1981 г. Август | Том 134, вып. 4

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

РЕШЕНИЯ ТИПА ИНСТАНТОНОВ В КИРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ

А. М. Переломов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Замечательное открытие Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1] нового метода интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений — так называемого метода обратной задачи рассеяния и алгебраическая формулировка этого метода, данная Лаксом [2], привели к возможности исследования обширного класса нелинейных уравнений, которые не поддавались изучению старыми средствами.

Подробное изложение этого метода можно найти, например, в монографии [3] и одном из многочисленных сборников статей [4]. Здесь мы отметим лишь, что в методе обратной задачи рассеяния решение рассматриваемого нелинейного уравнения сводится к решению линейных задач: нахождению данных рассеяния по потенциалу и обратной задаче о нахождении потенциала по данным рассеяния.

Для простейшего нелинейного интегрируемого уравнения — уравнения Кортевега — де Фриза

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \qquad u = u(x, t)$$

решение состоит из трех этапов.

1) По потенциалу $u(x, t)$, заданному в начальный момент времени $t = 0$, $u_0(x) = u(x, 0)$, находится коэффициент отражения $r_0(k)$ для уравнения Шредингера

$$-\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + u_0(x)\,\psi = k^2\psi.$$

2) Коэффициент отражения $r(k, t)$ в произвольный момент времени t находится по формуле

$$r(k, t) = \exp(i8k^3t)\, r_0(k).$$

3) Последний этап задачи состоит в нахождении потенциала $u(x, t)$ по коэффициенту рассеяния $r(k, t)$, т. е. в решении обратной задачи рассеяния для уравнения Шредингера.

Метод обратной задачи рассеяния по степени эффективности аналогичен методу преобразования Фурье для линейных уравнений с постоянными коэффициентами и находит широкое применение во всех областях теоретической и математической физики.

Так, использование этого метода в теории поля привело к поразительному прогрессу в нашем понимании структуры как классических, так и квантовых нелинейных теорий поля в двумерном пространстве — времени вне рамок теории возмущений.

Изучению решений уравнений классической теории поля посвящено в последние годы большое число работ. Отметим из них работы [5-92], где можно найти более подробную информацию и дальнейшие ссылки на литературу.

В результате этих исследований был обнаружен новый тип решений, которые играют важную роль в физике, однако не могут быть получены в рамках обычной теории.

Сюда можно отнести, например, так называемые солитонные решения или просто солитоны, т. е. локализованные решения волновых уравнений, которые сохраняют свою форму и размеры как угодно долго. Такие решения были впервые обнаружены в прошлом веке в уравнениях гидродинамики (см. [3,4]).

Существование таких решений в неабелевых калибровочных теориях поля, используемых в теории элементарных частиц, было открыто 'т Хофтом [5] и Поляковым [6]. Найденные решения оказались устойчивыми: они не могут расплыться и исчезнуть по топологическим причинам, т. е. по тем же самым, по которым узел, завязанный на веревке, не может быть развязан без разрезания веревки. Другое важное свойство состоит в том, что соответствующие этим решениям частицы могут являться монополями, т. е. могут нести изолированный магнитный заряд (свойства таких решений детально рассмотрены в обзоре [7]).

Другим типом решений нелинейных уравнений являются так называемые инстантонные решения, т. е. решения, локализованные в малой области как пространства, так и времени. Инстантоны можно интерпретировать не как реальные объекты, а как процессы, не как частицы, а как квантовомеханические переходы между различными состояниями частиц.

Существование инстантонов так же, как и солитонов, обусловлено в первую очередь топологическими причинами и связано не с конкретным видом лагранжиана рассматриваемой теории, а с геометрической структурой полей, входящих в лагранжиан.

Солитонные и инстантонные решения были обнаружены для многих уравнений теории поля: в калибровочной теории Янга — Миллса [8-17] (см. обзоры [15-17]), в теории гравитации Эйнштейна [18-25] и в простейших существенно нелинейных моделях теории поля — так называемых киральных моделях [27-92]. Элементарная трактовка такого типа решений дана в [26].

Киральные модели представляют модели теории поля, в которых взаимодействие вводится не путем добавления к лагранжиану свободного поля лагранжиана взаимодействия, а чисто геометрическим способом.

Именно, лагранжиан в таких моделях остается тем же, что и в случае свободного поля, но на само поле накладываются связи, так что теперь поле φ принимает значения уже в некотором нелинейном многообразии Φ (в простейшем варианте на три вещественных поля, образующие вектор $\mathbf{n}$, накладывается условие $\mathbf{n}^2 = 1$, так что многообразие Φ становится двумерной сферой S^2 в трехмерном пространстве). Такая модель уже описывает взаимодействующие поля.

При этом особый интерес представляют киральные модели в двумерном пространстве-времени или сокращенно двумерные киральные модели. Именно они во многих отношениях оказываются аналогичными четырехмерным неабелевым калибровочным теориям поля, которые в настоящее время считают наиболее вероятным кандидатом для описания сильных взаимодействий. (Эта аналогия неоднократно отмечалась рядом авторов и особенно подчеркивалась Поляковым.)

Это касается, например, таких свойств, как асимптотическая свобода, нетривиальная топологическая структура, существование инстантонов и наличие высокой скрытой симметрии, приводящей в двумерном случае к бесконечному числу законов сохранения.

Модель теории поля характеризуется, как обычно, лагранжианом $\mathscr{L}(\varphi)$ и его интегралом S по пространству-времени — действием, являющимся функционалом от поля $\varphi(x)$: $S = S[\varphi]$. Уравнения, играющие роль уравнений движения, получаются при этом, как обычно, из условия экстремальности действия: $\delta S = 0$.

Инстантонные решения получаются при переходе к чисто мнимому времени или, иными словами, при переходе от псевдоевклидовой метрики $dt^2 - dx^2$ к метрике евклидовой $dx_1^2 + dx_2^2$.

При переходе к квантовому случаю удобно использовать формализм функционального интеграла (или интеграла по путям), введенного Фейнманом. Вероятности различных процессов описываются при этом функциональными интегралами, в которые входит действие S.

При вычислении таких интегралов в квазиклассическом приближении инстантоны соответствуют экстремальным значениям действия. Они отвечают переходу в функциональном интеграле к чисто мнимому времени и описывают процессы туннелирования в квазиклассическом приближении. Разложение функционального интеграла вблизи инстантонной конфигурации и вычисление соответствующих гауссовых интегралов дает первые нетривиальные квантовые поправки (это эквивалентно вычислению однопетлевых диаграмм Фейнмана). Подчеркнем, что эти поправки принципиально нельзя получить в рамках обычной теории возмущений. Размеры статьи, однако, не позволяют рассмотреть здесь вопрос о роли инстантонов в квантовом случае.

Цель настоящей работы — дать обзор свойств инстантонных решений в двумерных киральных моделях общего типа. Такие решения были найдены в работах [28,38–42] для обычных киральных моделей и в [85,86,88,89] для суперсимметричного обобщениях этих моделей *). Более сложный случай инстантонов для поля Янга — Миллса и гравитационного поля Эйнштейна [18–24] здесь рассматриваться не будет.

Следует особо отметить, что при изучении киральных моделей (и в еще большей степени для поля Янга — Миллса и гравитационного поля) важную роль играет ряд понятий и методов топологии, теории групп Ли, а также дифференциальной и алгебраической геометрии. В настоящем обзоре мы будем пояснять необходимые понятия, обращаясь к физической интуиции и отсылая читателя, интересующегося строгими формулировками, к соответствующей литературе.

Статья состоит из четырех разделов. В разделе 1 с разных точек зрения рассмотрена простейшая киральная модель — так называемая модель

*) Обычные киральные модели описывают бозонные поля, суперсимметричные киральные модели описывают как бозонные, так и фермионные поля таким способом, при котором существует определенная симметрия между ними.

n-поля, инстантонные решения в которой были найдены впервые в работе Белавина и Полякова [28]. В этой модели поле $\mathbf{n}(x)$ является трехмерным вектором: $\mathbf{n} = (n^1, n^2, n^3)$, на который наложено ограничение $\mathbf{n}^2 = 1$. Поле $\mathbf{n}(x)$ определено на двумерной плоскости: $x = (x_1, x_2)$. Действие $S[\mathbf{n}]$ определяется метрикой на сфере ($\mathbf{n}^2 = 1$), инвариантной относительно вращений трехмерного пространства

$$S=\frac{1}{2}\int d^2x\,\partial_\mu\mathbf{n}\cdot\partial_\mu\mathbf{n},\qquad \partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu},\qquad \mu=1,\ 2.$$

Отсюда следуют «уравнения движения»

$$\partial_\mu\partial_\mu\mathbf{n}+(\partial_\mu\mathbf{n}\cdot\partial_\mu\mathbf{n})\,\mathbf{n}=0.$$

Нас будут интересовать решения этих уравнений, обладающие конечным действием; поэтому мы потребуем, чтобы поле $\mathbf{n}(x)$ обладало определенным пределом

$$\mathbf{n}(x)\to\mathbf{n}_0\quad\text{при}\quad |x|\to\infty.$$

Такое поле можно рассматривать уже на расширенной плоскости переменной x, к которой присоединена еще бесконечно удаленная точка $\{\infty\}$. Такую плоскость с помощью стереографической проекции, задаваемой известными формулами

$$x_1+ix_2=\frac{\nu_1+i\nu_2}{1-\nu_3},$$

можно отобразить на единичную сферу в трехмерном пространстве векторов $\boldsymbol{\nu}$: $\boldsymbol{\nu}^2 = 1$.

Таким образом, поле $\mathbf{n}(x)$ определяет отображение сферы в ν-пространстве на сферу в n-пространстве. Но, как известно из топологии (см., например, [96]), два таких отображения (соответственно два поля $\mathbf{n}(x)$) не всегда можно деформировать друг в друга. Более точно, полю $\mathbf{n}(x)$ можно приписать целое число Q, называемое топологическим зарядом-

$$Q=\frac{1}{8\pi}\int d^2x\,\varepsilon_{\mu\nu}\,(\mathbf{n}\,[\partial_\mu\mathbf{n},\ \partial_\nu\mathbf{n}]),$$

и два поля $\mathbf{n}_1(x)$ и $\mathbf{n}_2(x)$ можно непрерывно деформировать друг в друга лишь в том случае, когда соответствующие этим полям заряды Q_1 и Q_2 совпадают.

Оказывается, далее, что действие S ограничено снизу топологическим зарядом

$$S\geqslant 4\pi\,|Q|.$$

При этом равенство достигается лишь при выполнении одного из уравнений

$$\partial_\mu\mathbf{n}=\pm\varepsilon_{\mu\nu}\,[\mathbf{n},\ \partial_\nu\mathbf{n}],$$

которые называются «уравнениями дуальности».

Нетрудно видеть, что любое решение этих уравнений является также решением уравнений движения.

Уравнения дуальности нелинейны и для их решения удобно перейти от переменной n к новой переменной w, используя снова стереографическую проекцию

$$w=w_1+iw_2=\frac{n_1+in_2}{1-n_3},\qquad \mathbf{n}^2=1.$$

При этом уравнения дуальности настолько упрощаются, что становятся линейными. а именно переходят в уравнения Коши — Римана

$$\frac{\partial w}{\partial\bar z}=0\quad\text{или}\quad\frac{\partial w}{\partial z}=0,\qquad z=x_1+ix_2.$$

С учетом граничных условий $\mathbf{n}(x) = \mathbf{n}_0$ при $|x| \to \infty$ отсюда получаем, что функция $w(z)$ (или $w(\bar{z})$) должна являться рациональной:

$$w(z) = c \prod_j^{k_1} (z - a_j) \left[\prod_l^{k_2} (z - b_l)\right]^{-1}.$$

При этом в силу инвариантности наших уравнений относительно вращений в $\mathbf{n}$-пространстве мы можем взять в качестве предельного значения w_0 любое число, например $w_0 = 1$. При этом должны выполняться условия $c = 1$ и $k_1 = k_2 = k$.

Топологический заряд, соответствующий этому решению, оказывается равным k.

Таким образом, в случае модели $\mathbf{n}$-поля инстантонные решения полностью описаны. Оказывается, что аналогичные результаты справедливы для широкого класса киральных моделей теории поля.

Рассмотрению такого типа киральных моделей посвящены остальные три раздела статьи.

В разделе 2 подробно рассмотрен случай киральных моделей общего вида. Оказывается, что результаты раздела 1 переносятся на случай киральных моделей, когда мы имеем дело с N комплексными полями $w^\alpha(x)$, а действие имеет вид

$$S = \int h_{\alpha\bar{\beta}}(w, \bar{w})\, \partial_\mu w^\alpha \partial_\mu \bar{w}^\beta d^2x, \qquad \mu = 1,\ 2,$$

и инвариантно относительно достаточно большой группы преобразований, так что любая точка w^α может быть переведена в любую точку w^β. Кроме того, требуется, чтобы метрика $h_{\alpha\bar{\beta}}$ имела специальный вид — была бы так называемой кэлеровой метрикой, т. е. удовлетворяла условию

$$\frac{\partial h_{\alpha\bar{\beta}}}{\partial w^\gamma} = \frac{\partial h_{\gamma\bar{\beta}}}{\partial w^\alpha}.$$

В этом случае, так же как и в случае $\mathbf{n}$-поля, уравнения дуальности сводятся к уравнениям Коши — Римана, а инстантонные решения даются рациональными функциями [40]. В этом разделе приходится использовать ряд новых для физика понятий топологии, теории групп Ли и дифференциальной и алгебраической геометрии, которые мы старались пояснить на простейших примерах.

Читатель, не интересующийся киральными моделями общего типа, может этот раздел пропустить и перейти сразу к следующему разделу, где рассмотрена модель, в которой поле принимает значения в n-мерном комплексном проективном пространстве, обозначаемом обычно $\mathbb{C}P^n$. Отметим, что обычную модель $\mathbf{n}$-поля можно рассматривать как $\mathbb{C}P^1$-модель. Однако, в отличие от $\mathbb{C}P^1$ модели, в $\mathbb{C}P^n$ модели при $n \geqslant 2$ инстантонные решения не исчерпывают всех решений уравнений движения с конечным действием. Такие решения для $\mathbb{C}P^n$-модели были недавно полностью описаны [76, 77].

Последний раздел статьи посвящен рассмотрению так называемой грассмановой киральной модели, когда поле $\varphi(x)$ принимает значения в так называемом комплексном многообразии Грассмана, которое можно рассматривать как определенное множество матриц.

Таким образом, модель $\mathbf{n}$-поля, $\mathbb{C}P^n$-модель и грассманову модель можно рассматривать как модели комплексного скалярного поля, комплексного векторного поля и комплексного матричного поля.

В заключение этого раздела мне хотелось бы поблагодарить Л. Б. Окуня, просмотревшего рукопись данной статьи, за ряд полезных замечаний.

1. ПРОСТЕЙШАЯ КИРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ — МОДЕЛЬ n-ПОЛЯ

Начнем с рассмотрения простейшего случая — так называемой модели n-поля, инстантонные решения в которой были найдены в работе Белавина и Полякова [28]. Имея в виду дальнейшие обобщения, мы рассмотрим эту модель с различных точек зрения.

1. В этой модели (часто называемой SO (3)-инвариантной σ-моделью) мы имеем дело с полем

$$n(x, t) = (n^1, n^2, n^3) \quad \text{или} \quad n^\alpha(x, t), \quad \alpha = 1, 2, 3, \tag{1.1}$$

причем лагранжиан формально совпадает с лагранжианом свободного поля

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \mathbf{n}\cdot\partial_\mu \mathbf{n}, \qquad \mu = 0, 1, \qquad x_0 = t, \qquad x_1 = x. \tag{1.2}$$

Для того чтобы получить теорию взаимодействующих полей, не будем, как обычно, добавлять лагранжиан взаимодействия, а наложим простейшую квадратичную связь на n-поле:

$$\mathbf{n}^2 = 1. \tag{1.3}$$

Таким образом, теперь поле n принимает значения в нелинейном многообразии Ф-двумерной сфере S^2, задаваемой в трехмерном пространстве условием (1.3).

Взаимодействие в такой модели связано с внутренней кривизной многообразия (в данном случае сферы) и имеет чисто геометрическое происхождение. Это позволяет исследовать такого рода теории достаточно подробно.

Инстантонные решения — это решения, описывающие процесс туннелирования, и для их нахождения удобно, как это обычно делается, перейти от обычного времени t к чисто мнимому времени it, т. е. от псевдоэвклидового случая к эвклидовому случаю. Поэтому мы с самого начала будем считать, что поле n определено на двумерной эвклидовой плоскости:

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(x), \qquad x = (x_1, x_2).$$

Введем на сфере какую-либо систему координат, так что точка сферы определяется координатами u^γ, $\gamma = 1, 2$. Такая модель определяется заданием функционала действия (энергии):

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x g_{\gamma\delta}\partial_\mu u^\gamma \partial_\mu u^\delta, \qquad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \tag{1.4}$$

где $g_{\gamma\delta}$ — метрический тензор:

$$ds^2 = g_{\gamma\delta}\, du^\gamma\, du^\delta. \tag{1.5}$$

Уравнения движения следуют, как обычно, из условия экстремальности действия

$$\delta S = 0 \to \partial_\mu\partial_\mu u^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\partial_\mu u^\alpha \partial_\mu u^\beta = 0; \tag{1.6}$$

здесь

$$\Gamma^\gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\alpha}}{\partial u^\beta} + \frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\delta}\right) \tag{1.7}$$

— символы Кристоффеля.

Эти уравнения являются обобщением известного уравнения для геодезических

$$\ddot{u}^\gamma + \Gamma^\gamma_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta = 0. \tag{1.8}$$

Заметим, что сфера S^2 является однородным многообразием — она инвариантна относительно вращений трехмерного пространства. Поэтому естественно взять в качестве $g_{\alpha\beta}$ метрику, инвариантную относительно вращений:

$$ds^2 = d\mathbf{n}\cdot d\mathbf{n}. \tag{1.9}$$

Отсюда получаем

$$S=\frac{1}{2}\int d^2x\partial_\mu\mathbf{n}\cdot\partial_\mu\mathbf{n}, \qquad \partial_\mu=\frac{\partial}{\partial x_\mu}, \qquad \mu=1,\ 2, \tag{1.10}$$

и «уравнения движения»

$$\delta S = 0 \to \partial_\mu\partial_\mu\mathbf{n} + (\partial_\mu\mathbf{n}\cdot\partial_\mu\mathbf{n})\,\mathbf{n} = 0. \tag{1.11}$$

Заметим, что из (1.11) следует, что

$$\partial_\mu\,[\mathbf{n},\ \partial_\mu\mathbf{n}] = 0. \tag{1.12}$$

Отметим, что рассматриваемую модель можно рассматривать также как модель n-поля в (2 + 1)-мерном пространстве-времени, при условии, что мы интересуемся лишь решениями, не зависящими от времени.

Нас будут интересовать лишь решения с конечным действием S, и поэтому потребуем, чтобы поле $\mathbf{n}(x)$ обладало определенным пределом

$$\mathbf{n}(x) \to \mathbf{n}_0 \quad \text{при} \quad |x| \to \infty. \tag{1.13}$$

В этом случае мы можем рассматривать поле $\mathbf{n}(x)$ уже на расширенной плоскости переменных $x = (x_1,\ x_2)$, к которой присоединена еще бесконечно удаленная точка $\{\infty\}$.

Для этого удобно с помощью стереографической проекции отобразить такую расширенную плоскость на двумерную сферу $S^2 = \{\mathbf{v}\colon\ \mathbf{v}^2 = 1\}$ согласно известным формулам

$$x_1+ix_2=\frac{\nu_1+i\nu_2}{1-\nu_3}, \qquad \mathbf{v}^2=1. \tag{1.14}$$

Отсюда видно, что такая расширенная плоскость топологически эквивалентна двумерной сфере.

Таким образом, мы можем считать, что поле n задано на двумерной сфере: $\mathbf{n} = \mathbf{n}(\mathbf{v})$ и это поле определяет непрерывное отображение

$$\mathbf{v} \to \mathbf{n}(\mathbf{v})$$

двумерной сферы $S^2 = \{\mathbf{v}\colon\ \mathbf{v}^2 = 1\}$ в двумерную сферу $S^2 = \{\mathbf{n}\colon\ \mathbf{n}^2 = 1\}$.

Характерная особенность такого поля состоит в том, что его, вообще говоря (в отличие от поля, заданного на обычной плоскости), нельзя непрерывно деформировать в поле, не зависящее от x: $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 = \mathrm{const}$. Именно, каждому полю $\mathbf{n}(x)$, удовлетворяющему условию (1.13), можно приписать целое число Q (называемое обычно топологическим зарядом), которое при непрерывной деформации поля не меняется. При этом два поля, обладающие одинаковым топологическим зарядом, можно непрерывно деформировать друг в друга *).

В данном случае для топологического заряда можно написать интегральное представление

$$Q=\frac{1}{8\pi}\int d^2x\varepsilon_{\mu\nu}\,(\mathbf{n}\,[\partial_\mu\mathbf{n},\ \partial_\nu\mathbf{n}]), \tag{1.15}$$

где $\varepsilon_{\mu\nu}$ — антисимметричный тензор и $\varepsilon_{12} = 1$. Целочисленность Q следует из того факта, что в данном случае плотность топологического заряда есть

*) Это свойство полей $\mathbf{n}(\mathbf{v})$ хорошо известно в топологии (см., например, монографию [99]).

не что иное, как якобиан отображения: $x = \mathbf{n}(x)$. Действительно, используя обычную параметризацию

$$\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi,\ \sin\theta\sin\varphi,\ \cos\theta), \tag{1.16}$$

получаем

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int \sin\theta(x)\,d\theta(x)\,d\varphi(x). \tag{1.17}$$

Далее, из очевидного неравенства

$$(\partial_\mu\mathbf{n} \mp \varepsilon_{\mu\nu}[\mathbf{n},\ \partial_\nu\mathbf{n}])^2 \geqslant 0 \tag{1.18}$$

следует, что действие ограничено снизу топологическим зарядом

$$S \geqslant 4\pi\,|Q|. \tag{1.19}$$

При этом равенство в (1.19) достигается при выполнении одного из условий

$$\partial_\mu\mathbf{n} = \pm\varepsilon_{\mu\nu}[\mathbf{n},\ \partial_\nu\mathbf{n}]. \tag{1.20}$$

Уравнения (1.20) играют важную роль в теории и называются «уравнениями дуальности». В отличие от «уравнений движения» (1.11), уравнения (1.20) имеют первый порядок. Нетрудно показать, однако, что любое решение «уравнений дуальности» является также решением «уравнений движения» (1.11). Решения «уравнений дуальности» и принято называть инстантонными решениями.

2. Хотя уравнения (1.20) и являются уравнениями первого порядка, однако они нелинейны, и для их решения удобно использовать иную параметризацию. Именно, с помощью стереографической проекции из северного полюса сферы перейдем к новым переменным

$$w = w_1 + iw_2 = \frac{n_1 + in_2}{1 - n_3} = \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}, \quad z = x_1 + ix_2. \tag{1.21}$$

В этих переменных выражение (1.10) для действия S принимает вид

$$S = 2\int \frac{d^2x}{(1+|w|^2)^2}\,\partial_\mu w\cdot\partial_\mu\bar{w}, \tag{1.22}$$

или

$$S = 4\int \frac{d^2x}{(1+|w|^2)^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} + \frac{\partial w}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right),$$

а для топологического заряда

$$Q = \frac{1}{\pi}\int \frac{d^2x}{(1+|w|^2)^2}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\bar{w}}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial w}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right). \tag{1.23}$$

Отсюда сразу же следует ограничение снизу для топологического заряда (1.19) и, что более важно, уравнения дуальности (антидуальности) принимают простой вид:

$$\frac{\partial w}{\partial\bar{z}} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1.24}$$

т. е. уравнения дуальности в данном случае сводятся просто к уравнениям Коши — Римана.

На первый взгляд кажется, что общее решение уравнений дуальности дается формулой

$$w = f(z) \quad \text{или} \quad w = f(\bar{z}),$$

где f — произвольная аналитическая функция. Однако мы должны потребовать, чтобы эта функция обладала определенным пределом w_0 (включая

$w_0 = \infty$) также и при $|z| \to \infty$. Отсюда следует, что функция $f(z)$ должна быть рациональной.

В силу однородности нашего пространства $\Phi = S^2$ относительно действия группы SU (2) мы можем в качестве предельного значения w_0 взять любое число, например $w_0 = 1$. Тогда решение уравнений дуальности принимает вид

$$w = \prod_{j=1}^{k} \frac{z - a_j}{z - b_j} \quad \text{или} \quad w = \prod_{j=1}^{k} \frac{\bar{z} - a_j}{\bar{z} - b_j}. \tag{1.25}$$

Нетрудно вычислить, что для такого решения топологический заряд

$$Q = k \quad \text{или} \quad Q = -k, \quad k > 0, \tag{1.26}$$

и такое решение естественно назвать k-инстантонным (k-антиинстантонным) решением.

Мы видим, что k-инстантонное решение характеризуется $4k$ параметрами: $2k$ комплексными числами a_j и b_j. Это естественно, поскольку один инстантон можно характеризовать четырьмя параметрами — его положением b, размерами $|a - b|$ и еще одной величиной — углом (фазой) $\theta = \arg(a - b)$.

Аналогичная функция $w = f(\bar{z})$ дает решение с $k < 0$, которое можно назвать решением с $|k|$ антиинстантонами.

Отметим еще, что при параметризации с помощью w, уравнения движения (1.11) принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} w = \frac{2\bar{w}}{1 + |w|^2} \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}. \tag{1.27}$$

Из них следует, что функция

$$\frac{(\partial w/\partial z)\, \partial \bar{w}/\partial z}{(1 + |w|^2)^2} = f(z) \tag{1.28}$$

не зависит от $\bar{z}$.

Аналогично функция

$$(1 + |w|^2)^{-2} \frac{\partial w}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \bar{w}}{\partial \bar{z}} = f(\bar{z}) \tag{1.29}$$

не зависит от z.

Можно показать также [32], что многоинстантонные и антиинстантонные конфигурации — это единственные решения уравнений (1.11) с конечным действием.

3. Связь с теорией групп становится более явной, если рассмотреть иную формулировку модели $\mathbf{n}$-поля. Именно, перейдем от вектора $\mathbf{n}$ к 2×2-матрице φ согласно формуле

$$\varphi(x) = \sigma \mathbf{n}(x), \tag{1.30}$$

где $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ — матрицы Паули.

Мы можем теперь считать поле $\varphi(x)$ элементом алгебры Ли $\mathcal{G}$ группы SO (3) — группы вращений трехмерного пространства или локально изоморфной ей группы $G = $ SU (2) — группы унитарных матриц второго порядка с определителем, равным единице, причем ограничение (1.3) принимает вид

$$\operatorname{tr}(\varphi^2) = 1. \tag{1.31}$$

Группа $G = \{g\} = \mathrm{SU}(2)$ действует естественно на алгебре Ли $\mathcal{G}$ группы $\mathrm{SU}(2)$ или, что то же самое, в пространстве полей φ:

$$g: \varphi \to g\varphi g^+, \tag{1.32}$$

где g^+ — матрица, эрмитово сопряженная к матрице g. (Такое действие называется присоединенным представлением группы $\mathrm{SU}(2)$.)

Выбирая какой-либо элемент φ_0 из $\mathcal{G}$ и действуя на него всеми элементами группы G, получаем орбиту Ω присоединенного представления группы $\mathrm{SU}(2)$, которая, как нетрудно видеть, является двумерной сферой S^2, задаваемой уравнением (1.31).

Таким образом, в рассматриваемом случае пространство Φ является орбитой присоединенного представления группы $\mathrm{SU}(2)$.

Действие и топологический заряд, выраженные через φ, принимают теперь вид

$$S = \frac{1}{2}\int \mathrm{tr}\,(\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi)\,\mathrm{d}^2x, \tag{1.33}$$

$$Q = c\int \mathrm{tr}\,(\varphi\,[\partial_\mu\varphi,\ \partial_\nu\varphi])\,\varepsilon_{\mu\nu}\,\mathrm{d}^2x, \tag{1.34}$$

и, как мы увидим в следующем разделе, эти формулы естественно обобщаются на случай, когда Φ является орбитой присоединенного представления произвольной компактной группы Ли.

4. Приведем еще одну формулировку теории $\mathbf{n}$-поля. Рассмотрим двухкомпонентное спинорное поле $\psi(x) = \begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}$ $\psi^+(x) = (\overline{\psi_1}(x), \overline{\psi_2}(x))$ и образуем с его помощью векторное поле

$$\mathbf{n}(x) = (\psi^+(x),\ \sigma\psi(x)), \tag{1.35}$$

где σ_1, σ_2, σ_3 — матрицы Паули. Тогда условие (1.3) будет выполнено, если наложить ограничение (условие нормировки)

$$\psi^+\psi = \overline{\psi}_1\psi_1 + \overline{\psi}_2\psi_2 = 1. \tag{1.36}$$

Следует, однако, иметь в виду, что два спинора $\psi(x)$ и $\exp(i\alpha(x))\,\psi(x)$ определяют один и тот же вектор $\mathbf{n}(x)$, и поэтому такие спиноры должны считаться эквивалентными.

Таким образом, мы имеем дело с нормированными спинором $\psi(x)$, определенным с точностью до фазового множителя $\exp(i\alpha(x))$. Естественно поэтому перейти к новому пространству, такому, что величины (ψ_1, ψ_2) и $(\lambda\psi_1, \lambda\psi_2)$ определяют в этом пространстве одну точку. Такое пространство хорошо известно в математике. Оно называется одномерным комплексным проективным пространством и обозначается $\mathbb{C}P^1$ *). Хорошо известно также, что такое пространство топологически эквивалентно двумерной сфере: $\mathbb{C}P^1 \sim S^2$.

Подставляя $\mathbf{n} = \psi^+\sigma\psi$ и выражение для действия (1.10), с учетом (1.36), получаем

$$S = \int \mathrm{d}^2x\,\{(\partial_\mu\psi^+, \partial_\mu\psi) - (\psi^+,\ \partial_\mu\psi)\,(\partial_\mu\psi^+,\ \psi)\}. \tag{1.37}$$

Нетрудно видеть, что это действие определяется метрикой на $\Phi = \mathbb{C}P^1$, инвариантной относительно действия группы $\mathrm{SU}(2)$. Аналогично для

---

*) Аналогично определяется n-мерное комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$: точкой этого пространства является не нулевой $(n+1)$-мерный комплексный вектор, определенный с точностью до общего множителя.

топологического заряда Q имеем

$$Q = c \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu \psi^+, \partial_\nu \psi). \tag{1.38}$$

Заметим, что выражение (1.37) для действия является калибровочно инвариантным относительно действия группы $U(1)$, т. е. при замене $\psi(x) \to \exp(i\alpha(x))\,\psi(x)$.

5. Еще одна формулировка модели n-поля — это формулировка в терминах абелева калибровочного поля $A_\mu(x)$ и комплексного поля $B_\mu(x)$ *). Эта формулировка наиболее удобна для того, чтобы проследить аналогию между двумерной киральной моделью и четырехмерными неабелевыми калибровочными теориями поля.

Здесь мы изложим вариант такой формулировки, следуя работе [48].

Рассмотрим наше пространство Φ, как единичную сферу, вложенную в трехмерное пространство: $\Phi = S^2 = \{\mathbf{n}\colon \mathbf{n}^2 = 1\}$. Введем подвижную ортогональную систему координат, так что в точке x, $\mathbf{e}_1(x)$, $\mathbf{e}_2(x)$ и $\mathbf{e}_3(x) = \mathbf{n}(x)$ — тройка взаимно ортогональных единичных векторов

$$\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k = \delta_{jk}. \tag{1.39}$$

Иными словами мы можем считать, что в каждой точке x задан элемент $g(x)$ группы вращений трехмерного пространства, переводящий стандартный репер в репер $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. При изменении x подвижная система испытывает поворот. Поэтому

$$\partial_\mu \mathbf{n} = -B^j_\mu \mathbf{e}_j, \quad \partial_\mu \mathbf{e}_j = A_\mu \varepsilon_{jk} \mathbf{e}_k + B^j_\mu \mathbf{n}, \qquad j,\ k = 1,\ 2. \tag{1.40}$$

Отсюда получаем

$$B^j_\mu = (\mathbf{n}, \partial_\mu \mathbf{e}_j), \quad A_\mu = (\mathbf{e}_2, \partial_\mu \mathbf{e}_1). \tag{1.41}$$

Заметим, что переход к другой подвижной ортогональной системе координат дается формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{e}'_1 &= \cos\alpha(x)\cdot\mathbf{e}_1 + \sin\alpha(x)\cdot\mathbf{e}_2, \\ \mathbf{e}'_2 &= -\sin\alpha(x)\cdot\mathbf{e}_1 + \cos\alpha(x)\cdot\mathbf{e}_2, \end{aligned} \tag{1.42}$$

где $\alpha(x)$ — некоторая калибровочная функция. При переходе от $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ к $\mathbf{e}'_1$, $\mathbf{e}'_2$ меняются и векторы A_μ и B^j_μ:

$$\left.\begin{aligned} B^{1'}_\mu &= \cos\alpha\cdot B^1_\mu + \sin\alpha\cdot B^2_\mu, \\ B^{2'}_\mu &= -\sin\alpha\cdot B^1_\mu + \cos\alpha\cdot B^2_\mu, \\ A'_\mu &= A_\mu + \partial_\mu\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{1.43}$$

По полям A_μ и $B_\mu = B^1_\mu + iB^2_\mu$ мы можем восстановить подвижную систему отсчета $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{n})$ с помощью уравнений (1.40), если выполнены условия

$$D^\mu \tilde{B}_\mu = 0, \quad \varepsilon_{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu = \frac{1}{2}\bar{B}^\mu \tilde{B}_\mu; \tag{1.44}$$

*) Такая формулировка для общего случая была дана в работе Семенова-Тян-Шанского и Фаддеева [33].

здесь $\partial_\mu + iA_\mu = D_\mu$ — ковариантная производная, $\overline{B}_\mu$ — поле, комплексно сопряженное к B_μ, а $\tilde{B}_\mu = i\varepsilon_{\mu\nu}B^\nu$ — поле, дуальное к B_μ.

В терминах полей A_μ и B_μ действие и уравнения движения принимают вид

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x\overline{B}^\mu B_\mu, \tag{1.45}$$

$$D^\mu B_\mu = 0, \tag{1.46}$$

а уравнения дуальности (антидуальности) приводятся к виду

$$B_\mu \pm \tilde{B}_\mu = 0. \tag{1.47}$$

Таким образом, модель n-поля эквивалентна теория абелева калибровочного поля A_μ и заряженного векторного поля B_μ, которые должны удовлетворять условиям (1.44).

Заметим, что величина $\overline{B}^\mu\tilde{B}_\mu$ пропорциональна плотности топологического заряда $\varepsilon_{\mu\nu}$ $(\mathbf{n}\,[\partial_\mu\mathbf{n},\ \partial_\nu\mathbf{n}])$, так что, согласно (1.44), имеем

$$Q = \frac{1}{4\pi}\int_{E} d^2x\varepsilon^{\mu\nu}\partial_\mu A_\nu. \tag{1.48}$$

Эта формула аналогична соответствующей формуле для поля Янга — Миллса (см. [16], (4.3)):

$$Q = \frac{1}{8\pi^2}\int d^4x\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\mu A_{\nu\rho\sigma}, \qquad \mu,\ \nu,\ \rho,\ \sigma = 1,\ 2,\ 3,\ 4, \tag{1.49}$$

где поле $A_{\nu\rho\sigma}$ дается выражением

$$A_{\nu\rho\sigma} = \mathrm{tr}\left\{A_\nu F_{\rho\sigma} - \frac{2}{3}A_\nu A_\rho A_\sigma\right\}, \tag{1.50}$$

а $A_\mu = (2i)^{-1}A^j_\mu\sigma_j$ — поле Янга — Миллса,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu,\ A_\nu].$$

Заметим, что полевые уравнения (1.44) и (1.46) обладают очевидной симметрией (дуальной симметрией):

$$B'_\mu \pm \tilde{B}'_\mu = e^{\pm i\beta}(B_\mu \pm \tilde{B}_\mu), \qquad A'_\mu = A_\mu, \tag{1.51}$$

где β — постоянный параметр.

Это преобразование симметрии было впервые обнаружено Полмайером [29] и обозначается им R^β: такой простой вид оно имеет именно в данном формализме. Как показано в работе [36], с этой симметрией связан бесконечный набор нелокальных интегралов движения, которые в квантовом случае приводят к сильному ограничению динамики процессов рассеяния — отсутствию рождения частиц. Относительно дуальной симметрии для общих киральных моделей см. [49].

Инстантонные решения инвариантны относительно дуальной симметрии, которая в этом случае сводится к глобальному калибровочному преобразованию. И наоборот, любое поле, инвариантное относительно преобразования дуальной симметрии, обязательно является или самодуальным, или антисамодуальным.

Это указывает на то, что существование инстантонов тесно связано с существованием дуальной симметрии.

2. КИРАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ОБЩЕГО ВИДА

В общем случае мы имеем поле $\varphi(x)$ в d-мерном эвклидовом пространстве ($x \in \mathbb{R}^d$), принимающее значения в нелинейном многообразии Φ. Пусть на Φ введены локальные координаты u^α и задана риманова метрика

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta. \tag{2.1}$$

Тогда киральная модель определяется заданием действия

$$S = \frac{1}{2}\int dx_1 \ldots dx_d g_{\alpha\beta}(u)\, \partial_\mu u^\alpha \partial_\mu u^\beta. \tag{2.2}$$

Из условия $\delta S = 0$ следуют «уравнения движения»:

$$\partial_\mu \partial_\mu u^\alpha + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} \partial_\mu u^\beta \partial_\mu u^\gamma = 0, \tag{2.3}$$

где $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ — символы Кристоффеля:

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} g^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial g_{\delta\beta}}{\partial u^\gamma} + \frac{\partial g_{\delta\gamma}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u^\delta}\right). \tag{2.4}$$

Нас будут интересовать гладкие поля $\varphi(x)$, обладающие определенным пределом φ_0 при $|x| \to \infty$. В этом случае мы можем дополнить евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$ и рассматривать такое пространство как d-мерную сферу

$$S^d = \mathbb{R}^d \cup \{\infty\}. \tag{2.5}$$

Таким образом, каждой точке сферы S^d ставится в соответствие точка пространства Φ или, иными словами, поле $\varphi(x)$ определяет отображение φ сферы S^d в пространство Φ:

$$\varphi:\ S^d \to \Phi. \tag{2.6}$$

Напомним, что два таких отображения φ_1 и φ_2 называются гомотопными *) друг другу, если их можно непрерывно деформировать друг в друга. Объединим все гомотопные друг другу отображения в один класс. Тогда, как известно [96], на множестве таких классов можно ввести операцию умножения, относительно которой они образуют группу — d-мерную гомотопическую группу многообразия Φ — $\pi_d(\Phi)$. Таким образом, топологической характеристикой поля $\varphi(x)$ можно считать его гомотопический класс или, иными словами, элемент гомотопической группы $\pi_d(\Phi)$. Поэтому естественно считать киральную теорию топологически нетривиальной, если $\pi_d(\Phi) \neq 0$.

а) Киральные модели с нетривиальной топологией

Мы ограничимся рассмотрением лишь наиболее хорошо изученных двумерных евклидовых киральных моделей. Читателей, интересующихся псевдоевклидовым случаем, мы отсылаем к работам [29, 35], а многомерным случаем — к фундаментальной работе [74].

Следуя [38, 40], предположим, что поле $\varphi(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, принимает значения в компактном многообразии Φ, которое является топологически нетривиальным: $\pi_2(\Phi) \neq 0$. Предположим еще дополнительно, что Φ является однородным пространством, таким, что на нем транзитивно

*) Мы не будем давать здесь строгих определений топологических понятий. Их можно найти, например, в книгах [96,97,99].

действует компактная полупростая группа Ли $G = \{g\}$ *). Иными словами, для любых двух элементов φ_1 и φ_2 существует преобразование группы G, переводящее φ_1 в φ_2. Возьмем какой-либо фиксированный элемент φ_0 пространства Φ и обозначим через $H = \{h\}$ множество элементов группы G, оставляющих его на месте: $h\varphi_0 = \varphi_0$. Нетрудно видеть, что это множество образует подгруппу группы G — стационарную подгруппу элемента φ_0.

Разобьем теперь все элементы группы G на так называемые классы смежности: элементы g_1 и g_2 мы будем считать принадлежащими одному классу, если существует элемент $h \in H$, такой, что $g_1 = g_2 h$.

Нетрудно видеть, что интересующее нас пространство Φ изоморфно фактор-пространству — пространству классов смежности группы G по подгруппе H, обозначаемому обычно

$$\Phi = G/H. \tag{2.7}$$

Заметим, что в таком виде может быть представлено любое однородное пространство.

Примеры:

1. Рассмотренное в предыдущем разделе пространство $\Phi = S^2$ можно представить в виде

$$S^2 = \mathrm{SU}\,(2)/\mathrm{U}\,(1) \quad \text{или} \quad S^2 = \mathrm{SO}\,(3)/\mathrm{SO}\,(2), \tag{2.8}$$

2. n-мерную сферу S^n можно записать в виде

$$S^n = \mathrm{SO}\,(n+1)/\mathrm{SO}\,(n). \tag{2.9}$$

3. Комплексное n-мерное проективное пространство $\mathbb{C}P^n$:

$$\mathbb{C}P^n = \mathrm{SU}\,(n+1)/\mathrm{SU}\,(n) \times \mathrm{U}\,(1). \tag{2.10}$$

Предположим дополнительно, что пространство Φ связно и односвязно, т. е. любые две его точки можно соединить кривой, и любую замкнутую кривую можно деформировать внутри Φ в точку. В этом случае для нахождения второй гомотопической группы пространства Φ можно воспользоваться известной из топологии формулой [96, 97]:

$$\pi_2\,(\Phi) = \pi_2\,(G/H) = \pi_1\,(H), \tag{2.11}$$

где $\pi_1\,(H)$ — первая гомотопическая группа пространства H, т. е. группа классов гомотопных друг другу замкнутых кривых, проходящих через какую-либо фиксированную точку пространства H.

Итак, киральная теория будет топологически нетривиальной, если нетривиальна первая гомотопическая группа стационарной подгруппы H какой-либо точки пространства Φ, иными словами, подгруппа H неодносвязна. Вычисление группы $\pi_1\,(H)$ в нашем случае не представляет никакого труда, поскольку структура подгруппы H хорошо известна. Именно, если G — простая компактная группа Ли ранга l, т. е. максимальная подгруппа в G вида $\mathrm{U}\,(1) \times \ldots \times \mathrm{U}\,(1)$ состоит из l сомножителей, то H имеет вид

$$H = (\mathrm{U}\,(1) \times \ldots \times \mathrm{U}\,(1) \times H_0)/K, \tag{2.12}$$

где множитель $U\,(1)$ входит $k \leqslant l$ раз, группа H_0 односвязна: $\pi_1\,(H_0) = 0$, а группа K — конечна. Поскольку $\pi_1\,(X \times Y) = \pi_1\,(X) + \pi_1\,(Y)$, то из

*) Необходимая информация о теории групп Ли может быть найдена, напр., в книге [100]. Напомним, что полупростая группа Ли является прямым произведением простых групп Ли, а простая группа Ли — это группа, не имеющая инвариантных подгрупп.

(2.12) следует

$$\pi_2(\Phi) = \pi_2(G/H) = \pi_1(H) = \underbrace{\mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}}_{k \text{ раз}} + K, \tag{2.13}$$

где $\mathbb{Z} = \pi_1(\mathrm{U}(1))$ — аддитивная группа целых чисел. Таким образом, с точностью до конечной группы K

$$\pi_2(\Phi) = \underbrace{\mathbb{Z} + \ldots + \mathbb{Z}}_{k \text{ раз}}, \quad k \leqslant l, \tag{2.14}$$

или, иными словами, полю $\varphi(x)$ можно приписать k целых чисел — топологических зарядов.

Примеры.

Из формул (2.8) — (2.10) сразу следует, что

$$\begin{gathered} \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}, \quad \pi_2(S^n) = 0, \quad \text{при} \quad n \geqslant 3, \\ \pi_2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

Отметим, что $\mathrm{SO}(n)$ — инвариантная киральная теория при $n \geqslant 4$ является топологически тривиальной и, как следствие этого, решений типа инстантонов в ней нет. В то же время имеется обширный класс топологически нетривиальных однородных пространств. Наиболее изучены из них так называемые орбиты присоединенного представления простых компактных групп Ли, которые мы и рассмотрим более подробно.

Итак пусть G — компактная простая группа Ли, а $\mathcal{G}$ — ее алгебра Ли. Группа G действует естественно на алгебре $\mathcal{G}$, но нетранзитивно, т. е. не может перевести какой-либо элемент $\mathcal{G}$ в произвольный элемент $\mathcal{G}$. Таким образом, относительно действия G алгебра $\mathcal{G}$ разбивается на орбиты. Орбита Ω — это множество элементов, которое получается при действии на какой-либо элемент $\mathcal{G}$, всеми преобразованиями группы G.

Примеры:

1) Пусть $G = \mathrm{SO}(3)$ — группа вращений трехмерного пространства, т. е. группа $\{g\}$ матриц третьего порядка, удовлетворяющих условию $gg' = 1$, штрих означает транспонирование.

Тогда $\mathcal{G}$ — алгебра вещественных кососимметрических матриц:

$$\mathcal{G} = \{x\}, \qquad x = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x' = -x.$$

Присоединенное представление G задается формулой $x \to gxg'$. Если задавать элемент $\mathcal{G}$ трехмерным вектором $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, то орбиты G будут представлять сферы в трехмерном пространстве с центром в начале координат $\Omega = \mathrm{SO}(3)/\mathrm{SO}(2)$, $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$, включая вырожденную орбиту — само начало координат.

2) $G = \mathrm{SU}(3) = \{g\}$, g — унитарная матрица третьего порядка с определителем, равным единице: $gg^+ = I$, $\det g = 1$; $\mathcal{G} = \{x\}$ — алгебра (восьмимерная) антиэрмитовых матриц третьего порядка: $x^+ = -x$. Действие присоединенного представления имеет вид $x \to gxg^+$. В этом случае помимо начала координат есть еще два типа орбит:

а) все собственные значения матрицы x различны, тогда орбита Ω шестимерна: $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}$, $\Omega = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{U}(1) \times \mathrm{U}(1)$; б) два собственных значения матрицы x совпадают, орбита Ω четырехмерна: $\Omega = \mathrm{SU}(3)/\mathrm{SU}(2) \times \mathrm{U}(1)$, $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$. В этом случае орбита Ω изоморфна двумерному комплексному проективному пространству: $\Omega = \mathbb{C}P^2$.

3) $G = \mathrm{SU}(n)$, $\mathcal{G} = \{x\}$, $x^+ = -x$, $(n-1)$ собственных значений матрицы x совпадают. Орбита $\Omega = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SU}(n-1)\,\mathrm{U}(1)$ $\pi_2(\Omega) = \mathbb{Z}$ и изоморфна пространству $\mathbb{C}P^{n-1}$.

Известно, что орбита присоединенного представления является связным и односвязным многообразием: $\pi_1(\Omega) = 0$. Поэтому читатель, знакомый с топологией, может воспользоваться теоремой Гуревича [96]:

Если Φ связно и односвязно: $\pi_1(\Phi) = 0$ и $\pi_j(\Phi) = 0$, $j = 2, \ldots, (k-1)$, $\pi_k(\Phi) \neq 0$, то $H_j(\Phi) = 0$, $j = 2, \ldots, (k-1)$, $H_k(\Phi) = \pi_k(\Phi)$; здесь $H_j(\Phi)$ — j-я группа гомологий. Следовательно, $H^j(\Phi) \sim 0$; $j = 2, \ldots, (k-1)$, где $H^j(\Phi)$ — j-я группа когомологий, а знак $\sim$ означает равенство с точностью до конечной группы.

Но пространство $H^j(\Phi)$, в силу теоремы де Рама, есть фактор-пространство замкнутых внешних j-форм по подпространству точных j-форм. С другой стороны, известно, что на Φ существует замкнутая 2-форма, которая не является точной, так называемая форма Кириллова (см. [100]). Следовательно, для орбит присоединенного представления $H^2(\Phi) \neq 0$ и по теореме Гуревича:

$$\pi_2(\Phi) = H^2(\Phi). \tag{2.16}$$

Поясним сказанное для читателей, не знакомых с понятиями групп гомологий и когомологий. Нетривиальность группы $\pi_2(\Phi)$ означает, что в пространстве Φ есть замкнутые двумерные многообразия или двумерные циклы — деформированные двумерные сферы, которые нельзя непрерывно деформировать в точку. По ним можно интегрировать замкнутые 2-формы, т. е. выражения, имеющие вид полной производной. Получающаяся при этом величина не меняется при деформации 2-цикла по которому производится интегрирование, и потому является топологическим инвариантом.

Из теоремы Гуревича следует, что все топологические заряды можно получить таким образом в виде интеграла от 2-формы, т. е. в виде двукратного интеграла. Символически это записывается так:

$$Q = c^{-1} \int \tilde{\omega}; \tag{2.17}$$

здесь $\tilde{\omega}$ — замкнутая 2-форма на $S^2 = \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, которая не является точной.

Форма $\tilde{\omega}$ получается следующим способом. Отображение $\varphi\colon S^2 \to \Phi$ индуцирует соответствующее отображение в пространстве когомологий $\varphi^*\colon H^2(\Phi) \to H^2(S^2)$ и

$$\tilde{\omega} = \varphi^* \omega. \tag{2.18}$$

Если рассматривать интересующие нас решения как решения, не зависящие от времени в киральной теории с d-пространственными и одной временной переменными, то полученное утверждение можно сформулировать по-иному: топологический заряд представляется в виде интеграла от нулевой компоненты топологического тока $I_a = (I_0, I_\mu)$:

$$Q = c^{-1} \int I_0 \, \mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_d, \tag{2.17'}$$

причем I_0 является полной дивергенцией

$$I_0 = \partial_\mu K_\mu. \tag{2.19}$$

Приведем примеры таких токов.

1) Случай так называемого главного кирального поля: $\Phi = G$, $d = 3$. В этом случае топологический заряд дается формулой [67]

$$Q = c^{-1} \int \mathrm{d}^3x \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \operatorname{tr}([L_\mu, L_\nu] L_\lambda), \tag{2.20}$$

где киральное поле φ — это поле на группе G: $\varphi(x) = g(x)$, а $L_\mu = \partial_\mu g \cdot g^{-1}$ — элемент алгебры Ли $\mathcal{G}$, взятый в присоединенном представлении, c — нормировочная постоянная. Топологический ток здесь имеет вид

$$I_a = \varepsilon_{abcd}\,\mathrm{tr}\,([L_b, L_c]\,L_d) \tag{2.21}$$

и сохраняется:

$$\partial_a I_a = 0.$$

Здесь греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3; латинские — 0, 1, 2, 3; $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ и ε_{abcd} — полностью антисимметричные тензоры. Сохранение тока I_a следует из тождества (условия нулевой кривизны)

$$\partial_a I_b - \partial_b I_a + [I_a, I_b] = 0 \tag{2.22}$$

и тождества Якоби для коммутаторов. Топологический заряд (2.20) в подходящей нормировке принимает целые значения.

2) $\mathbf{n}$ — поле, $d = 2$:

$$I_a = \varepsilon_{abc}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^\alpha \partial_b n^\beta \partial_c n^\gamma, \qquad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \quad a, b, c, d = 0, 1, 2, \tag{2.23}$$

откуда

$$I_0 = \varepsilon_{\mu\nu}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^\alpha \partial_\mu n^\beta \partial_\nu n^\alpha, \qquad \mu, \nu = 1, 2, \tag{2.24}$$

и мы приходим к выражению (1.15) для топологического заряда. Сохранение тока I_a следует из линейной зависимости векторов $\partial_a \mathbf{n}$.

3) $\mathbf{n}$-поле, $d = 3$. В этом случае ток, аналогичный предыдущему, ввести нельзя, однако с $\mathbf{n}$-полем можно связать другой топологический инвариант [67]. Аналогично (2.23) введем вектор

$$H_\mu = \varepsilon_{\mu\nu\lambda}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n^\alpha \partial_\nu n^\beta \partial_\lambda n^\gamma. \tag{2.25}$$

Тогда в силу того, что $\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0$, мы можем представить $\mathbf{H}$ в виде

$$\mathbf{H} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}. \tag{2.26}$$

Для $\mathbf{n}$-поля без особенностей интеграл

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{A}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}\,d^3x \tag{2.27}$$

существует и принимает целые значения. Этот топологический инвариант называется инвариантом Хопфа [101].

Для читателя, знакомого с топологией, отметим, что вектору $\mathbf{A}$ соответствует 1-форма $\tilde{\omega}$, вектору $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ — 2-форма $d\tilde{\omega}$, и выражение (2.27) можно переписать в инвариантном виде

$$(4\pi)^{-1}\int \tilde{\omega} \wedge d\tilde{\omega}, \tag{2.28}$$

где знак $\wedge$ означает внешнее умножение.

В общем случае, когда $\Phi = \Omega$ — орбита присоединенного представления группы G, мы можем воспользоваться тем обстоятельством, что на орбите Ω существует универсальная замкнутая 2-форма ω — форма Кириллова [100]:

$$\omega = \omega(X, Y) = (\varphi, [X, Y]); \tag{2.29}$$

здесь X и Y — векторы, касательные к орбите в точке φ, (φ, ψ) — инвариантное скалярное произведение в алгебре Ли $\mathcal{G}$. В простейшем случае $\mathcal{G} = \mathrm{SU}(N)$, φ и ψ — антиэрмитовы матрицы порядка N, $(\varphi, \psi) = -\mathrm{tr}\,(\varphi\psi)$.

Топологический заряд, соответствующий форме (2.29), имеет вид

$$Q = c^{-1} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} (\varphi [\partial_\mu \varphi, \partial_\nu \varphi]), \quad \mu = 1, 2; \tag{2.30}$$

здесь $\partial_1\varphi$ и $\partial_2\varphi$ — два касательных вектора к орбите, которая в случае $\mathcal{G} = \mathrm{SU}(N)$ определена условиями $\mathrm{tr}(\varphi^k) = c_k$. Эта формула обобщает формулу для топологического заряда для n-поля (1.15).

б) Инстантонные решения в киральных моделях

До сих пор для нас не был существен конкретный вид функционала действия. Мы выберем теперь его так, чтобы он был ограничен снизу топологическим зарядом Q. Такой подход уже использовался в работах [27,28,67]. Здесь мы, следуя [38], рассмотрим общий случай, когда Q дается формулой (2.30).

Обозначим через ψ_μ величину $\varepsilon_{\mu\nu} [\varphi, \partial_\nu\varphi]$, где $\varphi \in \mathcal{G}$ — элемент алгебры Ли $\mathcal{G}$, а через (φ, ψ) — положительно-определенное инвариантное скалярное произведение в $\mathcal{G}$. Мы имеем очевидное неравенство

$$(\partial_\mu\varphi \mp \psi_\mu, \partial_\mu\varphi \mp \psi_\mu) \geqslant 0. \tag{2.31}$$

Поэтому, если в качестве действия S взять

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \{(\partial_\mu\varphi, \partial_\mu\varphi) + ([\varphi, \partial_\nu\varphi], [\varphi, \partial_\nu\varphi])\}, \tag{2.32}$$

то мы будем иметь очевидную оценку

$$S \geqslant c \mid Q \mid. \tag{2.33}$$

Неравенство (2.33) переходит в равенство, при выполнении так называемых уравнений дуальности

$$\partial_\mu\varphi = \pm\varepsilon_{\mu\nu} [\varphi, \partial_\nu\varphi]. \tag{2.34}$$

Таким образом, ситуация в общем случае напоминает ситуацию для n-поля (см. раздел 1), но выражение для действия здесь имеет более сложный вид. Выражение (2.32) для S напоминает на первый взгляд выражение Скирма [27], однако, на самом деле существенно отличается от него, поскольку содержит производные $\partial_\mu\varphi$ лишь квадратично, тогда как у Скирма оно четвертой степени по $\partial_\mu\varphi$.

Уравнения дуальности (2.34) несколько упрощаются, если перейти к комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$. Они принимают вид

$$\partial\varphi = \pm i [\varphi, \partial\varphi], \quad \bar{\partial}\varphi = \mp i [\varphi, \bar{\partial}\varphi], \tag{2.35}$$

где

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} (\partial_1 - i\partial_2), \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} (\partial_1 + i\partial_2).$$

Заметим, что из уравнений дуальности следует

$$(\partial_1\varphi, \partial_2\varphi) = 0, \quad (\varphi, \partial_1\varphi) = (\varphi, \partial_2\varphi) = 0, \quad (\partial_1\varphi, \partial_1\varphi) = (\partial_2\varphi, \partial_2\varphi). \tag{2.36}$$

Это значит, что в случае выполнения уравнений дуальности отображение φ: $S^2 \to \Phi$ является конформным.

Вернемся опять к рассмотрению киральных моделей общего вида и предположим дополнительно, что многообразие Φ является комплексным многообразием *). Пусть w^α — локальные координаты в окрестности точ-

*) Это означает, грубо говоря, что точки этого многообразия можно параметризовать комплексными координатами: относительно строгого определения см. книги [98,99].

ки $w^\alpha = 0$, а $h_{\alpha\bar\beta}(w^\gamma)$ — эрмитова метрика

$$ds^2 = h_{\alpha\bar\beta}\, dw^\alpha\, d\bar w^\beta. \tag{2.37}$$

Тогда в качестве функционала действия мы можем взять функционал

$$S = \frac{1}{2}\int d^2x h_{\alpha\bar\beta}\partial_\mu w^\alpha \partial_\mu \bar w^\beta. \tag{2.38}$$

Подставляя в (2.38) вместо $\partial_\mu w^\alpha$ величину $\partial_\mu w^\alpha \pm i\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu w^\alpha$, приходим к неравенству

$$S \geqslant c\,|\,Q\,|, \qquad Q = \frac{i}{2}\int \varepsilon_{\mu\nu} h_{\alpha\bar\beta}\partial_\mu w^\alpha \partial_\nu \bar w^\beta\, d^2x. \tag{2.39}$$

Неравенство (2.39) превращается в равенство лишь для полей, удовлетворяющих уравнениям дуальности

$$\partial_\mu w^\alpha \pm i\varepsilon_{\mu\nu}\partial_\nu w^\alpha = 0, \tag{2.40}$$

или, после перехода к комплексной координате $z = x_1 + ix_2$

$$\bar\partial w^\alpha = 0 \quad (\text{или} \quad \partial w^\alpha = 0). \tag{2.41}$$

Локальное решение этих уравнений это $w^\alpha = f^\alpha(z)$ (или $w^\alpha = f^\alpha(\bar z)$). Таким образом, равенство $S = cQ$ (соответственно $S = -cQ$) может достигаться лишь для голоморфных (соответственно антиголоморфных) отображений φ компактифицированной плоскости z: $\mathbb{R}^2 \bigcup \{\infty\}$ (которую можно рассматривать как одномерное комплексное проективное пространство $\mathbb{C}P^1$) в многообразие Φ.

К сожалению, Q, вообще говоря, не является топологическим инвариантом и при деформации $w^\alpha(x)$ меняется. Поэтому в общем случае нельзя утверждать, что решение уравнений дуальности является также решением исходных уравнений Эйлера, следующих из условия $\delta S = 0$.

Однако, как было отмечено в [40], существует широкий класс комплексных компактных многообразий для которых этой трудности не возникает. А именно, пусть Φ — кэлерово многообразие, т. е. комплексное многообразие, на котором существует эрмитова метрика $h_{\alpha\bar\beta}$, мнимая часть которой $\omega = (i/2)\, h_{\alpha\bar\beta}\, dw^\alpha \wedge d\bar w^\beta$ является замкнутой невырожденной 2-формой. Заметим, что условие замкнутости этой формы эквивалентно условиям

$$\frac{\partial h_{\alpha\bar\beta}}{\partial w^\gamma} = \frac{\partial h_{\gamma\bar\beta}}{\partial w^\alpha}, \qquad \frac{\partial h_{\alpha\bar\beta}}{\partial \bar w^\gamma} = \frac{\partial h_{\alpha\bar\gamma}}{\partial \bar w^\beta}. \tag{2.42}$$

Отображение φ: $S^2 \to \Phi$ определяет двумерный цикл в Φ. Величина cQ в этом случае есть интеграл от ω по этому циклу, и поскольку форма ω замкнута, эта величина зависит лишь от того класса гомологий, которому принадлежит этот цикл. Таким образом, в данном классе величина Q постоянна, а функционал действия S равен своему минимальному значению, если выполнены условия (2.41), т. е. для голоморфных отображений φ: $S^2 = \mathbb{C}P^1 \to \Phi$. Эти отображения, если они существуют, дают решения уравнений дуальности (2.41) — так называемые инстантонные решения.

Заметим, что если многообразие Φ алгебраическое, т. е. аналитическое подмногообразие без сингулярностей в комплексном проективном пространстве $\mathbb{C}P^N$ для некоторого N, тогда существует кэлерова метрика (так называемая метрика Ходжа) такая, что Q всегда будет целым числом.

Отметим еще, что если перейти от переменных x_1 и x_2 к комплексной переменной $z = x_1 + ix_2$, то выражения для действия и топологического заряда принимают вид

$$S = \int h_{\alpha\bar\beta} (\partial w^\alpha \bar\partial \bar w^\beta + \bar\partial w^\alpha \partial \bar w^\beta)\, d^2x, \tag{2.43}$$

$$Q = c^{-1} \int h_{\alpha\bar\beta} (\partial w^\alpha \bar\partial \bar w^\beta - \bar\partial w^\alpha \partial \bar w^\beta)\, d^2x. \tag{2.44}$$

Совпадение S с $|Q|$ для голоморфных и антиголоморфных полей теперь очевидно.

«Уравнения движения» получаются, как обычно, из условия $\delta S = 0$. Принимая во внимание условия (2.42), мы получаем

$$h_{\alpha\bar\beta} (\partial \bar\partial w^\alpha) + \frac{\partial h_{\alpha\bar\beta}}{\partial w^\gamma} \bar\partial w^\alpha \partial w^\gamma = 0 \tag{2.45}$$

и уравнение комплексносопряженное к нему. Умножим теперь левую часть уравнения (2.45) на $\partial \bar w^\beta$, просуммируем по β и добавим к ней левую часть уравнения, комплексно сопряженного и просуммированного по β. Используя соотношения (2.42) можно преобразовать это выражение к виду

$$\bar\partial (h_{\alpha\bar\beta} \partial w^\alpha \partial \bar w^\beta) = 0. \tag{2.46}$$

Отсюда получаем

$$h_{\alpha\bar\beta} \partial w^\alpha \partial \bar w^\beta = f(z) \tag{2.47}$$

и аналогично

$$h_{\alpha\bar\beta} \bar\partial w^\alpha \bar\partial \bar w^\beta = f(\bar z). \tag{2.48}$$

Рассмотрим теперь решения уравнений дуальности (2.41). Эти уравнения имеют вид уравнений Коши — Римана, но из-за компактности многообразия Φ, глобальное решение, или, что то же самое, голоморфное отображение φ: $\mathbb{C}P^1 \to \Phi$ существует далеко не всегда. Так, например, если Φ есть двумерное компактное многообразие рода g ($g = 0$, $\Phi = S^2 = \mathbb{C}P^1$; $g = 1$, $\Phi = T^2$ — двумерный тор), т. е. риманова поверхность, такое отображение существует только если $\Phi = \mathbb{C}P^1$. (Этот случай рассмотрен в работе Белавина и Полякова [28]). Отображение с топологическим зарядом $Q = k$ зависит здесь от $4k$ вещественных параметров.

Такое отображение существует, однако, если $\Phi = \mathbb{C}P^n$ — комплексное проективное пространство (этот случай подробно рассмотрен в следующем разделе).

Рассмотрим теперь важный класс кэлеровых многообразий, для которых голоморфные отображения $\mathbb{C}P^1 \to \Phi$ существуют. К этому случаю относятся односвязные компактные однородные кэлеровы многообразия. Из работы [102] следует, что все из них имеют вид G/H, где G — компактная связная полупростая группа Ли с тривиальным центром, H — централизатор некоторого тора в G. Нетрудно видеть, что эти пространства можно рассматривать как орбиты присоединенного представления компактной полупростой группы Ли G в алгебре Ли $\mathcal{G}$ этой группы. Все эти пространства являются не только алгебраическими, но также и рациональными [105] *).

В этом случае известно также, что на Φ действует транзитивно не только вещественная группа G, но также соответствующая ей комплексная группа G^c. Поэтому многообразие Φ можно также представить в виде $\Phi = G/H = G^c/P$, где P — параболическая подгруппа, т. е. подгруппа G^c,

*) Многообразие M^n называется рациональным, если поле мероморфных функций на нем изоморфно полю мероморфных функций от n комплексных переменных. Например, двумерная сфера $S^2 \sim \mathbb{C}P^1$ является рациональным многообразием, а двумерный тор $S^1 \times S^1$ является кэлеровым, но нерациональным многообразием.

содержащая максимальную связную разрешимую подгруппу. Здесь $H = P \cap G$.

Известно [104], что любая такая подгруппа строится каноническим образом по подсистеме I простых корней алгебры Ли группы G^c.

Пусть R_I — подсистема положительных корней, состоящая из линейных комбинаций элементов I. Пусть G_I, подгруппа G, генерируемая H и подгруппами

$$N_\gamma = \{\exp(tE_\gamma):\ t \in \mathbb{C}\} \quad \text{для} \quad \gamma \in R_I \cup \{-R_I\}, \quad P_I = G_I \cdot N_I.$$

Как известно, любая параболическая подгруппа сопряжена в G^c одной из таких подгрупп.

Приведем здесь конструкцию инвариантных кэлеровых метрик, данную А. Борелем [102]. Они строятся с помощью левоинвариантных форм, так называемых форм Маурера — Картана [98].

Рассмотрим простейший случай $\Phi = G/T$, T — максимальный тор: $T = S^1 \times \ldots \times S^1$ (r раз, r — ранг группы G). Пусть ω^α — левоинвариантные формы Маурера — Картана, которые индуцируют на алгебре Ли базис, дуальный к базису векторных полей X_α и которые ортогональны к H^c. Используя уравнения Маурера — Картана и хорошо известные свойства структурных постоянных, можно показать, что форма

$$\omega = \frac{i}{2} \sum_{\alpha \in R_+} c_\alpha \omega^\alpha \Lambda \omega^{-\alpha} \tag{2.49}$$

является замкнутой, если и только если

$$c_\alpha + c_\beta = c_\gamma \quad \text{для} \quad \alpha + \beta = \gamma. \tag{2.50}$$

Поэтому форма ω определяется константами c_α для простых корней α, которые можно считать произвольными: $c_\alpha = (h, \alpha)$. Рассмотрим ограничение этой формы на группу G. Мы получаем при этом форму левоинвариантную относительно G и правоинвариантную относительно T. Поскольку при комплексном сопряжении форма ω^α переходит в форму $\omega^{-\alpha}$, форма ω представляет на G/T форму типа (1.1). Для действительных значений констант c_α эта форма действительна, и можно показать, что соответствующий ей класс действительных когомологий получается из элемента $h \in H^{(1)}(T)$, для которого $(\alpha, h) = c_\alpha$ (α — простые корни) путем трансгрессии. Если h принадлежит внутренности положительной камеры Вейля, то все числа c_α положительны, и метрика

$$ds^2 = \sum_{\alpha \in R_+} c_\alpha \omega^\alpha \bar{\omega}^\alpha \tag{2.51}$$

является кэлеровой метрикой на G/T.

Если, кроме того, $h \in H^{(1)}(T; \mathbb{Z})$, то соответствующая орбита является целочисленной и образ элемента h при трансгрессии дает целочисленный класс когомологий. При этом соответствующая метрика является метрикой Ходжа, а многообразие G/T в силу теоремы Кодаиры алгебраично. Заметим также, что, как показано в работе [105], любая орбита присоединенного представления является рациональным алгебраическим многообразием.

Этот факт особенно важен для нас, поскольку в этом случае существуют голоморфные отображения $\mathbb{C}P^1 \to \Phi = G/H$, отличные от постоянного *), или, что то же самое, нетривиальные инстантонные решения соответствующих киральных теорий.

*) Как указал Ю. И. Манин, это следует из некоторых теорем алгебраической геометрии.

3. SU(N)-ИНВАРИАНТНАЯ КИРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ. СЛУЧАЙ КОМПЛЕКСНОГО ПРОЕКТИВНОГО ПРОСТРАНСТВА $\Phi = \mathbb{C}P^n$ *)

В этом разделе мы изучим специальный случай киральных моделей, рассмотренных в предыдущем разделе. Именно рассмотрим случай, когда Φ — наиболее вырожденная орбита (орбита наименьшей размерности) присоединенного представления группы $G = \mathrm{SU}(N)$. Известно, что эта орбита является однородным пространством $\Phi = G/H = \mathbb{C}P^n$ (т. е. комплексным проективным пространством размерности n), причем стационарная подгруппа $H = \mathrm{SU}(n) \times \mathrm{U}(1)$, $n = N - 1$. Напомним, что поскольку группа G связна и односвязна, то $\pi_2(G/H) = \pi_1(H)$ и, следовательно,

$$\pi_2(\Phi) = \pi_2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}, \qquad (3.1)$$

где $\mathbb{Z}$ — аддитивная группа целых чисел. Следовательно, полю $\varphi(x)$ можно приписать топологический заряд, если оно таково, что существует его предел φ_0 при $|x| \to \infty$. Как уже отмечалось в разделе 2, мы можем считать, что $\varphi \in \mathcal{G}$, т. е. в данном случае $\varphi(x)$ является эрмитовой $(n+1) \times (n+1)$ матрицей с нулевым следом и собственными значениями

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{\lambda}{n+1}, \quad \lambda_{n+1} = \frac{\lambda n}{n+1}, \qquad (3.2)$$

причем без ограничения общности мы можем положить $\lambda = 1$. Нетрудно видеть, что такое $\varphi(x)$ можно записать в виде

$$\varphi(x) = (n+1)^{-1} I - u \otimes \bar{u}, \qquad (3.3)$$

где I — единичная матрица, а

$$(u \otimes \bar{u})_{\alpha\beta} = u_\alpha \bar{u}_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, (n+1),$$
$$|u|^2 = (\bar{u}u) = \sum_\alpha \bar{u}_\alpha u_\alpha = 1.$$

Следовательно, поле $\varphi(x)$ определено (с точностью до умножения на фазовый множитель $\exp(i(\alpha(x)))$ единичным комплексным $(n+1)$-мерным вектором u. Теперь, используя (3.3) нетрудно показать, что

$$\frac{1}{2} \operatorname{tr}(\partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi) = (\partial_\mu \bar{u}, \partial_\mu u) - (\bar{u}, \partial_\mu u)(u, \partial_\mu \bar{u}) \qquad (3.4)$$

и

$$\operatorname{tr}([\varphi, \partial_\mu \varphi], [\varphi, \partial_\mu \varphi]) = -\operatorname{tr}(\partial_\mu \varphi, \partial_\mu \varphi). \qquad (3.5)$$

Поэтому мы можем задать действие S в виде

$$S = \frac{1}{2} \int d^2x \operatorname{tr}(\partial_\mu \varphi, \partial_\mu \varphi) = \int d^2x \{(\partial_\mu \bar{u}, \partial_\mu u) - (\bar{u}, \partial_\mu u)(u, \partial_\mu \bar{u})\}. \qquad (3.6)$$

Мы видим, что действие, определенное формулой (3.6), отличается от действия для обычного $\mathbf{n}$-поля (1.3) наличием дополнительного члена. Заметим, что это слагаемое необходимо для того, чтобы действие (3.6) было калибровочно инвариантным — не менялось при замене $u \to \exp(i\alpha(x))\, u$.

Калибровочная инвариантность становится очевидной, если перейти в (3.6) от обычной производной ∂_μ к ковариантной производной

$$D_\mu = \partial_\mu - A_\mu = \partial_\mu - \bar{u}\partial_\mu u, \qquad A_\mu = \bar{u}\partial_\mu u = -\bar{A}_\mu. \qquad (3.7)$$

*) Специальный случай $n = 1$ был изучен Белавиным и Поляковым [28]; см. раздел I. Псевдоевклидов случай рассмотрен в работе Захарова и Михайлова [35]. Евклидов случай рассматривался в работах [39,41–43]. Здесь мы следуем работе [39].

Тогда выражение (3.6) для действия можно переписать в виде

$$S = \int d^2x \mathscr{L} = \int d^2x (\overline{D_\mu u}, D_\mu u). \tag{3.8}$$

Уравнения движения, следующие из условия $\delta S = 0$, имеют вид

$$D_\mu D_\mu u + (\overline{D_\mu u}, D_\mu u) u = 0. \tag{3.9}$$

Переходя, как и прежде, к новым переменным

$$z = x_1 + ix_2, \quad \bar{z} = x_1 - ix_2,$$

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2),$$

$$A_z = \bar{u}\,\partial u = \frac{1}{2}(A_1 - iA_2), \quad A_{\bar{z}} = \bar{u}\,\bar{\partial} u = \frac{1}{2}(A_1 + iA_2),$$

$$D_z = \partial - A_z, \quad D_{\bar{z}} = \bar{\partial} - A_{\bar{z}}, \tag{3.10}$$

мы получаем

$$\mathscr{L} = 2\,[(\overline{D_z u}, D_z u) + (\overline{D_{\bar{z}} u}, D_{\bar{z}} u)], \tag{3.11}$$

$$(D_z D_{\bar{z}} + D_{\bar{z}} D_z) u + \frac{1}{2} \mathscr{L} u = 0. \tag{3.12}$$

Другое важное отличие $\mathbb{C}P^n$-модели от модели n-поля в N-мерном пространстве состоит в том, что рассматриваемая модель всегда является топологически нетривиальной и инстантонные решения в ней существуют всегда, тогда как SO (N)-инвариантная модель n-поля топологически нетривиальна лишь при $N = 3$.

Для плотности топологического заряда нетрудно получить выражение

$$q = \mathrm{tr}\,(\varphi\,[\partial_1\varphi, \partial_2\varphi]) = (\partial_1 u, \partial_2 u) - (\partial_2 u, \partial_1 u) = \\ = (\overline{D_1 u}, D_2 u) - (\overline{D_2 u}, D_1 u) \tag{3.13}$$

или

$$\frac{1}{2} q = [D_z, D_{\bar{z}}] = (\overline{D_z u}, D_z u) - (\overline{D_{\bar{z}} u}, D_{\bar{z}} u). \tag{3.14}$$

Следовательно,

$$Q = c^{-1} \int \varepsilon_{\mu\nu} (\partial_\mu \bar{u}, \partial_\nu u)\, d^2x = c^{-1} \int \varepsilon_{\mu\nu} (\overline{D_\mu u}, D_\nu u)\, d^2x. \tag{3.15}$$

Заметим, что с помощью (3.14) «уравнения движения» (3.12) можно переписать в виде

$$D_z D_{\bar{z}} u + \mathscr{L}_{\bar{z}} u = 0, \tag{3.12$'$}$$

или

$$D_{\bar{z}} D_z u + \mathscr{L}_z u = 0, \tag{3.12$''$}$$

где

$$\mathscr{L}_z = \frac{1}{4}(\mathscr{L} + q) = (\overline{D_z u}, D_z u), \quad \mathscr{L}_{\bar{z}} = \frac{1}{4}(\mathscr{L} - q) = (\overline{D_{\bar{z}} u}, D_{\bar{z}} u).$$

Образуем теперь эрмитовы матрицы

$$\Psi_\mu^{\pm} = \partial_\mu \varphi \mp i\varepsilon_{\mu\nu} [\varphi, \partial_\nu \varphi]. \tag{3.16}$$

Из рассмотрения очевидного неравенства

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr}(\Psi_{\mu}^{\pm}, \Psi_{\mu}^{\pm}) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(\partial_\mu\varphi\partial_\mu\varphi) -$$

$$-\frac{1}{2}\operatorname{tr}([\varphi, \partial_\mu\varphi][\varphi, \partial_\mu\varphi]) \mp i\operatorname{tr}(\partial_\mu\varphi[\varphi, \partial_\nu\varphi])\varepsilon_{\mu\nu} \geqslant 0, \tag{3.17}$$

получаем

$$S \geqslant c\,|Q|. \tag{3.18}$$

Неравенство (3.17) превращается в равенство лишь для полей, удовлетворяющих «уравнениям дуальности»

$$\partial_\mu\varphi = \pm i\varepsilon_{\mu\nu}[\varphi, \partial_\nu\varphi], \tag{3.19}$$

которые в переменных u принимают вид

$$\partial u = \mp(u, \partial\bar{u})\,u, \quad \bar\partial u = \pm(\bar{u}, \bar\partial u)\,u \tag{3.20}$$

или

$$D_z u = 0, \quad D_{\bar z} u = 0. \tag{3.21}$$

Для того чтобы найти решения уравнений (3.20), перейдем от переменных $(u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1})$ к новым переменным $(w_1, w_2, \ldots, w_n, u_{n+1})$ согласно формуле *)

$$(u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}) = (u_{n+1}w_1, \ldots, u_{n+1}w_n, u_{n+1}). \tag{3.22}$$

Отсюда

$$|u_0|^2 = (1 + |w|^2) = 1.$$

Следовательно, последнее из уравнений (3.20) можно записать в виде

$$\partial u_{n+1} = (\bar{u}\,\partial u)\,u_{n+1}. \tag{3.23}$$

С помощью этого уравнения мы можем переписать остальные уравнения в виде

$$\partial w_\gamma = 0 \quad (\text{или}\ \ \bar\partial w_\gamma = 0), \qquad \gamma = 1, \ldots, n. \tag{3.24}$$

Таким образом, уравнения дуальности приведены к виду уравнений Коши — Римана, что для специального случая $\Phi = S^2 = CP^1$ было впервые сделано Белавиным и Поляковым[28]. Следовательно, решение уравнений имеет вид $w_\gamma = f_\gamma(z)$. Однако мы должны также удовлетворить условию $\varphi(x) \to \varphi_0$ при $|x| \to \infty$. Поскольку пространство $\Phi = CP^n$ является однородным, мы можем взять в качестве φ_0 любую точку CP^n, например точку с координатами $w_\gamma = 1$. В этом частном случае наше условие принимает вид $f_\gamma \to 1$ при $|z| \to \infty$. Следовательно, мы можем считать, что $f_\gamma(z)$ — рациональные функции и, приводя их к общему знаменателю, получим

$$w_\gamma = f_\gamma(z) = \frac{Q_k^\gamma(z)}{P_k(z)} = \left[\prod_{j=1}^{k}(z - a_j^0)\right]^{-1}\prod_{j=1}^{k}(z - a_j^\gamma). \tag{3.25}$$

Таким образом, инстантонное решение в SU (N)-инвариантной киральной модели зависит от $2Nk$ вещественных параметров, причем такому решению соответствует топологический заряд

$$Q = k, \tag{3.26}$$

и, следовательно, каждый инстантон характеризуется $2N$ параметрами.

*) Координаты w_α и есть те координаты, в которых инвариантная метрика на CP^n принимает кэлеров вид.

Приведем выражения для действия и топологического заряда в координатах w_γ:

$$S = \int d^2x \, [\delta_{\beta\alpha}(1+|w|^2) - \bar{w}_\alpha w_\beta] \, \frac{\partial w_\alpha \bar{\partial} \bar{w}_\beta + \bar{\partial} w_\alpha \partial \bar{w}_\beta}{(1+|w|^2)^2}, \tag{3.27}$$

$$Q = c^{-1} \int d^2x \, [\delta_{\beta\alpha}(1+|w|^2) - \bar{w}_\alpha w_\beta] \, \frac{\partial w_\alpha \bar{\partial} \bar{w}_\beta - \bar{\partial} w_\alpha \partial \bar{w}_\beta}{(1+|w|^2)^2}. \tag{3.28}$$

Отметим, что оба эти выражения определяются инвариантной кэлеровой структурой для $\Phi = \mathbb{C}P^n$.

Возвращаясь от переменных w_γ к переменным u_α ($\alpha = 1, \ldots, N$), приходим к выводу, что наиболее общее инстантонное решение имеет вид

$$u_\alpha = \frac{P_\alpha(z)}{|P_\alpha|}, \quad \alpha = 1, \ldots, N, \tag{3.29}$$

где $P_\alpha(z)$ — полиномы по z, не имеющие общих корней:

$$|P_\alpha| = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{N} |P_\alpha|^2}. \tag{3.30}$$

Инстантонные решения (3.29) являются решениями «уравнений движения» (3.9) (или (3.12), (3.12′), (3.12″)) с конечным действием (3.8).

Возникает естественный вопрос об описании всех решений «уравнений движения» с конечным действием.

Для обычной модели n-поля ($\Phi = \mathbb{C}P^1$) нетрудно показать, что инстантонные и антиинстантонные решения исчерпывают все решения с конечным действием. Для случая $\mathbb{C}P^n$-модели с $n \geqslant 2$ это уже не так: существуют решения с конечным действием, не сводящиеся к инстантонным и антиинстантонным [75]. А именно, в работах [75,76] было замечено, что такие решения могут быть получены из известных решений SO (N) — инвариантной модели вещественного n-поля. Для нахождения же решений модели n-поля в [79] был использован математический аппарат, развитый ранее в работе [80].

Следует, однако, отметить, что в модели вещественного n-поля ситуация является более сложной по сравнению с $\mathbb{C}P^n$-моделью, поскольку в модели n-поля требуется выполнение ряда дополнительных условий и потому для нахождения общего решения в SO (N) — инвариантной киральной модели (N — нечетное) в [79] была указана лишь рекуррентная процедура.

Используя технику работ [80,79] в [76-78], удалось получить явные выражения для общего решения $\mathbb{C}P^n$-модели с конечным действием без каких-либо дополнительных ограничений.

Мы приведем эти результаты, следуя работам [76,77].

Явный вид общего решения $\mathbb{C}P^n$-модели с конечным действием

Пусть $u(z, \bar{z})$ — решение «уравнений движения» $\mathbb{C}P^n$-модели (3.12) с конечным действием. Для инстантонных (антиинстантонных) решений вектор u удовлетворяет уравнению $D_{\bar{z}} u = 0$ (или $D_z u = 0$). Естественно поэтому рассматривать две последовательности векторов

$$D_{\bar{z}} u, \; D_{\bar{z}}^2 u, \ldots \tag{3.31}$$

и

$$D_z u, \; D_z^2 u, \ldots$$

Оказывается, что векторы этих двух последовательностей ортогональны вектору u и друг другу. А именно,

$$A^m_{j,k} = (\overline{D^j_{\bar z} u},\ D^k_z u) = 0 \quad \text{при} \quad m = j + k \geqslant 1. \tag{3.32}$$

Очевидно, что $A^1_{0,1} = A^1_{1,0} = 0$, и нетрудно показать, что $A^2_{1,1} = 0$.

Предположим теперь, что величины $A^1_{j,k}$, $A^2_{j,k}$, ..., $A^m_{j,k}$ равны нулю. Тогда, используя тождество

$$\partial(\bar a,\ b) = (\overline{D_{\bar z} a},\ b) + (\bar a,\ D_z b), \tag{3.33}$$

получим

$$A^{m+1}_{i+1,j} = (\overline{D^{i+1}_{\bar z} u},\ D^j_z u) = \partial(\overline{D^i_{\bar z} u},\ D^j_z u) - (\overline{D^i_{\bar z} u},\ D^{j+1}_z u) = -A^{m+1}_{i,j+1}. \tag{3.34}$$

Поэтому достаточно убедиться в том, что

$$A^{m+1}_{0,m+1} = 0. \tag{3.35}$$

Доказательство этого факта сводится к доказательству аналитичности величины $A^{m+1}_{0,m+1}$ и использованию варианта теоремы Лиувилля с учетом неравенства

$$|A^{m+1}_{0,m+1}|^2 \leqslant |D^{m+1}_z u|^2. \tag{3.36}$$

Итак, пусть $u(z, \bar z)$ — решение уравнений движения (3.12) с конечным действием. Обозначим через H_k и H'_m подпространства, натянутые на векторы $D_{\bar z} u$, $D^2_{\bar z} u$, ... и $D_z u$, $D^2_z u$, соответственно; здесь k и m — размерности пространств H_k и H'_m. Эти пространства ортогональны друг другу ($H_k \perp H'_m$) и ортогональны вектору u.

Очевидно, что

$$k + m \leqslant n \tag{3.37}$$

и для решения общего вида здесь достигается знак равенства (за исключением, быть может, отдельных точек).

Можно показать также, что первые k векторов $D_{\bar z} u$, $D^2_{\bar z} u$, ..., $D^k_{\bar z} u$ образуют базис в пространстве H_k и, соответственно векторы $D_z u$, $D^2_z u$, ..., $D^m_z u$ — базис в пространстве H'_m.

Пусть $u(z, \bar z)$ — решение уравнений (3.12), не являющееся инстантонным. Тогда $k \geqslant 1$. Оказывается, что в пространстве $\hat H_k = \{u, H_k\}$ существует голоморфный вектор $f = (f_1, \ldots, f_n)$, т. е. вектор, удовлетворяющий уравнению $\bar\partial f = 0$, причем этот вектор можно выбрать так, чтобы он удовлетворял условию

$$(\bar f,\ D^j_{\bar z} u) = \omega \delta_{jk}, \qquad j = 0, 1, \ldots, k, \tag{3.38}$$

где ω — некоторая функция. Доказательство этого утверждения мы не приводим, его можно найти в [77]. Можно показать также, что компоненты вектора f являются рациональными функциями z и что точки плоскости z, для которых f сингулярен, соответствуют случаю $k + m < n$.

Можно доказать также, что

$$(\overline{\partial^l f},\ D^j_{\bar z} u) = (-1)^l \omega \delta^{j+l,k}, \quad 0 \leqslant j + l \leqslant k. \tag{3.39}$$

Таким образом, векторы f, ∂f, ..., $\partial^k f$ образуют базис в пространстве $\hat H_k$, дуальный базису u, $D_{\bar z} u$, ..., $D^k_{\bar z} u$.

В работе [76] было найдено явное выражение для разложения вектора u по базису f, ∂f, ..., $\partial^k f$. Оно имеет вид

$$u = \frac{v}{|v|}, \tag{3.40}$$

где

$$v=(-1)^k\left[\partial^k f-\sum_{j=0}^{k-1}\left(\sum_{l=0}^{k-1}(M^{-1})_{jl}\,\partial M_{l,\,k-1}\right)\partial^j f\right], \tag{3.41}$$

а M_{jl} — матрица порядка k

$$M_{lj}=(\overline{\partial^l f},\ \partial^j f),\qquad j,\ l=0,\ \ldots,\ k-1. \tag{3.42}$$

Эта матрица является положительно определенной и обратимой.

Заметим, что при этом

$$\omega=|v|, \tag{3.43}$$

и что векторное пространство $\hat{H}'_m$, натянуто на векторы f, ∂f, ..., $\partial^m f$.

Можно показать также [76], что для произвольного рационального аналитического вектора $f=f(z)$ в $(n+1)$-мерном комплексном пространстве, такого, что векторы f, ∂f, ..., $\partial^n f$ линейно независимы (за исключением отдельных точек, включая бесконечно удаленную точку) и для любого целого числа k, такого что $0\leqslant k\leqslant n$, вектор $u\,(z,\bar z)$, определенный по формулам (3.40) — (3.42), действительно является решением уравнений (3.12) и действие S для этого решения конечно.

Рассмотрим простейший нетривиальный случай — случай $\mathbb{C}P^2$ модели. Здесь решения с $k=0$, $m=2$ ($k=2$, $m=0$) соответствуют инстантонным (антиинстантонным) решениям. Случай $k=1$, $m=1$ соответствует решениям, не являющимся ни инстантонными, ни антиинстантонными. В этом случае

$$f=(f_1(z),\ f_2(z),\ f_3(z)),$$

$$u=\frac{v}{|v|},\quad v=-(\partial f-|f|^{-2}(\bar f,\ \partial f)\cdot f). \tag{3.44}$$

Пусть

$$f=(1,\ z,\ z^2). \tag{3.45}$$

Тогда

$$u=\frac{(\bar z(1+2|z|^2),\ |z|^4-1,\ -z(2+|z|^2))}{(1+4|z|^2+6|z|^4+5|z|^6+|z|^8)^{1/2}}. \tag{3.46}$$

При $|z|\to\infty$, $u\to(0,\ 1,\ 0)$ и, следовательно, это решение соответствует топологическому заряду $Q=0$.

4. SU($n+m$)-ИНВАРИАНТНАЯ КИРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ. СЛУЧАЙ КОМПЛЕКСНОГО МНОГООБРАЗИЯ ГРАССМАНА: $\Phi=G_{m,n}$*)

В этом разделе мы рассмотрим другую SU (N)-инвариантную модель, а именно тот случай, когда поле $\varphi(x)$ принимает значения в комплексном многообразии Грассмана $G_{m,n}$.

Пространство $G_{m,n}$ можно рассматривать как пространство m-мерных (или n-мерных) гиперплоскостей в $(n+m)$-мерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^{m+n}$. Эти пространства являются естественным обобщением комплексного проективного пространства $\mathbb{C}P^n$, рассмотренного в предыдущем разделе; пространство $\mathbb{C}P^n$ соответствует случаю $m=1$.

Точку этого пространства можно рассматривать как набор m векторов $\{u_\alpha\}$ в $(n+m)$-мерном комплексном пространстве, при условии, что два таких набора $\{u_\alpha\}$ и $\{\tilde u_\beta\}$ мы считаем эквивалентными, если они связаны преобразованием из группы: $U(m)$: $\tilde u_\alpha=g_{\alpha\beta}u_\beta$, $g\in U(m)$.

*) Для псевдоевклидового случая такая модель была впервые рассмотрена в работе [35]. Относительно евклидового случая смотри работы [39,40,42].

Иными словами, мы можем рассматривать точку этого пространства как прямоугольную матрицу U с m столбцами и $(m+n)$ строками, причем матрица u должна удовлетворять условию

$$u^+u = I^{(m)} \quad \text{или} \quad u_\alpha^j \bar{u}_\alpha^k = \delta_{jk}, \qquad \alpha = 1, \ldots, m+n; \quad j,\ k = 1, \ldots, m, \tag{4.1}$$

где $I^{(m)}$ — единичная матрица порядка m.

С другой стороны, поле $\varphi(x)$ можно рассматривать как поле, принимающее значения в алгебре Ли $\mathcal{G}$ группы G, т. е. считать $\varphi(x)$ эрмитовой матрицей порядка $(n+m)$ с нулевым следом и собственными значениями

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \frac{\lambda m}{m+n}, \quad \lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_{n+m} = -\frac{\lambda n}{m+n}. \tag{4.2}$$

При этом без потери общности мы можем предположить, что $\lambda = 1$. Нетрудно доказать, что $\varphi(x)$ имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{m}{m+n} I - uu^+, \quad \varphi_{\alpha\beta} = \frac{m}{m+n}\delta_{\alpha\beta} - u_\alpha^j \bar{u}_\beta^j. \tag{4.3}$$

Заметим, что матрица

$$P = uu^+ \tag{4.4}$$

удовлетворяет условию

$$P^2 = P \tag{4.5}$$

(т. е. эта матрица является проекционным оператором), а матрица

$$g = I - 2P, \quad g^+ = g \tag{4.6}$$

удовлетворяет условию

$$g^+g = g^2 = I^{(m+n)}. \tag{4.7}$$

Поэтому матрицу g можно рассматривать как элемент группы $G = \mathrm{SU}(m+n)$. Таким образом, в грассмановом случае мы можем рассматривать киральное поле как элемент группы G, удовлетворяющий (1) условию

$$g^+ = g \tag{4.8}$$

и (2) условию, что n собственных значений матрицы g равны $+1$, а остальные собственные значения равны -1. Следовательно, произвольный элемент нашего пространства можно получить из элемента

$$g_0 = \mathrm{diag}\,(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1) \tag{4.9}$$

с помощью действия группы *) G.

Заметим, что на рассматриваемом пространстве $G_{m,n}$ существует единственная (с точностью до постоянного множителя) $\mathrm{SU}(m+n)$-инвариантная метрика

$$ds^2 = \mathrm{tr}\,(d\varphi \cdot d\varphi), \tag{4.10}$$

с помощью которой получаем выражение для действия

$$S^2 = \frac{1}{2}\int d^2x\, \mathrm{tr}\,(\partial_\mu\varphi \cdot \partial_\mu\varphi) \tag{4.11}$$

*) Аналогичное утверждение справедливо и для ряда других однородных пространств (именно для так называемых симметрических пространств [63]). Детали см. в работах [49,50,70].

Подставляя в эту формулу выражение φ через u (согласно формуле (4.3)), получаем

$$S = \int d^2x \operatorname{tr} \{(\partial_\mu u^+ \partial_\mu u) - (u^+\partial_\mu u \cdot \partial_\mu u^+ u)\}. \tag{4.12}$$

Дадим иную формулировку этой модели. Введем эрмитовы матрицы A_μ ($\mu = 1, 2$) порядка m:

$$A_\mu = \frac{i}{2} [(u^+\partial_\mu u) - (\partial_\mu u^+ u)] = iu^+\partial_\mu u. \tag{4.13}$$

Нетрудно видеть, что при преобразовании

$$u \to u' = u \cdot \exp(i\alpha(x)), \tag{4.14}$$

где α — эрмитова матрица порядка m, поле A_μ преобразуется как калибровочное поле относительно группы $U(m)$:

$$A_\mu \to A'_\mu - \partial_\mu \alpha, \quad A'_\mu = \exp(-i\alpha) A_\mu \exp(i\alpha). \tag{4.15}$$

Удобно ввести ковариантную производную

$$D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu. \tag{4.16}$$

Тогда выражение (4.12) можно переписать в виде

$$S = \int d^2x \operatorname{tr} ((D_\mu u)^+ D_\mu u), \tag{4.17}$$

где

$$\begin{aligned} D_\mu u &= \partial_\mu u + iuA_\mu, \\ (D_\mu u)^+ &= \partial_\mu u^+ - iA_\mu u^+. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Заметим, что второе слагаемое в (4.12) необходимо для того, чтобы действие S было инвариантно относительно группы $U(m)$. Таким образом, рассматриваемая теория является глобально $SU(m + n)$-инвариантной и калибровочно $SU(m)$-инвариантной.

$G_{m,n}$-модель, так же как и $\mathbb{C}P^n$-модель, является топологически нетривиальной: вторая гомотопическая группа $\pi_2(\Phi) = \pi_2(G_{mn}) = \mathbb{Z}$. Поэтому поле $\varphi(x)$ можно охарактеризоватъ одним целым числом — топологическим зарядом.

Согласно общей формуле (2.30) для топологического заряда справедливо интегральное представление

$$Q = c^{-1} \int d^2x (\varphi, [\partial_\mu \varphi, \partial_\nu \varphi]) \varepsilon_{\mu,\nu}. \tag{4.19}$$

Подставляя сюда выражение (4.3) для φ, получаем

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \{\operatorname{tr}(\partial_\mu u \partial_\nu u^+) \varepsilon_{\mu\nu}\}, \qquad \nu, \mu = 1, 2 \tag{4.20}$$

или

$$Q = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \varepsilon_{\mu\nu} \operatorname{tr}(\partial_\mu A_\nu). \tag{4.21}$$

Теперь перейдем к нахождению инстантонных решений. Образуем эрмитовы матрицы порядка $(m + n)$

$$\psi^\pm_\mu = \partial_\mu \varphi \mp i\varepsilon_{\mu\nu} [\varphi, \partial_\nu \varphi]. \tag{4.22}$$

Из очевидного неравенства

$$\operatorname{tr}(\psi^\pm \psi^\pm) \geqslant 0 \tag{4.23}$$

следует, что

$$S \geqslant c\,|\,Q\,|. \tag{4.24}$$

Это неравенство превращается в равенство лишь для полей, удовлетворяющих уравнениям дуальности

$$\partial_\mu \varphi = \pm i\varepsilon_{\mu\nu} [\varphi, \partial_\nu \varphi], \tag{4.25}$$

которые можно переписать в ином виде

$$D_\mu u = \pm \varepsilon_{\mu\nu} D_\nu u \tag{4.26}$$

или

$$\partial u = \pm u (u^+ \partial u), \quad \bar\partial u = \mp u (u^+ \bar\partial u), \tag{4.27}$$

где

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2), \quad \bar\partial = \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2).$$

Для нахождения решений уравнений (4.27) произведем замену переменных: перейдем от переменных u^j_α ($j = 1, \ldots, m$; $\alpha = 1, 2, \ldots, (m+n)$) к новым переменным w^j_a *) ($j = 1, \ldots, m$; $a = 1, \ldots, n$):

$$w^j_a = u^k_a (u^{(0)-1})^j_k, \tag{4.28}$$

где $u^{(0)}$ — матрица порядка m

$$(u^{(0)})^j_k = u^j_{n+k}, \quad j, k = 1, \ldots, m. \tag{4.29}$$

Из уравнений (4.27) следует, что

$$\partial w^j_a = 0 \quad (\text{или } \bar\partial w^j_a = 0), \quad j = 1, \ldots, m, \; a = 1, \ldots, n. \tag{4.30}$$

Поэтому величины w^j_a являются рациональными функциями переменной z (или $\bar z$) и, кроме того, мы можем считать (также как в предыдущем разделе), что при $|z| \to \infty$ $w^j_a(z) \to 1$. Приводя выражения для w^j_a к общему знаменателю, получаем

$$w^j_a = f^j_a(z) = \frac{Q^{j,a}_k(z)}{P_k(z)} = \prod_{l=1}^{k} (z - a^{ja}_l) \left[\prod_{l=1}^{k} (z - a_l)\right]^{-1},$$
$$j = 1, \ldots, m, \quad a = 1, \ldots, n. \tag{4.31}$$

Таким образом, инстантонное (антиинстантонное) решение для SU $(n+m)$-инвариантной грассмановой киральной модели зависит от $2(m \cdot n + 1)k$ вещественных параметров. Топологический заряд, соответствующий этому решению

$$Q = k. \tag{4.32}$$

Следовательно, каждый инстантон (антиинстантон) характеризуется $2(mn+1)$ вещественными параметрами.

Приведем еще выражения для действия и топологического заряда в координатах w^j_a

$$S = \int d^2x \, (h^{j\bar k}_{a\bar b} \partial_\mu w^j_a \partial_\mu \bar w^k_b), \tag{4.33}$$

$$Q = c^{-1} \int d^2x \, (h^{j\bar k}_{a\bar b} \partial_\mu w^j_a \partial_\nu \bar w^k_b) \, \varepsilon_{\mu\nu}, \tag{4.34}$$

---

*) Координаты w^j_a являются координатами, в которых инвариантная метрика на $G_{m,n}$ является кэлеровой метрикой.

где

$$|w|^2=\sum_{j,\,a}|w_a^j|^2=\mathrm{tr}\,(ww^+),$$
$$h_{a\bar b}^{j\bar k}=\frac{\partial^2 F}{\partial w_a^j\,\partial \bar w_j^k},\qquad F=\ln\det\,(I+ww^+) \tag{4.35}$$

В заключение раздела отметим, что в рассматриваемой грассмановой модели, как и в $\mathbb{C}P^n$-модели, помимо инстантонных и антиинстантонных решений существуют и другие решения с конечным действием. Описание их представляет более сложную задачу по сравнению с $\mathbb{C}P^n$-моделью, которой мы здесь заниматься не будем (см. по этому поводу работу [78]).

Институт теоретической и экспериментальной физики,
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Gardner C S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M.— Phys. Rev. Lett., **1967**, v. 19, p. 1095.
2. Lax P.— Comm. Pure and Appl. Math., **1968**, v. 21, p. 467.
3. Захаров В. Е., Манаков С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.
4. Solitons.— Berlin; Heidelber; New York: Springer-Verlag, 1980. (Topics in Current Physics. V. 17).
5. 'tHooft G.— Nucl. Phys. Ser. B, **1974**, v. 79, p. 276.
6. Поляков А. М.— Письма ЖЭТФ, **1974**, т. 20, с. 430; ЖЭТФ, **1975**, т. 68, с. 1975.
7. Goddard P., Olive D.— Rept. Progr. Phys., **1978**, v. 41, p. 1357.
8. Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tuypkin Yu.— Phys. Lett., Ser. B, **1975**, v. 59, p. 85.
9. Witten E.— Phys. Rev. Lett., **1977**, v. 38, p. 121.
10. Yang C. N.— Ibid., p. 1377.
11. Atiyah M. F., Drinfeld V. G., Hitchin N. J., Manin Yu. I.— Phys. Lett. Ser. A, **1978**, v. 65, p. 185.
12. Belavin A. A., Zakharov V. E.— Ibid., **1978**, v. 73, p. 53.
13. Atiyah M. F., Ward R. S.— Comm. Math. Phys., **1977**, v. 55, p. 117.
14. Drinfeld V. G., Manin Yu. I.— Ibid., **1978**, v. 63, p. 177.
15. Actor A.— Rev. Mod. Phys., **1979**, v. 51, p. 461.
16. Prasad M. K.— Physica Ser. D, **1980**, v. 1, p. 167.
17. Atiyah M. F. Geometry of Yang-Mills Fields. — In: Lezione Fermiani,— Pisa, 1979.
18. Gibbons G. W., Hawking S. W.— Phys. Rev. Ser. D, **1977**, v. 15, p. 2752.
19. Eguchi T., Hanson A.— Phys. Lett. Ser. B, **1978**, v. 74, p. 249.
20. Gibbons G. W., Hawking S. W.— Ibid., **1978**, v. 78, p. 430.
21. Gibbons G. W., Hawking S. W., Perry M. J.— Nucl. Phys. Ser. B, **1978**, v. 138, p. 141.
22. Gibbons G. W., Perry M. J.— Ibid., **1978**, v. 146, p. 90.
23. Gibbons G. W., Pope G. N.— Comm. Math. Phys., **1978**, v. 61, p. 239.
24. Hawking S. W.— Phys. Rev. Ser. D, **1978**, v. 18, p. 1747.
25. Белинский В. А., Захаров В. Е.— ЖЭТФ, **1978**, т. 75, с. 1953.
26. Rebbi C.— Sci. American, February 1979, p. 92.
27. Skyrme T. H.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, **1961**, v. 260, p. 127.
28. Белавин А. А., Поляков А. М.— Письма ЖЭТФ, **1975**, т. 22, с. 503.
29. Pohlmeyer K.— Comm. Math. Phys., **1976**, v. 46, p. 207.
30. Lund F., Regge T.— Phys. Rev. Ser. D, **1976**, v. 14, p. 1524. Lund F. — Ibid., 1977, v. 15, p. 1540.
31. Faddeev L. D.— Lett. Math. Phys., **1976**, v. 1, p. 239.
32. Woo G.— J. Math. Phys., **1977**, v. 18, p. 1264.
33. Семенов-Тян-Шанський М. А., Фаддеев Л. Д.— Вестн. ЛГУ, **1977**, № 13, с. 81.
34. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д.— ТМФ, **1971**, т. 8, с. 297.
35. Захаров В. Е., Михайлов А. В.— ЖЭТФ, **1978**, т. 74, с. 1953.
36. Lüscher M., Pohlmeyer K.— Nucl. Phys. Ser. B, **1978**, v. 137, p. 46.
37. Zamolodchikov A. B., Zamolodchikov Al. B.— Ibid. 1978, v. 133, p. 525.
38. Golo V. L., Perelomov A. M.— Lett. Math. Phys., 1978, v. 2, p. 477.

39. Golo V. L., Perelomov A. M.— Phys. Lett., Ser. B, 1978, v. 79, p. 112.
40. Perelomov A. M.— Comm. Math. Phys., 1978, v. 63, p. 237.
41. D'Adda A., Lüscher M., Di Vecchia P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 146, p. 63.
42. Eichenherr H.— Ibid., p. 215; 1979, v. 155, p. 544.
43. Witten E.— Ibid., 1979, v. 149, p. 285.
44. Gross D. J.— Ibid., 1978, v. 132, p. 439.
45. Cremmer E., Scherk J.— Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 74, p. 341.
46. Tataru-Mihai P.— Nuovo Cimento. Ser. A, 1978, v. 47, p. 287.
47. D'Adda A., Di Vecchia P., Lüscher M.— Nucl. Phys. Ser. B, 1979, v. 152, p. 125.
48. D'Adda A., Lüschar M., Di Vecchia P. Gopenhagen preprint NBI-HE 78—13.—1978.
49. Eichenherr H., Forger M.— Nucl. Phys. Ser. B, 1979, v. 155, p. 381.
50. Eichenherr H., Forger M.— Ibid., 1980, v. 164, p. 528.
51. Гетманов Б. С.— Письма ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 132.
52. Будагов А. С., Тахтаджян Л. А.— ДАН СССР, 1977, т. 235, с. 805.
53. De Alfaro V., Fubini S., Furlan G.— Nuovo Cimento. Ser. A, 1958, v. 48, p. 485.
54. Deser S., Duff M. J., Isham C. J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1976, v. 114, p. 29.
55. Tataru-Mihai P.— Nuovo Cimento. Ser. A, 1979, v. 51, p. 169.
56. Вакуленко А. Ф., Капитанский Л. Б.— ДАН СССР, 1979, т. 246, с. 840.
57. Чередник И. В.— ТМФ, 1979, т. 38, с. 179.
58. Gava E., Jengo R., Omero C., Percacci R.— Nucl. Phys. Ser. B, 1979, v. 151, p. 457.
59. Pohlmeyer K., Rehren K.-H.— J. Math. Phys., 1979, v. 20, p. 2628.
60. Eichenherr H., Honerkamp J. Freiburg preprint 79/12.—1979.
61. Golo V. L., Putko B. A.— Lett. Math. Phys., 1980, v. 4, p. 195.
62. Голо В. Л., Путко Б. А.— ТМФ, 1980, т. 45, с. 19.
63. Lukerski J., Preprint TH-2678.— CERN, 1979.
64. Monastyrsky M. I., Perelomov A. M. Preprint ITEP No. 56, Moscow, 1974; Письма ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 94.
65. Тюпкин Ю. С., Фатеев В. А., Шварц А. С.— Ibid., с. 91.
66. Arafune J., Freund P. G. O., Goebel C. J.— J. Math. Phys., 1975, v. 16, p. 435.
67. Фаддеев Л. Д.— В кн. Нелокальные, нелинейные и неренормируемые теории поля.— Дубна: ОИЯИ, 1976. D2-9788.— с. 207.
68. Nielsen N. K., Römer H., Schröer B.— Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 136, p. 475.
69. Isham C. J.— J. Phys. Ser. A, 1977, v. 10, p. 1397.
70. Brezin E., Hikami S., Zinn-Justin J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1980, v. 165, p. 528.
71. Zakharov V. E., Mikhailov A. V.— Comm. Math. Phys., 1980, v. 74, p. 21.
72. Brezin E., Itzykson C., Zinn-Justin J., Zuber J. B.— Phys. Lett. Ser. B, 1979, v. 82, p. 442.
73. Ogielski A. T., Prasad M. K., Sinha A., Wang L.-L. C.— Ibid., 1980, v. 91, p. 387.
74. Gursey F., Tze H. C.— Ann. p. Phys., 1980, v. 128, p. 29.
75. Din A. M., Zakrzewski W. J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1980, v. 168, p. 173.
76. Din A. M., Zakrzewski W. J.— Ibid., 1980, v. 174, p. 397.
77. Din A. M., Zakrewski W. J.— Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 95, p. 419.
78. Glaser V., Stora R. Regular solutions of the CP^n Models and Further Generalizations.— CERN 1980.
79. Borchers M. J., Garber W. D.— Comm. Math. Phys., 1980, v. 72, p. 77.
80. Barbosa J.— Trans. Am. Math. Soc., 1975, v. 210, p. 75.
81. Chadha S., Goldschmidt Y. Y.— Phys. Lett. Ser. B, 1979, v. 84, p. 341.
82. Eichenherr H.— Ibid., 1980, v. 90, p. 121.
83. Rehren K.-H.— Ibid., 1980, v. 93, p. 400.
84. Wang L.-L. C. In: Proc. of the 1980 Gaungzhou Particle Theoretical Physics Conference, January, 1980 (Preprint).
85. Di Vecchia P., Ferrara S.— Nucl. Phys. Ser. B, 1977, v. 130, p. 93.
86. Witten E.— Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 2991.
87. Михайлов А. В.— Письма ЖЭТФ, 1978, т. 28, с. 554.
88. Михайлов А. В., Переломов А. М.— Ibid., 1979, v. 29, с. 445.
89. Zumino B.— Phys. Lett. Ser. B, 1979, v. 87, p. 203.

90. Popowicz Z., Wang L.-L. C. Broohaven National Laboratory preprint.— 1980.
91. Curtright T., Freedman D. Z.— Phys. Lett. Ser. B, 1980, v. 90, p. 71.
92. Alvarez-Gaume L., Freedman D. Z.— Ibid., 1980, v. 94, p. 171.
93. Хелгасон С. Дифференциальная геометрия и симметричные пространства.— М.: Мир, 1964.
94. Behrends R. E., Dreitlein J., Fronsdal C., Lee W.— Rev. Mod. Phys., 1962, v. 34, p. 1.
95. Бишоп Р., Криттенден Р. Геометрия многообразий.— М.: Мир, 1967.
96. Стинрод Н. Топология косых произведений.— М.: ИЛ, 1953.
97. Хьюзмоллер D. Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1970.
98. Чжэнь Ш.-Ш. Комплексные многообразия.— ИЛ, 1961.
99. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия.— М.: Наука, 1979.
100. Кириллов А. А. Элементы теории представлений.— М.: Наука, 1972.
101. Whitehead J. H. C.— Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1947, v. 33, p. 117.
102. Borel A.— Ibid., 1954, v. 40, p. 1147.
103. Chern S. S.— L'Ensgein Math., 1961, t. 7, p. 179.
104. Borel A., Hirzebruch F.— Am. J. Math., 1958, v. 80, p. 459.
105. Goto M.— Am. J. Math., 1954, v. 76, p. 811.
106. Borel A., Remmert R.— Math. Ann., 1962, v. 145, p. 429.