивать. Низкая светимость может в значительной мере компенсироваться увеличением парникового эффекта из-за иного в прошлом химического состава атмосферы. Поэтому в настоящее время можно лишь сказать, что теоретическое моделирование сталкивается с трудностями в попытке связать данные климатологии с предсказанием стандартных моделей о низкой в прошлом светимости Солнца. Состояние проблемы истории климата изложено в книгах Будыко¹⁰⁴, Моница и Шипкова² и в обзоре Поллака³.

Третья проблема, которой и посвящен настоящий обзор, возникла в связи с обнаружением собственных колебаний Солнца. Основные исследования начались с открытия Лейтоном, Нойсом и Саймоном 5-минутных колебаний Солнца⁴. Позднее Хилл, Стеббинс и Браун⁵ сообщили о регистрации целого ряда периодов во флуктуациях солнечного диаметра, в диапазоне от нескольких минут до одного часа. Северный, Котов и Цап⁶ и независимо Брукс, Айзек и Ван-дер-Рей⁷ сообщили о регистрации колебаний с периодом 160 минут.

Эти колебания к настоящему времени зарегистрированы шестью группами исследователей^{6–10, 116}. 160-минутные колебания трудно интерпретировать в рамках стандартной модели. Некоторые затруднения связаны также с интерпретацией последних данных группы Хилла¹¹. Более подробно об этом будет сказано ниже.

Кроме указанных проблем, до сих пор существует комплекс загадочных явлений, связанных с солнечной активностью. В настоящее время, цитируя Е. Н. Паркера¹³, Солнце — «единственная звезда, о которой мы знаем достаточно много, чтобы ощутить, как мало мы знаем». Проблема внутреннего строения Солнца вышла из разряда казалось бы решенных вопросов и стала одной из острых и актуальных проблем астрофизики. Изучение собственных колебаний быстро превращается в новый и перспективный раздел физики Солнца.

Собственные колебания содержат количественную информацию о строении внутренних областей Солнца, которую невозможно получить другими методами. Так как периоды отдельных колебаний определяются различными по глубине областями Солнца, то по мере накопления экспериментальных данных в будущем будет возможна постановка обратной задачи для построения солнечной модели. Кроме периодов, большую потенциальную информацию о внутреннем строении несут амплитуды колебаний и их поведение во времени. Прецессия поверхностной картины сме-

щений содержит информацию о дифференциальном вращении солнечных недр. Теоретические основы метода собственных колебаний хорошо развиты, и накоплен значительный опыт его применения для изучения внутреннего строения Земли, где уже более тысячи наблюдаемых частот идентифицировано с теоретическим спектром.

В настоящем обзоре обсуждаются также теоретические спектры собственных колебаний Юпитера и Сатурна. Исследования этих планет привлекают большое внимание благодаря первым пролетам вблизи них космических аппаратов. Согласно современным представлениям, обе планеты находятся в газовой-жидкой, конвективном состоянии¹⁴. Детальные модели внутреннего строения основываются пока на весьма ограниченном числе данных, а именно на значениях средней плотности, первых двух гравитационных моментов и граничных условиях давления и температуры в атмосфере¹⁵. В связи с этим проблема расширения экспериментальных данных, содержащих информацию о недрах Юпитера и Сатурна, весьма актуальна.

Задачи о собственных колебаниях Солнца и планет-гигантов имеют много общего. В том и другом случае существенно влияние вращения. Сравнительный анализ теоретических спектров позволяет уточнить принципы классификации колебаний, что имеет прямое отношение к проблеме интерпретации наблюдаемых колебаний Солнца.

2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

Ниже дается краткое изложение теории собственных колебаний, адаптированное к проблемам интерпретации наблюдаемых колебаний Солнца и к расчету теоретических спектров колебаний планет-гигантов; будут рассмотрены лишь некоторые основные работы, имеющие прямое отношение к указанным задачам. При описании общих аспектов теории собственных колебаний Солнца и газово-жидких планет-гигантов объект исследования будем называть для краткости звездой. Читатель, интересующийся развитием теории в более широком плане, может обратиться к обзорным работам Леду и Валравена¹⁶, Леду¹⁷ и к недавно вышедшей книге Кокса¹⁰⁵. Некоторые современные достижения теории собственных колебаний звезд коротко суммированы в обзоре Кокса¹⁸.

а) Уравнения малых адиабатических колебаний дифференциально вращающейся звезды

В инерциальной системе координат исходными уравнениями являются:

1) уравнение движения

$$\mathbf{a} = -\rho^{-1}\nabla p - \nabla\psi, \quad (2.1)$$

$\mathbf{a}$ — вектор ускорения материального элемента, ρ , p и ψ — соответственно плотность, давление и гравитационный потенциал;

2) уравнение Пуассона

$$\nabla^2\psi = 4\pi G\rho; \quad (2.2)$$

3) уравнение неразрывности

$$\rho' = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}); \quad (2.3)$$

$\mathbf{u}$ — отклонение материального элемента от его положения в невозмущенной звезде, ρ' — эйлерово возмущение плотности, ρ_0 — ее невозмущенное значение;

4) уравнение связи между лагранжевыми пульсациями давления и плотности

$$\Delta p = K \rho_0^{-1} \Delta \rho, \quad (2.4)$$

которое в эйлеровых координатах имеет вид

$$p' + \mathbf{u} \cdot \nabla p_0 = K \rho_0^{-1} (\rho' + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho_0). \quad (2.5)$$

При расчете адиабатического модуля сжатия

$$K = p \left(\frac{d \ln p}{d \ln \rho} \right)_{\text{ад}} \equiv p \Gamma_1 \quad (2.6)$$

вещество Солнца рассматривается как смесь газа частиц и излучения. При физических условиях в недрах Солнца газ частиц хорошо описывается уравнением состояния идеального газа, а излучение — законом излучения абсолютно черного тела:

$$p_G = \frac{R}{\mu} \rho T, \quad p_F = \frac{4\sigma}{3c} T^4, \quad p = p_G + p_F, \quad (2.7)$$

σ — постоянная Стефана — Больцмана. Для такой смеси ¹⁹

$$\Gamma_1 = \beta + \frac{(4 - 3\beta)^2 (\gamma - 1)}{\beta + 12(\gamma - 1)(1 - \beta)}, \quad \beta = \frac{p_G}{p}, \quad \gamma = \frac{5}{3}. \quad (2.8)$$

Если $p_G \gg p_F$, что является хорошим приближением, $\Gamma_1 = 5/3$.

В адиабатических моделях газово-жидких Юпитера и Сатурна модуль сжатия рассчитывается по формуле

$$K = \rho \frac{dp}{dr} \left(\frac{dp}{dr} \right)^{-1}. \quad (2.9)$$

Будем считать, что невозмущенное поле скоростей дифференциально вращающейся звезды стационарно и в сферической системе координат (r, θ, φ) скорости не зависят от азимутального угла φ . В этом случае поле скоростей можно представить в виде

$$v_\theta(r, \theta) = r_c \Omega(r, \theta) \hat{\varphi}, \quad (2.10)$$

где r_c — расстояние от оси вращения (радиус в цилиндрической системе координат с осью z по оси вращения), Ω — угловая частота вращения, $\hat{\varphi}$ — единичный вектор по координате φ . Зависимость смещений $\mathbf{u}$ при колебаниях от угла φ определим множителем $\exp(im\varphi)$, где m — целое число. Это можно сделать, поскольку зависимость от φ должна быть периодичной, и любое колебание в рамках линейной теории можно рассматривать как суперпозицию таких элементарных волн с различными значениями m .

После линеаризации уравнения малых адиабатических колебаний в инерциальной системе координат принимают вид

$$\begin{aligned} \rho_0 [-\omega^2 \mathbf{u} + \Omega (2i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} - 2m\omega \mathbf{u}) + \Omega^2 (2im \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} - m^2 \mathbf{u})] = \\ = \nabla (K \nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla [\mathbf{u} \cdot \rho_0 (\nabla \psi_0 - r_c \Omega^2)] - \\ - \rho' (\nabla \psi_0 - r_c \Omega^2) - \rho_0 \nabla \psi' - \rho_0 r_c (\mathbf{u} \cdot \nabla \Omega^2), \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\nabla^2 \psi' = 4\pi G \rho', \quad (2.12)$$

$$\rho' = -\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{u}). \quad (2.13)$$

Здесь $\hat{\mathbf{z}}$ — единичный вектор по оси вращения. Зависимость от времени отделена множителем $\exp(i\omega t)$, ω — угловая частота колебания. Множитель в квадратных скобках в левой части (2.11) представляет собой лагранжеву пульсацию ускорений ^{20, 21}. При выводе (2.11) использованы

уравнение для пульсаций давления (2.5) и уравнение неразрывности (2.3). Решения уравнений (2.11) — (2.13) должны удовлетворять свободным граничным условиям на деформированной поверхности звезды (отсутствие напряжений и непрерывность гравитационного потенциала и его градиента).

Уравнения (2.11) — (2.13) с соответствующими граничными условиями определяют краевую задачу на собственные значения для уравнений в частных производных. Для ее решения используют теорию возмущений, позволяющую при достаточно медленном вращении определить поправки к решению более простой задачи для невращающейся звезды.

б) Т е о р и я в о з м у щ е н и й

Используются два различных метода построения теории возмущений. Первый, вариационный метод, коротко состоит в следующем. В начале находятся частоты и собственные функции (формы) колебаний при отсутствии вращения. Далее, частоту колебания представляют в виде функционала от параметров модели и собственных функций этого колебания. Это можно сделать, проинтегрировав по объему звезды векторное уравнение колебаний, домноженное скалярно на векторное поле смещений. Варьируя в этом функционале частоту вращения от нуля до заданного значения, находят поправку на частоту колебания. Метод оправдан тем, что определяемая таким образом частота стационарна в первом приближении к вариациям собственных функций. Достоинством такого подхода является его простота, однако он позволяет найти лишь первую поправку на частоту и не позволяет определить поправки на собственные функции. Влияние медленного дифференциального вращения на частоты собственных колебаний исследовано с помощью вариационного метода Хансеном, Коксом и Ван Хорном ²¹ (полученные ими результаты приведены Куйперсом ¹⁰⁶ к виду, более удобному для численных расчетов).

Вторым, более общим методом, является используемая в квантовой механике теория возмущений для эрмитовых операторов. Ниже коротко описана схема применения этого метода к расчету собственных колебаний вращающейся звезды ²²⁻²⁴.

Дифференциальное вращение звезды удобно представить в безразмерном виде, выделяя среднюю угловую частоту вращения Ω_0 :

$$\Omega(r, \theta) = \Omega_0 \Omega_d(r, \theta). \quad (2.14)$$

Уравнения малых адиабатических колебаний запишем в операторном виде:

$$\begin{aligned} -\omega^2 \mathbf{u} + \Omega(2i\omega \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} - 2m\omega \mathbf{u}) + \Omega^2(2im\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{u} - m^2 \mathbf{u}) = \\ = -\mathbf{H}_0 \mathbf{u} - \Omega_0^2(\Psi + \mathbf{E}) \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В (2.15) оператор $\mathbf{H}_0$ соответствует задаче при отсутствии вращения:

$$\omega_0^2 \mathbf{u}_0 = \mathbf{H}_0 \mathbf{u}_0. \quad (2.16)$$

Вид этого интегро-дифференциального оператора определяется уравнением (2.14) с использованием ψ' и ρ' из (2.12) и (2.13). Оператор $\Psi + \mathbf{E}$ определяется тогда из условия эквивалентности уравнений (2.15) и (2.11). В левой части (2.15) содержатся операторы, представляющие силы Кориолиса. Оператор Ψ представляет влияние центробежных сил, $\mathbf{E}$ — влияние эллиптичности (деформации) звезды под влиянием вращения).

Вводится также малый параметр

$$\lambda = \frac{\Omega_0}{\omega_0}, \quad (2.17)$$

и решения ищутся в виде

$$\omega = \omega_0 (1 + \sigma_1 \lambda + \sigma_2 \lambda^2 + \dots), \quad (2.18)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \lambda \mathbf{u}_1 + \lambda^2 \mathbf{u}_2 + \dots \quad (2.19)$$

Подставляя разложения (2.18, 2.19) в операторное уравнение (2.15) и приравнивая члены с одинаковыми степенями λ , получаем систему уравнений теории возмущений

$$[\mathbf{I} - \omega_0^{-2} \mathbf{H}_0] \mathbf{u}_0 = 0, \quad (2.20)$$

$$[\mathbf{I} - \omega_0^{-2} \mathbf{H}_0] \mathbf{u}_1 = -2\sigma_1 \mathbf{u}_0 - \Omega_D [2m - 2i\hat{\mathbf{z}} \times] \mathbf{u}_0, \quad (2.21)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{I} - \omega_0^{-2} \mathbf{H}_0] \mathbf{u}_2 = & -2\sigma_1 \mathbf{u}_1 - (\sigma_1^2 + 2\sigma_2) \mathbf{u}_0 - \Omega_D [2m - 2i\hat{\mathbf{z}} \times] \mathbf{u}_1 - \\ & - \sigma_1 \Omega_D [2m - 2i\hat{\mathbf{z}} \times] \mathbf{u}_0 - \Omega_D^2 [m^2 - 2im\hat{\mathbf{z}} \times] \mathbf{u}_0 + [\Psi + \mathbf{E}] \mathbf{u}_0, \\ & \dots \dots \dots ; \quad (2.22) \end{aligned}$$

здесь $\mathbf{I}$ — единичный оператор. Уравнения (2.20) — (2.22) решаются последовательно. Уравнение (2.20) соответствует задаче при отсутствии вращения (нулевое приближение), (2.21) определяет первое приближение теории возмущений, (2.22) — второе приближение и так далее.

в) Задача при отсутствии вращения. Классификация колебаний

Задача нулевого приближения является основой для построения схемы классификации колебаний и для изучения свойств различных мод собственных колебаний. Влияние вращения и других возможных возмущений, таких, как магнитное поле и приливы, а также проблемы устойчивости и возбуждения колебаний обычно изучаются на основе решений задачи нулевого приближения. В нулевом приближении невращающаяся звезда имеет форму сферы.

Собственные колебания упругой самогравитирующей невращающейся сферы делятся на два класса: сфероидальные и крутильные колебания. Для сфероидальных колебаний векторное поле смещений имеет вид

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{r}} U(r) Y_{lm}(\theta, \varphi) + V(r) \nabla_1 Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (2.23)$$

для крутильных колебаний

$$\mathbf{u} = -W(r) \hat{\mathbf{r}} \times \nabla_1 Y_{lm}(\theta, \varphi); \quad (2.24)$$

здесь Y_{lm} — сферическая гармоника степени l и порядка m , ∇_1 — угловая часть оператора градиента, $\nabla_1 = \hat{\theta} \partial / \partial \theta + \hat{\varphi} \sin^{-1} \theta \partial / \partial \varphi$, $\hat{\mathbf{r}}$, $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ — единичные векторы по координатам r , θ , φ . Индекс m принимает $2l + 1$ значений $m = -l, \dots, 0, \dots, l$. Собственные функции сфероидальных и крутильных колебаний образуют полную систему: по ним можно разложить любое свободное движение гравитирующей сферы. При сфероидальных колебаниях радиальная компонента ротора смещений равна нулю. При крутильных колебаниях отсутствуют радиальные смещения, и дивергенция смещений равна нулю. Частным случаем сфероидальных колебаний при $l = 0$ являются радиальные колебания, смещения при которых направлены по радиусу. Колебания с $l = 1$ называются дипольными, $l = 2$ — квадрупольными и т. д. Газовая или жидкая сфера при отсутствии вращения

не подвержена крутильным колебаниям (из-за отсутствия сдвиговых напряжений нет возвращающих сил), и все их частоты равны нулю. Однако их нельзя упускать из рассмотрений: помимо того, что векторные поля крутильных колебаний дополняют векторные поля сфероидальных колебаний до полной системы собственных функций упругой гравитирующей сферы²⁵, их частоты отличны от нуля при введении вращения или магнитного поля.

Подстановка выражения (2.23) для сфероидального векторного поля в векторные уравнения колебаний (2.11) — (2.13) при $\Omega = 0$ позволяет из-за сферической симметрии разделить переменные. Задача при этом сводится к линейной однородной системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (см., например, ^{16,17,37}):

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dr} &= -\frac{2}{r} y_1 + \frac{1}{K} y_2 + \frac{l(l+1)}{r} y_0, \\ \frac{dy_2}{dr} &= -\left(\omega^2 \rho_0 + \frac{4\rho_0 g_0}{r}\right) y_1 + \frac{l(l+1)\rho_0 g_0}{r} y_0 - \rho_0 y_4, \\ \frac{dy_3}{dr} &= 4\pi G \rho_0 y_1 + y_4, \\ \frac{dy_4}{dr} &= -\frac{4\pi G \rho_0 l(l+1)}{r} y_0 + \frac{l(l+1)}{r^2} y_3 - \frac{2}{r} y_4, \\ y_0 &= \frac{1}{r\omega^2} \left(g_0 y_1 - \frac{1}{\rho_0} y_2 - y_3\right); \end{aligned} \quad (2.25)$$

здесь g_0 — ускорение силы тяжести и введены новые переменные

$$\begin{aligned} y_1 &= U, \quad y_2 = KX, \quad y_3 = P, \quad y_4 = \frac{dP}{dr} - 4\pi G \rho_0 U, \quad y_0 = V, \\ \psi' &= -P(r) Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = X(r) Y_{lm}(\theta, \varphi). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Эти переменные имеют простой физический смысл, являясь радиальными множителями в радиальной компоненте смещений (y_1), в пульсации давления (y_2), в возмущении гравитационного потенциала (y_3) и в горизонтальной компоненте смещений (y_0). Граничные условия — регулярность всех величин в начале координат, а также отсутствие напряжений и непрерывность гравитационного потенциала вместе с его градиентом на деформированной поверхности звезды:

$$y_2 = 0, \quad y_4 + \frac{l(l+1)}{R} y_3 = 0 \quad (r = R); \quad (2.27)$$

R — радиус звезды. Внутри звезды все функции y_i должны быть непрерывны, кроме y_0 — тангенциальные смещения могут иметь внутри звезды разрывы на скачках материальных параметров, связанных с изменениями химического состава или с фазовыми переходами. Так как для Солнца и планет-гигантов плотность и давление уменьшаются к поверхности непрерывно до нуля, то граничные условия (2.27) накладываются при некотором достаточно большом $r_k < R$. Это эквивалентно расчету колебаний модели с отброшенными легкими внешними слоями и введенным вместо них постоянным давлением, равным тому, которое они оказывали. Справедливость этой процедуры проверяется при численных расчетах непосредственно варьированием r_k и обусловлена тем, что самые внешние легкие слои мало влияют на периоды и формы колебаний. Уравнения (2.25) с граничными условиями (2.27) решаются численно итерациями по ω . В работах по собственным колебаниям встречается различный выбор функций y_i для их описания, соответственно форма уравнений (2.25) может быть иной¹⁶. Выбор функций в виде (2.26) соответствует принятому

в теории собственных колебаний Земли ²⁶. Кроме того, в некоторых работах номер колебания (степень сферической гармоник) обозначается индексом n . Чтобы избежать недоразумений, в настоящем обзоре использована индексация, принятая в подавляющем большинстве цитированных работ.

При фиксированном значении l все колебания с индексами $m = -l, \dots, l$ имеют одинаковые частоты, т. е. при отсутствии вращения имеет место вырождение частот по азимутальному индексу сферической гармоник. Это вырождение степени $2l + 1$ связано со сферической симметрией задачи.

Далее, для каждого l существует бесконечный набор решений с дискретными значениями ω , собственные функции которых обладают различным числом узлов и различным распределением амплитуд по радиусу звезды. Для их описания необходима схема классификации, отражающая различие свойств этих колебаний. Ниже будут изложены принципы такой классификации на примере теоретических спектров колебаний политропных моделей, стандартной модели Солнца и моделей планет-гигантов. Далее мы увидим, что спектр колебаний звезд может быть весьма сложным. Поэтому вопрос о классификации колебаний является практически важным.

Для предварительного изучения основ классификации колебаний теоретического спектра задачу можно значительно упростить, используя приближение Каулинга ²⁸. Приближение Каулинга состоит в том, что пренебрегается возмущениями гравитационного потенциала из-за перераспределения масс в звезде при ее колебаниях. При значительной концентрации массы к центру звезды, где смещения при колебаниях в основном горизонтальны, это приближение дает хорошие количественные результаты ²⁹. В этом случае из задачи выпадает уравнение Пуассона, и она сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка, которую можно записать в виде ^{17,30}

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dr} &= \left[\frac{l(l+1)}{\omega^2} - \frac{\rho_0 r^2}{\Gamma_1 p_0} \right] \frac{p_0^{2/\Gamma_1}}{\rho_0} w, \\ \frac{dw}{dr} &= \frac{1}{r^2} \left(\omega^2 + A g_0 \right) \frac{\rho_0}{p_0^{2/\Gamma_1}} v, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $v = r^2 U p_0^{1/\Gamma_1}$, $w = p' / p_0^{1/\Gamma_1}$, p' — эйлерово возмущение давления, $\Gamma_1 = 5/3$ (упругостью излучения пренебрегаем),

$$A = \frac{d \ln \rho_0}{dr} - \frac{1}{\Gamma_1} \frac{d \ln p_0}{dr}. \quad (2.29)$$

Граничное условие на поверхности $p' + U (dp_0/dr) = 0$ ($r = R$).

Рассмотрим характер решений этой задачи для политропного газового шара, структура которого определяется связью между давлением и плотностью вида $p_0 = \text{const} \cdot \rho_0^{(n+1)/n}$, где n — индекс политропы. Возможные значения индекса политропы лежат в интервале от 0 до 5. Политропа нулевого индекса дает модель постоянной плотности, политропа индекса 1,5 соответствует адиабатической газовой модели. Концентрация массы к центру растет с увеличением индекса политропы, устремляясь к бесконечности при $n = 5$. Политропный закон представляет большие удобства в описании внутреннего строения звезд.

Решения дифференциальных уравнений (2.28) могут иметь экспоненциальный или колебательный характер как функции радиуса в зависимости от того, имеют ли коэффициенты правой части этих уравнений одинаковый или разный знаки. Эти коэффициенты для заданной модели являются функциями радиуса и частоты. В первом уравнении коэффициент равен

нулю при $\omega^2 = [l(l+1)/r^2] \Gamma_1 p_0 / \rho_0$, а во втором уравнении — при $\omega^2 + Ag_0 = 0$, т. е. при $\omega^2 = N^2$, где N — так называемая частота Брента — Вайсяля. Таким образом, координатная плоскость ($x = r/R$, ω^2) разделяется на четыре области, две с колебательным и две с экспоненциальным по x характером решений. Для политропы индекса 3 эти области на рис. 1 ограничены непрерывными кривыми. Области с колебательным по x характером решений обозначены через G и A ³⁰.

Рассчитанные численным интегрированием уравнений (2.28) частоты колебаний политропной модели индекса 3 показаны на рис. 1 горизонтальными прямыми. Для каждой частоты положения узлов в собственных функциях радиальных смещений отмечены кружками. Узлы располагаются в областях с колебательным по x характером решений. Видно колебание без узлов, оно называется основным тоном f . Колебания более

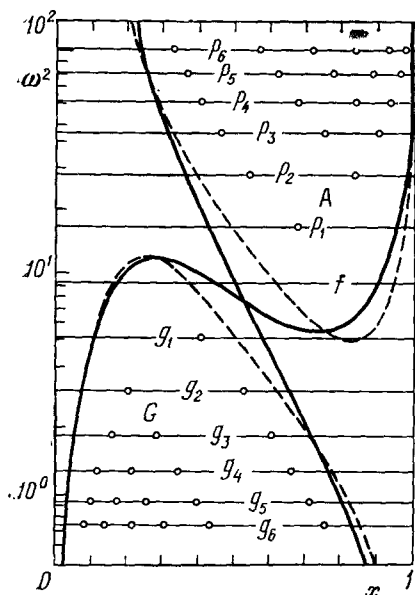


Рис. 1. Политропа индекса 3.

Непрерывные кривые ограничивают области A и G . Горизонтальными прямыми показаны частоты нескольких мод ($l = 2$), кружки соответствуют положениям узлов. Частота в единицах GM/R^2 . Штриховой линией показаны предельные частоты для плоских волн³⁰.

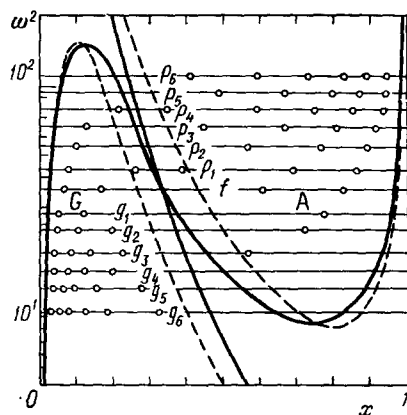


Рис. 2. То же, что на рис. 1, но для политропы индекса 4.

высоких частот концентрируются во внешних областях звезды и соответствуют акустическим колебаниям p , номер p -моды равен числу узлов. Колебания меньших частот, сосредоточенные ближе к центру, соответствуют гравитационным колебаниям g , номер g -моды также равен числу узлов в собственных функциях. Такая классификация колебаний по модам p , f , g была введена Каулингом²⁸.

Схема классификации несколько усложняется для политропной модели более высокого индекса, как это видно из рис. 2 для политропы индекса 4. Области G и A перекрываются по частоте, и в результате в некотором промежуточном интервале частот колебания носят смешанный характер, имея часть узлов в гравитационной области G и часть узлов в акустической области A . Для каждого колебания дополнительные узлы при увеличении индекса политропы появляются попарно, и число дополнительных узлов в областях G и A одинаково. Формальная схема классификации при этом слегка модифицируется: основным тоном f называют

колебание с равным числом узлов в областях G и A ; номер p -моды определяется разницей между числом узлов в областях A и G ; номер g -моды аналогично равен числу узлов в области G минус число узлов в области A . Как и прежде, частоты всех p -мод выше, чем g -мод, и частота моды f

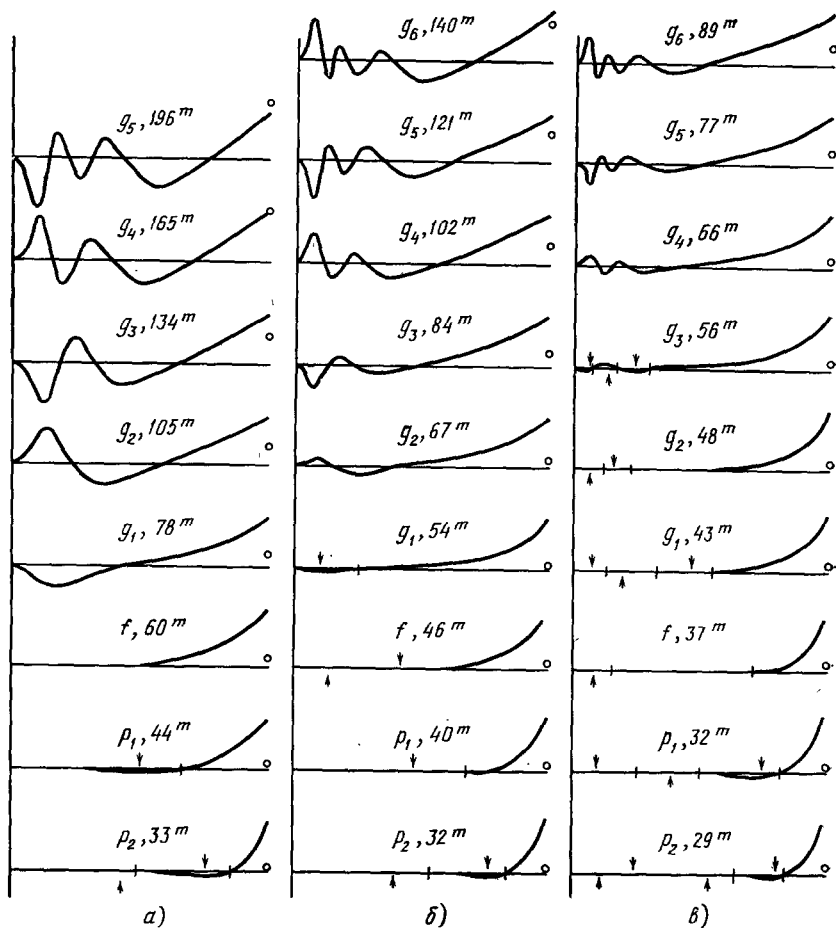


Рис. 3. Собственные функции квадрупольных колебаний политропных моделей Солнца ³².

По горизонтальным осям отложен безразмерный радиус $x = r/R_{\odot}$, слева — центр, справа — поверхность. По вертикали отложены нормированные амплитуды радиальных смещений $U(x)$. Где необходимо, положения узлов показаны штрихами и положения пучностей — стрелками. Относительные амплитуды тангенциальных смещений V на поверхности показаны точками. Для каждого колебания приведена его классификация по модам p, f, g и период в минутах. а) Политропа индекса 3; б) политропа индекса 3,4; в) политропа индекса 3,7.

расположена между ними. В этом случае колебания первых p - и g -мод имеют смешанный характер.

Физическую природу колебаний удобно продемонстрировать, используя их аналог из теории плоских волн ^{30,31}.

Две области колебательных по радиусу решений, рассчитанные с помощью такой аналогии, показаны на рис. 1 и 2 штриховой линией. Видно хорошее соответствие областей акустических и гравитационных волн с областями A и G . Существование колебаний смешанного типа (см. рис. 2) обусловлено тем, что на их частотах различные по глубине области звезды подвержены колебаниям различной физической природы. Другими

словами, в некотором интервале частот одновременно могут распространяться гравитационные волны во внутренних областях звезды и акустические волны во внешних областях.

Классификация теоретического спектра по модам p , f , g может также формально осуществляться с использованием фазовых диаграмм для собственных функций, например в координатах радиальное смещение — пульсация давления ³⁰.

В качестве примера применения описанной классификации на рис. 3 показаны собственные функции радиальных смещений $U(x)$ для квадрупольных колебаний трех политропных моделей звезды с массой и радиусом

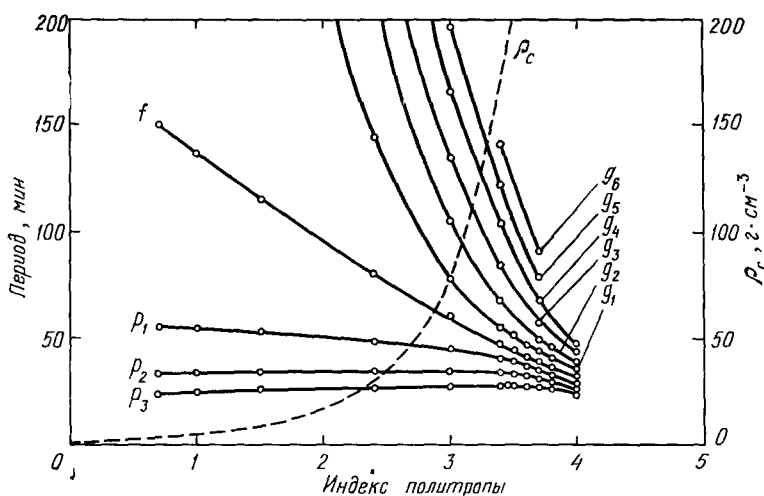


Рис. 4. Периоды квадрупольных ($l = 2$) колебаний политропных моделей Солнца в зависимости от индекса политропы.

Штриховой линией показана плотность в центре ³².

Солнца ³². По горизонтальной оси всюду отложен безразмерный радиус (слева — центр звезды, справа — поверхность). У каждого колебания указана его классификация по модам p , f , g и период в минутах. Колебания расположены снизу вверх в порядке возрастания периода. Там, где необходимо, положение узлов по радиусу показано штрихами, а положение пучностей — стрелками. Точками показаны относительные амплитуды тангенциальных смещений V на поверхности. Для модели с политропным индексом 3,7 видно появление пары дополнительных узлов в модах p_1 , f и g_1 , что отражает смешанный характер этих колебаний. Результаты получены численным решением полной задачи без использования приближения Каулинга (колебания политропных моделей исследовались многими авторами: см., например, ²⁹).

На рис. 4 показана зависимость периодов квадрупольных колебаний политропных моделей в зависимости от индекса политропы ³². Пунктиром показана плотность в центре модели. При уменьшении индекса политропы до значения 1,5 (адиабатическая модель) периоды всех g -мод бесконечно возрастают, что имеет простой физический смысл. Рассмотрим произвольный материальный элемент в недрах звезды, который под действием некоторого возмущения движется вверх, адиабатически расширяясь. В адиабатической модели плотность его при поднятии вверх становится равной плотности окружающих слоев. Поэтому отсутствует возвращающая сила, и периоды g -мод, определяемых возмущениями такого типа, бесконечно

велики. Для модели с индексом политропы ниже 1,5 адиабатическое расширение элемента при его движении вверх приводит к плотности, меньшей плотности окружающей среды. Возникают выталкивающие силы в направлении смещений, поэтому модель становится неустойчивой. Эта неустойчивость аналогична неустойчивости Рэлея — Тейлора для несжимаемой жидкости с плотностью, возрастающей вверх. Такие неустойчивые g -моды имеют отрицательный квадрат частоты, т. е. экспоненциальную временную зависимость. Физическим проявлением неустойчивых g -мод в звездах является конвекция. Если индекс политропы ниже критического значения, движения конвективного типа быстро приведут к перераспределению масс в звезде (на времена порядка одного часа для звезды с массой и радиусом Солнца), и индекс политропы установится на значении, очень близком к критическому, даже если конвекция непрерывно поддерживается потоком тепла из недр звезды.

Критическое значение индекса политропы равно 1,5 лишь для идеального газа при $\Gamma_1 = 5/3$. В общем случае критическое условие возникновения конвекции определяется равенством нулю параметра A (2.29). Если химический состав звезды однороден, условие возникновения конвекции определяется превышением градиента температуры над адиабатическим градиентом (критерий Шварцшильда). Если же средний молекулярный вес растет к центру звезды, конвекция может не возникать даже при сверхадиабатическом градиенте температуры. В модели с переменным по радиусу эффективным индексом политропы неустойчивые g -моды и конвекция ограничены соответствующими областями звезды.

Классификация колебаний номеров $l \neq 2$ осуществляется аналогично квадрупольным. Единственным исключением являются радиальные колебания ($l = 0$), в спектре которых отсутствуют гравитационные моды, имеющие по своей природе нерадиальный характер.

Перейдем теперь к рассмотрению спектров колебаний детальных современных моделей Солнца и планет-гигантов, опять же с точки зрения классификации колебаний. Устанавливая физический характер колебаний, классификация теоретического спектра позволяет судить о вероятности возбуждения и регистрации тех или иных периодов. Результаты теоретических расчетов обычно приводятся в виде спектра периодов, проклассифицированных по той или иной схеме. При использовании классификации по модам p , f , g считается, что наиболее вероятно обнаружение p - и f -мод как имеющих максимальные амплитуды на поверхности, в отличие от сконцентрированных во внутренних областях g -мод. Однако к такому выводу нужно относиться с осторожностью, поскольку формальное применение классификации по модам p , f , g в некоторых случаях может маскировать реальный характер отдельных колебаний.

На рис. 5 представлен теоретический спектр собственных колебаний стандартной современной модели Солнца для номеров $l = 2$, $l = 4$ и $l = 6$. Используются те же обозначения, что на рис. 3. При расчетах³² использована модель внутреннего строения, построенная Абрахамом и Ибеном³³ (модель I, относительное содержание тяжелых элементов 0,0149, начальное содержание гелия — 0,253, температура в центре — $15,38 \times 10^6$ K, плотность в центре — $161,3$ г/см³) и модель конвективной зоны глубиной 198 000 км, рассчитанная Спруитом³⁴, которая хорошо согласуется как с моделью внутреннего строения, так и с моделью солнечной атмосферы HSRA³⁵.

Среди гравитационных мод при $l = 6$ отчетливо выделяется колебание периода 59 минут, сильно отличающееся структурой от других близких по периодам g -мод. Фактически это колебание внешних областей Солнца, с очень малыми амплитудами во внутренних областях. Регистра-

ция такого колебания более вероятна, чем других близких по периодам g -мод для $l = 6$, так как при одинаковых энергиях оно обеспечивает несравненно более высокие амплитуды на поверхности. Здесь проявляется существенный недостаток формальной классификации по модам p , f , g , которая

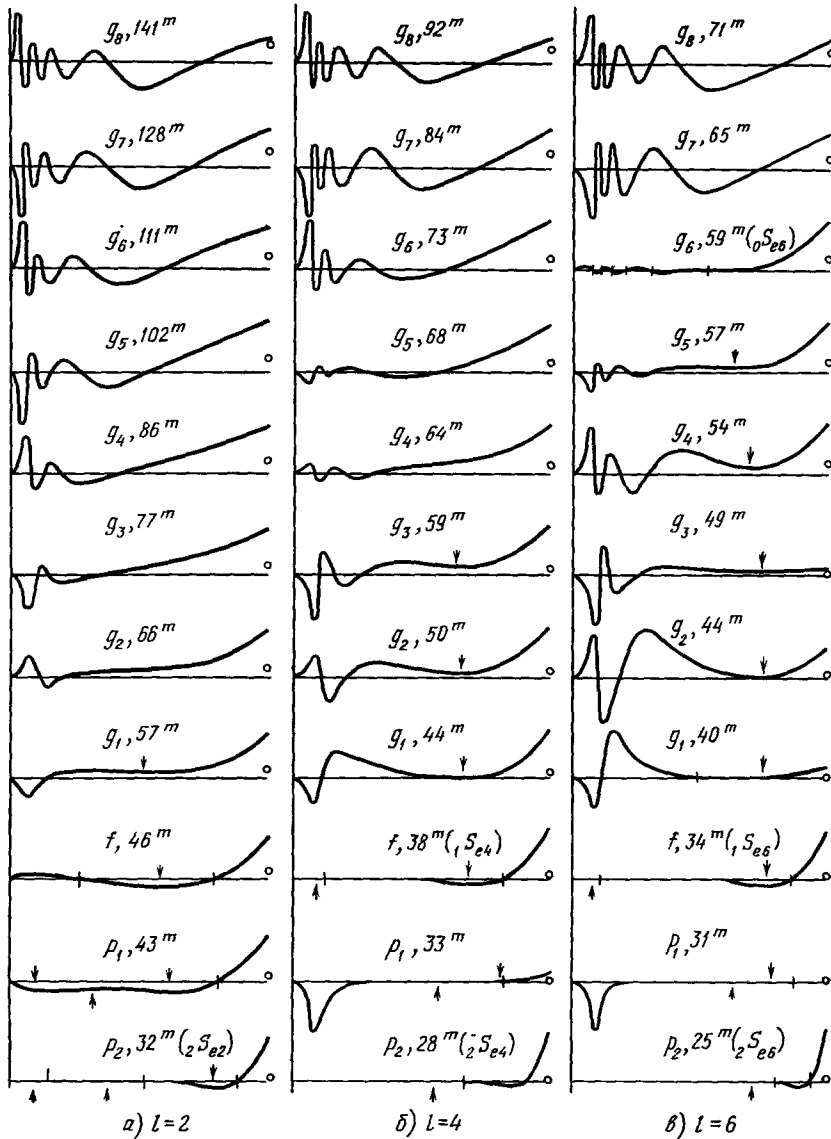


Рис. 5. Собственные функции различных нерадиальных ($l = 2, 4, 6$) колебаний стандартной модели Солнца ³².

Обозначения те же, что на рис. 3. Для некоторых мод в скобках приведена их классификация по дополнительной схеме. а) $l = 2$, б) $l = 4$; в) $l = 6$.

не учитывает существование такой выделенной моды среди периодов гравитационных осцилляций. Кроме того, колебание периода 31 мин с $l = 6$ формально классифицируется как p_1 , в то время как амплитуды на поверхности сравнительно малы.

В связи с указанными недостатками, схему классификации можно уточнить двумя различными способами.

Первый способ состоит во введении дополнительной схемы классификации колебаний по их пространственному характеру³². Такая добавочная классификация для колебаний внешних областей с $l = 6$ приведена на рис. 5 в скобках. ${}_0S_{e6}$ означает основной тон сфероидального колебания (S) наружных областей (e) номера $l = 6$, ${}_1S_{e6}$ — первый обертона и т. д. Существование основного тона внешних областей имеет простой физический смысл. Если обратиться к рассмотрению колебаний несжимаемой сферы с однородной плотностью, то исчезнут все колебания акустического типа, частоты которых станут равными бесконечности, и все внутренние g -моды, частоты которых обратятся в нуль. При каждом $l \neq 0$ останется единственное колебание (мода Кельвина)³⁶, соответствующее по физической природе гравитационным волнам на поверхности несжимаемой жидкости. Эта мода и является предельным случаем основного тона внешних областей при переходе к такой простейшей модели. Нужно подчеркнуть, что в сжимаемой модели это колебание также имеет существенно гравитационную природу, несмотря на то, что оно относится к внешним областям. Обертоны колебаний внешних областей определяются упругими силами. Классификация этих обертонов по дополнительной схеме совпадает с их классификацией по модам p , во всяком случае начиная с некоторого номера обертона. Все остальные моды данного номера l имеют гравитационный характер и относятся к колебаниям внутренних областей. Для стандартной модели при $l = 6$ их классификация осуществляется просто: колебание периода 31 мин — основной тон колебаний внутренних областей, 40 мин — первый обертона и так далее. Номера высоких обертонов соответствуют номеру g -моды. Полный спектр для $l = 6$ разбивается таким образом на две части — спектр колебаний внешних областей и спектр внутренних областей, и эти два спектра частично перекрываются по периодам. Такое перекрытие, определяющее возможность колебаний смешанного типа, по существу уже рассматривалось в рамках классификации по модам p, f, g , когда для политропы высокого индекса появлялись колебания смешанного характера — акустического во внешних областях и гравитационного во внутренних. Однако эти рассмотрения типов колебаний имели локальный характер и не могли учесть выделение в спектре g -мод основного тона внешних областей.

Для колебаний $l = 4$ основной тон внешних областей не выделяется однозначно — с одинаковым основанием к нему можно отнести колебание периода 64 млн (g_4) или 68 мин (g_5). При $l = 2$ этот тон не выделяется вовсе — он смешан с целым рядом внутренних гравитационных осцилляций, придавая им значительные амплитуды на поверхности. Это связано с тем, что с уменьшением l колебания внешних областей проникают глубже к центру звезды. Такая смешанность затрудняет применение описанной дополнительной схемы классификации; если основной тон внешних областей не выделяется, классификация по модам p, f, g свободна от указанного недостатка.

Второй способ уточнения схемы классификации состоит в сохранении схемы по модам p, f, g , всегда имея ввиду, однако, возможное существование выделенного колебания в спектре g -мод, сосредоточенного во внешних областях звезды и имеющего максимальные амплитуды на поверхности.

Рассмотрим теперь спектры колебаний Юпитера и Сатурна^{23,37}. Модели этих планет будут коротко описаны ниже в разделе 4. С точки зрения классификации колебаний важны две характерные черты этих моделей: адиабатическое строение по всему объему и наличие двух скачков в распределении материальных параметров по радиусу. Первый скачок плотно-

сти связан с фазовым переходом водорода в металлическое состояние при высоких давлениях, более глубокий второй скачок соответствует границе внутреннего ядра и связан с изменением химического состава.

На рис. 6 показаны собственные функции радиальных смещений колебаний Юпитера с $l = 0$, $l = 2$ и $l = 8$. Все радиальные колебания (рис. 6, а) имеют по своей природе акустический характер. Максимальный период имеет основной тон ${}_0S_0$. Периоды монотонно уменьшаются с ростом номера обертона; номер обертона равен числу узлов в собственных функциях.

В спектре квадрупольных колебаний (рис. 6, б), кроме основного тона ${}_0S_2$ и акустических обертонов ${}_1S_2$, ${}_2S_2$ и т. д., присутствуют два колебания

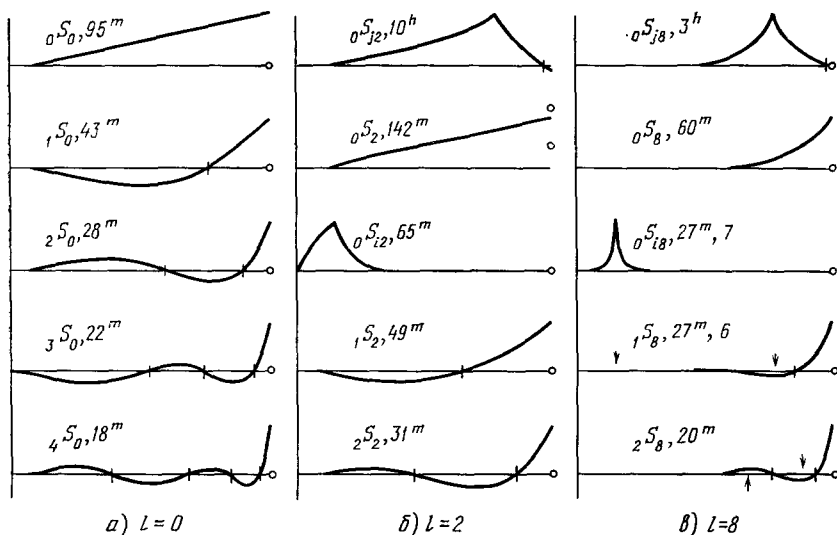


Рис. 6. Собственные функции колебаний Юпитера.

Обозначения те же, что на рис. 3 и 5. Использована схема классификации колебаний по их пространственному характеру. Максимальные амплитуды внутренних гравитационных мод соответствуют положениям скачков плотности по радиусу (дополненные результаты работы ⁸⁷).

гравитационного типа, обозначенные ${}_0S_{j2}$ и ${}_0S_{i2}$. Мода ${}_0S_{i2}$ представляет собой основной тон колебаний внутреннего ядра и связана со скачком плотности на его границе. Мода ${}_0S_{j2}$ имеет аналогичную природу и связана со скачком плотности на границе области металлизированного водорода. Эти две моды не имеют своих обертонов, что объясняется адиабатическим строением модели. Таким образом, этими двумя колебаниями исчерпываются гравитационные осцилляции, и мода ${}_0S_{j2}$ имеет максимальный период в спектре квадрупольных колебаний.

Спектры колебаний более высоких l (см. рис. 6, в для $l = 8$) имеют ту же структуру, что и квадрупольные колебания. Из сравнения колебаний $l = 8$ и $l = 2$ видно, что с ростом l колебания концентрируются к физическим границам, у которых они имеют максимальные амплитуды: так, колебания внешних областей вытесняются к поверхности, а при гравитационных колебаниях смещения концентрируются ближе к определяющим эти колебания скачкам плотности. Спектр колебаний для модели Сатурна имеет аналогичную структуру.

Схема классификации по модам p , f , g для колебаний планет-гигантов является неприемлемой. Рассмотренная выше дополнительная схема классификации колебаний с разделением их на моды внешних и внутрен-

них областей более универсальна — по существу именно она использована для классификации колебаний Юпитера. Приведенный спектр Юпитера наглядно демонстрирует тот факт, что период основного тона колебаний внешних областей может располагаться среди периодов внутренних гравитационных осцилляций.

Если бы строение внутреннего ядра в модели Юпитера отличалось от адиабатического, то в дополнение к основной ядерной моде появились бы обертоны ядерных колебаний с возрастающими периодами. В то же время такое изменение модели мало повлияло бы на характер колебания основного тона внешних областей, поскольку оно не проникает во внутреннее ядро. Этот основной тон располагался бы по периодам среди набора ядерных обертонов (g -мод по схеме Каулинга) и, имея из-за взаимодействия с ними узлы во внутреннем ядре, по формальной схеме классифицировался бы как g -мода. Описанная ситуация также иллюстрирует выделение в спектре гравитационных осцилляций «аномальной» g -моды.

Структура теоретического спектра колебаний звезды с непрерывным профилем плотности детально исследована Кристенсенем — Далсгардом³⁸, изучению взаимодействия мод посвящены также работы Габриэля^{107, 108}. Спектр колебаний звезды со скачками плотности обсуждается в работах Габриэля и Скуфлера^{109, 110}. Свойства колебаний с большим числом узлов аналитически изучены Вольфом³⁹. В^{38, 39 107–110} содержится также более широкая библиография работ, связанных с классификацией колебаний.

г) В л и я н и е в р а щ е н и я

Влияние вращения определяется на основе решения уравнений теории возмущений (2.20) — (2.22) с использованием предварительно рассчитанных частот и собственных функций задачи нулевого приближения.

Обозначим объем звезды через V и для любой пары векторных функций, заданных на V , определим скалярное произведение

$$(u_1, u_2) = \int_V \rho_0 u_1^* \cdot u_2 dv. \quad (2.30)$$

Звездочка означает комплексное сопряжение. Нетрудно показать, что операторы H_0 и $i\hat{z} \times$, определенные на пространстве кусочно непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих свободным граничным условиям, являются эрмитовыми. В силу эрмитовости H_0 собственные функции u_0 задачи нулевого приближения (2.20), соответствующие различным частотам, ортогональны. Эрмитовость H_0 определяет применимость развитого в квантовой механике аппарата стационарной теории возмущений для эрмитовых операторов.

Врождение частот колебаний по индексу m снимается под действием вращения. Поправка первого приближения для частоты определяется выражением

$$2\sigma_1 = - (u_0, \Omega_d [2m - 2i\hat{z} \times] u_0), \quad (2.31)$$

которое получается после скалярного умножения (2.21) на u_0 с использованием эрмитовости H_0 . Первая поправка на собственные функции ищется в виде разложения по собственным функциям нулевого приближения:

$$u_1 \equiv u_{l, m, n, 1} = \sum_{(l', m', n') \neq (l, m, n)} a_{l', m', n, 1}^{l', m', n'} u_{l', m', n, 0} + u_{l, m, n, 1}^T. \quad (2.32)$$

Здесь используется классификация колебаний по индексам l, m, n . Индекс n определяет классификацию при фиксированных l и m , о которой шла

речь в предыдущем разделе, т. е. классификацию по совокупности радиальных собственных функций. Последнее слагаемое в (2.32) обозначает добавку крутильного, или тороидального типа. Она определяется проектированием обеих частей уравнений (2.21) на пространство собственных функций крутильных колебаний (2.24):

$$u_{l, m, n, 1}^T = \{-\Omega_d [2m - 2iz \times] u_{l, m, n, 0}\}_T. \quad (2.33)$$

Индекс t обозначает указанное проектирование. Использована ортогональность векторных полей сфероида и крутильного типа, эрмитовость H_0 и равенство нулю частот крутильных колебаний в невозмущенной задаче. Коэффициенты разложения по сфероидальным колебаниям определяются с помощью скалярного умножения обеих частей уравнения (2.21) на $u_{l', m', n', 0}$:

$$\frac{\omega_{l', m', n', 0}^2 - \omega_{l, m, n, 0}^2}{\omega_{l, m, n, 0}^2} a_{l', m', n', 1}^{l', m', n', 0} = -(u_{l', m', n', 0}, \Omega_d [2m - 2iz \times] u_{l, m, n, 0}). \quad (2.34)$$

Далее аналогичным умножением (2.22) на $u_{l, m, n, 0} \equiv u_0$ определяется поправка второго приближения к частоте:

$$2\sigma_2 - \sigma_1^2 = -(\Omega_d [2m - 2iz \times] u_0, u_1) - m(u_0, \Omega_d^2 [m - 2iz \times] u_0) + (u_0, [\Psi + E] u_0). \quad (2.35)$$

Задача приводится таким образом к расчету объемных интегралов, определяемых векторными функциями нулевого приближения. Для проведения численных расчетов угловые зависимости отделяются, и они сводятся к одномерным интегралам. Закон дифференциального вращения задается разложением по сферическим гармоникам

$$\Omega_d(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \Omega_{di}(r) Y_{i0}(\theta, \varphi). \quad (2.36)$$

В практических расчетах можно ограничиться конечным числом членов разложения (2.36), что дает возможность рассчитывать каждый интеграл в виде конечной суммы. Если в модели есть скачки в распределении материальных параметров по радиусу (например, модели Юпитера и Сатурна), то поверхности этих скачков деформируются при введении вращения. Это дает дополнительные члены в интегралах, определяющих влияние эллиптичности звезды. Расчет этих членов представляет собой отдельную дополнительную задачу и следует методу, развитому в теории собственных колебаний Земли Вудхаусом ⁴⁰.

Быстрое вращение планет-гигантов сильно влияет на собственные колебания, изменяя частоты основных тонов на десятки процентов. Поправка второго приближения на частоту здесь весьма существенна, и представленные в конце настоящего, обзора спектры планет-гигантов рассчитаны с использованием полной теории возмущений второго приближения. В расчетах собственных колебаний Солнца его медленное вращение позволяет с достаточной точностью ограничиться первым приближением теории возмущений. Расчеты первого приближения особенно упрощаются и допускают наглядную интерпретацию, если пренебречь дифференциальностью вращения, выбрав некоторую среднюю угловую частоту вращения $\Omega_{\odot}$.

В первом приближении для твердотельного вращения, учитывающем только влияние сил Кориолиса, частоты собственных колебаний определяются простым выражением, которое соответствует результату, впервые

полученному еще в работах Каулинга и Ньюинга ⁴¹ и Леду ⁴²:

$$\omega = \omega_0 + m(1 - \tau) \Omega_{\odot}, \quad (2.37)$$

$$\tau = \frac{\int_0^R \rho_0 r^2 (2UV + V^2) dr}{\int_0^R \rho_0 r^2 [U^2 + l(l+1)V^2] dr}, \quad (2.38)$$

m — долготный индекс сферической гармоник, а функции U и V определены в (2.23). Так как τ не зависит от m , то вырожденный по m мультиплет расщепляется симметричным образом. Собственные колебания с одинаковыми по абсолютной величине и противоположными по знаку индексами m представляют собой две бегущие вдоль экватора волны, одна в направлении вращения Солнца и другая в обратном направлении. При отсутствии вращения и равенстве амплитуд они складываются в стоячую волну с фиксированным относительно наблюдателя положением пучностей. При введении вращения первая волна несколько замедляется, вторая — ускоряется. В результате пространственная картина смещений суммарного колебания подвергается прецессии вокруг оси вращения Солнца. Угловая частота этой прецессии для наблюдателя в инерциальной системе координат непосредственно находится из (2.37):

$$\Omega_{\text{прец}} = (1 - \tau) \Omega_{\odot}. \quad (2.39)$$

Интервал возможных значений τ — от 0 до 1. Поэтому вращение пространственной картины колебаний относительно наблюдателя может значительно отставать от вращения Солнца, и этот эффект существен для экспериментальных наблюдений, если последние проводятся на больших интервалах времени. Возможное определение частоты прецессии из наблюдений является весьма информативным.

Кроме эффектов вращения, представляется интересным оценить влияние на собственные колебания крупномасштабных магнитных полей Солнца и планет-гигантов. Для планет-гигантов влияние магнитного поля обусловлено наличием внутренней проводящей области металлизированного водорода. Поправка к частоте колебания за счет магнитного поля $\Delta\omega_{\text{магн}}$ зависит от напряженности поля H , его конфигурации и типа рассматриваемого колебания. Существуют теоретические исследования для некоторых специальных случаев ^{43,44} и общие оценки величины эффекта ¹⁶. В то же время сравнительную величину влияния магнитного поля для низких мод можно определить с помощью простых оценок ²¹. По порядку величины $|\Delta\omega_{\text{магн}}| \approx |\omega_0| (E_{\text{магн}}/E_{\text{грав}})$, где $E_{\text{магн}}$ — полная магнитная энергия порядка $H^2 R^3$, $E_{\text{грав}}$ — полная гравитационная энергия звезды, порядка GM^2/R (M — масса звезды). Взяв поправку на частоту за счет вращения $\Delta\omega_{\text{вращ}}$ по порядку величины равной Ω (см. (2.37)), легко показать, что условие $|\Delta\omega_{\text{магн}}| \ll |\Delta\omega_{\text{вращ}}|$ эквивалентно условию $E_{\text{магн}} \ll \sqrt{E_{\text{вращ}} E_{\text{грав}}}$, где $E_{\text{вращ}}$ — полная энергия вращения звезды, порядка $MR^2\Omega^2$. Последнее условие выполняется как для Солнца, так и для планет-гигантов при $H \ll 10^6$ Гс. Таким образом, влиянием магнитного поля можно полностью пренебречь по сравнению с влиянием вращения.

д) Возбуждение колебаний

Задача о собственных колебаниях, о которой шла речь в предыдущих разделах, позволяет определить лишь периоды и формы собственных колебаний. Теоретическое предсказание амплитуд колебаний требует количественного изучения механизмов возбуждения и затухания. Такие расчеты

связаны со значительными трудностями и в настоящее время по большей части ограничены исследованием линейной устойчивости колебаний.

Основные механизмы, определяющие возбуждение и затухание колебаний Солнца, связаны с возмущениями области термоядерного энерговыделения, с диссипацией из-за лучистой теплопроводности, с возмущениями радиационного потока к поверхности из-за возмущений непрозрачности, с конвективными движениями, с диссипацией из-за турбулентного трения, с излучением акустических волн в корону.

Простейшие исследования линейной устойчивости колебаний основаны на квазиadiaбатическом приближении, которое использует частоты и собственные функции адиабатической задачи, рассматривая отклонения от адиабатичности как малые возмущения^{16,17}. Знак рассчитанной таким образом мнимой поправки к частоте определяет устойчивость колебания. В такой постановке устойчивость солнечных p -мод исследована Скуфлёром и др.⁴⁵; устойчивость g -мод в процессе солнечной эволюции исследована Кристенсен-Далсгардом и др.⁴⁶. В связи с тем, что отклонения от адиабатичности в некоторых зонах (в частности, во внешних оптически тонких слоях Солнца) могут быть велики, так что их нельзя рассматривать как малые возмущения, были развиты более общие, полностью неадиабатические методы расчета комплексных частот линейных колебаний⁴⁷⁻⁴⁹.

Исследование устойчивости солнечных g -мод, выполненное Сайо¹¹¹, подтвердило результаты, полученные в рамках квазиadiaбатического приближения: некоторые низкие g -моды на ранних стадиях солнечной эволюции оказываются неустойчивыми. Мода g_2 для $l = 1$ (с периодом около 80 минут) оказалась неустойчивой даже для модели с возрастом $4,5 \cdot 10^9$ лет. Неясно, однако, достаточна ли скорость роста амплитуд для того, чтобы привести к перемешиванию вещества в недрах Солнца (такое перемешивание дает один из путей решения проблемы нейтрино), так как характерное время роста колебаний очень велико ($> 10^8$ лет).

Одно из наиболее детальных исследований линейной устойчивости акустических колебаний Солнца в неадиабатической постановке выполнено Голдрайхом и Килли⁵⁰. Расчеты ограничивались радиальными колебаниями. Затухание на турбулентности в конвективной зоне параметризовалось введением скалярного коэффициента турбулентной вязкости. Если не учитывать затухание на турбулентной вязкости, все колебания с периодами выше 6 минут оказались неустойчивыми. Колебания меньших периодов стабилизируются радиационным затуханием в атмосфере. Основным механизмом возбуждения связан с аномальным поведением непрозрачности из-за ионизации водорода вблизи верхней границы конвективной зоны (к-механизм, хорошо изученный в применении к пульсациям Цефеид⁵¹). При учете затухания из-за турбулентного трения все моды становятся устойчивыми, однако запас устойчивости невелик. Ввиду большой неопределенности в выборе коэффициента турбулентной вязкости авторы приходят к выводу, что теоретические рассмотрения в настоящее время не в состоянии однозначно решить вопрос о линейной устойчивости акустических колебаний Солнца. Основное препятствие — отсутствие надежной теории турбулентной конвекции.

Расчеты линейной устойчивости нерадиальных колебаний с помощью близких методов выполнены Андо и Осаки⁴⁸. Однако ими не учитывалось взаимодействие колебаний с конвекцией. Полученные декременты затухания нерадиальных p -мод для низких значений l согласуются с результатами Голдрайха и Килли для радиальных мод близких периодов, если не учитывать затухание из-за турбулентной вязкости. В то же время имеются расхождения в оценке затухания короткопериодных колебаний в атмосфере.

Исследуя возможность того, что солнечные p -моды в действительности все же стабилизируются турбулентной вязкостью и являются устойчивыми, Голдрайх и Килли выполнили оценку их амплитуд, рассмотрев стохастическое возбуждение этих колебаний турбулентной конвекцией⁵². Предсказанные амплитуды — от 10^{-2} см/с для основного радиального тона до 0,6 см/с для радиальных обертонов с периодами около 5 мин. Столь малые ожидаемые амплитуды трудно согласовать с результатами наблюдений группы Хилла. Однако нельзя исключить возможность того, что некоторые p -моды в действительности могут быть линейно неустойчивыми, несмотря на турбулентное затухание. Расчет амплитуд таких колебаний должен учитывать их нелинейное взаимодействие с другими модами, что связано с большими теоретическими трудностями.

Таким образом, возможность использования информации об амплитудах наблюдаемых колебаний для исследования внутреннего строения Солнца в ближайшем будущем остается проблематичной. В то время как периоды собственных колебаний Солнца с хорошей точностью определяются одним лишь радиальным профилем плотности, что и дает надежду реально использовать метод собственных колебаний для уточнения модели, решение вопросов о возбуждении требует использования детальной физической модели Солнца. Даже в рамках современной детальной модели эти рассмотрения сталкиваются с серьезными трудностями. Пока остается открытым даже вопрос о линейной устойчивости колебаний, в основном из-за отсутствия надежной теории турбулентной конвекции.

3. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СОЛНЦА

а) 5-минутные колебания

Со времени открытия Лейтоном, Нойсом и Саймоном⁴ пятиминутных колебаний Солнца они интенсивно изучались на протяжении двух десятилетий многими группами исследователей. Сравнительный анализ некоторых наиболее детальных методов наблюдений приведен в работе Родеса и др.⁵³ Библиография экспериментальных и теоретических работ содержится в обзоре Дубова⁵⁴; см. также⁵⁵⁻⁵⁷. Ниже будут коротко описаны лишь некоторые последние результаты.

При наблюдениях период 5-минутных колебаний подвергается случайным флуктуациям в диапазоне примерно 3—7 минут. Такие кажущиеся флуктуации периода являются результатом интерференции большого числа колебаний разных частот ω , с различным горизонтальным волновым числом k_H и различными амплитудами. Наблюдения с высоким пространственным и временным разрешением определили спектр мощности периодического сигнала в координатах k_H, ω в виде отчетливо разделенных полос^{12, 53, 58, 59}. Такой двухмерный спектр мощности, полученный Дебне-ром и др.¹², приведен на рис. 7.

Глубина проникновения этих колебаний в недра Солнца невелика. Поэтому теоретически их можно рассматривать либо как суперпозицию наклонных акустических волн, захваченных во внешних областях Солнца^{61, 60}, либо как глобальные акустические колебания с высокими значениями l (горизонтальное волновое число связано с l соотношением $k_H^2 = [l(l+1)]/R_\odot^2$)⁶². Численные расчеты, выполненные на основе обоих подходов, для близких моделей хорошо согласуются.

Наблюдаемые колебания захватывают лишь внешние слои конвективной зоны, но потенциально несут информацию о строении Солнца вплоть до ее нижней границы, которая определяется условием конвективной устойчивости. Структура конвективной зоны, моделируемая на основе

теории пути перемешивания, может быть параметризована величиной свободного параметра α -отношения длины пути перемешивания к шкале высот по давлению. Теоретические спектры акустических колебаний для различных значений α рассчитаны Ульрихом и Родесом⁶¹; на рис. 7 штриховой линией показаны теоретические частоты для $\alpha = 2$. Близкое соответствие с экспериментальными данными не оставляет сомнений в том,

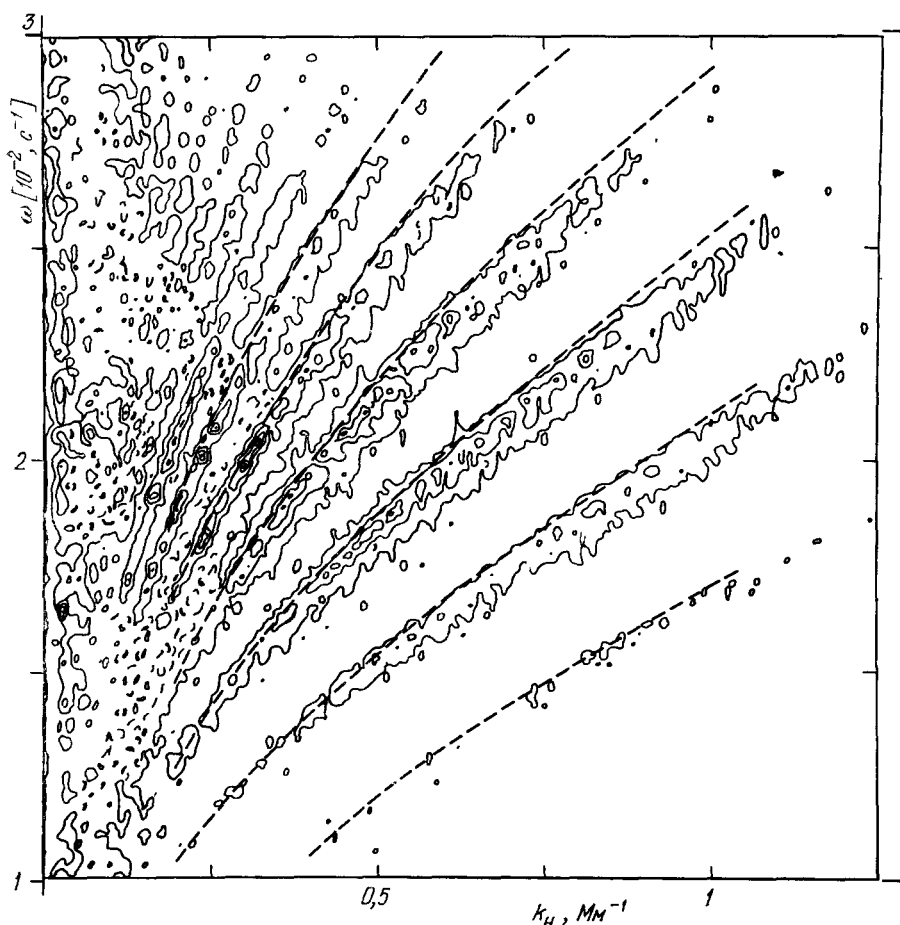


Рис. 7. Спектр мощности 5-минутных колебаний в координатах k_H , ω .

Контуры показаны относительные уровни мощности, с возрастанием мощности по квадратичному закону; нижний уровень соответствует 2,8% максимальной мощности. Для удобства изображения перед нанесением на диаграмму значения мощности умножены на $\sqrt{k_H}$. Штриховой линией показаны теоретические частоты акустических колебаний для модели конвективной зоны с $\alpha = 2$ (из работы¹²).

что 5-минутные колебания являются солнечными p -модами с высокими значениями l .

Достигнутая разрешающая способность позволяет выявить небольшие систематические расхождения с теоретическими частотами, которые всюду на диаграмме k_H , ω ложатся несколько выше экспериментальных (кроме самой низкочастотной ветви). Расхождения уменьшаются с увеличением α , что соответствует увеличению глубины конвективной зоны^{61,63}. Однако такое увеличение сопровождается переходом основания конвективной зоны к более высоким температурам, а это ограничивается наблюдаемым количеством лития. Оценки скорости выгорания лития в сравнении с совре-

менным его содержанием накладывают нижний предел на радиус основания конвективной зоны примерно в $0,62R_{\odot}$. При этом оставалось небольшое систематическое расхождение теоретических и экспериментальных частот⁵³. Такое расхождение не является принципиальным и к настоящему времени его удалось устранить благодаря улучшению точности расчетов^{64,112}. Если теоретические расчеты верны (пока остается открытым вопрос о корректной постановке граничных условий в атмосфере^{65,113}), конвективная зона должна иметь глубину около 200 тыс. км⁶⁴.

Строение Солнца ниже конвективной зоны непосредственно не влияет на рассматриваемые колебания, однако определенная косвенная информация о модели может быть получена через глубину этой зоны. С этой точки зрения данные по 5-минутным колебаниям являются серьезным аргументом против моделей Солнца с низким содержанием тяжелых элементов во внутренних областях, предложенных для объяснения проблемы нейтрино^{66,67}, поскольку такие модели имеют тонкую конвективную зону.

Улучшение качества экспериментальных данных по 5-минутным колебаниям позволило применить их для исследования вращения Солнца. Для колебаний таких малых периодов влияние вращения невелико, и достаточно использовать первое приближение теории возмущений, которое учитывает только влияние сил Кориолиса. Согласно результатам первого приближения, пространственная картина суммарного колебания, образующегося наложением бегущих в противоположных направлениях волн, медленно вращается относительно наблюдателя с угловой частотой $\Omega_{\text{прец}} = (1 - \tau) \Omega_{\odot}$. Для рассматриваемых колебаний ($l > 100$) параметр τ (2.37) достаточно мал, и в предварительных исследованиях можно вовсе пренебречь влиянием сил Кориолиса, положив $\tau = 0$. Тогда в предположении твердотельного вращения пространственная картина колебаний жестко связана с вращением Солнца, и измеряя скорость дрейфа этой картины через поле зрения, можно определить скорость вращения солнечного вещества (измерение скорости дрейфа осуществляется по наблюдаемой разнице частот бегущих волн восточного и западного направления, суперпозицией которых является данное колебание). Эти измерения были проведены⁶⁸, однако точное абсолютное определение скорости вращения оказалось затрудненным из-за несовершенства системы гидирования телескопа.

Еще более уникальной является возможность определить относительное изменение скорости вращения с глубиной. Такая возможность связана с различной глубиной проникновения p -мод в конвективную зону. Для каждой p -моды удастся теоретически оценить эффективный уровень глубины, на котором, при дифференциальном по радиусу вращении Солнца, перемещение пространственной картины колебаний оказывается замороженным в поле скоростей⁶⁹. Экспериментально наблюдаемые скорости дрейфа для различных p -мод определяют таким образом скорость вращения Солнца на соответствующих эффективных глубинах.

Полученные результаты¹² приведены на рис. 8. Несмотря на значительный разброс данных, видна тенденция к увеличению скорости вращения с глубиной. Такое возрастание скорости примерно на 80 м/с к глубинам около 11–15 тыс. км согласуется в пределах ошибки измерения с наблюдаемой разницей в периодах вращения солнечных пятен и фотосферной плазмы (современные результаты исследований вращения Солнца содержатся в обзоре Ховарда⁷⁰). Ниже уровня 15 тыс. км ситуация менее ясна, хотя не исключена тенденция к уменьшению скорости. В будущем можно надеяться на значительное усовершенствование этого уникального метода измерения дифференциального поля скоростей в конвективной зоне Солнца.

В последние два года опубликованы результаты доплеровских измерений скоростей в интегральном свете всего солнечного диска (без пространственного разрешения), в которых также зарегистрирован целый ряд осцилляций с периодами в диапазоне около 5 минут ^{71,114-118}. Наиболее детальные данные получены в наблюдениях, выполненных с Южного полюса ¹¹⁶. Частоты максимальных пиков в спектре мощности доплеровского сигнала распределены примерно эквидистантно со средним интервалом в 68,0 мкГц.

Такие колебания не поддаются описанной выше интерпретации, поскольку колебания высоких l с большим числом волн по диску Солнца не могут наблюдаться в пространственно осредненном сигнале. В настоящее время не вызывает сомнений, что эти колебания представляют собой

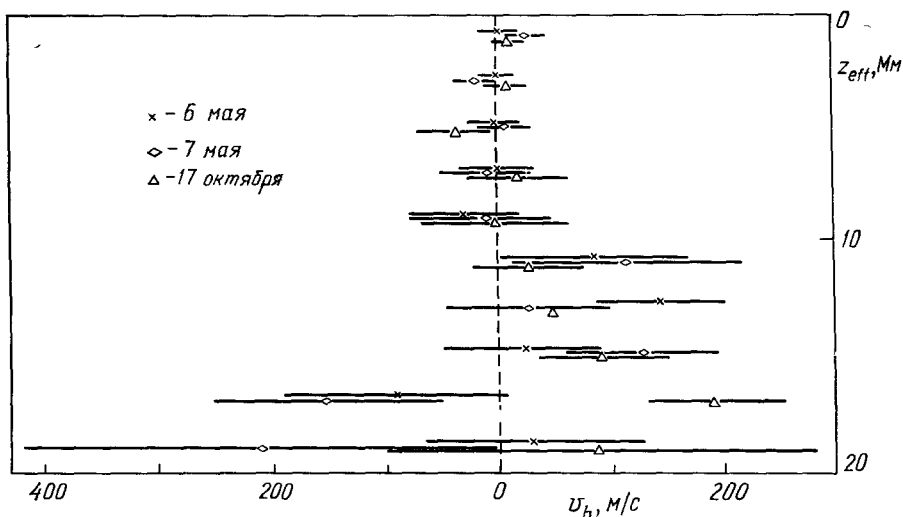


Рис. 8. Относительные скорости вращения у экватора в зависимости от глубины под фотосферой.

Средняя скорость вращения на четырех верхних уровнях нормирована к нулю. Положительные скорости соответствуют вращению более быстрому, чем в фотосфере. Результаты получены по данным трех дней наблюдений 1977 г. ¹².

высокие акустические обертоны с низкими значениями l . В асимптотическом случае высоких обертонов (номер обертона значительно выше величины l) частоты мод теоретического спектра также эквидистантны ^{72,117}. При фиксированном значении l расстояние между частотами определяется выражением

$$\Delta\nu \approx \left(2 \int_0^R c^{-1} dr \right)^{-1},$$

где c — адиабатическая скорость звука. Частоты для различных четных значений l почти совпадают; то же имеет место для нечетных l , частоты которых располагаются примерно посередине между частотами четных l . Теоретические значения $\Delta\nu$ слабо чувствительны к выбору модели и примерно вдвое превышают наблюдаемый интервал 68,0 мкГц. Из этого следует вывод, что возбуждены колебания с различными значениями l . Анализ чередования пиков в спектре мощности при сопоставлении с теоретическими предсказаниями ¹¹⁸ позволил идентифицировать моды с $l = 0, 1, 2, 3$ и, возможно, $l = 4$. Соответствующие номера обертонов — в диапазоне

примерно от 15 до 35. Такие колебания проникают глубоко в недра Солнца и содержат информацию, недоступную колебаниям высоких l . Результаты первых сравнений с теоретическим спектром, казалось, давали аргументы в пользу моделей с пониженным содержанием тяжелых элементов ^{71,73}. Этот вывод, однако, опровергнут более детальными расчетами, включающими влияние солнечной атмосферы. Модель стандартного химического состава оказалась в хорошем согласии с наблюдаемым распределением частот ¹¹⁸.

б) Колебания с периодами 7—70 минут

Несколькими группами исследователей получены данные, которые могут указывать на собственные колебания Солнца в этом диапазоне периодов. Кауфман ⁷⁴ зарегистрировал период около 41 мин в записях солнечного микроволнового излучения. Кобрин и Коршунов ⁷⁵ обнаружили флуктуации с периодом около 50 мин в разности интенсивностей солнечного радиоизлучения на двух близких частотах; при изучении более длинных записей этот период распался на два — около 57 и 33 минут. Фоссат и Рикорт ⁷⁶ регистрировали колебания с периодом примерно 40 минут в среднем поле скоростей в фотосфере. Брукс и др. ⁷ сообщили о наблюдении колебаний с периодами 58 и 40 минут в доплеровском смещении солнечной линии поглощения (кроме 160-минутных колебаний, которые будут обсуждаться в следующем разделе). Гальпер и др. ⁷⁷ обнаружили вариации потока гамма-квантов в верхних слоях земной атмосферы с периодами $11,7 \pm 0,1$; $12,7 \pm 0,1$; $15,8 \pm 0,2$; $23,2 \pm 0,2$; 33 ± 1 минут.

Наиболее детальные результаты получены Хиллом и его коллегами в результате наблюдений, выполненных в лаборатории SCLERA (Santa Catalina Laboratory for Experimental Relativity by Astrometry). При измерениях сплюснутости солнечного диска, предпринятых для экспериментальной проверки общей теории относительности, был зарегистрирован целый ряд периодов во флуктуациях солнечного диаметра ^{5,78,79}. Повторные наблюдения подтвердили реальность колебаний ^{78,79,119}. Некоторые из этих периодов приведены в таблице I. Наблюдаемые амплитуды —

Таблица I

Периоды пульсаций солнечного диаметра (в минутах)
по осредненным данным 11 дней наблюдений 1975 г. ⁸⁰.
Звездочкой помечены периоды, регистрация которых может быть
обусловлена аномально большими пиками в спектре мощности
в данных только одного или двух дней наблюдений

66,16	28,7	13,3	9,9	7,6
44,66	24,8	12,1	9,3	6,9
39,0	21,0*	11,4	8,5*	6,7
32,1	19,5	10,7	7,8	6,5

порядка $10^{-6} R_{\odot}$. Реальные амплитуды смещений могут быть значительно меньше наблюдаемых, если основной вклад в результирующий сигнал определяется пульсациями яркости у края диска, а не смещениями поверхности.

В настоящее время, по существу, нет информации о пространственной картине колебаний, т. е. о вероятных номерах колебаний l , которым могут соответствовать наблюдаемые периоды. Используемая методика наблюдений пульсаций солнечного диаметра допускает регистрацию колебаний с номерами l вплоть до нескольких десятков ^{11,80}. Это делает невозможной

однозначную идентификацию с теоретическим спектром, в котором диапазон 7—70 минут очень плотно заполнен периодами радиальных и нерадиальных акустических колебаний. В таблице II приведены теоретические

Таблица II

Периоды колебаний стандартной модели Солнца с относительным содержанием тяжелых элементов $Z=0,02$ по расчетам Ибена и Мэхефи ⁸¹

Мода	Период, мин					Мода	Период, мин			
	$l=0$	$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$		$l=1$	$l=2$	$l=3$	$l=4$
p_1	62,29	57,25	42,50	39,53	37,58	f		45,90	40,97	38,82
p_2	40,94	36,98	32,19	29,42	27,62	g_1	61,58	55,05	47,94	44,18
p_3	30,93	27,88	25,09	23,21	21,92	g_2	84,4	63,03	54,88	49,59
p_4	24,49	22,30	20,52	19,26	18,31	g_3	105,8	72,58	61,88	57,73
p_5	20,19	18,68	17,39	16,44	15,72	g_4	127,3	83,49	67,76	61,11
p_6	17,17	16,04	15,10	14,38	13,81	g_5	149,2	95,38	74,9	64,89
p_7	14,93	14,08	13,35	12,77	12,32	g_6	171,1	107,7	83,1	70,30
p_8	13,21	12,55	11,97	11,51	11,14	g_7		120,2	91,8	76,83
p_9	11,86	11,34	10,87	10,49	10,18	g_8		132,9	100,7	83,62
p_{10}	10,78	10,35	9,97	9,65	9,39	g_9		145,9	109,7	90,56
p_{11}	9,90	9,54	9,21	8,94	8,71	g_{10}		158,9	118,9	97,62
p_{12}	9,15	8,84	8,56	8,32	8,11	g_{11}		172,1	128,1	104,5
p_{13}	8,50	8,23	7,99	7,78	7,60	g_{12}			137,6	111,7
p_{14}	7,94	7,71	7,49	7,31	7,15	g_{13}			147,0	118,9
p_{15}	7,45	7,25	7,06	6,89	6,75	g_{14}			156,5	126,5
p_{16}	7,02	6,84	6,67	6,52	6,39	g_{15}			166,7	133,3
p_{17}	6,64	6,47	6,32	6,18	6,06	g_{16}			175,9	141,5
p_{18}	6,29	6,14	6,00	5,87	5,77	g_{17}				148,6
p_{19}	5,98	5,84	5,71	5,60	5,50	g_{18}				156,4
p_{20}	5,69	5,56	5,45	5,34	5,25	g_{19}				164,0
						g_{20}				171,1

периоды колебаний стандартной модели Солнца с относительным содержанием тяжелых элементов $Z=0,02$, рассчитанные Ибеном и Мэхефи ⁸¹. С учетом ошибок в экспериментальных и теоретических периодах (не менее 1—2 процентов), сравнение табл. I и II показывает, что идентификация весьма неоднозначна. Более того, теоретические периоды зависят от выбора модели (например, при $Z=0,01$ и $Z=0,03$ максимальный период радиальных колебаний изменяется соответственно до 56,22 и 66,14 минут) ⁸¹. В связи с этим неудивительно, что зарегистрированные периоды удается идентифицировать с теоретическими спектрами сильно отличающихся моделей ⁸¹⁻⁸³.

Детальные анализы данных наблюдений солнечного диаметра ¹¹ позволили, однако, получить указания на то, что колебания с периодами около 66 и 45 минут скорее имеют высокие значения l , в пределах $20 < l < 40$. Тогда эти два колебания не могут быть акустическими модами, периоды которых при таких значениях l значительно короче. В то же время идентификация с гравитационными модами в рамках стандартной модели также встречает серьезные затруднения. По расчетам Дзембовского и Памятных ⁸⁴ амплитуды g -мод с такими высокими значениями l сконцентрированы во внутренних областях Солнца и уменьшаются при переходе через конвективную зону к поверхности по крайней мере в 10^5 раз. Возможность наблюдения таких колебаний представляется сомнительной, так как требует исключительно больших амплитуд во внутренних областях. Это затруднение снимается для моделей с низким значением Z во внутренних областях, тонкие конвективные зоны которых соответствуют меньшему затуханию амплитуд к поверхности ⁸⁵. Такие

модели, однако, кроме других присущих им трудностей⁸⁵, не согласуются с данными по 5-минутным колебаниям.

Другой путь устранить возникшие затруднения с колебаниями 45 и 66 мин связан с описанным выше выделением в теоретическом спектре аномальных g -мод с большими амплитудами на поверхности. Однако для стандартной модели при высоких значениях l эти колебания имеют слишком низкие периоды.

Боури и др.^{122,123} исследовали колебания модели Солнца с малым или нулевым начальным содержанием водорода в небольшой центральной области (3% солнечной массы). Скачок плотности в такой модели приводит к появлению в теоретическом спектре выделенных мод, связанных со скачком. Такая модель, однако, не позволила упростить вопрос идентификации колебаний — теоретический спектр в диапазоне 7—70 минут оказался очень плотным.

До сих пор остаются сомнения в реальности наблюдаемых колебаний. Осцилляции, полученные из наблюдений солнечного диаметра, не удалось подтвердить в экспериментах по измерениям скоростей^{86,87} и пульсаций яркости⁸⁸⁻⁹⁰. Обзор продолжающейся дискуссии о возможных причинах расхождений содержится в работах Хилла и Кауделла¹¹ и Кнаппа и др.¹²⁰. Исключительно важным аргументом в пользу того, что найденные периоды соответствуют собственным колебаниям Солнца, является фазовая когерентность наблюдаемых осцилляций^{11,119,121} (в предварительных оценках¹¹ статистическая значимость наблюдаемой когерентности была сильно завышена⁹¹). Если будущие эксперименты подтвердят реальность наблюдаемых колебаний, то для однозначной идентификации с теоретическим спектром и использования для уточнения модели внутреннего строения потребуется более точная и надежная информация о пространственной структуре колебаний.

в) 160-минутные колебания

Впервые о регистрации таких колебаний в доплеровском смещении спектральных линий поглощения сообщили Северный, Котов и Цап⁶ и независимо Брукс, Айзек и Ван дер Рей⁷. При наблюдениях на Крымской Астрофизической обсерватории^{6,92} измерялась разность скоростей вдоль луча зрения от центральной зоны солнечного диска радиусом $0,66 R_{\odot}$ и от краевой зоны; наблюдения Бирмингэмской группы⁷ проводились в интегральном свете всего солнечного диска. Колебания этого же периода зарегистрированы в наблюдениях Снайдера и др.⁸. 160-минутный период выявлен также в вариациях геомагнитного поля⁹, возможно имеющих солнечное происхождение.

Большой объем наблюдений 1974—1978 гг., выполненных в Крымской обсерватории, показал высокую фазовую когерентность колебаний и позволил определить более точное значение периода — 160,01 минут^{93,94}. Аналогичные наблюдения, проведенные в Стэнфордском университете¹⁰, дали такой же период и хорошо согласуются по фазе. Эти результаты подтверждены на обеих обсерваториях наблюдениями 1979 г.¹²⁴. Исследования на Крымской обсерватории показали также, что синхронно с колебаниями скорости (амплитудой около 1 м/с) происходят изменения яркости и общего магнитного поля Солнца^{92,95}, а также его радиоизлучения⁹⁶. При детальном изучении спектра мощности колебаний выделены также несколько близких периодов — 134, 498; 148, 359; 171, 099 и 175,061 минут⁹². Эти дополнительные периоды соответствуют значительно меньшим амплитудам, регистрация их менее надежна и частично может быть обусловлена обработкой наблюдений.

Высказывался ряд сомнений в реальности 160-минутных колебаний. Было сделано предположение о том, что наблюдаемый 160-минутный период может быть обусловлен прохождением солнечных супергранул через поле зрения⁹⁷. Такая интерпретация оказалась несовместимой с фазовой когерентностью сигнала, наблюдаемой на протяжении нескольких лет. Определенные сомнения инициировали более поздние наблюдения Бирмингемской группы, в которых не удалось подтвердить наличие 160-минутных колебаний¹²⁵. Так как период 160 минут составляет ровно $1/9$ часть земных суток, а длинный ряд наблюдений, ведущихся только в дневное время, оказывается замодулированным с периодом вращения Земли, высказывались серьезные сомнения в солнечной природе колебаний, в частности предлагалась возможность связи их с флуктуациями прозрачности земной атмосферы⁹⁸. Длительные наблюдения в Крыму и Стэнфорде показали, однако, что точное значение периода несколько выше 160 минут и не является целым кратным земных суток. Возможное влияние некоторых земных эффектов было также подвергнуто отдельному изучению¹²⁶⁻¹²⁸, и результаты свидетельствуют в пользу солнечной природы колебаний.

Уникальные наблюдения, свободные от эффектов смены дня и ночи, выполнены на Южном полюсе в конце декабря 1979 г. — начале января 1980 г.¹¹⁶. Допплеровские измерения скоростей велись методом резонансной спектроскопии в интегральном свете всего солнечного диска. Использование метода наложения эпох (которой применялся в Крыму и в Стэнфорде) при обработке данных 5 дней непрерывных наблюдений также позволило зарегистрировать колебания с периодом 160 минут, в хорошем согласии по амплитуде и фазе с данными Крымской и Стэнфордской обсерваторий.

Использованная методика наблюдений не позволяет пока однозначно определить номер колебания l , но наиболее вероятно, что они являются квадрупольными ($l = 2$). Регистрация колебаний более высоких l затруднена из-за осреднения сигнала по большим областям солнечного диска. Радиальные колебания не могут иметь такой высокий период — единственным исключением является модель Солнца с однородной плотностью. Регистрация дипольных колебаний ($l = 1$) вероятна лишь при условии значительного различия в амплитудах радиальных и тангенциальных смещений (U и V) на поверхности — если эти амплитуды близки, дипольные колебания соответствуют поступательным перемещениям поверхности как единого целого и регистрация их при измерениях разности скоростей затруднена.

Интерпретация 160-минутных колебаний в рамках стандартной солнечной модели сталкивается с серьезными трудностями. В теоретическом спектре колебаний этот период попадает в область высоких гравитационных мод. Идентификация по периоду с одной из таких мод (например, g_{10} для $l = 2$) формально не встречает затруднений — точное соответствие периодов может быть установлено, например, небольшим варьированием величины Z в модели. Гравитационные моды таких периодов в стандартной модели являются линейно устойчивыми. Возбуждение турбулентной конвекцией не может обеспечить наблюдаемых амплитуд¹²⁹. Трудно также ответить на вопрос, почему на протяжении нескольких лет возбуждена именно данная конкретная g -мода и не возбуждены другие. Не исключена возможность, что такое выборочное возбуждение имеет резонансный характер и обусловлено взаимодействием с другими колебаниями — например из-за близкого периода биений между двумя радиальными модами⁸¹. В рамках стандартной модели трудно дать более убедительную интерпретацию. Не помогает и обсужденная выше возможность выделения в теоре-

тическом спектре аномальной g -моды (основного тона колебаний внешних областей). Если бы не препятствовал смешанный характер колебаний, такой основной тон при $l = 2$ мог бы иметь достаточно высокий период, что показывают расчеты, использующие численный алгоритм с формальным подавлением внутренних гравитационных осцилляций⁹⁹. Однако реальное взаимодействие колебаний внешних и внутренних областей при низких l настолько велико, что основной тон внешних областей не выделяется в виде изолированной моды теоретического спектра — все g -моды имеют практически одинаковый характер (см. рис. 5). Аномальные g -моды отчетливо выделяются при $l \geq 6$, но имеют слишком низкие периоды.

Таким образом, идентификация колебаний с периодом 160 минут с теоретическим спектром стандартной модели требует проблематичного механизма, приводящего к возбуждению лишь одного из целого ряда колебаний, близких по своим свойствам и по периодам. Эти затруднения, как и проблема нейтрино, могут быть обусловлены тем, что реальное строение Солнца существенно отличается от предсказаний стандартной эволюционной модели. Поэтому для дальнейших исследований представляет интерес, какого типа изменения модели могли бы обеспечить изолированное, обособленно выделяющееся в теоретическом спектре колебание такого периода. Изучение этого вопроса облегчается тем, что с точки зрения адиабатических колебаний модель с хорошей точностью задается одним лишь радиальным профилем плотности. Одно из вероятных решений может быть связано с наличием скачка плотности. Такой скачок может привести к большей независимости колебаний внутренних и внешних областей и, кроме того, определяет новый тип колебаний с максимальными амплитудами на границе разрыва (пример таких ядерных колебаний иллюстрирует спектр Юпитера на рис. 6). Скачок плотности в модели может быть обусловлен неоднородностью химического состава. Одна из моделей такого типа с аномально высоким центральным содержанием тяжелых элементов и конвективным ядром предложена Хойлом¹⁰⁰ как возможное решение проблемы нейтрино. В этой модели солнечное ядро массы $0,3 - 0,5 M_{\odot}$ обладает низким начальным содержанием гелия $Y \approx 0,04$ (так что современное значение $Y \approx 0,15$) и высоким содержанием металлов группы железа (рассмотрены случаи $Z = 0,075 - 0,15$). Высокая непрозрачность, обусловленная металлами, делает ядро конвективным. Малый выход энергичных нейтрино обусловлен высокой концентрацией водорода, $X \approx 0,7$, поддерживающейся в центре Солнца, а также быстрым конвективным перемешиванием ${}^7\text{Be}$, что уменьшает скорость протекания реакции ${}^7\text{Be} (p, \gamma) {}^8\text{B}$. Модель Хойла предсказывает примерно постоянную светимость Солнца на протяжении истории Земли. Представляет интерес исследование моделей такого типа с точки зрения теоретического спектра колебаний, в котором при каждом значении $l \neq 0$ возможно выделение ядерной моды. Возбуждение этой моды может быть обусловлено конвективными движениями в ядре. Несколько иная возможность рассмотрена Зацепиным и др.¹⁰¹: на основе расчетов для слоисто-политропных моделей Солнца предложено идентифицировать период 160 минут с одной из низших квадрупольных g -мод ядра, близкого к конвективному состоянию. Периодически возникающее перемешивание вещества в таком ядре также обеспечило бы снижение генерации нейтрино.

При наблюдениях 160-минутных колебаний обнаружены регулярные вариации их амплитуды, с периодом, равным или близким 27-дневному периоду вращения Солнца^{93,94}. Прямое объяснение такой модуляции может дать прецессия пространственной картины колебаний под влиянием сил Кориолиса¹⁰². Если колебания являются квадрупольными (имеют две

диаметрально противоположных синфазных пучности), то наблюдаемый период модуляции соответствует параметру вращательного расщепления $\tau \approx 1/2$. Когда будет достигнута однозначная идентификация 160-минутных колебаний с теоретическим спектром, измерения периода модуляции смогут дать информацию о вращении солнечных недр. Обнаруженная модуляция амплитуд является дополнительным аргументом в пользу солнечной природы наблюдаемых колебаний.

4. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СПЕКТРЫ КОЛЕБАНИЙ ЮПИТЕРА И САТУРНА

а) Модели внутреннего строения

Для расчета собственных колебаний Юпитера и Сатурна использованы современные детальные модели внутреннего строения этих планет¹⁵. Модели адиабатические, по химическому составу двухслойные. Оболочки состоят из однородной смеси водорода и гелия с добавкой тяжелых компонент. Ядро содержит только тяжелые компоненты — воду, метан, аммиак, силикаты и железо в солнечной пропорции. Модели построены на основе достаточно точных уравнений состояния и согласованы с имеющимися наблюдательными данными — массой, радиусом, гравитационными моментами J_2 и J_4 и граничными условиями давления и температуры в атмосфере.

б) С п е к т р ы к о л е б а н и й

Основными характерными свойствами моделей, определяющими структуру спектра собственных колебаний, являются адиабатическое строение по всему объему и наличие двух скачков в распределении плотности по радиусу. Внутренний скачок соответствует изменению химического состава на границе ядра, второй скачок плотности связан с фазовым переходом водорода в металлическое состояние при высоких давлениях. Общая структура теоретического спектра при отсутствии вращения (в нулевом приближении теории возмущений) была рассмотрена выше, при обсуждении классификации колебаний (рис. 6). Наличие двух скачков плотности определяет при каждом номере колебаний $l \neq 0$ две моды с максимальными амплитудами на границах разрывов. Так как строение модели адиабатическое, этими двумя модами исчерпываются внутренние гравитационные колебания. Эти колебания чувствительны к детальному строению ядра и к возможной размытости скачка плотности, связанного с металлизацией водорода, по радиусу. Современные представления о внутреннем строении планет-гигантов имеют в этом отношении весьма предварительный характер. Такие внутренние осцилляции имеют, кроме того, относительно малые амплитуды на поверхности. Поэтому в первую очередь представляет интерес изучение основных тонов колебаний с максимальными амплитудами на поверхности и акустических обертонов.

Расчеты теоретических спектров выполнены во втором приближении теории возмущений с учетом влияния всех эффектов вращения — сил Кориолиса, центробежных сил и деформации фигуры планеты. Рассмотрено влияние как твердотельного, так и дифференциального вращения^{23, 24}. В последнем случае использованы простые модельные распределения дифференциального вращения с цилиндрической симметрией — угловая частота вращения Ω определяется расстоянием до оси вращения и эта

зависимость выбрана квадратичной:

$$\Omega = \Omega_0 \left[1 + 0,01 \left(\frac{r}{R} \sin \theta \right)^2 \right] - \text{Юпитер}, \quad (4.1)$$

$$\Omega = \Omega_0 \left[1 + 0,1 \left(\frac{r}{R} \sin \theta \right)^2 \right] - \text{Сатурн}. \quad (4.2)$$

Эти модельные распределения в среднем отражают наблюдаемые увеличения скорости вращения к экватору. Ω_0 соответствует примерно 10-часовому периоду вращения.

Полученные спектры колебаний Юпитера и Сатурна показаны на рис. 9 и 10. Для наглядной оценки влияния эффектов вращения результаты приведены в системе координат, вращающейся с угловой частотой Ω_0 . Для случая твердотельного вращения в этой системе координат планета неподвижна, и, если пренебречь эффектами вращения, периоды колебаний вырождены по азимутальному индексу m . Эти вырожденные периоды соответствуют задаче нулевого приближения³⁷ и изображены кружками. При каждом значении l максимальные периоды имеют основные тона. В области меньших периодов располагаются ветви акустических обертонов; периоды внутренних гравитационных осцилляций не приведены. Вертикальными штрихами показано расщепление мультиплетов под влиянием вращения. Выше горизонтальных прямых приведены результаты для случая твердотельного вращения, ниже — для дифференциального. Около двух мультиплетов показано характерное для всего спектра расположение периодов колебаний по индексу m .

Рассмотрим вначале результаты для твердотельного вращения. Максимальному расщеплению подвержены мультиплеты основных тонов. При низких значениях l влияние вращения определяется в основном силами Кориолиса. Под действием этих сил волны, бегущие в направлении вращения (соответствуют значениям $m < 0$) замедляются, что приводит к увеличению периода; волны, бегущие в обратном направлении ($m > 0$), ускоряются. Видна также асимметрия расщепления, возрастающая с увеличением номера колебаний l . В случае высоких l периоды колебаний значительно меньше периода вращения, и основной вклад в расщепление вносит эллиптичность фигуры планеты. При $l \rightarrow \infty$ колебания вытесняются к поверхности и аналогичны поверхностным волнам. При $m = 0$ такие колебания образуются волнами, бегущими вдоль меридиана; при $|m| = l$ они соответствуют волнам, распространяющимся вдоль экватора. Из-за эллиптичности путь вокруг планеты вдоль экватора длиннее, чем вдоль меридиана, поэтому периоды колебаний с $|m| = l$ возрастают по сравнению с $l = 0$. Влияние эллиптичности приводит таким образом к смещению крыльев мультиплетов в сторону более высоких периодов относительно центральной линии $m = 0$. Для акустических обертонов из-за меньших периодов характерно в целом более слабое расщепление.

Влияние дифференциальности вращения более существенно для спектра Сатурна (см. рис. 10). Оказывая наибольшее влияние на основные тона колебаний, в целом оно приводит к некоторому сжатию мультиплетов по сравнению с расщеплением при твердотельном вращении. Относительно использованной вращающейся системы координат при дифференциальном вращении внешние экваториальные области планеты имеют небольшое избыточное вращение. Благодаря ему волны, бегущие в направлении вращения ($m < 0$), дополнительно ускоряются в направлении движения, что приводит к уменьшению периода. При $m > 0$ эффект имеет обратный знак. С увеличением номера колебаний l влияние дифференциальности вращения увеличивается. Это связано с вытеснением колебаний к поверхности, где неоднородность вращения максимальна.

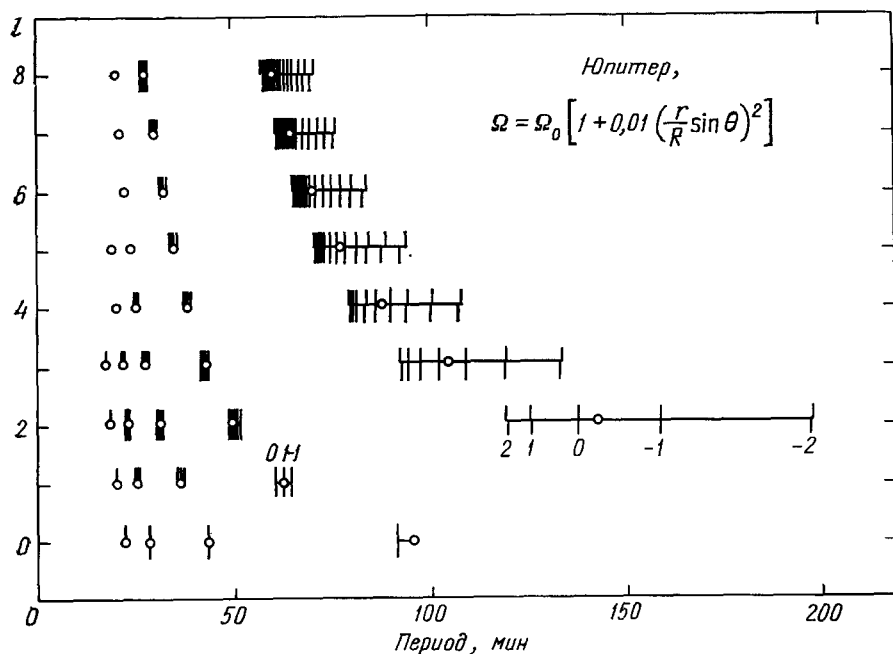


Рис. 9. Спектр собственных колебаний Юпитера.

Кружками показаны периоды колебаний в нулевом приближении. Выше кружков показано расщепление мультиплетов для случая твердотельного вращения, ниже — для дифференциального. Около двух мультиплетов приведены значения индекса m . Результаты приведены в системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω_0 ^{23, 24}.

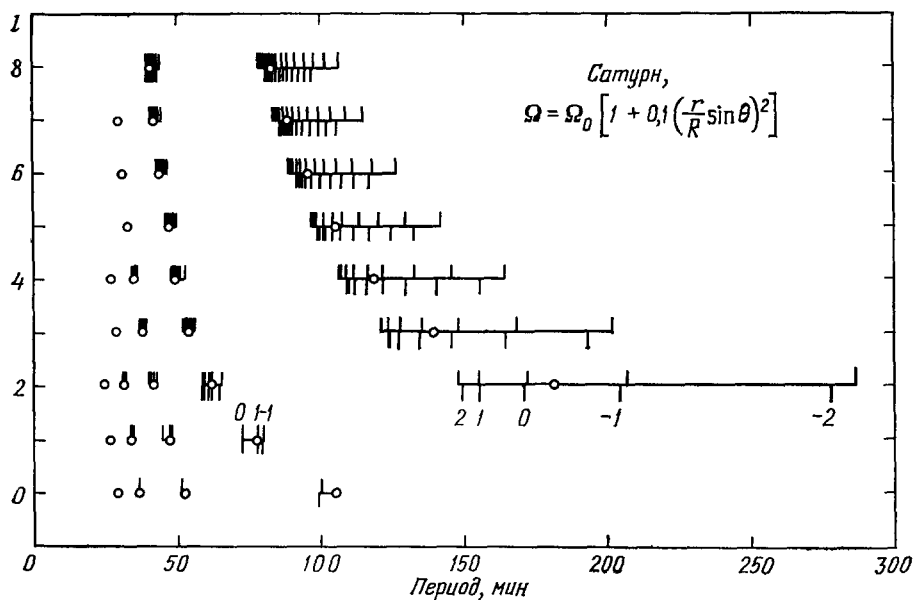


Рис. 10. Спектр собственных колебаний Сатурна.

Обозначения те же, что на рис. 9.

в) Взаимодействие мод

Как видно из рис. 9 и 10, влияние вращения на спектры колебаний планет-гигантов довольно велико. Малый параметр теории возмущений — отношение частоты колебаний нулевого приближения к частоте вращения — достигает значения $1/4$ для основного квадрупольного колебания Юпитера и почти $1/3$ в случае Сатурна. Расщепленные вращением мультиплеты перекрываются по периодам. В такой ситуации встает вопрос, насколько вообще можно доверять результатам, полученным с помощью теории возмущений.

Истинные частоты колебаний могут существенно отличаться от результатов теории возмущений из-за взаимодействия различных мод. Это взаимодействие состоит в том, что собственные функции (формы колебаний) вращающейся планеты имеют смешанный характер и являются суперпозицией собственных функций определенных мод колебаний нулевого приближения. Если частоты взаимодействующих мод близки и вращение достаточно быстрое, соответствующие поправки к собственным функциям нулевого приближения могут быть значительными.

В то же время точность расчета частоты колебания в рамках теории возмущений определяется точностью расчета собственных функций. Поэтому, если не учтена поправка к собственным функциям, соответствующая значительному взаимодействию с соседними модами (эта поправка может проявляться лишь в более высоких приближениях теории возмущений), это может сильно ухудшить точность всех результатов.

Для количественной оценки влияния взаимодействия мод аппарат теории возмущений был модифицирован^{22, 24}. Исследовался случай твердотельного вращения. Модификация следует методу, используемому в квантовомеханической теории возмущений для эрмитовых операторов в случае квазивырождения¹⁰³. В исходных уравнениях (2.15) оператор H_0 задачи нулевого приближения ($\omega_0^2 \mathbf{u}_0 = H_0 \mathbf{u}_0$) заменяется оператором

$$H_p = H_0 + (\omega_0^2 - \omega_{01}^2) P^1 + (\omega_0^2 - \omega_{02}^2) P^2; \quad (4.3)$$

здесь ω_{01} и ω_{02} — частоты нулевого приближения двух соседних мод, с которыми взаимодействует исследуемая мода частоты ω_0 ; P^1 и P^2 — операторы проектирования на собственные функции нулевого приближения, соответственно $\mathbf{u}_{01}$ и $\mathbf{u}_{02}$, этих соседних мод ($P^1 \mathbf{u}_{01} \equiv \mathbf{u}_{01}$; $P^2 \mathbf{u}_{02} \equiv \mathbf{u}_{02}$). Такой заменой невозмущенного оператора взаимодействующие моды сводятся к единой частоте нулевого приближения ω_0 . Строится теория возмущений для этой задачи с искусственно внесенным вырождением; от полученных результатов переходят к решениям исходной задачи. Такой алгоритм позволяет оценить поправку к собственным функциям из-за взаимодействия с соседними модами и ее влияние на частоту колебаний.

Симметрия задачи определяет правила отбора для взаимодействующих мод. Взаимодействуют лишь колебания с одинаковыми индексами m : колебание номера l взаимодействует с колебаниями номеров l и $l \pm 2$.

Проведены численные расчеты по модифицированной теории возмущений. Для основного тона колебаний номера l рассматривалось его взаимодействие с основными тонами номеров $l+2$ и $l-2$. Полученные результаты иллюстрирует рис. 11. На нем в увеличенном масштабе показан мультиплет основного тона $l=4$. Выше горизонтальной прямой показаны результаты ординарной теории возмущений, ниже — теории возмущений, модифицированной с учетом взаимодействия мод. Небольшие различия в результатах отражают взаимодействие мод. Возникающие поправ-

ки к периодам, однако, значительно меньше полной величины расщепления. Это подтверждает применимость ординарной теории возмущений — несмотря на то, что расщепление мультиплетов превышает расстояния

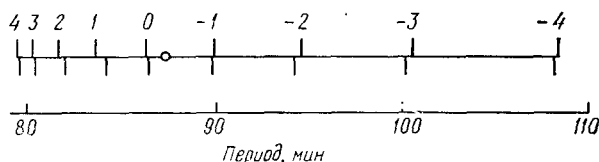


Рис. 11. Мультиплет основного тона колебаний $l = 4$ Юпитера.

Кружком показан невозмущенный период. Выше показаны результаты ординарной теории возмущений, ниже — результаты теории возмущений, модифицированной с учетом взаимодействия мод^{22, 24}.

между невозмущенными периодами. Такая необычно широкая применимость теории возмущений для задачи собственных колебаний вращающейся планеты обусловлена узкими правилами отбора, сильно ограничивающими число взаимодействующих мод.

Авторы признательны А. Б. Северному, В. А. Котову и Т. Т. Цапу за полезные обсуждения.

Институт физики Земли АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Bahcall J. N.— Space Sci. Rev., 1979, v. 24, p. 227.
2. Монин А. С., Шашков Ю. А.— История климата.— Л.: Гидрометеоиздат, 1979.
3. Pollack J. B.— Icarus, 1979, v. 37, p. 479.
4. Leighton R. B., Noyes R. W., Simon G. W.— Astrophys. J., 1962, v. 135, p. 474.
5. Hill H. A., Stebbins R. T., Brown T. M.— In: Atomic Masses and Fundamental Constants/Ed. J. H. Sanders, A. H. Wapstra.— N. Y.: Plenum Press, 1976.— p. 622.
6. Severny A. B., Koto V. A., Tsap T. T.— Nature, 1976, v. 259, p. 87.
7. Brookes J. R., Isaak G. R., van der Raay H. B.— Ibid., p. 92.
8. Snider J. L., Kearns M. D., Tinker P. A.— Nature, 1978, v. 275, p. 730.
9. Toth P.— Nature, 1977, v. 270, p. 159.
10. Scherrer P. H., Wilcox J. M., Koto V. A., Severny A. B., Tsap T. T.— Nature, 1979, v. 277, p. 635.
11. Hill H. A., Candell T. P.— Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1979, v. 186, p. 327.
12. Deubner F.— L., Ulrich R. K., Rhodes E. J., Jr.— Astron. and Astrophys., 1979, v. 72, p. 177.
13. Parker E. N.— In: Proc. of Symposium № 71 of IAU «Basic Mechanisms of Solar Activity».— Prague, 1975.— P. 3; Имеется перевод: Паркер Е. Н.— В кн. Проблемы солнечной активности.— М.: Мир, 1979.— С. 8.
14. Hubbard W. B., Trubitsyn V. P., Zharkov V. N.— Icarus, 1974, v. 21, p. 147.
15. Жарков В. Н., Трубицын В. П.— В кн. Юпитер.— М.: Мир, 1978.— Т. I, с. 178.
16. Ledoux P., Valraven Th.— Handb. der Phys., 1958, v. 51 p. 353
17. Ledoux P.— In: Proc. of Symp. No. 59 of IAU «Stellar Instability and Evolution».— Canberra, Australia, 1973.— P. 135.
18. Cox J. P.— Bull. Astron. Soc. India, 1979, v. 7, p. 4.
19. Chandrasekhar S.— An Introduction to the Study of the Stellar Structure. Chicago: Chicago Univ. Press, 1939.— P. 57; имеется перевод: Чандрасекар С.— Введение в учение о строении звезд.— М.: ИЛ, 1950.
20. Lynden-Bell D., Ostriker J. P.— Mon. Not. Roy. Astron. Soc., 1967, v. 136, p. 293.
21. Hansen C. J., Cox J. P., Van Horn H. M.— Astrophys. J., 1977, v. 217, p. 151.
22. Воронцов С. В., Жарков В. Н.— ДАН СССР, 1978, т. 243, с. 893.
23. Vorontsov S. V., Zharkov V. N.— Adv. Space Res., 1981, v. 1, p. 189.

24. Воронцов С. В. Собственные колебания планет-гигантов и Солнца. Канд. диссертация. — М., 1979.
25. Backus G. E. — *Geophys. J.*, 1967, v. 13, p. 71.
26. Alterman Z., Jarosh H., Pekeris C. L. — *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1959, v. 252, p. 80.
27. Bahcall J. N. et al. — *Phys. Rev. Lett.*, 1980, v. 45, p. 945.
28. Cowling T. G. — *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1941, v. 101, p. 367.
29. Robe H. — *Ann. Astrophys.*, 1968, v. 31, p. 475.
30. Scuflaire R. — *Astron. and Astrophys.*, 1974, v. 36, p. 107.
31. Tolstoy I. — *Rev. Mod. Phys.*, 1963, v. 35, p. 207.
32. Воронцов С. В., Жарков В. Н. — *Астрон. ж.*, 1978, т. 55, с. 84.
33. Abraham Z., Iben I., Jr. — *Astrophys. J.*, 1971, v. 170, p. 157.
34. Spruit H. G. — *Solar Phys.*, 1974, v. 34, p. 277.
35. Gingerich O., Noyes R. W., Kalkofen W., Cuny Y. — *Ibid.*, 1971, v. 18, p. 347.
36. Thomson W. — *Phil. Trans. Roy. Soc., London*, 1863, v. 153, p. 612.
37. Vorontsov S. V., Zharkov V. N., Lubimov V. M. — *Icarus*, 1976, v. 27, p. 109.
38. Christensen-Dalsgaard J. — *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1980, v. 190, p. 765.
39. Wolff C. L. — *Astrophys. J.*, 1979, v. 227, p. 943.
40. Woodhouse J. H. — *Geophys. J.*, 1976, v. 46, p. 11.
41. Cowling T. G., Newing R. A. — *Astrophys. J.*, 1949, v. 109, p. 149.
42. Ledoux P. — *Ibid.*, 1951, v. 114, p. 373.
43. Goossens M. — *Astrophys. and Space Sci.*, 1972, v. 16, p. 386.
44. Goossens M., Smeyers P., Denis J. — *Ibid.*, 1976, v. 39, p. 257.
45. Scuflaire R., Gabriel M., Noels A., Boury A. — *Astron. and Astrophys.*, 1975, v. 45, p. 15.
46. Christensen-Dalsgaard J., Dilke F. W. W., Gough D. O. — *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1974, v. 169, p. 429.
47. Castor J. I. — *Astrophys. J.*, 1971, v. 166, p. 109.
48. Ando H., Osaki Y. — *Publ. Astron. Soc. Japan*, 1975, v. 27, p. 581.
49. Keeley D. A. — *Astrophys. J.*, 1977, v. 211, p. 926.
50. Goldreich P., Keeley D. A. — *Ibid.*, p. 934.
51. Cox J. P., Giuli R. T. *Principles of Stellar Structure*. — N.Y.: Gordon and Breach, 1968.
52. Goldreich P., Keeley D. A. — *Astrophys. J.*, 1977, v. 212, p. 243.
53. Rhodes E. J., Jr., Ulrich R. K., Simon G. W. — *Ibid.*, 1977, v. 218, p. 901.
54. Дубов Э. Е. — В кн. *Итоги науки и техники, сер. «Астрономия»* — М.: ВИНТИ. — 1978, т. 14, с. 148.
55. Вандакуров Ю. В. Конвекция на Солнце и 11-летний цикл. — Л.: Наука. Ленингр. отделение, 1976.
56. Жугжда Ю. Д., Меркуленко В. Е. — *Астрон. ж.*, 1978, т. 55, с. 1119.
57. Косовичев А. Г., Попов Ю. П. — *Препринт ИИМ АН СССР № 55*. — Москва, 1979.
58. Deubner F.-L. — *Astron. and Astrophys.*, 1975, v. 44, p. 371.
59. Deubner F.-L. In: *Proc. IAU Colloq. Nr. 36/Ed. R. M. Bonnet, Ph. Delache. — Clermont-Ferrand: G. de Bussac*, 1977. — P. 45.
60. Ulrich R. K. — *Astrophys. J.*, 1970, v. 162, p. 993.
61. Ulrich R. K., Rhodes E. J., Jr. — *Ibid.*, 1977, v. 218, p. 521.
62. Ando H., Osaki Y. — *Publ. Astron. Soc. Japan*, 1977, v. 29, p. 221.
63. Gough D. O. — *Цит. в* ⁵⁹ *сб.* — P. 3.
64. Berthomieu G., Cooper A. J., Gough D. O., Osaki Y., Provost J., Rocca A. — In: *Nonradial and Nonlinear Stellar Pulsation/Ed. H. A. Hill, W. Dziembowski. — Heidelberg: Springer-Verlag*, 1980, p. 307.
65. Hill H. A., Rosenwald R. D., Caudell T. P. — *Astrophys. J.*, 1978, v. 225, p. 304.
66. Joss P. C. — *Ibid.*, 1974, v. 191, p. 771.
67. Christensen-Dalsgaard J., Gough D. O., Morgan J. G. — *Astron. and Astrophys.*, 1979, v. 73, p. 121.
68. Rhodes E. J., Jr., Deubner F.-L., Ulrich R. K. — *Astrophys. J.*, 1979, v. 227, p. 629.
69. Ulrich R. K., Rhodes E. J., Jr., Deubner F.-L. — *Ibid.*, p. 638.
70. Howard R. — *Rev. Geophys. and Space Phys.*, 1978, v. 16, p. 721.
71. Claverie A., Isaak G. R., McLeod C. P., Van der Raay H. B., Rosa Cortes T. — *Nature*, 1979, v. 282, p. 591.
72. Вандакуров Ю. Р. — *Астрон. ж.*, 1967, т. 44, с. 786.
73. Christensen-Dalsgaard J., Gough D. O. — *Цит. в* ⁶⁴ *сб.* — P. 184.

74. Kaufmann P.— *Solar Phys.*, 1972, v. 23, p. 178.
75. Kobrin M. M., Korshunov A. I.— *Ibid.*, 1972, v. 25, p. 339.
76. Fossat E., Ricort G.— *Ibid.*, 1973, v. 28, p. 311.
77. Гальпер А. М., Кирilloв-Угрюмов В. Г., Курочкин А. В., Лейков Н. Р., Лучков Б. И., Юркин Ю. Т.— *Письма ЖЭТФ*, 1976, т. 24, с. 426.
78. Hill H. A., Stebbins R. T.— *Ann. N. Y. Acad. Sci.*, 1975, v. 262, p. 472.
79. Hill H. A., Stebbins R. T.— *Astrophys. J.*, 1975, v. 200, p. 471.
80. Brown T. M., Stebbins R. T., Hill H. A.— *Ibid.*, 1978, v. 223, p. 324.
81. Iben I., Jr., Mahaffy J.— *Astrophys. J. (Lett.)*, 1976, v. 209, p. L39.
82. Christensen-Dalsgaard J., Gough D. O.— *Nature*, 1976, v. 259, p. 89.
83. Rouse C. A.— *Astron. and Astrophys.*, 1979, v. 71, p. 95.
84. Dziembowski W., Pamjatnykh A. A.— In: *Proc. of 2nd European Solar Meeting «Pleins feux sur la Physique Solaire»*.— Toulouse, 1978,— p. 135.
85. Christensen-Dalsgaard J., Dziembowski W., Gough D. O.— *Цит. в* ⁶⁴с.— P. 313.
86. Grec G., Fossat E.— *Astron. and Astrophys.*, 1977, v. 55, p. 411.
87. Dittmer P. H.— *Astrophys. J.*, 1978, v. 224, p. 265.
88. Livingston W., Milkey R., Slaughter C.— *Ibid.*, 1977, v. 211, p. 281.
89. Musman S., Nye A. H.— *Astrophys. J. (Lett.)* 1977, v. 212, p. L95.
90. Beckers J. M., Ayres T. R.— *Ibid.*, 1977, v. 217, p. L69.
91. Grec G., Fossat E.— *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1979, v. 188, p. 21.
92. Котов В. А., Северну А. В., Тсар Т. Т.— *Ibid.*, 1978, v. 183, p. 61.
93. Северный А. Б., Котов В. А., Цап Т. Т.— *УФН*, 1979, т. 128, с. 728.
94. Северный А. Б., Котов В. А., Цап Т. Т.— *Астрон. ж.*, 1979, т. 56, с. 113.
95. Котов В. А., Кучми С.— *УФН*, 1979, т. 128, с. 730.
96. Ерюшев Н. Н., Котов В. А., Северный А. Б., Цветков Л. И.— *Письма Астрон. ж.*, 1979, т. 5, с. 546.
97. Worden S. P., Simon G. W.— *Astrophys. J. (Lett.)* 1976, v. 210, p. L163.
98. Grec G., Fossat E.— *Astron. and Astrophys.*, 1979, v. 77, p. 351.
99. Vorontsov S. V., Zharkov V. N.— *Nature*, 1977, v. 265, p. 426.
100. Hoyle F.— *Astrophys. J. (Lett.)*, 1975, v. 197, p. L127.
101. Зацепин Г. Т., Таврюсева Е. А., Копысов Ю. С.— *ДАН СССР*, 1980, т. 251, с. 1342.
102. Воронцов С. В.— *Письма Астрон. ж.*, 1980, т. 6, с. 251.
103. Мессна А.— *Квантовая механика. Т. 2.*— М.: Наука, 1979.
104. Будыко М. И. *Климат в прошлом и будущем.*— Л.: Гидрометеиздат, 1980.
105. Cox J. P. *Theory of Stellar Pulsation.*— Princeton: Princeton Univ. Press, 1980.
106. Cuypers J.— *Astron. and Astrophys.*, 1980, v. 89, p. 207.
107. Gabriel M.— *Ibid.*, 1980, v. 82, p. 8.
108. Gabriel M.— *Цит. в* ⁶⁴сб.— P. 488.
109. Gabriel M., Scuflaire R.— *Ibid.*— P. 478.
110. Gabriel M., Scuflaire R.— *Acta Astron.*, 1979, v. 29, p. 135.
111. Saio H.— *Astrophys. J.*, 1980, v. 240, p. 685.
112. Lubow S. H., Rhodes E. J., Jr., Ulrich R. K.— *Цит. в* ⁶⁴сб.— P. 300.
113. Rosenwald R. D., Hill H. A.— *Ibid.*— P. 404.
114. Claverie A., Isaak G. R., McLeod C. P., van der Raay H. B., Roca Cortes T.— *Astron. and Astrophys.*, 1980, v. 91, p. L9.
115. Claverie A., Isaak G. R., McLeod C. P., van der Raay H. B., Roca Cortes T.— *Цит. в* ⁶⁴сб.— P. 181.
116. Grec G., Fossat E., Pomerantz M.— *Nature*, 1980, v. 288, p. 541.
117. Tassoul M.— *Astrophys. J. Suppl.*, 1980, v. 43, p. 469.
118. Christensen-Dalsgaard J., Gough D. O.— *Nature*, 1980, v. 288, p. 544.
119. Caudell T. P., Knapp J., Hill H. A., Logan J. D.— *Цит. в* ⁶⁴сб.— P. 206.
120. Knapp J., Hill H. A., Caudell T. P.— *Ibid.*— P. 394.
121. Caudell T. P., Hill H. A.— *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1980, v. 193, p. 381.
122. Boury A., Scuflaire R., Noels A., Gabriel M.— *Цит. в* ⁶⁴сб.— P. 342.
123. Boury A., Scuflaire R., Noels A., Gabriel M.— *Astron. and Astrophys.*, 1980, v. 85, p. 20.

124. Scherrer P. H., Wilcox J. M., Severny A. B., Koto v B. A., Tsap T. T.— *Astrophys. J. (Lett.)* 1980, v. 237, p. L97.
125. Brookes J. R., Isaak G. R., McLeod C. P., van der Raay H. B., Rosa Cortes T.— *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 1978, v. 184, p. 759.
126. Котов В. А., Кучми С., Северный А. Б., Цап Т. Т.— *Письма Астрон. ж.*, 1980, т. 6, с. 421.
127. Severny A. B., Koto v B. A., Tsap T. T.— *Astron. and Astrophys.*, 1980, v. 88, p. 317.
128. Koutchmy S., Koutchmy O., Koto v B. A.— *Ibid.*, 1980, v. 90, p. 372.
129. Keeley D.— *Цит. в* ⁶¹ сб. p. 245.