

# УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.126.34

## ПИОН-ПИОННОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

(обзор экспериментальных данных)

К. Н. Мухин, О. О. Патаракин

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	377
2. Методы изучения $\pi\pi$ -взаимодействий . . . . .	379
3. Исследование реакций типа $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ и $\pi N \rightarrow \pi\pi\Delta$ . . . . .	381
4. Описание пионных резонансов . . . . .	389
5. Угловые распределения вторичных пионов . . . . .	393
6. Методика фазового анализа . . . . .	396
7. Особенности изучения $\pi\pi$ -взаимодействия при низких энергиях . . . . .	409
8. Экспериментальные результаты . . . . .	
а) Длины рассеяния (409). б) Область упругого взаимодействия и скалярные резонансы (412). в) Область неупругого взаимодействия. Проблема выбора истинного решения (417).	
9. Заключение . . . . .	421
Цитированная литература . . . . .	423

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Прошло уже более 20 лет с момента появления первых представлений о  $\pi\pi$ -взаимодействии и уже более 15 лет эта проблема весьма активно исследуется теоретиками и экспериментаторами. Однако и сегодня она остается одной из самых популярных и интересных задач физики элементарных частиц. Неослабевающий интерес к  $\pi\pi$ -взаимодействию, по-видимому, связан с сочетанием трех важных факторов: большой распространенностью («вездесущностью»), относительной простотой теоретического описания и нестандартностью методики получения экспериментальной информации.

$\pi\pi$ -рассеяние — одна из разновидностей сильного взаимодействия. Поэтому оно определяющим образом входит в очень широкий круг явлений. В качестве старого классического примера можно вспомнить анализ электромагнитных формфакторов нуклонов, который привел к предсказанию существования векторных пионных резонансов. Как известно, вскоре векторные мезоны были действительно открыты сначала в сильном, а затем и в электромагнитном процессах, и с годами это направление развилось в обширную спектроскопию пионных резонансов. Из примеров более позднего времени напомним о существенном прогрессе в изучении ( $N - N$ )-взаимодействия, который стал возможен благодаря улучшению знаний о  $\pi\pi$ -амплитудах и привлечению понятия дипионного обмена, а также появление представления о новой форме пион-пионного взаимодействия — пионной конденсации.

Из-за отсутствия встречных пионных пучков  $\pi\pi$ -взаимодействие невозможно изучать в прямых экспериментах. Поэтому всю экспериментальную информацию о нем получают косвенными методами — из анализа процессов с образованием  $\pi$ -мезонов в конечном состоянии ( $K$ -распады,  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ -реакции, процессы  $e^+e^- \rightarrow 2\pi$  и  $p\bar{p} \rightarrow 2\pi$  и т. п.). Это обстоятельство в значительной степени определило характер первых теоретических исследований, направленных на получение сведений о  $\pi\pi$ -рассеянии. Здесь прежде всего надо отметить метод Ансельма — Грибова, позволяющий в принципе определять некоторые характеристики пион-пионного рассеяния из рассмотрения различных процессов вблизи порога образования трех частиц в конечном состоянии<sup>1-4</sup> и основополагающую работу Чу и Лоу<sup>5</sup>, в которой был предложен конкретный метод получения сечения  $\pi\pi$ -рассеяния из доступного для прямого измерения сечения реакции  $p\bar{p} \rightarrow \pi\pi N$  (и подобных ей). Подробнее о способах получения информации о  $\pi\pi$ -взаимодействии мы расскажем в гл. 2. Здесь же хотелось бы только подчеркнуть большой вклад, внесенный работами нескольких советских групп, в частности, В. В. Анисовича и др. — по определению фаз  $\pi\pi$ -рассеяния из  $K \rightarrow 3\pi$  распадов<sup>4,6,7</sup>, А. В. Арефьева и др. — по определению длин  $\pi\pi$ -рассеяния<sup>8</sup>, К. Г. Борескова, А. Б. Кайдалова и Л. А. Пономарева — по изучению реджезации  $\pi$ -обмена и описанию на его основе реакций с образованием одного и двух пионов<sup>9-12</sup>. Различные аспекты обсуждаемой темы рассматривались, например, в<sup>13-17</sup>. Подробно и хорошо состояние проблемы на январь 1969 г. изложено в обзоре Г. А. Лексина<sup>18 \*</sup>).

Одной из причин повышенного интереса к изучению  $\pi\pi$ -взаимодействия является его специфичность (рассеяние кванта на кванте). Однако важность изучения  $\pi\pi$ -взаимодействия не ограничивается этой «самоцелью». Из-за отмеченной выше распространенности  $\pi\pi$ -взаимодействия информация о нем необходима для проверки многих теоретических моделей. При этом малость массы и отсутствие спина у пиона, а также полная кроссинг-симметрия  $\pi\pi$ -рассеяния делают процессы типа  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$  весьма чувствительными к теоретическим предположениям. Особую роль реакции  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$  и  $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$  играют в так называемых дуальных моделях. Говоря очень упрощенно, принцип дуальности состоит в том, что по поведению амплитуд при высоких энергиях можно предсказать резонансные состояния при низких энергиях и что в некотором смысле резонансы в  $s$ -канале построены из полюсов Редже в  $t$ -канале. Такая, симметричная по мандельштамовским переменным  $s$ - и  $t$ -амплитуда была введена, например, Венециано<sup>19</sup>. Модель Венециано, как и ряд других дуальных моделей, предсказывает существование новых состояний. Для изучения этих состояний, спектроскопии резонансов, чрезвычайно важно изучение  $\pi\pi$ -взаимодействия. Детальный фазовый анализ  $\pi\pi$ -рассеяния является одним из мощных способов, позволяющих находить новые структуры, изучать их характеристики и проводить сравнение с предсказаниями дуальных моделей.

Уже давно казалась привлекательной мысль о построении моделей, исходя из общих принципов аналитичности, унитарности и кроссинг-симметрии. Ранняя фаза такого подхода была собрана в гипотезе «бутстрапа». В ней свойства адронной динамики строились в предположении о том, что все частицы есть связанные состояния друг друга и предполагалось доминирование далекодействующих сил. В этом подходе центральная роль принадлежала  $\pi\pi$ -взаимодействиям. Впоследствии, с развитием  $SU(3)$ -симметрии и обнаружения ряда структур, к которым гипо-

\*) Пользуясь случаем, выражаем надежду, что читатель знаком с этим обзором и принятой в нем терминологией.

тезу бутстрапа не удастся применить, этот подход был оставлен, но работа по построению моделей из принципов аналитичности, унитарности и кросс-синг-симметрии продолжалась. Наилучшим кандидатом для приложения этих принципов является ( $\pi\pi$ )-система с ее полной кросс-синг-симметрией. В этой области особый прогресс связан с уравнениями Роя, о которых речь пойдет в гл. 7. С их помощью удалось уменьшить неопределенности в  $\pi\pi$ -амплитудах при низких энергиях. Пороговая область представляет особый интерес из-за возможности сравнения с предсказаниями алгебры токов, моделей с нарушенной киральной симметрией и проверки гипотезы частичного сохранения аксиального тока (PCAC). Для всех этих моделей именно  $\pi\pi$ -рассеяние дает решающие экспериментальные данные. Важная информация о  $\pi\pi$ -взаимодействиях и для построения реалистических мультипериферических моделей, успешно развиваемых в настоящее время. Кроме того, в последние годы интерес к этой области исследований возрос в связи с развитием теории  $\pi$ -конденсата и аномального состояния ядерного вещества<sup>20,21</sup>. Оказалось, что для точных расчетов в таких моделях необходимы сведения о  $\pi\pi$ -рассеянии.

Несмотря на то, что  $\pi\pi$ -взаимодействие изучается давно, картина долгое время оставалась неясной. В последние годы был проведен ряд экспериментов, позволяющих существенно уточнить наши знания об этом предмете. В то же время в советской печати с момента опубликования в 1970 г. упомянутого выше обзора Г. А. Лексина редко рассматривались проблемы  $\pi\pi$ -взаимодействия в целом. Поэтому авторы считали необходимым вновь проанализировать пути и методы исследования  $\pi\pi$ -взаимодействия и дать обзор современной экспериментальной ситуации. Во втором разделе кратко описываются основные источники информации о  $\pi\pi$ -рассеянии, проводится сравнение их достоинств и недостатков. В разделах 3—4 анализируется наиболее плодотворный в настоящее время метод исследования — изучение реакций типа  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$  и  $\pi N \rightarrow \pi\pi \Delta$ . Дается краткий обзор существующих моделей, рассматриваются вопросы, связанные с экстраполяцией экспериментальных данных в пионный полюс, обсуждается неоднозначность понятия резонанса. Гл. 5—7 посвящены методике проведения фазового анализа и особенностям изучения  $\pi\pi$ -взаимодействия при низких энергиях. В гл. 8 приведены экспериментальные результаты по фазам и длинам рассеяния, и в заключение подводятся краткие итоги, рассматриваются нерешенные вопросы и обсуждаются возможные пути дальнейших исследований.

Обзор охватывает (хотя и не исчерпывающим образом) материалы, опубликованные до ноября 1979 г.

## 2. МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ $\pi\pi$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Рассмотрим вопрос, что и как можно узнать о  $\pi\pi$ -взаимодействии. В основном интересны интегральная его характеристика — сечение  $\sigma_{\pi\pi}$  и более детальная — парциальные амплитуды, т. е. фазы и параметры упругости. Обычно эти характеристики изучаются как функции дипионной массы  $m_{\pi\pi}$ . Всю область дипионных масс можно условно разделить на три части, различающиеся и по своим проблемам, и по методике изучения. Во-первых, это область низких энергий, или околопороговая область. Здесь основной нерешенный вопрос — каковы значения длин пион-пионного рассеяния. Далее можно выделить область промежуточных энергий,  $500 \leq m_{\pi\pi} < 1800$  МэВ, или резонансную. В ней изучаются параметры пионных резонансов. Третья — это область высоких энергий  $m_{\pi\pi} > 1800$  МэВ. В настоящем обзоре она почти не будет затрагиваться, так как экспериментальные данные для таких масс практически отсутствуют,

а вопросы сшивки результатов фазовых анализов в промежуточной области с теоретическими расчетами в области высоких энергий, например, с теорией реджезованного обмена, выходят за пределы рассматриваемых задач.

В отсутствие встречных пионных пучков и мезонных мишеней информацию о  $\pi\pi$ -взаимодействии можно получать лишь косвенными методами. В принципе потенциальным источником информации может быть любой процесс, включающий в себя  $\pi\pi$ -взаимодействие. Наиболее важными источниками информации до настоящего времени являются процессы рождения нескольких пионов при облучении простейшей ядерной мишени (протон, дейтон) пучком  $\pi$ -мезонов (например,  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ ,  $\pi N \rightarrow \pi\pi\Delta$ ). В этих реакциях при малом переданном четырехимпульсе  $t$  доминирует диаграмма однопионного обмена. При наличии достаточно большой статистики становится возможным выделить вклад этой диаграммы и, изучая рассеяние реального пиона на виртуальном, перейти к описанию процесса в пионном полюсе, т. е. к рассеянию реальных  $\pi$ -мезонов. После этого задача сводится к обычному фазовому анализу, причем в простейшей его форме (рассеяние бесспиновой частицы на бесспиновом центре). Подробнее

Таблица I

Реакция	Исследуемые волны	Возможный изоспин	Литература
1. $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ n$	S, P, D, F	0, 1, 2	22-42
2. $\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm \pi^0 p$	S, P, D, F	1, 2	43-45
3. $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ n$	S, D	2	45-49
4. $\pi^- p \rightarrow \pi^0 \pi^0 n$	S, D	0, 2	50-52
5. $\pi^+ p \rightarrow \pi^0 \pi^0 \Delta^{++}$	S, D	0, 2	53-54
6. $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^- \Delta^{++}$	S, P, D, F	0, 1, 2	55-56
7. $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^- \Delta^{++}$	S, D	2	57-59
8. $\pi^+ d \rightarrow \pi^+ \pi^- p p s$	S, P, D, F	0, 1, 2	60
9. $\pi^- d \rightarrow \pi^- \pi^- p p s$	S, D	2	61-63
10. $\pi^+ d \rightarrow \pi^0 \pi^0 p p s$	S, D	0, 2	64

об обосновании гипотезы однопионного обмена и методике проведения экстраполяции экспериментальных данных в полюс будет рассказано в гл. 3.

В табл. I приведены основные реакции обсуждаемого типа, значения изоспина дипионной системы и парциальные волны, амплитуду которых можно исследовать в каждой из перечисленных реакций в области промежуточных энергий. Видно, что изучение таких реакций позволяет в принципе получить полную информацию о всех возможных состояниях  $\pi\pi$ -системы. Обычно реакции (1-10) изучаются при большой энергии налетающего пиона, достаточной для проявления волн с  $l \leq 3$ . Однако весьма полезным является их изучение и в области малых  $m_{\pi\pi}$ , вблизи порога. Изучение реакций (1-10) позволило существенно расширить границы наших знаний о  $\pi\pi$ -взаимодействии. С точностью до некоторых неопределенностей, о которых речь пойдет в дальнейшем, можно сказать, что поведение фаз  $\pi\pi$ -рассеяния известно до  $m_{\pi\pi} \simeq 1,8$  ГэВ. Обнаружен и изучен целый ряд новых резонансных состояний ( $S^*$ ,  $h$  и т. д.).

Для понимания деталей резонансной феноменологии необходимо изучать такие каналы, как  $\pi K \rightarrow \pi K$  и  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ . Последний нужен и для окончательного разрешения оставшихся неопределенностей в  $S_0$ -волне  $\pi\pi$ -рассеяния. Важным источником детальной информации о  $\pi\pi$ -взаимо-

действиях в области больших  $m_{\pi\pi}$  является реакция аннигиляции  $\bar{p}p \rightarrow \pi^+\pi^-$ . Эта реакция достаточно активно изучается в последние годы<sup>65-67</sup>.

Помимо указанных, информация о  $\pi\pi$ -взаимодействии может быть получена и некоторыми другими путями. Из них наиболее полезными являются анализ  $K_{e4}$ -распада, который позволяет в принципе провести полностью модельно-независимое определение фаз в области  $2\mu < m_{\pi\pi} < m_K$ , и процесса  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ , который выделяет  $P_1$ -волну. Изучение  $K_{e4}$ -распада затрудняется малой парциальной шириной этого канала ( $\sim 4 \cdot 10^{-5}$ ), что не позволяет сильно увеличить точность результатов. Тем не менее этим методом были получены важные данные о длинах рассеяния и фазе  $S_0$ -волны вблизи порога, о чем речь пойдет в гл. 7.

При изучении реакции  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  в свое время в Новосибирске были получены параметры  $\rho^0$ -резонанса<sup>68</sup>, однако, нам кажется, что в настоящее время она недостаточно используется для задач  $\pi\pi$ -взаимодействия. Именно с помощью этого метода можно было бы разрешить вопрос о значении  $P_1$ -волновой длины рассеяния.

Большинство остальных потенциальных источников информации о  $\pi\pi$ -взаимодействиях используются реже, так как они, за некоторым исключением, являются либо сильно модельно-зависимыми (например,  $K \rightarrow 3\pi$ ), либо требующими практически недостижимой точности ( $K_S \rightarrow 2\pi$ ). Для рассмотрения  $S$ -волнового  $\pi\pi$ -взаимодействия вблизи порога исследуют упругое пион-нуклонное взаимодействие<sup>69</sup>. Анализируя данные по  $\pi N$ -рассеянию в физической области, из свойств кроссинг-симметрии можно получить данные о  $\pi\pi$ -фазах. Используют иногда и реакции аннигиляции нуклонов с образованием большого числа пионов в конечном состоянии, но чаще в них вводят фазы  $\pi\pi$ -рассеяния, как известные, для понимания других аспектов реакций.

Из сказанного выше видно, что сейчас основным источником информации о  $\pi\pi$ -взаимодействии является исследование реакций (1—10). Поэтому данный метод будет подробно обсуждаться в последующих разделах, к другим методам мы будем периодически обращаться в разных местах обзора.

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИЙ ТИПА $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ И $\pi N \rightarrow \pi\pi\Delta$

Изучение реакций (1—10), являющееся в настоящее время основным источником информации о  $\pi\pi$ -рассеянии, основывается на гипотезе о доминирующей роли однопионного обмена (ОРЕ-модель). В этой модели предполагается, что взаимодействующие частицы обмениваются в  $t$ -канале одним  $\pi$ -мезоном (рис. 1, а). Модель возникла из того, что практически все неупругие процессы в области энергий выше 1 ГэВ носят периферический характер взаимодействия, т. е. имеют сильно анизотропное угловое распределение в с. ц. м. и идут в основном с малыми переданными четырехимпульсами  $t$ . В реакциях  $\pi N$ - и  $NN$ -столкновений с образованием одного и двух пионов большая часть сечения сосредоточена в области  $|t| < 0,5$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>.

Из геометрических соображений можно видеть, что малые  $t$  соответствуют большому прицельному параметру (откуда и возник термин «периферическое взаимодействие») и малой массе обменной частицы. Из-за малости массы  $\pi$ -мезона пионный полюс близок к физической области, что выделяет  $\pi$ -обмен среди других. Это легко видеть из того, что амплитуда одночастичного обмена имеет вид

$$T = \frac{f}{m_{\pi 0}^2 - t}, \quad (1)$$

где  $m_{об}$  — масса обменной частицы,  $f$  — неизвестная функция. Если  $f$  для различных частиц примерно одного порядка и не зависит от  $t$ , т. е. не учитывается сход обменного пиона с массовой поверхности, то все определяется пропагатором и для малых  $t$  доминирует  $\pi$ -обмен (полусное приближение ОРЕ).

Одним из наиболее прямых указаний на существенный вклад ОРЕ является совпадение зависимостей сечений  $\pi N$ -взаимодействия <sup>71</sup>, и угловых распределений <sup>55</sup>, найденных экспериментально на массовой поверхности и вычисленных по методу Чу — Лоу. Результаты этих и целого ряда

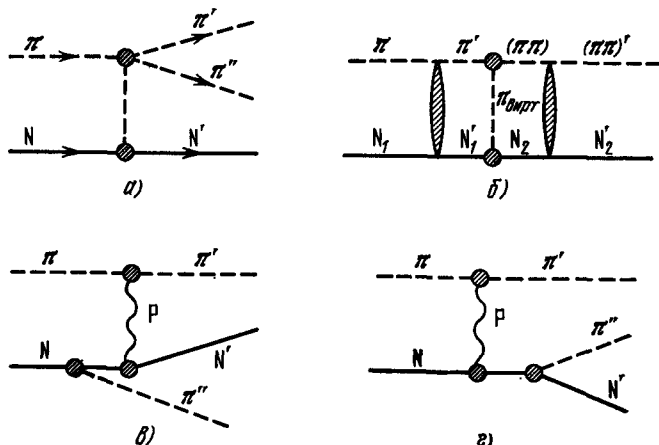


Рис. 1. Диаграммы однопионного обмена (ОРЕ) (а), однопионного обмена с абсорбцией (ОРЕА) (б) и дифракционной диссоциации (в, г).

других экспериментов показали, что однопионный обмен в интересующих нас реакциях (1—10) вносит основной вклад.

Однако в чистой полюсной модели однопионного обмена удастся лишь качественно описать экспериментальные данные. В настоящее время применяются три способа, позволяющих улучшить согласие между теорией и экспериментом:

- 1) введение эмпирических формфакторов;
- 2) учет поглощения в начальном и конечном состояниях (абсорбционные модели);
- 3) разработка моделей обмена реджезованным пионом.

Смысл формфакторов, дополнительных функций  $\Phi(t)$ , учитывающих зависимость от  $t$  в вершинах, состоит в том, что их введением учитывается сход с массовой поверхности обменного пиона. Такие поправки нельзя рассчитывать точно, поэтому формфактор имеет произвольную параметризацию при некоторых ограничениях (условия положительности, аналитичности, нормировки).  $\Phi(t)$  — универсальная функция, не зависящая от зарядового канала реакции и отнормированная так, что в полюсе  $\Phi(\mu^2) = 1$ . В свое время было введено довольно много различных формфакторов; напомним лишь о тех из них, которые наиболее часто применялись в изучении обсуждаемых реакций.

Впервые формфактор применительно к ОРЕ-модели был введен Феррари и Селлери <sup>72</sup> и имел структуру, подобную структуре электромагнитных формфакторов нуклона:

$$\Phi(t) = 0,28 + \frac{0,72}{1 - [(t-1)/4,73]}, \quad (2)$$

где  $t$  — в единицах  $\mu^2$ ,  $\mu$  — масса  $\pi$ -мезона. Этот формфактор, как и формфактор Амальди — Селлери<sup>73</sup>, широко использовался экспериментаторами, но сейчас практически не применяется. Чаще вводят формфактор Дюрра — Пилкуна<sup>74</sup>, полученный из рассуждений в духе теории потенциального рассеяния. Вершина взаимодействия имеет пространственную область радиуса  $R$ . Для каждой парциальной волны с моментом  $l$  определяется фактор проникновения  $v_l$  и вероятность частицы войти внутрь частицы-мишени. Тогда мезонная вершина может быть записана в следующем виде:

$$V(t) = \sqrt{\frac{v_l(t, R_l)}{v_l(\mu^2, R_l)}} V(\mu^2), \quad (3)$$

где

$$v_l(t, R_l) = \frac{1}{[q(t) R_l]^2} [j_l^2(q R_l) + \eta_l(q R_l)]^{-1},$$

$q$  — импульс налетающего пиона в системе покоя дипиона,  $R_l$  — свободный параметр,  $j_l$  и  $\eta_l$  — сферические функции Бесселя и Неймана. Для низших орбитальных моментов можно привести конкретный вид формфакторов Дюрра — Пилкуна:

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{l=0}(t) &= 1 && \text{для S-волны,} \\ \Phi_{l=1}(t) &= \sqrt{\frac{1 + R_P^2 q^2(\mu^2)}{1 + R_P^2 q^2(t)}} && \text{для P-волны,} \\ \Phi_{l=2}(t) &= \sqrt{\frac{9 + 3R_D^2 q^2(\mu^2) + R_D^4 q^4(\mu^2)}{9 + 3R_D^2 q^2(t) + R_D^4 q^4(t)}} && \text{для D-волны.} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Аналогичным образом вводятся формфакторы и во вторую вершину. Для практического использования кинематических формфакторов Дюрра — Пилкуна или близкого ему Бенеке — Дюрра<sup>75</sup> нужно ответить на два вопроса: 1) каковы значения  $R_l$ ; 2) каков вклад каждой парциальной волны. Вопрос о величинах  $R_l$  подробно был рассмотрен Вольфом в<sup>76</sup>, где на основе большого экспериментального материала были подобраны  $R_l$ . Что же до второго вопроса, то хотя ответ на него заранее не известен, оказалось, что действие формфактора не слишком чувствительно к небольшим изменениям вкладов отдельных волн. Это дает возможность использовать формфактор даже при довольно грубых оценках парциальных волн.

Формфакторы можно использовать как для работы в физической области, так и для улучшения процесса экстраполяции, о чем речь пойдет выше. Как показано, например, в<sup>77</sup>, формфактор Дюрра — Пилкуна для изучения  $\pi^+p$ -рассеяния из реакции  $pp \rightarrow \pi^+ \Delta^{++}$  в обоих случаях дает неплохие результаты.

Для упругого рассеяния при высоких энергиях хорошо работает модель рассеяния на поглощающем диске (оптическая модель). Сильное поглощение на частице-мишени является причиной появления резкого дифракционного пика в дифференциальном сечении. Такой же пик наблюдается и в квазидвухчастичных реакциях типа  $\pi^- p \rightarrow \rho^0 n$ ,  $\pi^+ p \rightarrow \rho^0 \Delta^{++}$ . Этот факт навел на мысль, что периферические взаимодействия можно понять на основе учета поглощения. В каждую парциальную амплитуду нужно ввести коэффициент поглощения, пропорциональный полному сечению в других возможных каналах. Учет эффектов поглощения, наиболее сильных для волн с малым  $l$ , улучшает согласие с экспериментом, хотя вычисление подобных поправок носит модельно-зависимый характер.

Существуют различные варианты ОРЕ-модели с поглощением (ОРЕА). Одним из наиболее распространенных является формализм ОРЕА-модели, предложенный в работах<sup>78,79</sup> и основанный на диаграмме рис. 1, б.

Заштрихованные блоки обозначают взаимодействие в начальном и конечном состояниях. ОРЕА-модели работают в довольно узком интервале энергий и не для всех реакций, однако для важного случая квазидвухчастичных реакций они работают неплохо, и с их помощью удастся описать экспериментальные данные по дифференциальным сечениям и угловым распределениям, а также рассчитать правильные значения элементов спиновой матрицы плотности. Многие работы по изучению  $\pi\pi$ -взаимодействия опираются на ОРЕА-модели. Удобные для расчетов по этой модели формулы можно найти, например, в <sup>80</sup>.

По-видимому, наиболее последовательным с теоретической точки зрения является подход с введением в однопионный обмен реджезации. Такие модели возникли в результате развития теории комплексных угловых моментов. Модель обмена реджезованным пионом (OPER-модель) совпадает с обычной моделью ОРЕ в полюсе, но в ней возможен обмен в  $t$ -канале всеми возможными состояниями с квантовыми числами  $\pi$ -мезона. Модель OPER позволяет с единой точки зрения рассмотреть большой круг реакций, правильно предсказывает анизотропию по углу Треймана — Янга (что нельзя получить введением формфакторов), энергетический ход сечения, элементы матрицы плотности. Применение OPER-модели к различным реакциям проводилось в <sup>9-11</sup>; с обзором таких работ можно познакомиться в <sup>12</sup>.

Переходя к описанию методики получения экспериментальной информации о  $\pi\pi$ -взаимодействии, заметим, прежде всего, что в настоящее время ни одна из перечисленных теоретических моделей не является общепринятой экспериментаторами. В каждой экспериментальной работе вместе с некоторой теоретической основой присутствуют свои изменения и добавления к моделям, свои свободные параметры.

Простейшим методом получения информации о  $\pi\pi$ -рассеянии является изучение реакций (1—10) в физической области. Как было указано выше, при достаточно малых  $t$  можно надеяться на определяющий вклад однопионного обмена и малость фоновых вкладов. Это и является обоснованием данного метода. Практически обработка экспериментальных данных сводится к их усреднению по некоторому интервалу  $t$  и аппроксимации какой-либо моделью (ОРЕА, OPER и т. д.). При этом характеристики парциальных волн — фазы, коэффициенты упругости, — считаются свободными параметрами и подбираются из согласия с экспериментом.

Одним из наиболее часто используемых методов является метод экстраполяции экспериментальных данных в пионный полюс, к точке, соответствующей рассеянию реального пиона на реальном, с последующим фазовым анализом.

Несколько ниже мы рассмотрим проблему экстраполяции, здесь же уместно заметить, что хотя экстраполяция была предложена Чу и Лоу еще в 1959 г., до сих пор методика не разработана до конца и каждую конкретную реакцию нужно рассматривать отдельно.

Другим методом определения  $\pi\pi$ -фаз является выделение обогащенного сигнала однопионного обмена с последующей экстраполяцией. Отделение фоновых амплитуд производится с помощью амплитудного анализа. В этом методе экспериментальные величины выражаются через спиральные парциальные амплитуды  $H_{\lambda\lambda';\mu}^m$ ;  $\mu$  ( $\lambda$  и  $\lambda'$  — спиральность первичного и вторичного нуклонов соответственно,  $\mu$  — спин дипиона,  $m$  — проекция спина дипиона). Затем находят амплитуды с  $m = 0$ , обусловленные однопионным обменом. Эта задача недоопределена, поэтому приходится делать дополнительные предположения, например, об отсутствии амплитуд с переворотом спина у нуклона <sup>81</sup>. Найденные  $H_{\lambda\lambda';\mu}^0$  экстраполируют в полюс.



Практически все работы по экстраполяции опираются на старую формулу Чу — Лоу<sup>5</sup>, связывающую сечение  $\sigma_{\pi\pi}$  с дифференциальным сечением реакции  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ :

$$\frac{d^2\sigma}{dt dm_{\pi\pi}^2} = K \frac{f^2}{2\pi} \frac{1}{p_\pi^2} \frac{t}{(t-\mu^2)^2} m \sqrt{\frac{m_{\pi\pi}^2}{4} - \mu^2} \sigma_{\pi\pi}(m_{\pi\pi}); \quad (5)$$

здесь  $K$  — численный коэффициент, принимающий значение 1 или 2 для реакций типа  $\pi N \rightarrow \pi^\pm \pi^0 N$  и  $\pi N \rightarrow \pi^+ \pi^- N$  соответственно,  $f^2 = 0,08$  — константа  $\pi N$ -взаимодействия,  $p_\pi$  — импульс падающего пиона.

Строго говоря, формула (5) справедлива лишь при  $t = \mu^2$ , однако полюсный характер диаграммы позволяет предположить, что и в физической области при малых  $|t|$  ее можно использовать. Чтобы получить значение пион-пионного сечения, обычно строят вспомогательную функцию

$$F(t) = \frac{d^2\sigma_{\pi\pi N}}{dt dm_{\pi\pi}^2} \frac{2\pi p_\pi^2}{K f^2} \times \frac{(t-\mu^2)^2}{m_{\pi\pi} \sqrt{(m_{\pi\pi}^2/4) - \mu^2}} \quad (6)$$

или  $F'(t) = F(t)/t$  (псевдопериферическое приближение), которую затем экстраполируют в полюс, где  $\sigma_{\pi\pi} = F(t)/t|_{t=\mu^2}$ .

Вопросы экстраполяции этих функций рассмотрены в<sup>18</sup>, а здесь хотелось бы напомнить, что метод псевдопериферического приближения требует  $F(0) = 0$ , т. е. является частным случаем более общего метода Чу — Лоу (который допускает  $F(0) \neq 0$ ). Если экспериментальная кривая  $F(t)$  удовлетворяет условию  $F(0) = 0$ , то применимы оба метода, причем линейной экстраполяции  $F'(t)$  соответствует квадратичная  $F(t)$  и т. п. Естественно, что в этом случае предпочтителен метод  $F'(t)$ , который дает меньшие ошибки. Но применяя его, надо иметь уверенность в справедливости  $F(0) = 0$ . Вопрос о прохождении  $F(t)$  через нуль исследовался в<sup>82</sup>. Авторы<sup>82</sup> отмечали, что экспериментальные исследования при малых импульсах  $p_\pi \sim 2$  ГэВ/с дают существенно отрицательные значения  $F(0)$ , особенно при  $m_{\pi\pi} \gtrsim 700$  МэВ, в то время как при больших  $p_\pi \gtrsim 15$  ГэВ/с значения  $F(0) > 0$ . Это находит объяснение в расчетах ОРЕА-модели, в которых показано, что значение  $F(0)$  зависит от  $p_\pi$ . На рис. 2 приведены кривые из<sup>82</sup>, соответствующие поведению  $F(s, t=0, m_{\pi\pi})$  для различных  $p_\pi$ . Видно, что  $F(0) \approx 0$  для любого  $p_\pi$  при  $m_{\pi\pi} < 0,6$  ГэВ. Для больших

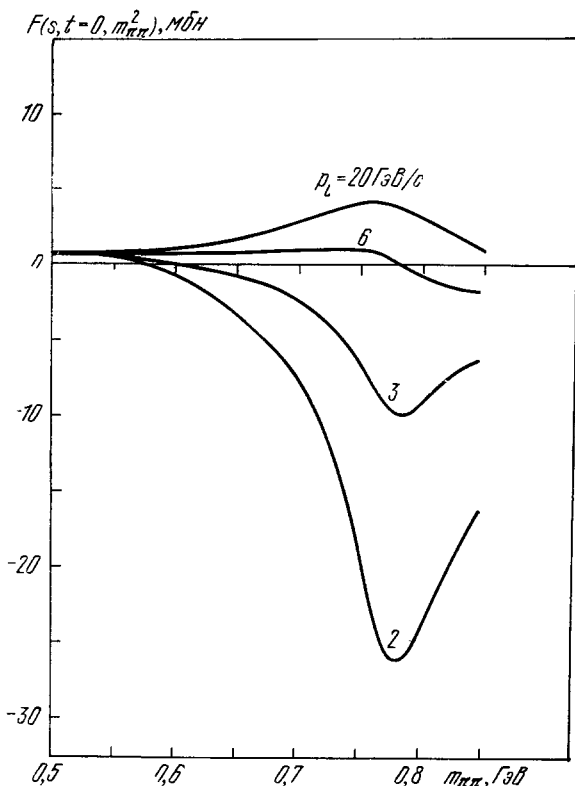


Рис. 2. Расчет значений экстраполяционной функции  $F(s, t=0, p_\pi)$  по модели ОРЕА из работы<sup>82</sup>.

масс  $F(0) \approx 0$  лишь в небольшом интервале импульсов  $4 < p_\pi < 6$  ГэВ/с. При других импульсах налетающего пиона следует, по-видимому, использовать обычную экстраполяционную процедуру Чу — Лоу.

Другим подходом к выбору экстраполяционной функции является так называемый «метод конформных отображений». Для изучения  $\pi\pi$ -рассеяния впервые он был применен, по-видимому, в работе Ю. А. Батусова и др.<sup>83</sup>. Позднее теоретические особенности метода обсуждались в<sup>84</sup>.

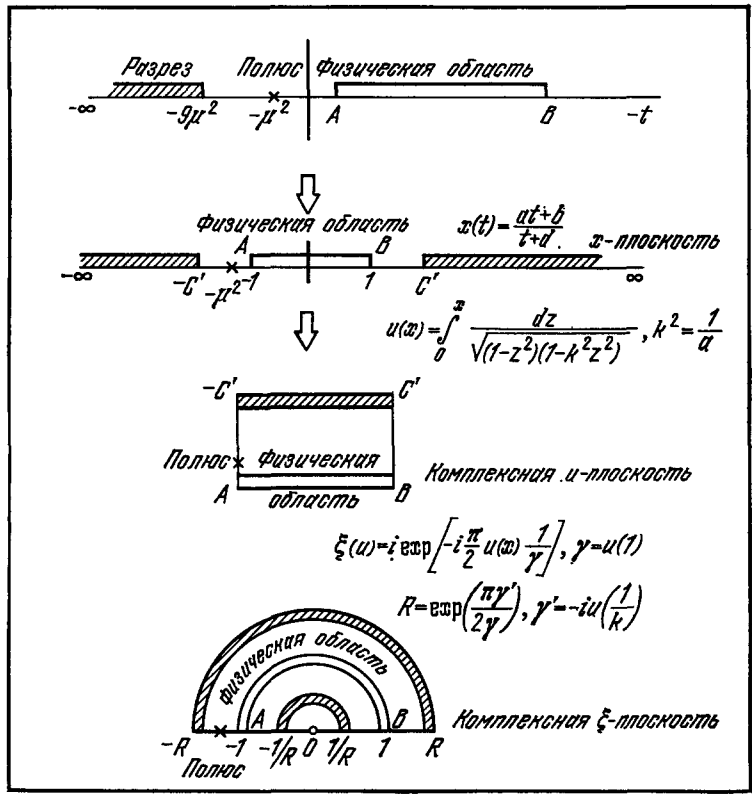


Рис. 3. Примеры конформных преобразований.

Сущность метода заключается в следующем. Задача восстановления аналитической функции во всей плоскости по ее значениям в некоторой непрерывной области является сложной, так как получаемая функция чувствительна к малым изменениям данных в заданной области. Можно улучшить сходимость процесса, используя знание аналитической структуры функции. Для этого используется удобная функция  $W$ , которая переводит с помощью конформного отображения комплексную плоскость энергии во внутренность круга  $|W| \leq 1$ . Амплитуда представляется полиномиальным рядом по  $W$ . Показано, что сходимость такого ряда лучше, чем ряда по  $t$ . На рис. 3 показаны конформные преобразования. В работах Батона и др.<sup>28а</sup> было показано, что для реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$  достаточным является уже использование переменной  $x(t) = (at + b)/(t + c)$  ( $a, b, c$  — константы перехода), так как параметры эллиптических переходов  $k^2$  (см. рис. 3) для этого случая малы. Таким методом можно получить следующие улучшения:

- 1) лучшая стабильность результатов экстраполяции относительно разных разбиений по  $t$  и  $m_{\pi\pi}$ ;

2) использование меньшей степени полинома при описании экспериментальных данных.

Все это, конечно, может уменьшить ошибки при экстраполяции. Пример использования различных способов экстраполяции для реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ n$  из работы <sup>111</sup> показан на рис. 4.

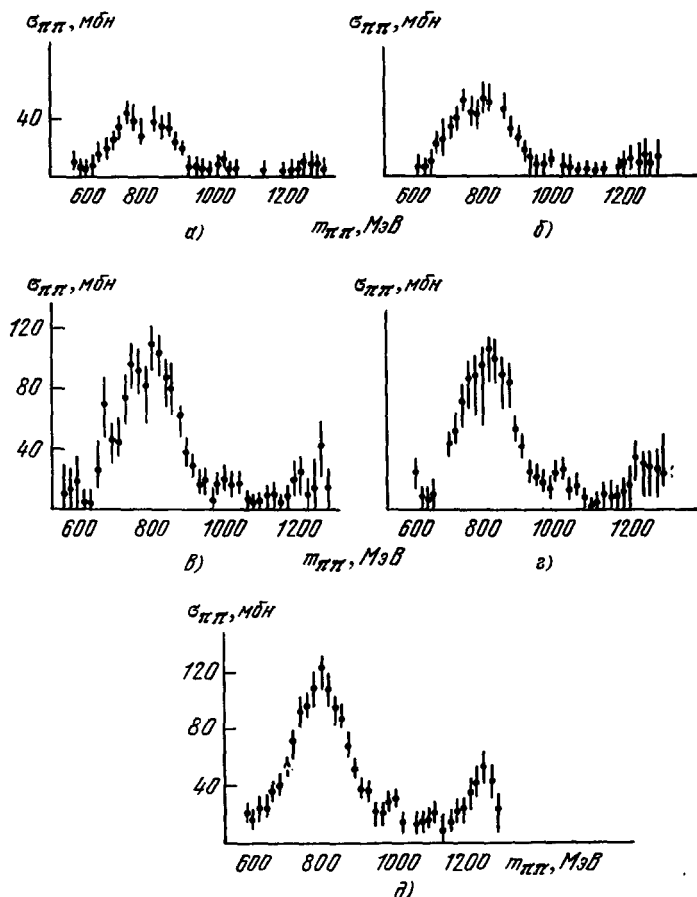


Рис. 4. Экстраполированные значения  $\sigma_{\pi\pi}$  из работы <sup>111</sup>.

а) Экстраполяция с использованием квадратичной по  $t$  функции; б) экстраполяция с использованием линейной по  $x$  функции; в) экстраполяция с использованием квадратичной по  $x$  функции; г) экстраполяция с использованием квадратичной по  $x$  функции по методу максимального правдоподобия; д) экстраполяция с использованием линейной по  $t$  функции с введением формфакторов Дюрра — Пилкуна и Венеке — Дюрра.

Следует упомянуть также и так называемую Паде-аппроксимацию, в которой  $F(t) = a + [bt/(1 + ct)]$ . Однако, по-видимому, эта параметризация мало отличается от переменной конформного отображения  $x$ .

Для применения указанных методов экстраполяции необходимо иметь ясное понимание динамики рассматриваемых процессов, и в первую очередь характера возможного фона других (помимо ОРЕ) механизмов. Чтобы продемонстрировать важность такого понимания, сравним возможные методы экстраполяции для некоторых реакций. Для реакции  $\pi N \rightarrow (\pi\pi) N$  имеется парадоксальная ситуация, когда набор очень большой статистики может ухудшить дело: использование экстраполяции в области очень малых  $|t| \lesssim \mu^2$  может привести к сильным искажениям. Это происходит из-за того, что вклад в  $d\sigma/dt$  однопионного обмена в такой

реакции зануляется при  $t \rightarrow 0$ , а фон не равен нулю при  $t = 0$ . Для реакции  $\pi N \rightarrow (\pi\pi) N$  следует проводить экстраполяцию, не подходя слишком близко к  $t = 0$  (что обычно и делается), или вообще работать в физической области. Для реакции  $\pi^+ p \rightarrow (\pi^+\pi^-) \Delta^{++}$  нет этой трудности, и чем меньшие  $|t|$  будут использованы при экстраполяции, тем точнее будет результат. В реакции  $\pi^- p \rightarrow (\pi^-\pi^-) (\pi^+ p)$  фон других диаграмм существен в широкой области  $|t|$ , вследствие чего его учет становится особенно важным<sup>85</sup>.

Таким образом, чрезвычайно важной задачей является задача выделения или учета вкладов неодиопионных диаграмм, решение которой требует индивидуального подхода к каждой реакции и зависит от импульса первичной частицы и рассматриваемой области по  $t$ .

Рассмотрим подробнее ситуацию с фоном для реакций типа  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ . Для них можно несколько уменьшить фон других диаграмм выбором «хорошего» импульса. Он не должен быть слишком малым, так как при  $p_\pi \leq 1,5$  ГэВ/с происходит значительное рождение нуклонных изобар, и слишком большим из-за увеличения вкладов от вышележащих Редже-траекторий. Но и при самом оптимальном импульсе фон не исчезает полностью.

В работе на неполяризованной мишени нет возможности разделить точно вклады от обменов одинаковой четности. Из-за доминирующей роли ОРЕ-диаграммы при малых  $|t|$  обычно считали, что обмен с аномальной спин-четностью  $P = (-1)^{J+1}$  полностью обусловлен  $\pi$ -обменом, а возможным обменом  $A_1(1^+)$ -мезоном можно пренебречь. Этот вопрос рассматривался в работе<sup>86</sup>, выполненной с использованием материалов эксперимента по изучению  $\pi p \uparrow \rightarrow \pi^-\pi^+n$  на поляризованной мишени<sup>87</sup>. Результаты расчетов показали, что с точностью до 10% для  $|t| < 0,5$  (ГэВ/с)<sup>2</sup> вкладом от  $A_1$ -обмена можно пренебречь. Однако в последней экспериментальной работе с поляризованной мишенью<sup>88</sup> парциально-волновой анализ  $\pi^- p \uparrow \rightarrow \pi^-\pi^+n$  при  $p_\pi = 17,2$  ГэВ/с показал, что вклад  $A_1$ -обмена в области  $\rho$ -мезона составляет  $\sim 30\%$ . По-видимому, этот результат говорит о необходимости учета  $A_1$ -обмена для уточнения характеристик  $\pi\pi$ -рассеяния.

Вклад обмена с естественной четностью  $P = (-1)^J$ , например,  $A_2(2^+)$ -мезоном, можно оценить из экспериментов на неполяризованной мишени. В высокостатистичной работе<sup>39</sup> было показано, что такой обмен составляет  $< 10\%$  при  $|t| \sim t_{\min}$  и возрастает до  $\sim 90\%$  при  $|t| \sim 1$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>. Это согласуется с расчетами Кимеля и Рейя<sup>89</sup>, которые показали, что для успешного описания экспериментальных данных в области  $|t| < 0,2$  (ГэВ/с)<sup>2</sup> достаточно модели однопионного обмена, учет  $A_2$ -обмена становится необходимым для больших  $|t|$ .

Хуже обстоит дело с учетом  $\omega$ -обмена. Работ по фазовому анализу  $\pi^-\pi^0$  и  $\pi^+\pi^0$ -состояний из реакций  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$  немного, и отношение к  $\omega$ -обмену у авторов этих работ различное. В работах<sup>43,44</sup> им просто пренебрегали, в то время как в работе<sup>27</sup> подчеркивалась важность учета  $\omega$ -обмена, особенно в области малых  $|t| \sim 0,1$  (ГэВ/с)<sup>2</sup>. Возможно, что именно  $\omega$ -обмен искажает картину и приводит к разногласиям в значениях фаз с  $I = 2$ , полученным из  $\pi^\pm\pi^0$ -состояний и другими методами.

Нет единого мнения и относительно важности учета диаграмм дифракционной диссоциации (Д. Д.), приведенных на рис. 1, в, г. Валкер в докладе на Таллахасской конференции<sup>90</sup> указывал, что вклад Д. Д. в реакцию  $\pi^- p \rightarrow \pi^-\pi^+n$  при малых  $|t|$  составляет примерно 10% (при большом начальном импульсе  $p_\pi = 25$  ГэВ/с). В работе<sup>27</sup> с той же реакцией при  $p_\pi = 4$  ГэВ/с было показано, что в области  $\rho^0$ - и  $f^0$ -резонансов вкладом Д. Д. можно пренебречь. С этим согласуется и результат работы на большом ( $\sim 30$  тыс.) статистическом материале реакции  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+\pi^-\Delta^{++}$  при

$p_\pi = 16$  ГэВ/с<sup>91</sup>. Авторы пришли к выводу, что примеси от Д. Д. малы, и в  $p$ -области ими можно пренебречь. В то же время в ряде работ, например<sup>92</sup>, показывалась важность учета Д. Д. для реакций  $\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm \pi^0 p$  как из-за довольно значительного ( $\sim 20-30\%$ ) вклада Д. Д., так и из-за сильных интерференционных эффектов. Особо следует отметить работу<sup>93</sup>, где для реакции  $\pi^+ p \rightarrow \pi^+ \pi^+ n$  при  $p_\pi = 3,9$  ГэВ/с была получена оценка вклада Д. Д.  $\sim 95\%$ . С величиной этой оценки вряд ли можно согласиться, но сам факт ее появления говорит о необходимости внимательного рассмотрения проблемы учета диаграмм Д. Д.

Подчеркнем, что сейчас не известно, какие именно искажения вносит в проведение экстраполяции примесь диаграмм дифракционной диссоциации и этот вопрос нуждается в дальнейшем изучении.

Подводя итоги этого раздела, следует сказать, что хотя преобладающая роль однопионного обмена при малых  $|t|$  представляется очевидной, для дальнейшего повышения точности результатов по  $\pi\pi$ -рассеянию необходимо и дальше разрабатывать методику корректного учета всех возможных фоновых диаграмм.

#### 4. ОПИСАНИЕ ПИОННЫХ РЕЗОНАНСОВ

Физика элементарных частиц довольно давно имеет дело с нестабильными частицами — резонансами, которые участвуют в сильном взаимодействии не только в процессе рождения, но и распада. Исследование резонансов помогает понять природу этого типа взаимодействия, проверять существующие модели. Определение параметров резонансов дает возможность изучать взаимодействие в определенных квантовых состояниях, изучать парциальные амплитуды. Само направление экспериментального исследования  $\pi\pi$ -взаимодействия началось с обнаружения особенностей в системе двух пионов, т. е.  $(\pi\pi)$ -резонансов. Важность их изучения определяется и тем, что многие методы исследования пион-пионного взаимодействия (формфакторы Дюрра — Пилкуна, ряд вариантов ОРЕА-модели и т. д.) развиты в предположении квазидвухчастичного характера реакции  $\pi N \rightarrow \pi\pi N: \pi + N \rightarrow (\pi\pi)_{\text{рез}} + N$ . В последнее время активно обсуждается возможность существования резонансов, являющихся многокварковыми молекулами (типа  $q\bar{q}q\bar{q}$ ) и глюонными образованиями. Первыми возможными кандидатами являются мезонные резонансы с квантовыми числами  $O^+ - S^*$ ,  $\delta$ -мезоны (см., например,<sup>94-96</sup>).

Спрашивается, что такое резонанс с точки зрения экспериментатора, как его можно изучать?

Как известно, резонансы характеризуются тем же набором квантовых чисел, что и обычные «долгоживущие» элементарные частицы. Однако нестабильность резонансов относительно сильного процесса распада накладывает на этот класс частиц существенный отпечаток. Малое время жизни ( $\tau \approx 10^{-23}$  с) и соответствующая ему большая ширина  $\Gamma \approx \hbar/\tau \approx \approx 100$  МэВ определяют особенности экспериментальной методики исследования резонанса.

С точки зрения экспериментаторов резонанс есть понятие статистическое. В отличие от обычных частиц, которые можно идентифицировать по одному событию (вспомним  $\Omega^-$ -гиперон), идентификация резонанса требует достаточно большого статистического материала событий в широкой области масс ( $\Delta M \gg \Gamma$ ).

Можно было бы думать (и раньше действительно так считали), что если на массовом графике имеется широкий  $\Delta M \sim \Gamma$  пик над фоном на уровне нескольких стандартных отклонений, то это и есть проявление резонанса. Однако такой критерий хорош только для так называемых веду-

щих резонансов: например,  $\rho$  ( $1^-$ ),  $f$  ( $2^+$ ) или  $g$  ( $3^-$ ). Если же мы имеем дело с менее ярко выраженными резонансами, которые замаскируются сильным фоном в той же волне, то, видимо, нужны иные критерии.

Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Наиболее полно резонансы описываются при парциально-волновом анализе. Опуская кинематические множители, запишем парциальную амплитуду для случая чисто упругого взаимодействия в следующем виде:

$$f_l(E) = \frac{1}{2i} (e^{2i\delta_l(E)} - 1) = \frac{1}{\operatorname{ctg} \delta_l(E) - i}. \quad (7)$$

Резонанс соответствует максимуму этой функции при некотором значении энергии  $E_R$ , которое определяет массу резонанса. Спин и четность резонанса определяются значением  $l$  данной парциальной волны, заряды (электрический, барионный, странный и др.) — соответствующими зарядами частиц, составляющих резонанс и т. п.

Если в окрестности резонансной энергии  $E_R$  (при которой  $\delta_l = \frac{\pi}{2}$  и  $\operatorname{ctg} \delta_l = 0$ ) разложить  $\operatorname{ctg} \delta_l$  в ряд Тейлора, то легко можно получить формулы Брейта — Вигнера для амплитуды:

$$f_l(E) = \frac{\Gamma/2}{(E_R - E) - (i\Gamma/2)}, \quad (8)$$

и сечения

$$\sigma_{\text{упр}}(E) = 4\pi\lambda^2 (2l + 1) \frac{(\Gamma/2)^2}{(E_R - E)^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (9)$$

Если открыты и другие каналы, то вместо (7) следует записать

$$f_l(E) = \frac{\eta_l(E) e^{2i\delta_l(E)} - 1}{2i}, \quad (10)$$

где коэффициент  $\eta_l(E)$  определяет вероятность того, что процесс пойдет как упругий ( $\eta_l = 1$  соответствует отсутствию поглощения,  $\eta_l = 0$  — полному поглощению).

Формула Брейта — Вигнера в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$f_l(E) = \frac{\Gamma_{el}/2}{(E_R - E) - (i\Gamma/2)} = \frac{x}{\alpha - i}; \quad (11)$$

здесь  $\Gamma_{el}$  — парциальная ширина упругого распада резонанса,

$$x = \Gamma_{el}/\Gamma, \quad \alpha = 2(E_R - E)/\Gamma.$$

Удобно рассматривать поведение парциальных амплитуд на так называемых диаграммах Аргана («Argand diagrams»). На этой диаграмме по оси ординат откладывается мнимая часть амплитуды,  $\operatorname{Im} f_l = (1 - \eta_l \cos 2\delta_l)/2$ , а по оси абсцисс — реальная  $\operatorname{Re} f_l = (\eta_l/2) \sin 2\delta_l$  (рис. 5). Круг с центром  $i/2$  и радиусом  $1/2$  — граница унитарности.

На диаграмме удобно иллюстрируется связь реальных параметров — фаз и коэффициентов поглощения — с  $\operatorname{Re} f_l$  и  $\operatorname{Im} f_l$ . Каждой точке на диаграмме соответствует определенное значение парциальной амплитуды. При изменении энергии точка движется, описывая некоторую кривую. Так, в случае упругого рассеяния  $\eta_l = 1$  и амплитуда проходит по унитарному кругу, двигаясь с ростом энергии против часовой стрелки в случае потенциала притяжения. В общем случае кривую можно описать следующей формулой:

$$\left(\operatorname{Im} f_l - \frac{1}{2}\right)^2 + (\operatorname{Re} f_l)^2 = \left(\frac{\eta_l}{2}\right)^2. \quad (12)$$

Когда  $\eta_i < 1$ , то амплитуда находится внутри унитарного круга, причем для  $1/2 \leq x_i < 1$  фаза в резонансе проходит через  $90^\circ$ , а для  $0 < x_i < 1/2$  — через нуль.

На диаграмме Аргана можно рассмотреть и более общий случай рассеяния по каналу  $a \rightarrow b$  (например, рассеяние  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ ). Тогда формула Брейта — Вигнера будет выглядеть следующим образом:

$$f_i(E) = V \sqrt{x_a x_b} \frac{1}{\alpha - i}, \quad (13)$$

где  $x_i = \frac{\Gamma_i}{\Gamma}$  — упругость по каналу  $i$ . Это не единственно возможная форма описания резонансов, но ее удобно использовать в случае отсутствия сильного фона в данной волне. Из формулы видно, что в случае резонанса мы будем на диаграмме видеть следующее поведение амплитуды:

1. С увеличением энергии амплитуда движется по кругу, принимая максимальное значение  $f_{\max} = iV \sqrt{x_a x_b}$  при  $E = E_R$ .

2. Около  $E = E_R$  изменение амплитуды максимально:

$$\frac{df_i}{dE} = \frac{V \sqrt{x_a x_b}}{\Gamma} \cdot \frac{2 + \alpha (d\Gamma/dE)}{\alpha^2 + 1}.$$

При резонансе «скорость»  $df_i/dE|_{E=E_R}$  достигает наибольшего значения.

Вид резонанса в случае отсутствия фона показан на рис. 5 ( $V \sqrt{x_a x_b} < 1/2$ ).

Подводя итог сказанному выше, сформулируем критерии, по которым можно судить о проявлении резонанса на диаграмме Аргана:

- 1) фаза проходит через особую точку  $0^\circ$  или  $90^\circ$ ;
- 2) параметр  $\eta_i$  минимален (неупругое сечение максимально);
- 3)  $|f_i|$  имеет максимум, т. е. упругое сечение максимально;
- 4)  $\text{Im } f_i$  — максимально, т. е. полное сечение наибольшее;
- 5) «скорость»  $df_i/dE$  максимальна.

К сожалению, на практике столь чистый случай встречается редко. Во-первых, картину слегка изменяет зависимость ширины резонанса  $\Gamma$  от  $E$ . Это не очень существенно, так как есть формулы, учитывающие эту зависимость. Например, для упругого резонанса

$$\Gamma = \Gamma_0 \left( \frac{k}{k_R} \right)^{2l+1} \frac{E}{E_R}, \quad (14)$$

где  $k$  ( $k_R$ ) — импульс рассеявшейся частицы (резонанса) в системе центра (см., например, <sup>13,17</sup>). Если резонанс неупругий, то  $\Gamma_a$  и  $\Gamma_b$  могут иметь разные зависимости от энергии. Изменяется и формула Брейта — Вигнера. «Релятивистская» формула обычно записывается в виде

$$f_{ab} = \frac{E \sqrt{\Gamma_a \Gamma_b}}{(E^2 - E_R^2) - i\Gamma E}. \quad (15)$$

Подробнее этот вопрос рассмотрен в <sup>97-99</sup>.

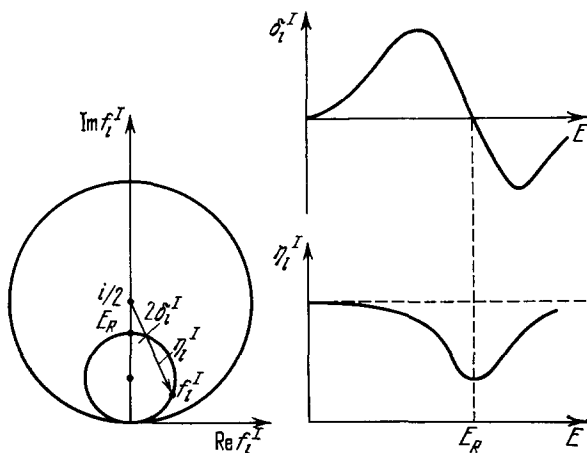


Рис. 5. Вид резонанса с  $x < 1/2$  на диаграмме Аргана в случае отсутствия фона.

Значительно сильнее картину портят следующие факторы:

- 1) наличие заметного фона в той же парциальной волне;
  - 2) наличие нескольких перекрывающихся по энергии резонансов;
  - 3) близость резонансной энергии к открытию неупругого канала.
- С учетом фона амплитуду можно представить как

$$f_l(E) = \frac{\eta_l' e^{2i\delta_l'} \cdot \eta_l e^{2i\delta_l} - 1}{2i}, \quad (16)$$

где сомножитель  $\eta_l' e^{2i\delta_l'}$  описывает фон. Используя для резонансной части  $\eta_l e^{2i\delta_l} = 1 + [2ix/(\alpha - i)]$ , получим

$$f_l(E) = \frac{\eta_l' e^{2i\delta_l'} - 1}{2i} + \frac{x}{\alpha - i} \eta_l' e^{2i\delta_l'}. \quad (17)$$

Если фон упругий и не зависит от энергии, то он смещает резонансную окружность вдоль унитарной границы (окружности касаются друг друга). Когда фон неупругий,  $\eta_l' < 1$ , резонансная окружность находится внутри круга единичного диаметра. Если же фон еще и зависит от энергии, т. е.  $\eta_l'$  и  $\delta_l'$  меняются с ростом  $E$ , то резонансная окружность искажается в петлю. На рис. 6 даны параметры поведения на диаграмме Аргана неупругого резонанса в присутствии а) притягивающего и б) отталкивающего неупругого фона, зависящего от энергии. Параметр  $\eta_l$  по-прежнему имеет минимум, но его положение уже не совпадает с положением резонанса, а фаза может и не проходить через особые точки. Для случая наложения двух резонансов диаграмма Аргана показана на рис. 6, в. Наличие петли на диаграмме Аргана является хорошим аргументом в пользу существования резонанса, в то время как пик в сечении процесса может отвечать как резонансу, так и кинематическому усилению \*).

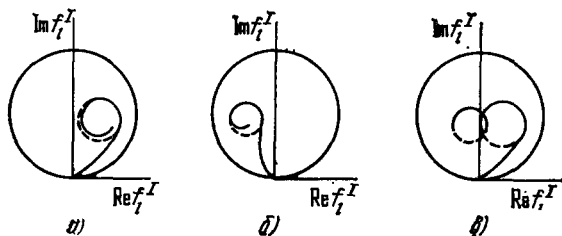


Рис. 6. Примеры поведения неупругого резонанса на диаграмме Аргана в присутствии нерезонансного фонового рассеяния — притягивающего (а), отталкивающего (б), в случае наложения двух резонансов (в).

медленно меняющийся фон, а затем эту параметризацию используют в энергетически-зависимом анализе. И если энергетически-независимый метод позволяет определить место прохождения фазы через особые точки и точку минимума параметра  $\eta_l$ , а энергетически-зависимый — успешно описать экспериментальные распределения через резонанс + фон, то мы можем определить параметры изучаемого резонанса. Однако этого не всегда достаточно, т. к. наличие близкого порога неупругого канала или другого резонанса может запутать картину. В этих случаях полезно применять формализм К-матриц. Он был введен в связи с необходимостью учитывать все возможные состояния и переходы связанных каналов. Но

\*) В общем случае возможны петли на диаграммах Аргана, не отвечающие резонансу. Неупругие каналы, содержащие резонанс и частицу, могут приводить к появлению особенностей в парциальной амплитуде, которые генерируют замкнутые петли на диаграммах Аргана. В этом случае полезно сравнивать диаграммы для рассеяния назад и вперед (см., например, <sup>100</sup>).



работа с амплитудой многоканальных переходов сложна из-за различных порогов и разрезов для каждого канала. Удобно убрать все унитарные сингулярности введением так называемой амплитуды реакции, или К-матрицы<sup>101-103</sup>. Эта новая функция определяется через интегральные уравнения, которые для двухчастичных каналов имеют особенно простую форму. Преимущества такого подхода заключаются в том, что с его помощью можно рассчитать любую величину, относящуюся к изучаемому взаимодействию, а не только к какой-либо конкретной реакции. Этот метод хорошо зарекомендовал себя для описания особенности  $S_0$ -волны  $\pi\pi$ -рассеяния вблизи  $K\bar{K}$ -порога. В разных модификациях он применялся в<sup>33,39,40,55,104</sup>. Использовался он и в других случаях, например, для описания  $\rho'$  (1600)-резонанса в  $P$ -волне.

Кроме метода диаграмм Аргана есть иная возможность представления резонансов — через полюсы амплитуды. Будем считать, что парциально-волновая амплитуда есть аналитическая функция энергии  $E$  и может быть продолжена в комплексную плоскость. Тогда формула Брейта — Вигнера дает полюс при  $E = E_R - i \frac{\Gamma}{2}$ . Если система имеет связанное состояние, то амплитуда имеет полюс на вещественной оси, при  $E = E_B < 0$ .

Такой подход бывает очень удобен, так как описывает и резонансы, и стабильные частицы. Однако применительно к нашей задаче результаты, даваемые этим методом, не являются однозначными, потому что не всякий полюс можно считать резонансом. Если полюс расположен далеко от физической оси, интерпретация его как резонанса вряд ли является правомерной. Так, в  $S_0$ -волне есть особенность, хорошо описываемая полюсом при  $E = \{(600 \pm 100) - i(250 \pm 70)\}$  МэВ<sup>55</sup>. Однако детальное изучение этой особенности показало, что других критериев резонанса (см. стр. 391) при этой энергии не найдено, и эту особенность нельзя назвать резонансом. Следует заметить, что определение ширины резонанса также неоднозначно. Помимо обычного  $\Gamma_R = -2(d/dE)(\text{ctg } \delta_l)^{-1}$ , можно определить ширину из понятия полюса:  $M_R = E_R - i \frac{\Gamma_0}{2}$ ; можно также определить как разность между точками прохождения фазы через  $135^\circ$  и  $45^\circ$ , т. е.  $\delta(E + \frac{\Gamma_B}{2}) = 135^\circ$ ;  $\delta(E + \frac{\Gamma_H}{2}) = 45^\circ$ ;  $\Gamma = \frac{1}{2}(\Gamma_B - \Gamma_H)$ . Численное различие можно показать на примере  $\Gamma_0$  из работы<sup>28</sup>:  $\Gamma_R = 133$  МэВ,  $\Gamma_0 = 131$  МэВ,  $\Gamma(45^\circ - 135^\circ) = 127$  МэВ.

Из сказанного видно, что определение резонансов — сложное дело. Для их выделения необходимо использовать все доступные методы и критерии, выбирая из них в каждом отдельном случае наиболее пригодные.

## 5. УГЛОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВТОРИЧНЫХ ПИОНОВ

Из предыдущего параграфа видна необходимость изучения фаз и коэффициентов упругостей пион-пионного рассеяния, а для этого надо знать угловые характеристики пионов. Можно по-разному характеризовать угловые распределения — с помощью полиномов Лежандра или просто степенного ряда по  $\cos \theta$  \*), через усредненные сферические гармоники или элементы спиновой матрицы плотности. Любое представление, хорошо описывающее экспериментальные угловые распределения, несет нужную информацию о фазах  $\pi\pi$ -рассеяния.

Естественно, что при любом описании коэффициенты углового распределения надо знать на массовой поверхности, в пионном полюсе. Поэ-

\*)  $\theta$  — угол между первичным и вторичным  $\pi$ -мезонами в системе покоя дипиона (так называемый угол Джексона).

тому возникает вопрос, как их получить из экспериментальных данных в физической области?

Некоторые экспериментаторы<sup>33</sup> считают, что угловые распределения вторичных пионов при  $|t| < 0,15$  (ГэВ/с)<sup>2</sup> достаточно близки к распределению в полюсе. Другие<sup>55</sup> на основании сравнения экстраполированных и неэкстраполированных усредненных сферических гармоник для  $|t| < 0,10$  (ГэВ/с)<sup>2</sup> отмечают  $\sim 15\%$  различие. Такое различие существенно для фазового анализа, поэтому, видимо, экстраполяция необходима.

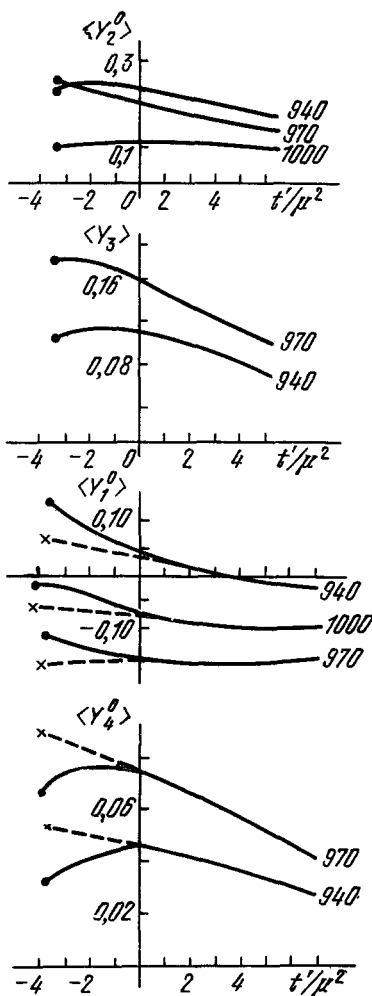


Рис. 7. Расчеты поведения  $\langle Y_L^0 \rangle$  как функции  $t$  по ОРЕА-модели из работы<sup>77</sup>.

Штриховые кривые — экстраполяция из физической области

$\langle Y_1^0 \rangle$  и завышение значения всех остальных гармоник (рис. 7). В заключение этого раздела приведем два примера использования метода усредненных сферических гармоник.

На рис. 8 показаны значения  $\langle Y_L^0 \rangle$ ,  $L = 1, \dots, 4$ , для  $\pi\pi^+$  и  $\pi\pi^0$ -состояний из работ<sup>44,45</sup>. Из внешнего вида гармоник можно получить некоторую качественную информацию о фазах  $\pi\pi$ -рассеяния. Так, сравнивая  $\langle Y_1^0 \rangle$  для  $\pi\pi^+$ - и  $\pi\pi^0$ -состояний, можно сделать заключение о знаках и относительной величине  $\delta_0^0$  и  $\delta_0^2$ -фаз, из малости  $\langle Y_3^0 \rangle$  и  $\langle Y_4^0 \rangle$  — о слабо-

Закон экстраполяции, как и в случае  $\pi\pi$ -сечения, неизвестен. Обычно используют линейную и квадратичную экстраполяции, выбирая лучшую из них по  $\chi^2$ -критерию. Как правило, эти функции дают близкие результаты. Наиболее часто экстраполируют нормализованные коэффициенты, т. е. коэффициенты, отнормированные на число событий в данном интервале. В этом случае кинематические факторы играют меньшую роль, и применение формфакторов типа формфакторов Дюрра — Пилкуна мало меняет результаты. Как отмечал Протопопеску<sup>55</sup>, использование этого формфактора меняло значение на  $\sim 1\%$ , в то время как ошибки экстраполяции составляют  $\sim 10\%$ . В некоторых работах успешно применялся метод конформных отображений<sup>28</sup>, но в других случаях этот метод давал нестабильные значения, часто выходящие за унитарный предел<sup>55</sup>.

При проведении экстраполяции угловых распределений, видимо, надо учитывать результаты расчетов по ОРЕА-модели Вильямса<sup>105</sup>. Он показал, что функции  $\langle Y_L^0 \rangle$  меняют кривизну в нефизической области, что приводит к невозможности получения правильного результата при экстраполяции из физической области. Наиболее часто употребляющаяся линейная экстраполяция дает систематические отклонения от предсказаний расчетов Вильямса  $\sim 10\%$  для первых двух гармоник ( $\langle Y_1^0 \rangle$  и  $\langle Y_2^0 \rangle$ ),  $\sim 30\%$  для  $\langle Y_3^0 \rangle$  и  $\langle Y_4^0 \rangle$ . Происходит занижение значения

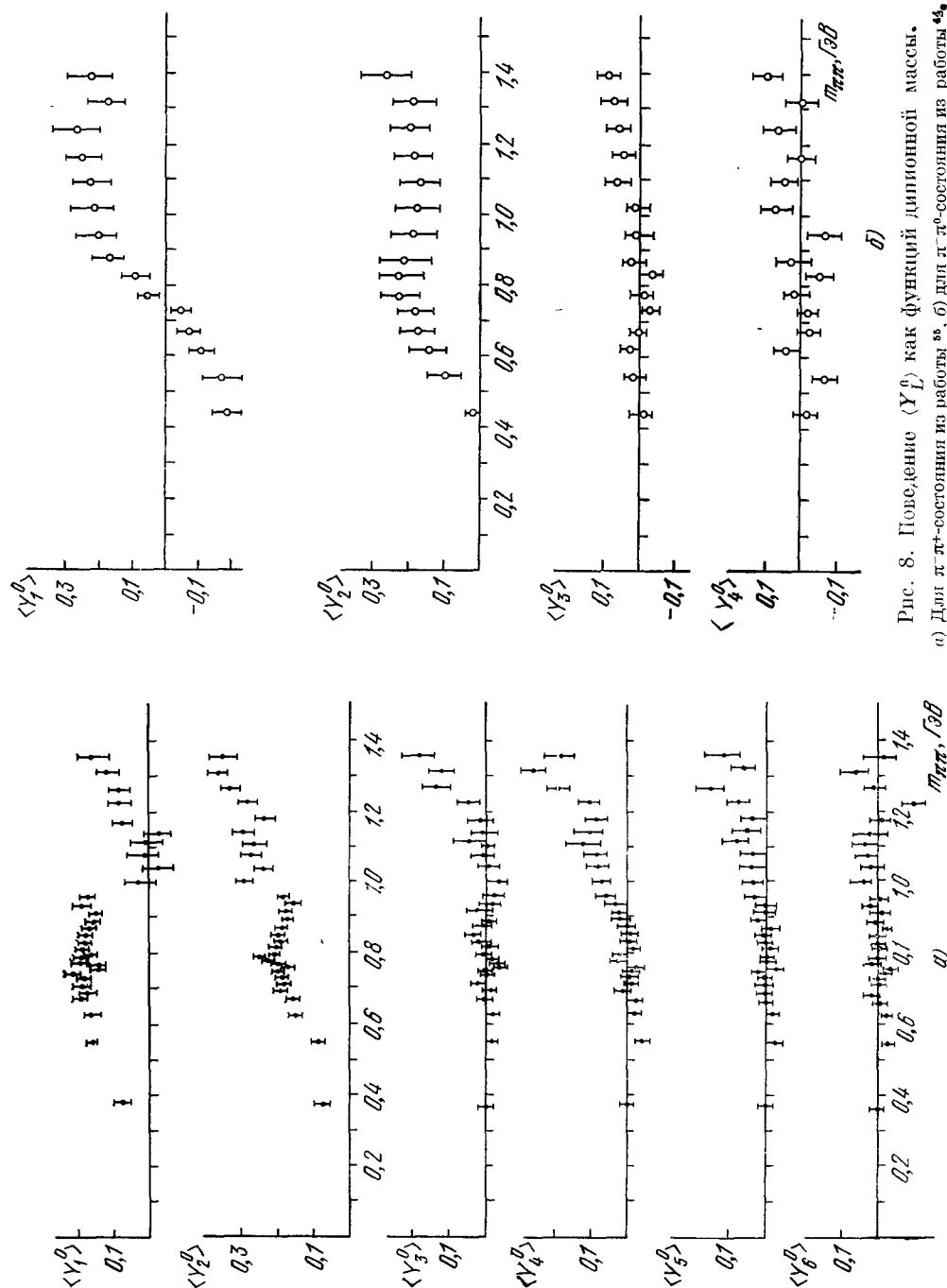


Рис. 8. Поведение  $\langle Y_L^0 \rangle$  как функций дилпионной массы.  
а) Для  $\pi^+\pi^-$ -состояния из работы <sup>28</sup>, б) для  $\pi^0\pi^0$ -состояния из работы <sup>44</sup>.

сти вкладов высших волн в области  $m_{\pi\pi} < 1$  ГэВ. Максимумы в  $\langle Y_2^0 \rangle$  и  $\langle Y_4^0 \rangle$  показывают положения  $\rho$ - и  $f^0$ -резонансов. Последнее очевидно из того, что  $\langle Y_2^0 \rangle \sim \sin^2 \delta_1^0$ , а  $\langle Y_4^0 \rangle \sim \sin^2 \delta_2^0$ .

Качественный анализ характеристик угловых распределений является первым этапом фазового анализа. Уже на этом этапе можно получать интересные результаты; для примера можно посмотреть работы <sup>39,44,108</sup>.

## 6. МЕТОДИКА ФАЗОВОГО АНАЛИЗА

Все способы определения парциальных амплитуд из экспериментальных данных можно разделить на три: энергетически-зависимый, энергетически-независимый и модельно-зависимый анализы. Каждый из них имеет свои достоинства и свои недостатки.

В энергетически-зависимом анализе экспериментальные данные для каждого массового интервала фитируют совместно, используя энергетически-зависимую параметризацию парциально-волновых амплитуд. В эту параметризацию закладываются существующие представления о поведении изучаемых волн, и успех фитирования отвечает на вопрос, насколько адекватно эти представления соответствуют эксперименту. Выбор наилучшей формулы проводится по заранее заданному критерию, обычно по  $\chi^2$ -критерию. В качестве экспериментальных данных можно выбирать любые характеристики угловых распределений.

Преимущества этого метода в том, что анализ проводится в широкой области энергий, находится гладкое решение, включающее уже известные резонансы. В энергетически-зависимом анализе меньше, чем при энергетически-независимом, сказываются статистические ошибки в отдельных точках. Этот метод, как правило, дает лишь одно решение. Однако это достигается дорогой ценой — возможны большие систематические ошибки, если плохо выбрана параметризация. Число свободных параметров ограничено, что позволяет легче проводить обработку, но вынуждает заранее делать предположения о типе решения.

Обычно параметризацию проводят так, чтобы учесть известные резонансы и фон в данной волне, чтобы попытаться сделать «модельно-независимую» подгонку. Иногда группируют экспериментальные данные по энергетическим областям, и для каждой области используют свою параметризацию. Для  $\pi\pi$ -рассеяния самая простая параметризация проводится в предположении, что в  $P_1$ - и  $D_0$ -волнах содержатся лишь резонансы брейт-вингеровской формы, а фазы с  $I = 2$  представляют собой гладкую степенную функцию энергии. Такая параметризация использовалась, например, для описания  $\pi\pi^0$ -рассеяния в <sup>44</sup>. Видимо, в первом приближении это справедливо. Но более правильным кажется учет фона даже для волн с ведущими резонансами. Особенно важным становится такой учет при изучении области  $m_{\pi\pi} \gtrsim 1$  ГэВ, где необходимо вводить и параметры упругости. Конечно, при этом число необходимых свободных параметров возрастает. В качестве примера учета фона можно привести работу <sup>55</sup>, где для описания  $P_1$ - и  $D_0$ -волн использовалась следующая формула:

$$T_l^I = \frac{\eta_f e^{2i\delta_\phi} - 1}{2i} + e^{2i\delta_\phi} \frac{\Gamma_{\pi\pi/2}}{(m_R - m_{\pi\pi}) - (i\Gamma/2)}, \quad (18)$$

в которой  $\eta_f$  и  $\delta_\phi$  описывают фон (ср. с гл. 3).

Наибольшие сложности всегда вызывает  $S_0$ -волна. В ней нет ярко выраженных резонансов, хотя много особенностей. Кроме того, имеется определенная связь с другими каналами, например,  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$  (см. гл. 8). Поэтому параметризация  $S_0$ -волны обычно довольно сложна. Для нее

применяют формализм  $\tilde{K}$ -матриц<sup>107</sup>. В этом методе

$$\tilde{T}_0 = \begin{vmatrix} T_{\pi\pi} & T_{\pi K} \\ T_{K\pi} & T_{K\bar{K}} \end{vmatrix}, \quad (19)$$

где  $T_{\pi\pi}$  описывает  $S$ -волновое  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ -рассеяние,  $T_{\pi K}$  описывает  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ -рассеяние,  $T_{K\bar{K}}$  описывает  $K\bar{K} \rightarrow K\bar{K}$ -рассеяние.

Удобно описывать пороговые эффекты, выражая матрицу амплитуд  $\tilde{T}$  через  $K$ -матрицу:

$$\tilde{T} = \frac{\tilde{K}}{\delta_{ik} - i\tilde{q}\tilde{K}},$$

где  $\tilde{q} = \delta_{ik} \sqrt{(m_{\pi\pi}^2/4) - m_i^2}$ . Энергетическая зависимость  $K$ -матрицы задается, например, в виде<sup>107</sup>:

$$\tilde{K} = (\delta_{ik} \sqrt{\tilde{q}_i}) \tilde{K}' (\delta_{ik} \sqrt{\tilde{q}_i}), \quad (20)$$

где  $\tilde{K}'$  — реальная и симметричная матрица, элементы которой считаются свободными параметрами. Как отмечалось в<sup>33</sup>, такое представление отражает и другие возможные каналы ( $4\pi$ ,  $K^*K$  и т. п.), и нет необходимости вводить их в явной форме. Подобное описание иногда используют и для других волн, например, для  $P_1$ -волн в области возможного  $\rho'$ -резонанса или для  $D_0$ -волн, чтобы учесть связь  $f^0$ -резонанса с  $4\pi$ -каналом.

В энергетически-независимом анализе данные при различных энергиях анализируются отдельно, решения для фаз и параметров упругости находятся для каждого массового интервала. Волны со спином выше некоторого  $l_{\max}$  считаются пренебрежимо малыми и не учитываются. Параметры остальных волн, с  $l \leq l_{\max}$ , считаются свободными в рамках унитарности. Обычно находят несколько возможных решений, выбор между которыми делается на основе энергетической непрерывности, по  $\chi^2$ -критерию, из согласия с известным поведением фаз при соседних энергиях, или из соответствия каким-либо теоретическим концепциям. Достоинства этого метода — в отсутствии ограничивающих предположений о поведении исследуемых волн, что дает возможность находить новые структуры. Так были найдены особенности в поведении  $\delta_0^0$ -фазы в области  $\rho^0$ -резонанса и при  $K\bar{K}$ -пороге. Трудности — в выборе истинного решения и в сшивке значений, полученных в разных массовых интервалах. Кроме того, в этом методе обычно приходится делать ряд упрощающих предположений. Это связано с тем, что для одного зарядового канала в каждом энергетическом интервале имеется  $(2l_{\max} + 1)$  независимых экспериментальных точек, и, таким образом, в случае  $S - P$ -анализа — только три уравнения. Незвестных же много больше (фазы  $S_0$ -,  $S_2$ -,  $P_1$ -волн, параметры упругости). Для того чтобы решить систему уравнений, приходится фиксировать часть неизвестных. Поэтому здесь особенно важен вопрос об учете высших волн. Обычно  $l_{\max}$  определяют, аппроксимируя угловые распределения полиномами Лежандра. Такая аппроксимация показывает, что в области  $m_{\pi\pi} < 1$  ГэВ в первом приближении можно пренебречь волнами с  $l \geq 2$ . Если еще считать взаимодействие в этой области полностью упругим, то остаются всего три неизвестных — фазы  $S_0$ -,  $S_2$ - и  $P_1$ -волн. Разделить  $S_0$  и  $S_2$  в тех состояниях, где обе волны возможны, нельзя, поэтому при изучении  $\pi\pi^+$ -взаимодействия фазу  $\delta_0^2$  обычно фиксируют и считают известной из других работ. В этих предположениях можно аппроксимировать угловые распределения степенным рядом вида

$$\frac{d\sigma_{\pi\pi}}{d(\cos\theta)} \sim \frac{dN}{d(\cos\theta)} = a_0 + a_1 \cos\theta + a_2 \cos^2\theta, \quad (21)$$

с последующей экстраполяцией  $a_i$  в полюс <sup>38a</sup>. Если угловые распределения характеризуются усредненными сферическими гармониками, последние также экстраполируются в полюс <sup>44,45</sup>. Из полученных в полюсе величин можно вычислить значения фаз  $\delta_1^1$  и  $\delta_0^0$  для  $\pi^-\pi^+$ -состояния, или  $\delta_1^1$  и  $\delta_0^0$  для  $\pi^-\pi^0$ -состояния. Однако из-за наличия интерференционного члена, для которого равновероятными являются значения  $\delta_0^0$  и  $\delta_0^{0'} = \delta_1^1 + \left(\frac{\pi}{2} - \delta_0^0\right)$ , возникает двусмысленность решения (известная «up-down» неопределенность). В энергетически-независимом анализе  $\pi^-\pi^+$ -состояния, в присутствии большой  $\delta_1^1$ -фазы, мы не можем избавиться от этой неопределенности, не делая дополнительных предположений. Необходимо заметить, что описанный выше метод фазового анализа в области  $m_{\pi\pi} \lesssim 1$  ГэВ не вполне точен, так как даже при малой амплитуде какой-либо высшей волны ее учет может быть очень важен из-за сильной интерференции с низшими волнами. Именно так обстоит дело с D-волнами в этой области энергий <sup>37b,44</sup>. Для работ в области больших  $m_{\pi\pi}$  высшие волны с  $l \geq 2$  надо учитывать в полной мере, т. е. экстраполировать в полюс  $\langle Y_L^0 \rangle$  с  $L = 1, 2, \dots, 2l_{\max}$ .

В последние годы появились работы, выполненные на хорошем статистическом материале, в которых к фазовому анализу идут через амплитудный анализ <sup>33,37,40</sup>.

Принято описывать спиновые корреляции процесса через спиральные амплитуды  $H_{\lambda'\lambda}$  в  $t$ -канале, где  $\lambda$  и  $\lambda'$  — спиральность нуклона в начальном и конечном состояниях. Для реакции типа  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$  интенсивность можно записать (для неполяризованной мишени):

$$\frac{d^4\sigma}{dm_{\pi\pi} dt d\Omega_{\pi\pi}} = \frac{1}{2} \sum_{\lambda'\lambda} |H_{\lambda'\lambda}|^2. \quad (22)$$

Полную спиральную амплитуду представляют через сумму амплитуд образования промежуточного дипиона со спином  $l$  и спиральностью  $m$ :

$$H_{\lambda'\lambda}(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sqrt{2l+1} H_{\lambda'\lambda; m}^l d_{m0}^l(0) e^{im\varphi}. \quad (23)$$

В общем случае для процесса  $a + b \rightarrow c + d$  имеется соотношение:

$$H_{\lambda_c \lambda_d; \lambda_a \lambda_b} = \eta (-1)^{\sum (l_i + \lambda_i)} H_{-\lambda_c - \lambda_d; -\lambda_a - \lambda_b}, \quad (24)$$

где  $\eta$  — произведение внутренних четностей,  $l_i$  — спин. Для реакции  $\pi p \rightarrow (\pi\pi) n$  это равносильно:

$$H_{\lambda'\lambda; m} = (-1)^{\lambda' + \lambda + m} H_{-\lambda' - \lambda; -m}. \quad (25)$$

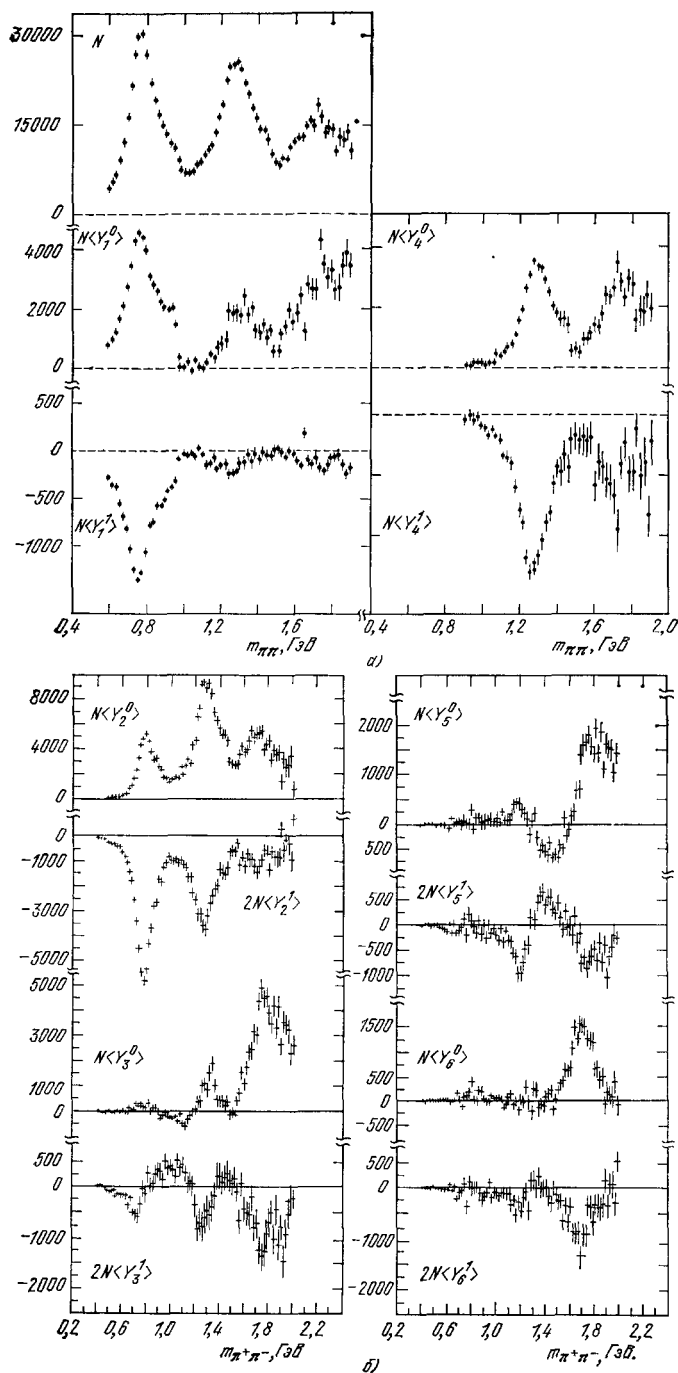
Из (25) следует, что достаточно знать половину амплитуд, например, с  $\lambda' = +1/2$ .

Удобно описывать обменные процессы не самими амплитудами  $H_{\lambda'\lambda; m}$ , а следующими их комбинациями:

$$H_{\lambda'\lambda; m}^{(\pm)} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [H_{\lambda'\lambda; m} \mp (-1)^m H_{\lambda'\lambda; -m}] \quad \text{для } m \neq 0, \quad (26)$$

$$H_{\lambda'\lambda; 0}^{(+)} \equiv H_{\lambda'\lambda; 0}, \quad H_{\lambda'\lambda; 0}^{(-)} \equiv 0 \quad \text{для } m = 0.$$

В работе <sup>108</sup> было показано, что для фиксированного  $t$  и больших  $s$  для  $H^{(+)}$ -амплитуд доминирует обмен с естественной четностью, а для  $H^{(-)}$  — с аномальной четностью. Поэтому, выделяя  $H^{(-)}$ -амплитуды с  $m = 0$ , можно надеяться выделить ОРЕ-сигнал, отделить фон и в дальнейшем


 Рис. 9. Поведение  $\langle Y_L^m \rangle$  в функции от  $m_{\pi\pi}$  для  $\pi^+\pi^-$ -состояния из работы <sup>32</sup>.

проводить экстраполяцию «чистых» ОРЕ-компонент. Этот метод и был использован в работах <sup>33,37,40</sup>. Экспериментальными величинами обычно являются ненормализованные усредненные сферические гармоники  $N \langle Y_L^m \rangle$ :

$$\frac{d^4\sigma}{dt dm d\Omega} = N \sum_{L=0}^{L_{\max}} \left[ \langle Y_L^0 \rangle Y_L^0(\Omega) + 2 \sum_{m=1}^L \langle \text{Re } Y_L^m \rangle \text{Re } Y_L^m(\Omega) \right], \quad (27)$$

где  $N$  — число событий в исследуемом интервале. Сферические гармоники связаны с парциальными амплитудами через коэффициенты Клебша — Гордана. Для  $\pi$ -обменных процессов пион-пионное состояние имеет нулевую спиральность, и должны быть лишь  $\langle Y_L^0 \rangle$ -гармоники.

На рис. 9 показаны значения  $\langle Y_L^0 \rangle$  из работы <sup>39</sup>. Видно, что  $\langle Y_L^0 \rangle \neq 0$  и, следовательно, механизмы неоднопионного обмена также играют важную роль. Поэтому в работе <sup>37</sup> отмечалась предпочтительность экстраполяции  $A_0$ -амплитуд, а не сферических гармоник, так как даже в  $\langle Y_L^0 \rangle$  дают вклад амплитуды с ненулевой спиральностью, т. е. не ОРЕ-механизмы.

К сожалению, модельно-независимое определение амплитуд процессов  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$  невозможно без экспериментов на поляризованной мишени. Вильямс в своей «модели для бедных», развитой для случая неполяризованной мишени, предположил, что в таких реакциях в спиральной системе доминируют процессы с переворотом спина, а вкладом процессов без переворота спина можно пренебречь <sup>81</sup>. Это предположение, видимо, подтверждают и недавние работы с поляризованной мишенью <sup>88</sup>. Основываясь на этой гипотезе, в работах <sup>37,109</sup> находили из шести наблюдаемых величин ( $\langle Y_L^m \rangle$  для  $l \leq 2$ ) шесть неизвестных — модули амплитуды  $S$ -волны  $|A_S|$ ;  $P$ -волновые компоненты  $|A_0|$ ,  $|A_+|$  и  $|A_-|$  (индекс соответствует спиральности дипиона), относительную фазу  $\delta_{SP}$  между  $A_S$  и  $A_0$  и относительную фазу  $\varphi_{10}$  между  $P$ -волновыми компонентами как функции  $t$  и  $m_{\pi\pi}$ . Далее зависимость от  $t$  параметризуется, и из сравнения с экспериментальными значениями  $\langle Y_L^m \rangle$  в каждом интервале  $m_{\pi\pi}$  находят параметры. Функции, применяемые для этого, различны в разных работах. Например, в <sup>37,109</sup>.

$$A_0^l = \frac{\sqrt{-t}}{\mu^2 - t} e^{b_0^l t} T_l(m_{\pi\pi}), \quad (28)$$

а для амплитуд с  $m = 1$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (A_1^l - A_{-1}^l) = A_-^l = \frac{C^l(m_{\pi\pi})}{\sqrt{2} m_{\pi\pi}} e^{b_-^l t} \sqrt{l(l+1)} T_l(m_{\pi\pi}), \quad (29)$$

где  $b_m^l$  и  $C^l$  — соответственно наклон и абсорбционный параметр для спина  $l$  и проекции момента  $m$ .

Видимо, наиболее полная параметризация была сделана в работе <sup>40</sup>. Искались три типа параметров:

- 1) параметры абсорбции, определяющие зависимость от  $t$ , но слабо меняющиеся с  $m_{\pi\pi}$ ;
- 2) параметры резонансов и коэффициенты  $K$ -матрицы для высших волн ( $D$ -,  $F$ -волны);
- 3) фазы и неупругости низших волн.

Для анализа использовались экспериментальные значения 13 усредненных сферических гармоник. Материал разбивался на массовые интервалы по 40 МэВ, каждый из которых делился еще на 19 интервалов по  $t$ . На рис. 10 показаны четыре варианта решений для  $\delta_0^0$ -фазы из работы <sup>40</sup>. Столь большое количество решений возникает из-за того, что в экспери-



менте доступно лишь сечение, а не амплитуда. Запишем амплитуду в виде

$$T(m_{\pi\pi}, \theta) = \sum_{l=0}^{l_{\max}} a_l(m_{\pi\pi}) P_l(\cos \theta) = f(m_{\pi\pi}) \prod_{i=1}^{l_{\max}} (\cos \theta - z_i), \quad (30)$$

где  $\theta$  — угол рассеяния  $\pi$ -мезонов, а  $z$  — корни полинома. Тогда

$$\sigma_{\pi\pi} \sim \prod_{i=1}^{l_{\max}} (\cos \theta - z_i) (\cos \theta - z_i^*). \quad (31)$$

Из (31) видно, что для  $l_{\max} = 3$  имеется  $2^{l_{\max}} = 8$  решений, так как из сечения мы не можем определить, содержит ли амплитуда нуль при  $z_i$

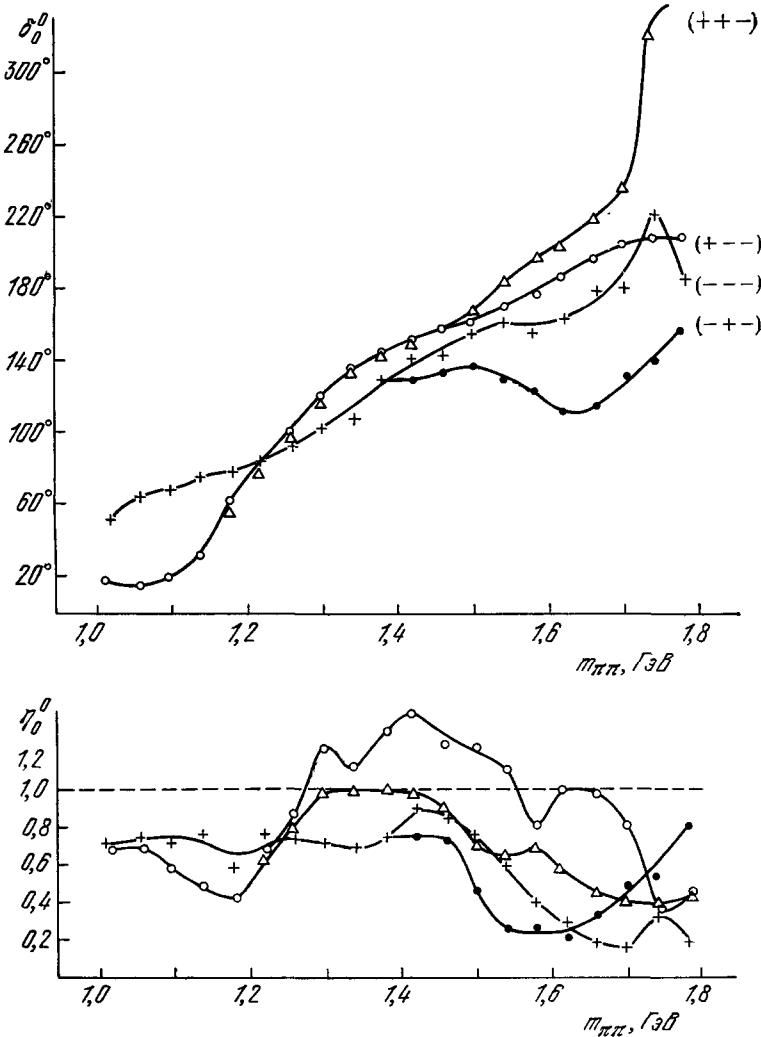


Рис. 10. Четыре варианта поведения  $\delta_0^0$ -фазы и параметра  $\eta_0^0$  (по <sup>40</sup>).

или при  $z_i^*$ . Если считать, что амплитуды  $D_0$  и  $F_1$  волн положительные и хорошо описываются брейт-вигнеровскими формулами, то остается два возможных решения в области  $f$ -резонанса и четыре в области  $g$ -резонанса.

Хотя в  $\langle Y_L^m \rangle$  для  $m \neq 0$  нет таких неопределенностей, слабое изменение этих гармоник с изменением  $z_i$  не позволяет сделать выбор.

Обычно энергетически-независимый и энергетически-зависимый методы применяются совместно, так как если первый позволяет найти особенности в парциально-волновых амплитудах, то второй может объяснить их путем введения новых резонансов и подбора соответствующей параметризации.

Третий вид анализа, модельно-зависимый, основывается на точных зависимостях амплитуд от энергии, взятых из какой-либо теоретической модели. Обычно его применяют для реакций, где экспериментальные данные неполные. Этот метод хорош тем, что позволяет проверить модель, посмотреть механизмы происходящих процессов. Методически он схож с энергетически-зависимым: в обоих случаях задаются формулы и из сравнения с экспериментом подбирают параметры — фазы и неупругости. Экспериментальные спектры выбирают различными, чаще это распределения по  $\cos \theta$  и  $m_{\pi\pi}$ . Распределения по  $t$  и  $\phi$  не очень чувствительны к выбору фаз, хотя использование двумерных угловых распределений по  $(\cos \theta$  и  $\phi)$  позволяет получить полезную информацию (см., например, <sup>110</sup>). Так как число свободных параметров велико, что затрудняет проведение сравнения, делают упрощающие предположения: ограничиваются определенным числом волн (обычно  $l \leq 2$ ), считают взаимодействие полностью упругим и т. д. В модельно-зависимом анализе используют данные в физической области, без проведения экстраполяции.

Иногда применяют комбинированные методы анализа. Так, в работе <sup>34</sup> применялся модельно-зависимый энергетически-независимый анализ. Экспериментальные данные реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ n$  анализировались по ОРЕА-модели в трех областях дипионной массы отдельно, для каждой области применялась своя параметризация. Такой метод позволяет уменьшить число свободных параметров, но появляются трудности в спивке решения.

В заключение отметим, что сейчас трудно четко разграничить модельно-зависимый и энергетически-зависимый анализ. В работах по амплитудному анализу (например, <sup>37,40</sup>) использовались предположения модели Вильямса <sup>81</sup> о доминировании процессов с переворотом спина, в ряде работ использовалось предположение о независимости коэффициента абсорбции от  $m_{\pi\pi}$  (что, видимо, не согласуется с экспериментом — <sup>37b</sup>), и следовательно, эти работы уже не являются полностью модельно-независимыми.

## 7. ОСОБЕННОСТИ ИЗУЧЕНИЯ $\pi\pi$ -ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРИ НИЗКИХ ЭНЕРГИЯХ

Изучение  $\pi\pi$ -взаимодействия в околопороговой области имеет свои особенности. В этой области имеется больше источников информации — не только реакции типа  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$  при небольшом импульсе налетающего пиона, но и К-распады,  $\eta \rightarrow 3\pi$ -распады и др. Кроме того, есть возможность экстраполировать в эту область результаты фазовых анализов в промежуточной области. Однако работа при низких энергиях имеет свои трудности, и в первую очередь — малое сечение взаимодействия. Это затрудняет набор большого статистического материала, и часто приходится опираться на определенные модели. Изучение же околопороговых характеристик  $\pi\pi$ -взаимодействия очень важно. Так, например, пороговое поведение амплитуды рассеяния характеризуется константой, называемой

длиной рассеяния:

$$a_l^I = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f_l^I(k)}{k^{2l+1}} \quad (32)$$

( $k$  — импульс пиона в системе покоя дипиона). Значение этой величины, помимо общезначимых задач, необходимо для выбора модели в расчетах  $\pi$ -конденсата (см., например, <sup>112</sup>).

Как было показано А. Б. Мигдалом <sup>20,113</sup>, в сильных внешних полях или в достаточно плотной нуклонной среде должна происходить перестройка пионного вакуума типа фазового перехода — пионная конденсация. При этом выигрыш энергии от фазового перехода пионного поля может превзойти проигрыш от сжатия нуклонного вещества, вследствие чего возникает принципиальная возможность появления второго минимума на кривой энергия-плотность, т. е. существования сверхплотных ядер. Учет эффектов поляризации среды под действием  $\pi$ -мезонов приводит к возможности для  $\pi$ -конденсата существовать и в обычном ядерном веществе <sup>114</sup> при плотности больше критической (которая может быть больше или меньше ядерной). Здесь возникают новые интересные теоретические и экспериментальные проблемы, которые обсуждались, например, в <sup>21</sup>. Выбор параметров теории  $\pi$ -конденсата определяется экспериментальной информацией об элементарных процессах, в частности, о  $\pi\pi$ -рассеянии.

Рассмотрим подробнее основные возможности для изучения  $\pi\pi$ -взаимодействия вблизи порога. Наиболее естественным методом представляется анализ реакций типа  $\pi N \rightarrow \pi\pi N$  при малом импульсе налетающего пиона. Однако до самого последнего времени не было работ по изучению таких реакций, в которых статистика позволяла бы получать угловые распределения вторичных пионов \*). По существу, вся информация о  $\pi\pi$ -взаимодействии извлекалась из сечений, и, как правило, на основе какой-либо модели (изобарной модели <sup>117-120</sup>, моделей с учетом треугольного графика <sup>121-123</sup> и др.). Среди этих работ особо отметим работу, выполненную в ОИЯИ, по изучению всех каналов реакции  $\pi^\pm p \rightarrow \pi\pi N$ , выполненную совсем близко от порога при  $E_\pi < 300$  МэВ <sup>124</sup>. При таких энергиях образование изобар件возможно и результаты эксперимента можно сравнивать непосредственно с предсказаниями моделей низкоэнергетического  $\pi\pi$ -взаимодействия. На рис. 11 показаны сечения некоторых реакций и расчеты различных моделей в подходе эффективного лагранжиана и метода коммутаторов тока. Основной вывод работы — невозможность совместного описания сечений всех каналов ни в одном из вариантов моделей.

В работе <sup>29</sup> ставилась задача получения фаз  $\pi\pi$ -рассеяния вблизи порога. Для этого были собраны данные ряда работ по  $\pi\pi$ -сечениям в этой области, полученные методом Чу — Лоу. Эти сечения аппроксимировались, а затем из полученных средних определялись фазы. Объединение данных из работ при разных энергиях, выполненных на небольшой статистике, видимо, не позволяет считать полученные фазы очень надежными.

Другим важным источником информации о  $\pi\pi$ -взаимодействии вблизи порога является изучение распадов  $K^\pm \rightarrow \pi^+ \pi^\mp e^\pm \nu$ . Еще в 1968 г. Пайс и Трейман показали <sup>125</sup>, что  $K_{e4}$ -распад является чрезвычайно удобным для изучения низкоэнергетического  $\pi\pi$ -взаимодействия. В конечном состоянии этого распада нет адронов, помимо  $\pi$ -мезонов, можно делать минимальное количество дополнительных предположений, и в принципе возможно выполнить полностью модельно-независимый анализ. К сожа-

\*) Единственным исключением является работа <sup>116</sup>, о которой будет рассказано в конце главы.

лению, сечение этого процесса мало, и набор статистического материала очень труден. Обычно делают предположение, что в распадах типа  $K \rightarrow \pi\pi$  выполняется правило  $|\Delta I| = 1/2$ ; тогда возможны лишь  $S_0$ - и  $P_1$ -волны (роль  $D_0$  и  $F_1$ -волн мала из-за  $m_{\pi\pi} \leq m_K = 494$  МэВ). Это вполне разумно, так как правило  $|\Delta I| = 1/2$  довольно хорошо выполняется в большинстве нелептонных распадов гиперонов, в  $K \rightarrow 2\pi$  распадах и т. д. (исключением является  $K \rightarrow 3\pi$  распад, где это правило

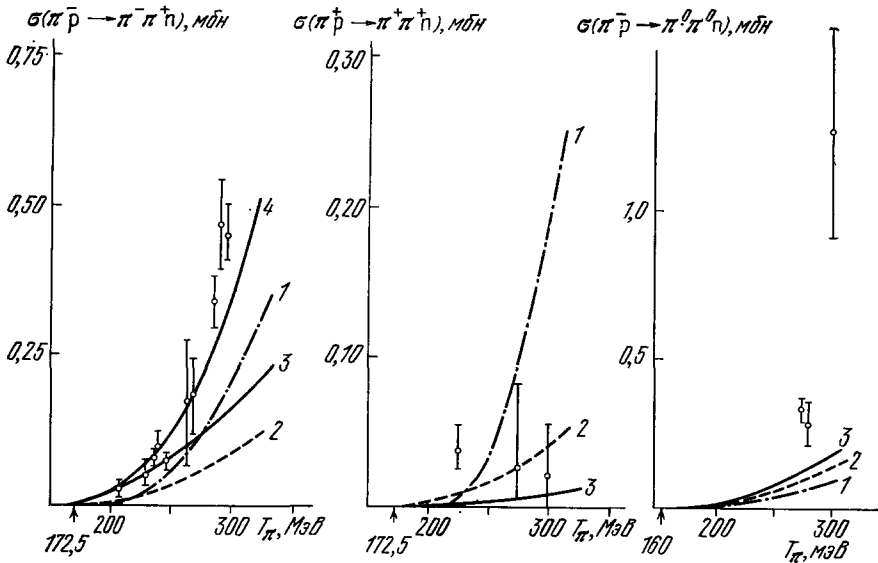


Рис. 11. Экспериментальные значения  $\sigma(\pi\pi \rightarrow \pi\pi\pi)$  вблизи порога из работы <sup>124</sup>. Кривые: 1 — расчет по статистической модели <sup>172</sup>, 2 — метод эффективного лагранжиана при  $\xi = 0$  <sup>174</sup>, 3 — метод эффективного лагранжиана при  $\xi = -1,4$  <sup>174</sup>, 4 — метод коммутаторов тока <sup>173</sup>.

нарушается и необходимо учитывать  $|\Delta I| = 3/2$ ). Анализ основывается на изучении интерференции между  $S_0$ - и  $P_1$ -волнами, из которой можно определить значение  $(\delta_0^0 - \delta_1^1)$ .

Выше отмечалось, что в области больших ( $m_{\pi\pi} > 500$  МэВ) дипионных масс имеется значительная информация о пион-пионных взаимодействиях. Кажется весьма привлекательным использовать эти данные для изучения низкоэнергетической области, экстраполировать их к порогу. Для этого надо знать характер зависимости, описывающей поведение фаз  $\pi\pi$ -рассеяния в интересующей нас области. Известно, что вблизи порога справедливо приближение длины рассеяния

$$k^{2l+1} \operatorname{ctg} \delta_l^I = \frac{1}{a_l^I}, \quad (33)$$

а в несколько более широкой области можно пользоваться приближением эффективного радиуса:

$$k^{2l+1} \operatorname{ctg} \delta_l^I = \frac{1}{a_l^I} + \frac{1}{2} k^2 r_l^I. \quad (34)$$

Можно предположить, что формула (34) справедлива до  $m_{\pi\pi} \sim 700$  МэВ. Тогда, аппроксимируя значения фаз в области 500—700 МэВ этим выражением, легко найти значения длин рассеяния. Применение как обычной формулы эффективного радиуса <sup>286, 55, 126-128</sup>, так и ее релятивистских модификаций <sup>286, 30</sup> было широко распространено среди экспери-

ментаторов. Однако существуют возражения против применимости этого метода. Они связаны с гипотезой о том, что реальная часть  $S$ -волновой амплитуды  $\text{Re } f_0$  проходит через нуль недалеко от физической области, т. е. имеет подпороговый нуль. В этом случае прямая экстраполяция величины  $k \text{ctg } \delta_0$  из физической области не учитывает резкого ее роста вблизи нуля и приводит к завышенным значениям длины рассеяния. Этот вопрос обсуждался, например, в работе <sup>129</sup>.

В теоретической работе <sup>130</sup> ставилась задача продолжить амплитуды, получающиеся в модели Вайнберга, в физическую низкоэнергетическую область с помощью дисперсионных соотношений для рассеяния в переднюю полусферу. Автор делает вывод о хорошем согласии расчетной кривой с экспериментальными значениями в области  $m_{\pi\pi} < 550$  МэВ, и о завышении значения длины рассеяния при экстраполяции данных из области выше 400 МэВ.

Недавно были опубликованы две экспериментальные работы <sup>131,116</sup>, которые, по-видимому, подтверждают эту точку зрения. В работе <sup>131</sup>

проводилось совместное описание данных из  $K_{e4}$ -распада в области  $m_{\pi\pi} < 350$  МэВ <sup>132</sup> и из реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ n$  в области  $500 \leq m_{\pi\pi} \leq 700$  МэВ <sup>376</sup> формулой, учитывающей существование подпорогового нуля. При этом получен значительно лучший  $\chi^2$ , чем при аппроксимации формулой обычного эффективного радиуса. В работе <sup>116</sup> была получена методом экстраполяции в псевдопериферическом приближении  $\delta_0^0$ -фаза  $\pi\pi$ -рассеяния из реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ n$  при  $m_{\pi\pi} < 330$  МэВ. При сравнении этих результатов с данными в области  $m_{\pi\pi} > 450$  МэВ, полученных в той же группе близкой методикой <sup>1786</sup>, виден излом в функции  $k \text{ctg } \delta_0^0$  (рис. 12). Возможно, что это есть прямое указание на существование подпорогового нуля в  $S$ -волновой амплитуде вблизи физической области и на неприменимость формулы эффективного радиуса для  $m_{\pi\pi} > 400$  МэВ.

Мощным методом изучения низкоэнергетического  $\pi\pi$ -рассеяния является использование свойств аналитичности, унитарности и кроссинг-симметрии. Сделано много попыток привлечь эти свойства как для теоретических моделей, так и для обработки эксперимента. С обзором таких работ можно познакомиться, например, в <sup>15,133</sup>.

Особый интерес к этому направлению возник после того, как индийским физиком Роем были получены <sup>134</sup> уравнения для пион-пионных амплитуд, названные его именем. Фундаментальное отличие этих уравнений от существовавших ранее в том, что они определяют парциальные волновые амплитуды, удовлетворяющие условиям аналитичности и кроссинг-симметрии, в области  $-4 \leq s \leq 60^*$ , включающей нефизическую часть  $-4 \leq s \leq 4$ , через величины в физической области. Это дает принципиальную возможность, во-первых, конструировать амплитуды в низкоэнергетической области, зная их поведение при больших энергиях, и, во-вторых, делать выбор из существующих экспериментальных

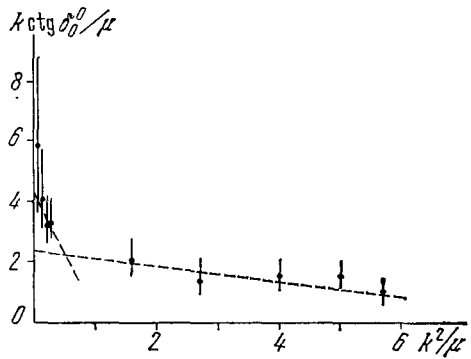


Рис. 12. Экспериментальные значения  $k \text{ctg } \delta_0^0$  из работы <sup>116</sup> (у порога) и <sup>1786</sup>. Штриховые прямые — аппроксимации формулой эффективного радиуса в соответствующих областях.

\*) Здесь и далее  $s = m_{\pi\pi}^2$  в единицах  $\mu^2$ .

данных. В частности, появляется возможность разрешить «up-down»-проблему и найти значения длин рассеяния.

Для вывода уравнений Рой использовал дисперсионные соотношения с двумя вычитаниями при фиксированном  $t$ , а затем проектировал их на парциальные волны. В случае заряженных пионов уравнения Роя имеют следующий вид:

$$\operatorname{Re} f_l^I(s) = \lambda_l^I(s) + \sum_{I'=0}^2 \sum_{l'=0}^1 \int_4^\infty K_{II'}^{l'l'}(s, s') \operatorname{Im} f_{l'}^{I'}(s') ds' + \varphi_l^I(s); \quad (35)$$

$\lambda_l^I(s)$  — члены вычитания, имеющие для  $S$  и  $P$  волн следующий явный вид:

$$\lambda_0^0(s) = a_0^0 + \frac{1}{12} (2a_0^0 - 5a_0^2) (s - 4),$$

$$\lambda_0^2(s) = a_0^2 - \frac{1}{24} (2a_0^0 - 5a_0^2) (s - 4),$$

$$\lambda_1^1(s) = \frac{1}{72} (2a_0^0 - 5a_0^2) (s - 4),$$

$a_0^0$  и  $a_0^2$  —  $S$ -волновые длины рассеяния,  $\varphi_l^I(s)$  — сумма вкладов от высших парциальных волн с  $l \geq 2$ :

$$\varphi_l^I(s) = \sum_{I'=0}^2 \sum_{l'=2}^\infty \int_4^\infty K_{II'}^{l'l'}(s, s') \operatorname{Im} f_{l'}^{I'}(s') ds', \quad (36)$$

$K_{II'}^{l'l'}$  — ядра интегральных уравнений, имеющие довольно сложный вид. Точные формулы для  $K_{II'}^{l'l'}$  имеются, например, в <sup>133</sup>. Как указывалось выше, рассматривается область  $-4 \leq s \leq 60$ .

Для того, чтобы использовать эти уравнения на практике, интеграл в (35) обычно разбивается на два:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f_l^I(s) = & \lambda_l^I(s) + \sum_{I'=0}^2 \sum_{l'=0}^1 \int_4^N K_{II'}^{l'l'}(s, s') \operatorname{Im} f_{l'}^{I'}(s') ds' + \\ & + \sum_{I'=0}^2 \sum_{l'=0}^1 \int_N^\infty K_{II'}^{l'l'}(s, s') \operatorname{Im} f_{l'}^{I'}(s') ds' + \varphi_l^I(s). \end{aligned} \quad (37)$$

$N$  выбирается так, чтобы в области  $N < s < \infty$  можно было применить представление Редже, т. е. считать, что в этой области  $\pi\pi$ -амплитуды не содержат резонансов. При сравнении величин, входящих в уравнение (35), оказывается, что основную роль играют интегралы для  $4 < s < N$  и  $l < 2$ . Вклад членов, учитывающих большие массы и высшие волны, мал, однако, возникает вопрос, насколько он существен. Эта проблема рассматривалась в работах <sup>135, 136</sup>. Оказалось, что для практических целей сейчас можно обойтись не очень точной оценкой таких членов, но для дальнейшего уточнения результатов придется более подробно изучить роль добавок.

Существуют два основных метода использования уравнений Роя для изучения  $\pi\pi$ -взаимодействий, которые можно условно назвать общетеоретическим и расчетно-экспериментальным. В первом методе к уравнениям Роя добавляют требование унитарности (сами уравнения удовлетворяют лишь свойствам аналитичности и кроссинг-симметрии) и ищется решение полученной системы. Оказывается, что можно выделить целый класс решений. Из него выбирается подкласс, содержащий амплитуды, удовлетворяющие хорошо установленным экспериментальным данным общего характера. К числу таких данных обычно относят (см., например, <sup>136</sup>):

- 1) существование в  $P$ -волне  $\rho$ -резонанса с параметрами  $m_\rho \approx 770$  МэВ и  $\Gamma_\rho \approx 150$  МэВ;
- 2) отсутствие резонансов в волнах с  $I = 2$  при  $m_{\pi\pi} \leq 1$  ГэВ;
- 3) наличие неупругости, начиная с  $K\bar{K}$ -порога (а не с  $s = 16$ , где она считается пренебрежимо малой).

Однако этих, вполне естественных, требований не хватает, и для уменьшения объема подкласса приходится вводить дополнительные, относящиеся к поведению  $\delta^0$ -фазы: прохождение  $\delta^0$  через  $180^\circ$  вблизи  $K\bar{K}$ -порога, отсутствие большого расхождения с данными фазовых анализов. В работе <sup>136</sup> решения уравнений Роя сравнивались с фазовыми кривыми из работ Батона <sup>28a</sup>, Протопопеску <sup>55</sup> и Эстабрука-Мартина <sup>109</sup> \*). Для каждой работы было найдено единственно возможное множество решений на плоскости  $(a_0^0, a_0^2)$  (так называемая «универсальная кривая»), совокупность которых приведена на рис. 13. Выбрать же единственное решение, т. е. определенную точку на каждой из универсальных кривых, не представляется возможным. На рис. 14, взятом из <sup>17</sup>, приведены фазовые кривые, рассчитанные этим методом для трех значений  $a_0^0$ :  $-0,05, 0,2$  и  $0,6 \mu^{-1}$  по экспериментальным данным работы <sup>28a</sup>. Сравнение с экспериментальными значениями показывает, что все три кривые имеют приблизительно одинаковый и достаточно хороший  $\chi^2$ , не превышающий 2 на степень свободы. Аналогичный результат получен и для других экспериментальных данных (см. <sup>136</sup> для сравнения с <sup>55</sup> и <sup>109</sup>). Отсюда авторы работы <sup>136</sup> делают вывод, что при современной точности экспериментальных данных в области  $500 \leq m_{\pi\pi} \leq 1000$  МэВ для  $a_0^0$  можно получить только широкую область значений:  $-0,05 < a_0^0 < 0,6 \mu^{-1}$ . Соответственно для  $a_0^2$  получается область значений  $-0,10 < a_0^2 < 0,03 \mu^{-1}$ . Значение  $a_1^1$  получается достаточно стабильным и близким к значению из модели Вайнберга:  $a_1^1 \sim 0,03 \mu^{-3}$ .

Помимо общетеоретического подхода возможен и другой, «расчетно-экспериментальный» вариант метода. В этом случае берут конкретные экспериментальные данные о фазах, и, считая их истинными, ищут аналитическое и унитарное продолжение в околопороговую область, которое должно удовлетворять уравнениям Роя. Этот подход применялся, например, в работе <sup>137</sup>. В качестве экспериментальных данных были взяты  $S_0$ - и  $P_1$ -волновые амплитуды из работы <sup>56</sup> и  $S_0$ -волновые амплитуды из <sup>43</sup> в области  $500 \leq m_{\pi\pi} \leq 1050$  МэВ. Интеграл (35) разбивался на три части:

- 1) околопороговая часть для  $4 < s < 10$ . Значения амплитуд в ней считались неизвестными и менялись в процессе вычисления;
- 2) экспериментальная часть,  $10 \leq s \leq 60$ . В этой области амплитуды задавались и фиксировались;
- 3) область больших масс,  $s > 60$ . Интеграл по этой области вычислялся с помощью Редже-представлений и считался константой.

Для каждого значения  $a_0^0$  методом итераций находилось решение, удовлетворяющее уравнениям (35) и наиболее близкое к экспериментальным точкам. Затем из сравнения решений для разных  $a_0^0$  в экспериментальной области по  $\chi^2$ -критерию находилось оптимальное. Полученные таким методом значения длин рассеяния приведены в следующем разделе.

Здесь были кратко рассмотрены методы, используемые обычно для изучения низкоэнергетичного лл-взаимодействия экспериментаторами. С теоретическими аспектами проблемы можно познакомиться в обзоре <sup>115</sup>.

\*) Результаты других фазовых анализов, как правило, согласуются с тем или другим из вышеперечисленных. Так, результаты расчетов группы ЦЕРН — Мюнхен <sup>33</sup> хорошо согласуются с данными <sup>55</sup>. Значения  $\delta^0$ -фазы из работы Батона на  $5^\circ$ — $10^\circ$  ниже, чем в работе Протопопеску, а они, в свою очередь, примерно на столько же ниже значений из работы Эстабрука-Мартина в области  $500 \leq m_{\pi\pi} \leq 900$  МэВ.

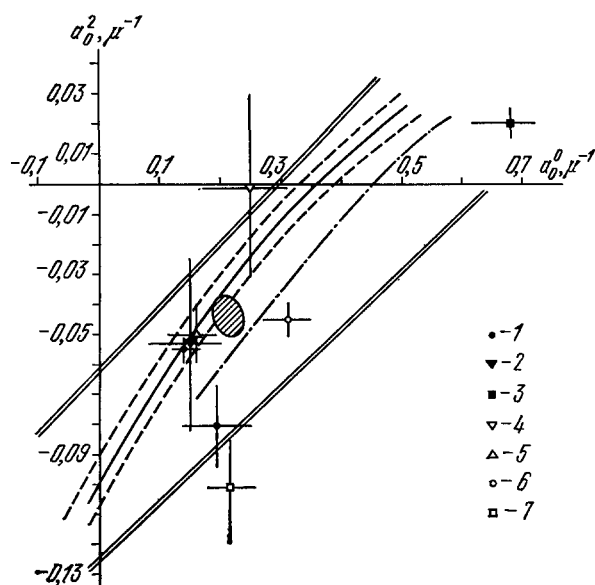


Рис. 13. «Универсальная кривая» на плоскости  $(a_0^0, a_0^2)$ . Двойные линии ограничивают область возможных значений из работы <sup>136</sup>, штрих-пунктирная линия и область между штриховыми линиями — результаты расчетов из той же работы для данных <sup>38</sup> и <sup>28a</sup> соответственно. Заштрихованная область — предсказания модели Вайнберга. Экспериментальные точки: 1 — по <sup>152</sup>, 2 — <sup>137</sup>, 3 — <sup>128</sup>, 4 — <sup>179</sup>, 5 — <sup>128</sup>, 6 — <sup>124</sup>, 7 — <sup>152</sup>.

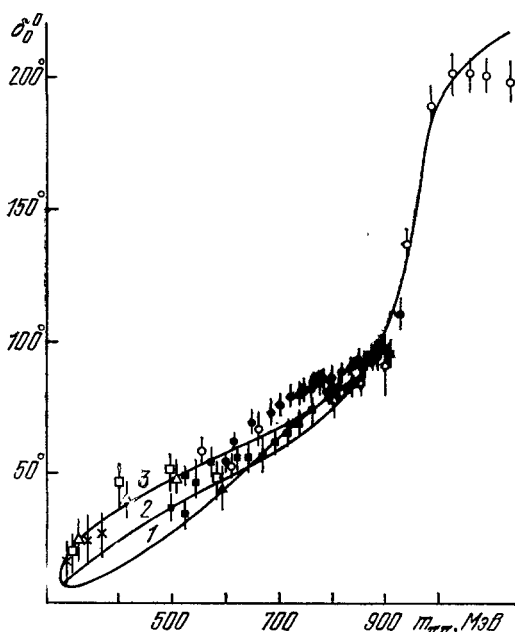


Рис. 14. Пример поведения  $\delta_0^0$ -фазы из расчетов методом уравнений Роя <sup>136</sup> для данных <sup>28a</sup>.

Кривые 1—3 — результаты расчетов при  $a_0^0 = -0,05\mu^{-1}$ ,  $0,2\mu^{-1}$  и  $0,6\mu^{-1}$  соответственно. Для сравнения приведены результаты других фазовых анализов.



# 8. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

## а) Длины рассеяния

Рассмотрим подробнее вопрос о значениях длин  $\pi\pi$ -рассеяния, известных к настоящему времени. Начнем с наиболее важных и относительно больших S-волновых длин рассеяния  $a_0^0$  и  $a_0^2$ .

Задача определения значения  $a_0^0$  ставилась в большинстве работ по изучению  $\pi\pi$ -взаимодействия при низких энергиях. Несмотря на это, положение долгое время оставалось неясным. Теоретические работы в основном дают значения, заключенные в пределах  $0,10 < a_0^0 < 0,25\mu^{-1}$ <sup>138-142</sup>, т. е. близкие к предсказанию «модели мягких пионов» Вайнберга<sup>143</sup>:  $a_0^0 \sim 0,2\mu^{-1}$ . Однако есть и исключения. Так, в работе<sup>144</sup>, выпол-

Таблица II

Реакция	Метод получения длин	$a_0^0, \mu^{-1}$	$a_0^2, \mu^{-1}$	Литература
1. Из фаз в области $m_{\pi\pi} > 400$ МэВ				
$\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$	Эффективный радиус	$0,44 \pm 0,10$	—	126
$\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$	» »	$0,35 \pm 0,06$ $-0,04$	—	35
$\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^-\Delta^{++}$	» »	$0,34 \pm 0,18$	—	55
$\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$	» »	$0,39 \pm 0,07$	—	127
$\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$	Релятивистский эффективный радиус	$0,67 \pm 0,06$	—	128
$\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^0p$	То же	—	$-0,052 \pm 0,005$	286
$\pi^\pm p \rightarrow \pi^\pm \pi^0 p$	Эффективный радиус	—	$-0,131 \pm 0,014$	148
$\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^+n$	» »	—	$-0,16 \pm 0,03$	48
$\pi^-n \rightarrow \pi^-\pi^+p$	» »	—	$-0,092 \pm 0,015$	59
2. Из K-распадов				
$K \rightarrow 3\pi$	Полуфеноменологическая модель	$0,59 \pm 0,07$	$-0,20 \pm 0,03$	124a
$K \rightarrow \pi\text{лев}$	Эффективный радиус в пренебрежении P-волновой	$0,17 \pm 0,13$		149
$K \rightarrow \pi\text{лев}$	То же	$0,55 \pm 0,27$		150
$K \rightarrow \pi\text{лев}$	Аппроксимация по модели <sup>133</sup>	$0,28 \pm 0,05$		132
3. Из $\pi N \rightarrow \pi\pi N$ вблизи порога				
$\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$	Изобарная модель	$-0,06 < a_0^0 < 0,03$		120
$\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$	» »	$0,20 \pm 0,08$ $-0,10$		119
$\pi N \rightarrow \pi\pi N$	Расчет эффективным лагранжианом	$0,17 \pm 0,01$	$-0,045 \pm 0,005$	124a
$\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$	Учет треугольного графика	$0,33 \pm 0,08$		122
$\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$	То же	$0,05 \pm 0,01$		123
$\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$	Эффективный радиус	$0,24 \pm 0,10$		116
4. Другими методами				
$\pi N \rightarrow \pi N$	Дисперсионные соотношения	$-0,15 < a_0^0 < 0,10$		151
$\pi N \rightarrow \pi N$	То же	$0,25 \pm 0,09$		146
$\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^-\Delta^{++}$	Уравнения Роя	$0,15 \pm 0,07$	$-0,053 \pm 0,028$	137
$K_{e4}$ и $\pi^-p \rightarrow \pi^-\pi^+n$	Формула подпорогового нуля	$0,23 \pm 0,05$		131
$\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^+n$	То же		$-0,06 \pm 0,07$	131
$\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^+n$	» »		$-0,07 \pm 0,03$	176

ненной на основе модели Венециано, получена зависимость величины  $a_0^0$  от  $\Gamma_\rho$ . При ширине  $\rho$ -резонанса  $\Gamma_\rho \sim 150$  МэВ  $a_0^0 \sim 0,4 \mu^{-1}$ . В работе <sup>145</sup>, выполненной по материалам  $K \rightarrow 2\pi$  распадов с использованием кабиббовской структуры гамильтониана слабого взаимодействия, получен

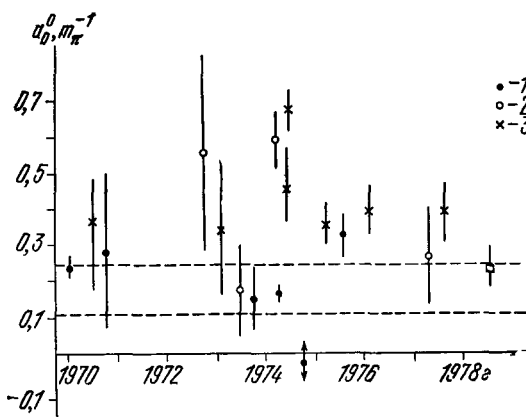


Рис. 15. Сводка экспериментальных данных по  $a_0^0$  из работ <sup>30, 35, 55, 120, 122, 124a, 126-128, 131, 132, 140, 150, 174, 175, 180</sup>.

1 — данные из изучения  $\pi N \rightarrow \pi N$  около порога, 2 — из  $K_{e4}$ -распадов, 3 — результаты применения формулы эффективного радиуса.

результат  $a_0^0 \sim 0,6 \mu^{-1}$ . Еще большие разногласия существовали среди экспериментальных результатов (см. табл. II и рис. 15). Даже работы, выполненные с использованием одной и той же методики, часто давали несогласующиеся результаты. Еще сравнительно недавно область возможных экспериментальных значений была столь широка ( $0,05 < a_0^0 < 0,8 \mu^{-1}$ ), что оставался неопределенным даже знак  $a_0^0$ . Однако в последнее время, по-видимому, достигнуто существенное продвижение вперед. Оно связано как с повышением точности экспериментов, так и с появлением работ, подтверждающих существование близкого к физической области подпорогового нуля в S-

амплитуде (<sup>131, 116</sup>; см. гл. 7). Сейчас стало ясно, что большая величина  $a_0^0$ , получаемая при использовании формулы эффективного радиуса для фаз при  $m_{\pi\pi} > 500$  МэВ, объясняется завышением

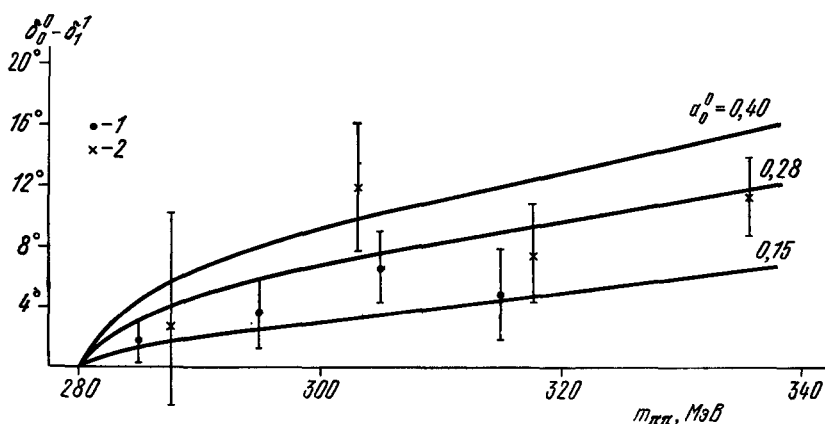


Рис. 16. Значения  $\delta_0^0 - \delta_1^0$  из работы <sup>116</sup> (1) и <sup>132</sup> (2).

Сплошные линии — результаты расчетов <sup>136</sup>.

значения длины рассеяния в этом методе. Большинство же работ, выполненных в последнее время другими методами, дают согласующиеся результаты: последняя работа по  $K_{e4}$ -распаду <sup>132</sup>, применение дисперсионных соотношений к данным фазового анализа  $\pi N$ -рассеяния <sup>146</sup>, работа с применением формулы эффективного радиуса к фазам в околопороговой области  $m_{\pi\pi} \leq 320$  МэВ <sup>116</sup> и расчеты с использованием формулы подпорогового нуля <sup>131</sup> — все они дают величину  $a_0^0 \sim (0,23 - 0,28) \mu^{-1}$ . На рис. 16 приведено сравнение экспериментальных значений

$(\delta_0^0 - \delta_1^1)$  с расчетами уравнений Роя. Видно, что более предпочтительным выглядит решение с  $a_0^0 \sim 0,25 \mu^{-1}$ . Меньшую величину дают некоторые работы по изучению сечений  $\pi N \rightarrow \pi \pi N$  вблизи порога<sup>120, 123</sup>, но, как правило, они модельно-зависимы. Несколько особняком стоят лишь результаты ряда работ<sup>52-54</sup> по изучению процесса  $\pi^- \pi^+ \rightarrow \pi^0 \pi^0$  из реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^0 p \pi^0$ , в которых были получены большие значения  $\delta_0^0$ -фазы у порога, приводящие к большим длинам рассеяния  $a_0^0 \sim (0,6-0,8) \mu^{-1}$ . Скорее всего, это расхождение объясняется трудностями соответствующих экспериментов. Во всяком случае, авторы аналогичной работы<sup>147</sup> большой  $\delta_0^0$ -фазы у порога не видели. Видимо, проведение точного эксперимента по изучению  $\pi^0 \pi^0$ -состояния при низких энергиях является сейчас одной из самых актуальных задач физики  $\pi\pi$ -взаимодействия.

$S$ -волновые длины сильно скоррелированы между собой. В настоящее время большинство физиков верят в правильность «универсальной кривой» для  $a_0^0$  и  $a_0^2$  (см. гл. 7 и рис. 13). Из нее следует, что если  $0,2 < a_0^0 < 0,3 \mu^{-1}$ , то  $a_0^2$  должна быть мала и отрицательна. Теоретические работы на основе модели «мягких пионов» предсказывают величину  $a_0^2 \approx (-0,05) - (-0,04) \mu^{-1}$ . Анализы с использованием дисперсионных соотношений расширяют область возможных значений  $a_0^2$  до  $-0,2 < a_0^2 < 0,03 \mu^{-1}$ <sup>138</sup> или до  $-0,12 < a_0^2 < 0,04 \mu^{-1}$ <sup>136</sup>. Экспериментальные работы дают, как правило, отрицательные значения  $a_0^2$ , но разброс достаточно велик (см. табл. II). Ясно, что если подтвердится наличие близкого подпорогового нуля в  $S_2$ -волне, то результаты работ с применением эффективного радиуса окажутся ненадежными и опираться можно будет лишь на результаты работ<sup>131, 176</sup> с применением формулы подпорогового нуля и расчеты по методу уравнений Роя<sup>137</sup>.

На первый взгляд, наиболее благополучно обстоит дело с  $P$ -волновой длиной рассеяния  $a_1^1$ . Действительно, теоретические предсказания по модели «мягких пионов» дают область значений  $0,028 < a_1^1 < 0,035 \mu^{-3}$ . Применение дисперсионных соотношений расширяет эти границы до  $0,02 < a_1^1 < 0,05 \mu^{-3}$ ,<sup>136, 138, 152</sup> но практически не меняют среднего значения. Экспериментальные величины  $a_1^1$ , полученные в приближении эффективного радиуса, также концентрировались около среднего значения  $a_1^1 \sim 0,03 \mu^{-3}$  (см., например,<sup>30</sup> в которой получено  $a_1^1 = (0,05 \pm \pm 0,03) \mu^{-3}$  и<sup>128</sup>, где  $a_1^1 = (0,027 \pm 0,002) \mu^{-3}$ ). Применение «экспериментального» метода расчета по уравнениям Роя<sup>137</sup> дало величину  $a_1^1 = (0,036 \pm 0,002) \mu^{-3}$ .

Однако в 1974 г. на Бостонской конференции Мэннер<sup>126</sup> доложил, что в группе ЦЕРН — Мюнхен получена длина рассеяния  $a_1^1 \sim 0,10 \mu^{-3}$ . При этом применялось обычное приближение эффективного радиуса к фазам, найденным из большого статистического материала по реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ p$  при  $p_\pi = 7$  ГэВ/с. Если считать этот результат верным, то нужно пересмотреть устоявшееся представление о гладком поведении  $P$ -волны вблизи порога. На рис. 17 показаны экспериментальные значения функции  $2k^3 \operatorname{ctg} \delta_1^1/m_{\pi\pi}$  из работы ЦЕРН — Мюнхенской группы<sup>128</sup> и теоретические кривые, рассчитанные методом уравнений Роя<sup>153</sup>. Видно, что экспериментальные точки не согласуются с расчетами, показывая резкий спад при малых  $m_{\pi\pi}$ . Чтобы объяснить такое поведение  $P$ -волны у порога, нужно допустить существование некой особенности, возможно, резонансного характера, вблизи нефизической области. Для подтверждения или опровержения результатов Мэннера нужны новые эксперименты. В частности, разрешить этот вопрос могли бы работы по  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ -реакции в интересующей области, вблизи порога. Пока же принято считать, что длина  $a_1^1 \approx 0,035 \mu^{-3}$ .

Длины рассеяния волн с  $l \geq 2$  малы. Теоретические расчеты<sup>136-138, 141, 152</sup> дают величины, близкие к следующим:  $a_2^0 \sim 16 \cdot 10^{-4} \mu^{-5}$ ,  $a_2^2 \sim 2 \times 10^{-4} \mu^{-5}$ ,  $a_3^1 \sim 10^{-4} \mu^{-7}$ . Экспериментальных работ немного и точность их невысока, хотя в целом они не противоречат теории. В качестве примера можно привести результаты расчетов методом уравнений Роя для данных из  $K_{e4}$ -распада<sup>154</sup>:  $a_2^0 = (17 \pm 3) \cdot 10^{-4} \mu^{-5}$ ;  $a_2^2 = (1,3 \pm 3) \cdot 10^{-4} \mu^{-5}$ ,

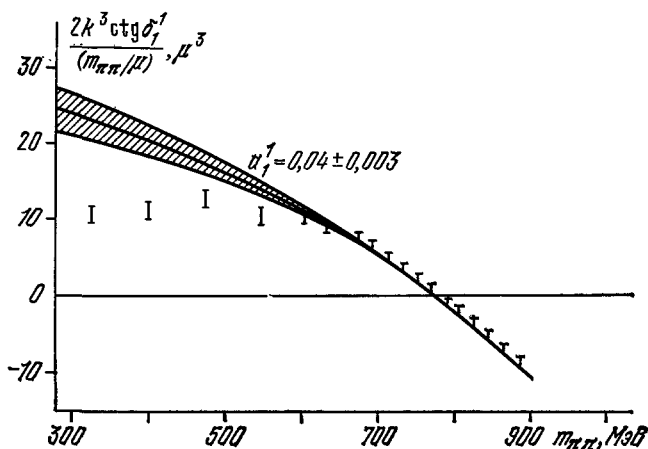


Рис. 17. Поведение  $P_1$ -волны вблизи порога.

Экспериментальные значения функции  $-2k^3 \operatorname{ctg} \delta_1^1 / m_{\pi\pi}$  из работы<sup>156</sup>, заштрихованная область соответствует  $a_1^1 = 0,040 \pm 0,003 \mu^{-5}$  из расчетов методом уравнений Роя<sup>153</sup>

$a_3^1 = (0,6 \pm 0,2) \cdot 10^{-4} \mu^{-7}$ , а также полученное недавно в приближении эффективного радиуса по данным  $\pi^+\pi^+ \rightarrow \pi^+\pi^+$  значение  $a_2^2 = (3,8 \pm \pm 1,4) \cdot 10^{-4} \mu^{-5}$ <sup>176</sup>. Видимо, качественно вопрос о длинах рассеяния с  $l = 2, 3$  можно считать решенным, хотя количественные уточнения, конечно, возможны.

#### б) Область упругого взаимодействия а и скалярные резонансы

Строго говоря, область упругого взаимодействия ограничена  $4\pi$ -порогом,  $m_{\pi\pi} = 560$  МэВ. Однако на практике оказывается, что  $\pi\pi$ -взаимодействие можно считать упругим до  $m_{\pi\pi} \sim 1$  ГэВ. Так, в работе<sup>55</sup> авторы оценивали неупругость для реакции  $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^- \Delta^{++}$  в области  $m_{\pi\pi} < 1$  ГэВ как  $|1 - \eta_l^I| \leq 2\%$ . При современной точности эксперимента эффектами такого порядка можно пренебречь и рассматривать взаимодействие в этой области как полностью упругое.

Начнем рассмотрение с волн, имеющих  $I = 2$ . Фазы для этих волн плавно меняются с дипионной массой и невелики по абсолютной величине. Информацию о них извлекают из реакций типа  $\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^+\pi^-$  и  $\pi^-\pi^- \rightarrow \pi^-\pi^-\pi^+$ . В большинстве анализов предполагалось, что  $\pi\pi$ -рассеяние с  $I = 2$  описывается упругими  $S_2$ - и  $D_2$ -волнами. Выше 1 ГэВ, видимо, должны сказываться неупругие эффекты, но информации об этом сейчас мало. На рис. 18 приведены экспериментальные значения  $\delta_0^2$ - и  $\delta_2^2$ -фаз. Видно, что в целом согласие между данными разных работ неплохое. Однако из-за того, что информацию об этих волнах вводят и фиксируют при изучении  $\pi^+\pi^-$ -взаимодействия (основного и наиболее точного источника информации в настоящее время), хотелось бы знать значение фаз

для  $S_2$ -волны с точностью  $\pm 2^\circ$ , а для  $D_2$ -волны —  $\pm 0,5^\circ$ . Здесь уместно еще раз напомнить, что из-за интерференционных эффектов учет волн с  $l = 2$  нужен и там, где амплитуды этих волн малы, для  $m_{\pi\pi} < 1$  ГэВ<sup>376, 44</sup>. Обращает на себя внимание тот факт, что  $\delta_0^2$  — фаза, полученная

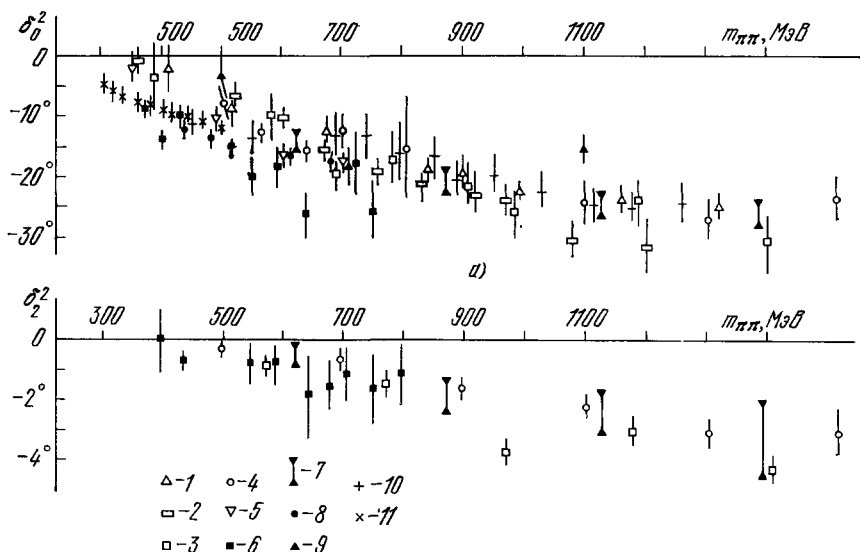


Рис. 18. Экспериментальные значения по  $\delta_0^2$ -фазе (а) и по  $\delta_2^2$ -фазе (б). Светлые значки — данные о  $\pi^+\pi^-$ -рассеянии: 1 — <sup>86</sup>, 2 — <sup>89</sup>, 3 — <sup>82</sup>, 4 — <sup>81</sup>, 5 — <sup>88</sup>; черные значки — о  $\pi^+\pi^+$ -рассеянии: 6 — <sup>40</sup>, 7 — <sup>47</sup>, 8 — <sup>48</sup>, 9 — <sup>46</sup>; 10 — значения из анализа  $\pi^+\pi^0$ -рассеяния<sup>44</sup>, 11 — данные работы<sup>39</sup>.

из анализа  $\pi^+\pi^-$ -состояния (светлые значки на рис. 18, а), характеризуется меньшими значениями вблизи порога и большим коэффициентом наклона по сравнению с  $\pi^+\pi^+$ -состоянием (черные значки). Возможно, это говорит о систематической ошибке, появляющейся из-за различного фона неОРЕ-диаграмм для исходных реакций.

На рис. 19 показаны результаты для  $\delta_1^1$ -фазы в области  $500 < m_{\pi\pi} < 1000$  МэВ. Видно, что согласие экспериментальных данных между собой хорошее. Сплошная кривая на рисунке — результат энергетически-зависимого анализа брейт-вигнеровским резонансом и фоном из работы<sup>55</sup>.  $\rho$ -резонанс с параметрами  $m_\rho = (773 \pm \pm 3)$  МэВ и  $\Gamma_\rho = 152 \pm 3$  МэВ<sup>155</sup> практически полностью определяет  $\delta_1^1$ -фазу в этой области и, пожалуй, никаких вопросов здесь не возникает.

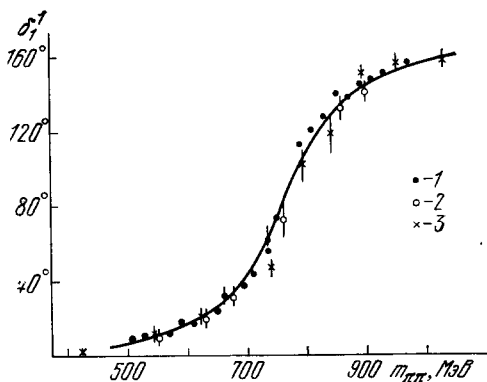


Рис. 19.  $P_1$ -волновая фаза из работ<sup>376</sup> (1),<sup>55</sup> (2),<sup>44</sup> (3). Сплошная линия — результат энергетически-зависимого анализа<sup>55</sup>.

Наибольший интерес в фазовом анализе  $\pi\pi$ -взаимодействия ниже 1 ГэВ вызывает поведение  $\delta_0^0$ -фазы и вопрос существования скалярных резонансов. Долгое время не было надежно определенных значений  $\delta_0^0$ -фазы в области  $2\mu_\pi < m_{\pi\pi} \leq 500$  МэВ. После появления работ по  $K_{e4}$ -распаду

<sup>132</sup> и работы <sup>1786</sup>, в которой проведено сравнение обработанных единым методом данных реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ p$  вблизи порога и при  $p_\pi = 4,5$  ГэВ/с, видимо, можно сказать, что околопороговое поведение  $\delta_0^0$ -известно (см. рис. 20). В области больших  $m_{\pi\pi}$ , как уже упоминалось в гл. 6, из-за того, что  $\delta_0^0$ -фазу приходится извлекать из коэффициента при изотропном члене, возникает неоднозначность вида  $\delta_0^0 = \delta_1^1 + \left(\frac{\pi}{2} - \delta_0^0\right)$  — старая «up-down»-проблема. До  $m_{\pi\pi} \sim 700$  МэВ она разрешается с помощью данных о сечении  $\sigma_{\pi\pi}$ , но в области  $\rho$ -резонанса, где  $\sigma_\rho$  существенно

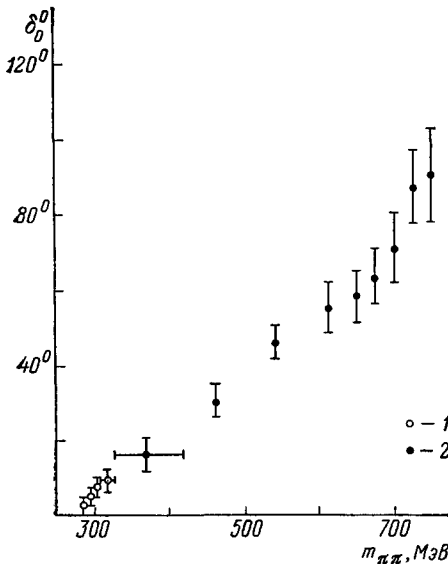


Рис. 20. Значения  $\delta_0^0$ -фазы от порога до  $m_{\pi\pi} = 750$  МэВ, полученные по реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ p$ .  
1 — величины из работы <sup>110</sup>, 2 — из работы <sup>178</sup>.

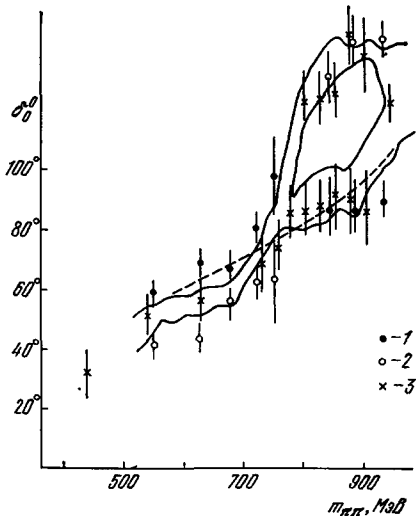


Рис. 21.  $\delta_0^0$ -фаза в упругой области. 1, 2 — два решения из работы <sup>55</sup>, 3 — значения из работы <sup>38a</sup>, штриховая кривая — энергетически-зависимое решение из работы <sup>38</sup>, область между сплошными линиями — область возможных значений из <sup>37b</sup>.

больше  $\sigma_s$ , этого сделать не удастся. Остаются две возможности (рис. 24): 1) нижнее («down») решение, когда  $\delta_0^0$ -фаза от  $\sim 80^\circ$  при  $m_{\pi\pi} \approx 770$  МэВ медленно растет до  $\sim 90^\circ$  при  $m_{\pi\pi} \approx 950$  МэВ, а затем резко возрастает до  $\sim 150^\circ$  при  $K\bar{K}$ -пороге; 2) верхнее решение, в котором  $\delta_0^0$  быстро растет от  $\sim 60^\circ$  при  $m_{\pi\pi} = 700$  МэВ до  $130^\circ$  при 800 МэВ, а затем меняет наклон и медленно возрастает до  $\sim 150^\circ$ . Второе решение оставляет возможность для существования  $\epsilon$  (750)-резонанса в  $S_0$ -волне.

Нельзя сказать, что выбор истинного решения уже сделан окончательно. Существуют работы, в которых предпочитали нижнее решение <sup>33, 55, 37</sup>, есть работы, говорящие в пользу верхнего <sup>25, 156, 157</sup>. Однако в последнее время становится все более общепринятым выбирать как физическое нижнее («down») решение. Рассмотрим аргументы в его пользу.

Как уже говорилось, выбор решения в области  $m_{\pi\pi} < 1$  ГэВ связан с вопросом о существовании  $\epsilon$  (700)-мезона. Проблему существования этого мезона обсуждают давно, в некоторых работах по фазовому анализу даже находили его параметры.

Так, в известной работе Батона и др. <sup>28</sup> было определено:  $m_\epsilon = 736$  МэВ,  $\Gamma_\epsilon = 181$  МэВ. Особенности  $S_0$ -волны в этой области подробно

обсуждались, например, на конференции в Филадельфии. Однако в работах, посвященных изучению массовых спектров мезонов,  $\varepsilon$ -мезон не был обнаружен (см., например, <sup>159</sup>). имеет франко-итальянская работа по изучению реакции  $d + \pi^- \rightarrow X$  <sup>160</sup>. Изучая с хорошей точностью чистое, без примесей  $d\pi^-$  (кроме  $D_0$ -волны)  $S_0$ -состояние, авторы не видели сигнала от  $\varepsilon$ . В работах по фазовому анализу в этой области находят полюс в  $S_0$  туде, но далеко от физической оси <sup>33</sup>, <sup>55</sup>. Так, в работе <sup>55</sup>  $m_\varepsilon = (1 - i \cdot 320)$  МэВ. Конечно понятие резонанса строго не определено

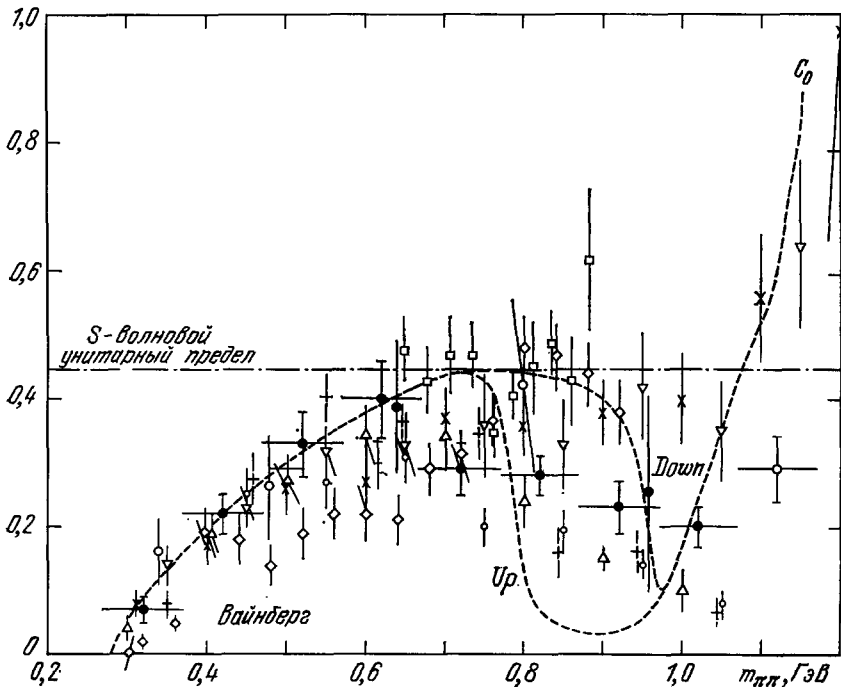


Рис. 22. Поведение величины  $C_0(m_{\pi\pi})$  из экспериментов по  $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0$ -рассеянию.  $C_0$  определяется из  $\sigma_{\pi\pi} = 2\pi\lambda^2 C_0$ , т. е.  $C_0 = |A_s|^2$ . Рисунок взят из <sup>52</sup>, темные кружки — значения из этой работы.

гл. 4), но, видимо, если использовать принятое значение этого слова, то надо признать отсутствие  $\varepsilon$ -мезона в  $S_0$ -волне в области  $\rho$ -резонанса.

Решить «up-down»-проблему могут данные о  $\pi^0\pi^0$ -сечении. Так как для этой реакции нечетные  $l$  запрещены, то для области малых  $m_{\pi\pi}$ , где D-волной можно пренебречь,  $\sigma(\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0) \sim |A_s|^2$ , т. е. прямо из сечения можно определять  $\delta_0^0$ . К сожалению, современная точность экспериментов по изучению  $\pi^0\pi^0$  еще не позволяет сделать окончательный выбор. На рис. 22 приведены экспериментальные величины  $C_0 = |A_s|^2$  из <sup>52</sup> и кривые, соответствующие «up» и «down»-решениям. В работе <sup>52</sup> сечения  $\sigma(\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0)$  были получены в области  $550 < m_{\pi\pi} < 950$  МэВ методом экстраполяции Чу — Люу. Полученные данные согласуются с результатами фазовых анализов в области  $m_{\pi\pi} < 750$  МэВ, при  $m_{\pi\pi} > 750$  МэВ полученные величины не описываются ни «up», ни «down» решениями. В то же время работы Кэрролла и др. <sup>60</sup>, и особенно Апеля и др. <sup>50</sup> не показывают резкого уменьшения  $\sigma_s$  при  $m_{\pi\pi} \approx 700$  МэВ, которое следует из верхнего решения.

Большая часть энергетически-зависимых<sup>55</sup> и модельно-зависимых анализов<sup>27, 34, 60</sup> предпочитают нижнее решение. В работе<sup>135</sup> показано, что попытка описать верхнее решение в расчетах по уравнениям Роя приводит к очень большим значениям  $\chi^2$  и должна быть оставлена.

Особую роль в выборе решения сыграло обнаружение и изучение особенностей поведения  $S_0$ -волны вблизи  $K\bar{K}$ -порога. Действительно, из рис. 8, а видно, что  $\langle Y_1^0 \rangle$  для  $\pi^-\pi^+$ -системы показывает резкий, почти до нуля, спад при  $K\bar{K}$ -пороге. В ненормализованных гармониках (см. рис. 9) в той же области ясно видно плечо. Гармоника  $\langle Y_1^0 \rangle$  описывает интерференцию  $S$ - и  $P$ -волн. Так как для  $\pi^-\pi^0$ -состояния спада в  $\langle Y_1^0 \rangle$  нет (см. рис. 8, б), как нет и особенностей в  $\langle Y_2^0 \rangle$ , описывающей  $P_1$ -волну, то естественно предположить, что особенности поведения  $\langle Y_1^0 \rangle$  для  $\pi^-\pi^+$ -системы связаны с  $S_0$ -волной. Полагая  $\delta_1^1 \approx 160^\circ$  (см. рис. 19), легко видеть, что зануление  $\langle Y_1^0 \rangle$  при  $K\bar{K}$ -пороге требует  $\delta_0^0 \sim 180^\circ$  при  $m_{\pi\pi} = 2m_K$ , т. е. нижнего решения.

Итак, повторим кратко основные аргументы в пользу выбора нижнего решения:

1. Верхнее решение предсказывает спад в сечении  $\pi^0\pi^0$ -состояния, что, видимо, не подтверждается существующими экспериментальными данными<sup>50, 52, 60</sup>.

2. Нижнее решение позволяет объяснить особенности поведения  $S_0$ -волны вблизи  $K\bar{K}$ -порога<sup>31, 161</sup>.

3. Поиски  $\varepsilon(700)$ -мезона, соответствующего верхнему решению, в массовых спектрах не увенчались успехом<sup>159, 160</sup>.

4. Не удается описать верхнее решение в подходе уравнений Роя<sup>137</sup>, в модельно-зависимых и энергетически-зависимых анализах получают нижнее решение<sup>27, 34, 55, 60</sup>.

Теперь остановимся более подробно на особенностях при  $K\bar{K}$  (980)-пороге. Ее находили практически все экспериментаторы, работающие в этой области. Наиболее подробно аномалия в  $S_0$ -волне при  $K\bar{K}$ -пороге была рассмотрена в работах<sup>106, 161, 162</sup>. Основные черты особенности в этой области следующие:

1. Резкий рост сечения процесса  $K\bar{K}$ -рождения, проявляющийся и в резком уменьшении параметра упругости  $\eta_0^0$  от 1 до  $\sim 0,5$ :

$$\sigma_0^0(\pi\pi \rightarrow K\bar{K}) = 2\pi\lambda^2(1 - \eta_0^0)^2. \quad (38)$$

2.  $\sigma_{\pi^+\pi^-}$  имеет спад между 900 и 990 МэВ, говорящий о том, что при  $m_{\pi\pi} \approx 900$  МэВ  $S_0$ -амплитуда должна быть у вершины диаграммы Армана, т. е.  $\delta_0^0 \approx 90^\circ$ .

3. Зануление  $\langle Y_1^0 \rangle$  при  $K\bar{K}$ -пороге, что говорит о близости  $\delta_0^0$  к  $180^\circ$  при  $m_{\pi\pi} = 2m_K$ .

Прохождение фазы  $\delta_0^0$  через особую точку (кратную  $90^\circ$ ) и резонансное поведение  $\eta_0^0$  требует допущения о существовании некоторого резонансного состояния,  $S^*$ -мезона, ниже  $K\bar{K}$ -порога или виртуального связанного состояния выше  $m_{\pi\pi} = 2m_K$ . На большом статистическом материале ( $\sim 60$  тыс.  $\pi^+\pi^-$ -событий из реакции  $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^-\pi^+\pi^0$  и  $\sim 500$  событий реакции  $\pi^-\pi^+ \rightarrow K^+K^-\pi^-$ ) эта область изучалась в работе<sup>41</sup>. Был явно виден резкий рост сечения  $\pi^-\pi^+ \rightarrow K^+K^-$  вблизи порога и резкий спад в  $\pi^+\pi^-$ -массовом спектре вблизи 950 МэВ. Этот эффект анализировался через параметры  $S^*$ -резонанса как с помощью обычных брейт-вигнеровских формул, так и с помощью формализма  $K$ -матриц. Получены согласующиеся результаты. Параметры  $S^*$ -резонанса из этой и других работ



приведены в табл. III. Вопрос о существовании скалярных резонансов ( $\epsilon$ ,  $S^*$ ) пока еще не разрешен окончательно.

Как будет видно из последующего,  $\delta_0^0$ -фаза вновь проходит через особую точку и в области f-резонанса ( $\epsilon'$ -особенность). Петля на диаграмме

Таблица III

Авторы	Год	Масса $S^*$ , МэВ	Ширина $S^*$ , $\Gamma = 2 \operatorname{Im} E_R$ , МэВ	Литера- тура
B. Hyams et al.	1973	$1007 \pm 20$	$30 \pm 10$	33
S. D. Protopopescu et al.	1973	$997 \pm 5$	$54 \pm 16$	55
P. Estabrooks, A. D. Martin	1973	997	10	109
G. Grayer et al.	1973	$1012 \pm 6$	$34 \pm 10$	107
D. M. Binnie et al.	1973	$987 \pm 7$	$48 \pm 14$	161
M. Buttram et al.	1976	$970 \pm 5$	$44 \pm 10$	162
R. J. Leeper et al.	1977	$969 \pm 5$	$30 \pm 8$	41

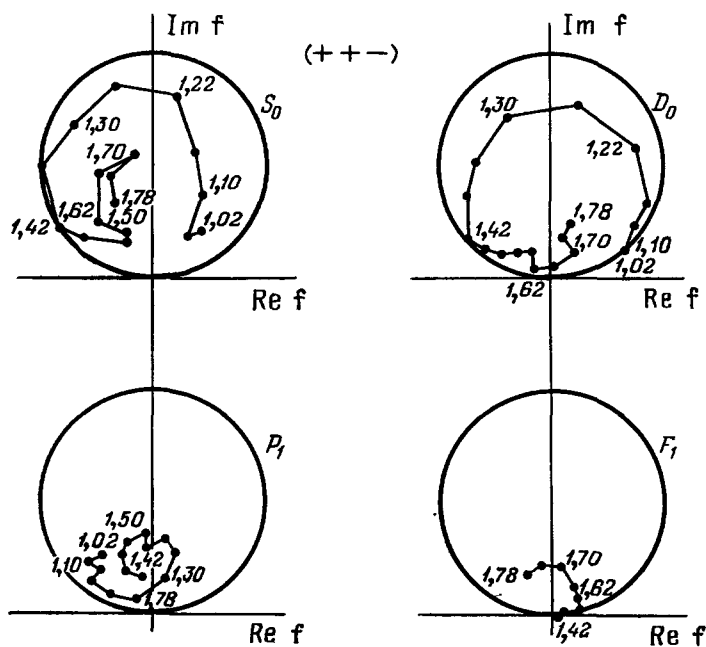
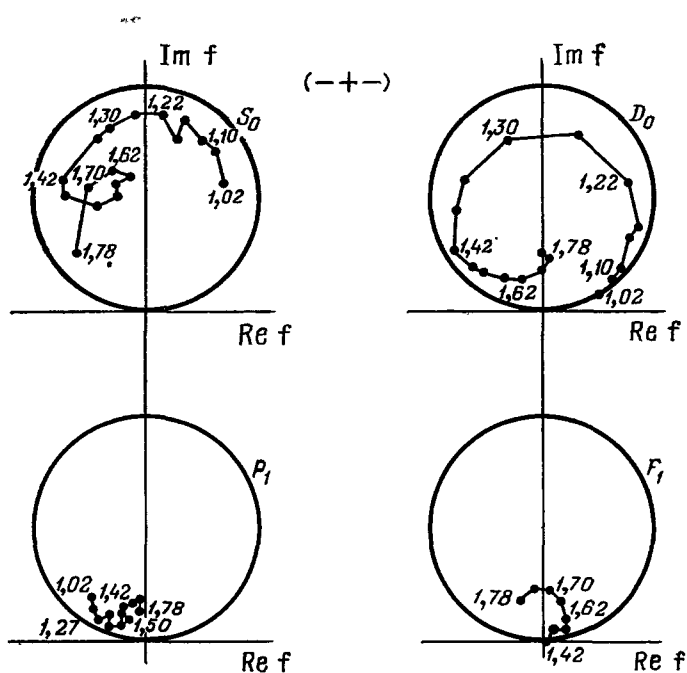
Аргана недостаточна, чтобы однозначно говорить о  $\epsilon'$ -резонансе, но в ряде работ даже находили его параметры. Так, в  $^{60} m_{\epsilon'} = 1250 \pm 40$  МэВ;  $\Gamma_{\epsilon'} = (300 \pm 100)$  МэВ. Морган <sup>164</sup> высказал предположение, что прохождение  $\delta_0^0$ -фазы через  $90^\circ$  около 900 МэВ и через  $270^\circ$  около 1250 МэВ является проявлением широкого ( $\Gamma \sim 600$  МэВ) и упругого ( $\eta_0^0 \sim 1$ )  $\epsilon$ -резонанса, с массой  $\sim 1200$  МэВ, сопровождающего  $S^*$  (1000)-мезон. Подробное обсуждение этого вопроса имеется в <sup>17</sup>. В недавней работе сотрудников Института математики СО АН СССР <sup>96</sup> высказывалось мнение, что  $S^*$  может быть обусловлен пороговым эффектом («каспом»). В этом случае  $\delta_0^0$ -фаза  $\pi\pi$ -рассеяния выше  $K\bar{K}$ -порога не возрастает резко, а продолжает оставаться  $\sim 90^\circ$ , имея всплеск при  $m_{\pi\pi} = 2m_K$ . Чтобы окончательно разобраться с интерпретацией особенности  $S_0$ -волны в этой области, нужно значительно повысить точность эксперимента.

#### в) Область неупругого взаимодействия.

##### Проблема выбора истинного решения

Выше  $m_{\pi\pi} = 1$  МэВ нельзя пренебрегать неупругими каналами. Экспериментально показано, что и  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$  и  $\pi\pi \rightarrow 4\pi$  имеют достаточно большое сечение в этой области и их необходимо учитывать. Это приводит к резкому усложнению фазового анализа. В гл. 6 говорилось о том, что если ограничиться числом волн с  $l \leq 3$ , то возникают  $2^4 = 16$  возможных вариантов поведения фаз, 8 решений. Половину из них можно отбросить, если считать, что  $D_0$ - и  $F_1$ -волновые фазы положительны и описываются брейт-вигнеровскими резонансами (доказательство такой возможности можно найти, например, в <sup>165</sup>). Тогда остается два возможных решения в области f-резонанса и четыре — в области g-резонанса. Эти решения были найдены в работе Хайамса и др. <sup>40</sup> и показаны на рис. 23. Классификация решений была проведена по знаку мнимой части  $\operatorname{Im} Z_i(m_{\pi\pi})$  (см. формулу (31)) при  $m_{\pi\pi} = 1500$  МэВ. Так как  $\operatorname{Im} Z_3 < 0$  для  $m_{\pi\pi} < 1,8$  ГэВ, то имеются четыре возможности:  $(- - -)$ ,  $(+ - -)$ ,  $(- + -)$  и  $(+ + -)$ . В этой работе были использованы данные группы ЦЕРН — Мюнхен по реакции  $\pi^- p \rightarrow \pi^- \pi^+ n$ . Примерно в то же время были опубликованы результаты работы Эстабрука и Мартина <sup>37в</sup> по изучению той же реакции. Они также получили четыре возможных решения (A, B, C, D), отличающиеся от решений работы Хайамса лишь деталями. В работе был сделан вывод о невозможности выбрать решение только из данных по  $\pi^- \pi^+ \rightarrow \pi^- \pi^+$ , хотя авторы отмечали, что решение типа





ных амплитуд в области  $1 < m_{\pi\pi} < 1,8$  ГэВ из работы <sup>36</sup>.  
 а) решение  $(-+-)$ , б) решение  $(++-)$ .



ности эксперимента недостаточны, чтобы окончательно решить, согласуются ли данные из фоторождения с результатами фазовых анализов. Сравнивая поведение фаз для решений Хайамса с данными по  $\pi^-\pi^0 \rightarrow \pi^-\pi^0$  <sup>27</sup>, Шимада <sup>165</sup> сделал вывод о несоответствии решения типа  $(+ - -)$  эксперименту. Однако расхождения не выглядят убедительными, если принять во внимание невысокую точность данных из <sup>27</sup> и, на наш взгляд, этот вывод является преждевременным. В недавней работе по изучению  $\pi^-p \rightarrow \pi^0\pi^0p$  при  $p_\pi = 25$  ГэВ/с <sup>168</sup> была определена величина S-волны относительно известной D-волны. Получено два решения. В одном из них сильно нарушается унитарность выше 1200 МэВ. Второе решение содержит почти упругую до  $m_{\pi\pi} = 1450$  МэВ  $S_0$ -волну с резонансом около 1300 МэВ. Это решение ближе к  $(- - -)$ -типу, хотя вряд ли можно с уверенностью говорить о несогласии с  $(+ - -)$ -вариантом. Видимо, сейчас можно сказать о том, что мы представляем ход фазовых кривых лишь до  $m_{\pi\pi} \sim 1400$  МэВ. Далее есть несколько возможных решений, выбрать истинное из которых пока не представляется возможным.

В последние годы появились работы, в которых изучается область больших  $m_{\pi\pi}$  из реакции аннигиляции  $\bar{p}p \rightarrow \pi\pi$  <sup>65, 66</sup>. Так, в работе <sup>66</sup> энергетически-зависимым парциально-волновым анализом угловых распределений вторичных пионов в  $\bar{p}p \rightarrow \pi^0\pi^0$  найден резонанс  $J^P = 2^+$  с  $m = 2,15$  ГэВ и  $\Gamma = 250$  МэВ. В обзоре данных из реакции  $\bar{p}p \rightarrow \pi^-\pi^+$  Мартин и Морган <sup>169</sup> отмечали, что амплитудный анализ с использованием требований аналитичности и кроссинг-симметрии дает возможность говорить о существовании резонансов со спином  $J = 0, 1, 2$  и 3 и шириной  $\Gamma \sim 200$  МэВ в области  $m_{\pi\pi} \approx 2,1-2,3$  ГэВ, а также о возможных широких ( $\Gamma \sim 400$  МэВ) образованиях с четным спином  $J = 0, 2, 4$  в области  $m_{\pi\pi} \approx 2,43$  ГэВ. Конечно, речь идет о первых результатах в области больших дипионных масс, не очень хорошо подтвержденных к настоящему времени. В табл. IV приведена сводка лл-резонансов <sup>177</sup>.

Таблица IV

Резонансы в лл-канале

Состояние	$J^{PCIG}$	Масса, МэВ	Ширина, МэВ	Вероятность распада на $2\pi$ , %
$\rho$ (750)	$1^{--}1^+$	$776 \pm 3$	$158 \pm 5$	$\approx 100$
$f$ (1250)	$2^{++}0^+$	$1273 \pm 5$	$178 \pm 20$	$83 \pm 2$
$g$ (1680)	$3^{--}1^+$	$1690 \pm 20$	$180 \pm 30$	24
$h$ (2040)	$4^{++}0^+$	$2040 \pm 20$	$193 \pm 50$	Видели
$S^*$ (980)	$0^{++}0^+$	$993 \pm 3$	$40 \pm 8$	Видели
$\varepsilon$ (900)	$0^{++}0^+$	$\delta_0^0$ -фаза проходит через $90^\circ$ около 900 МэВ и через $270^\circ$ около 1250 МэВ с $\eta_0^0 \approx 1$ . Интерпретация пока не ясна.		
$\varepsilon'$ (1250)	$0^{++}0^+$			
$f'$ (1514)	$2^{++}0^+$	$1516 \pm 12$	$67 \pm 10$	$\approx 0^*$
$\rho'$ (1600)	$1^{--}1^+$	1600	200—600	Видели в $4\pi$

\*) Видели в реакции  $\pi^-p \rightarrow K^+K^-p$ . В фазовых анализах  $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$  не обнаружен.

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За последние годы в изучении физики пион-пионных взаимодействий достигнут весьма заметный прогресс. Этому способствовало и улучшение экспериментальной техники, повышение точности экспериментальных

данных (особенно для канала  $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^-\pi^+$ ), и развитие новых методов фазового анализа, более широкое применение принципов аналитичности, унитарности и кроссинг-симметрии. Сейчас можно сказать, что мы многое знаем о  $\pi\pi$ -рассеянии.

В основном решен вопрос с длинами рассеяния. Видимо, можно сказать, что с точностью  $\sim 15-20\%$  мы знаем поведение фаз в упругой области от порога до  $m_{\pi\pi} \approx 1$  ГэВ. Известны основные характеристики и имеются предпосылки к тому, чтобы выбрать истинное решение в очень сложной области  $1 < m_{\pi\pi} < 1,8$  ГэВ. Найден целый ряд резонансных образований, параметры которых приведены в табл. IV. Начата работа по изучению области высоких энергий,  $m_{\pi\pi} > 2$  ГэВ, получены первые результаты.

Конечно, остались и нерешенные вопросы. К ним относится точное определение длины рассеяния  $P$ -волны  $a_1^1$ , правильная интерпретация аномалии в  $S_0$ -волне вблизи  $K\bar{K}$ -порога, окончательный выбор решения для  $0,7 < m_{\pi\pi} < 1,8$  ГэВ. Хотелось бы знать величины фаз и упругостей с большей точностью.

Какие видны пути для решения этих задач?

1. Нужно увеличить надежность выделения ОРЕ-обмена от других механизмов. Чтобы определять фазы с точностью до нескольких градусов, надо знать, каков вклад фоновых диаграмм при различных энергиях и как он искажает результаты фазового анализа. Особенно важно это для изучения безрезонансных  $\pi\pi$ -состояний, т. е.  $\pi^-\pi^-$  и  $\pi^+\pi^+$ .

2. Для уменьшения неопределенностей и проведения модельно-независимого анализа нужны эксперименты на поляризованной мишени. Полезную информацию могут дать работы по изучению реакций типа  $\pi N \rightarrow \pi\pi\Delta^{++}$  с исследованием угловых распределений продуктов распада  $\Delta^{++}$ -изобары. Это позволяет в принципе выделять амплитуды с определенной спиральностью нуклона, т. е. проводить эксперимент подобно эксперименту на поляризованной мишени. Такие работы уже ведутся<sup>157, 170</sup> и, видимо, их следует развивать.

3. Нужно шире использовать другие источники информации, помимо канала  $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^-\pi^+$ . Так, реакция  $\pi^-\pi^+ \rightarrow \pi^0\pi^0$  поможет определить поведение  $\delta_0^0$ -фазы,  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  дает возможность изучить  $P_1$ -волну; точная информация о каналах  $\pi^\pm\pi^0 \rightarrow \pi^\pm\pi^0$  и  $\pi^\pm\pi^\pm \rightarrow \pi^\pm\pi^\pm$  позволит разрешить неопределенности в решениях для области

$$1 < m_{\pi\pi} < 1,8 \text{ ГэВ};$$

реакции аннигиляции  $\bar{p}p \rightarrow \pi\pi$  нужны для изучения области больших дипионных масс,  $m_{\pi\pi} > 2$  ГэВ.

4. Весьма полезным является изучение неупругих каналов, таких как  $\pi\pi \rightarrow 4\pi$ ,  $\pi\pi \rightarrow 6\pi$ ,  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$ ,  $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$  и др. О важности канала  $\pi\pi \rightarrow K\bar{K}$  уже много говорилось. Данные о процессе  $\pi\pi \rightarrow \pi\omega$ , возможно, помогут объяснить изменение параметра  $\eta_1^1$  для  $P_1$ -волны в области  $m_{\pi\pi} \sim 1100$  МэВ. Изучение «множественных» каналов  $\pi\pi \rightarrow 4\pi$ ,  $\pi\pi \rightarrow 6\pi$  важно потому, что в области  $m_{\pi\pi} \sim 1$  ГэВ результаты фазовых анализов не очень устойчивы относительно учета этих каналов (см., например, <sup>171</sup>). Особенно нужна информация о неупругих каналах  $\pi\pi$ -рассеяния для понимания, в каких решениях и как нарушается унитарность.

В заключение авторы выражают глубокую признательность А. Б. Кайдалову за ценные советы и замечания.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ансельм А. А., Грибов В. Н.— ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 1890; т. 31, с. 501.
2. Грибов В. Н.— ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1221.
3. Анисович В. В., Ансельм А. А., Грибов В. Н.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 224.
4. Анисович В. В., Ансельм А. А.— УФН, 1966, т. 88, с. 287.
5. Chew G., Low F.— Phys. Rev., 1959, v. 113, p. 1640.
6. Анисович В. В., Дахно Л. Г.— ЯФ, 1967, т. 6, с. 845.
7. Анисович В. В., Волконский П. Э.— ЯФ, 1971, т. 14, с. 1055.
8. Арэфьев А. В. и др.— ЯФ, 1967, т. 5, с. 1060; 1969, т. 10, с. 797.
9. Боресков К. Г. и др.— ЯФ: 1972, т. 15, с. 361, с. 557.
10. Боресков К. Г., Кайдалов А. Б., Пономарев Л. А.— ЯФ, 1972, т. 17, с. 1285.
11. Боресков К. Г., Кайдалов А. Б., Пономарев Л. А. Препринт ИТФ-16.— Москва, 1974.
12. Пономарев Л. А.— Пробл. физ. ЭЧАЯ, 1976, т. 7, с. 186.
13. Jackson J. D.— Nuovo Cimento, 1964, v. 34, p. 1644.
14. Jackson J. D.— Rev. Mod. Phys., 1965, v. 37, p. 484.
15. Petersen J. L.— Phys. Rept. Sec. C, 1971, v. 2, No. 3.
16. Petersen J. L. CERN 77-04.— 1977.
17. Martin B. R., Morgan D., Shaw G.— Pion-Pion Interaction in Particle Physics.— N.Y., 1976.
18. Лексин Г. А.— УФН, 1970, т. 102, с. 387.
19. Veneziano G.— Nuovo Cimento, Ser. A, 1968, v. 57, p. 190; Phys. Rept. Sec. C, 1974, v. 9, p. 200.
20. Мигдал А. Б. Фермионы и бозоны в сильных полях.— М.: Наука, 1978.
21. Галицкий В. М.— УФН, 1976, т. 120, с. 138.
22. Malamud E., Schlein P.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1052, 1056.
23. Johnson J. et al.— Phys. Rev., 1967, v. 163, p. 1493.
24. Walker W. et al.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 18, p. 630.
25. Marateck S. et al.— Ibid., 1968, v. 21, p. 1613.
26. Prentice J. et al.— Ibid., 1969, v. 25, p. 331.
27. Oh B. et al.— Phys. Rev. Ser. D, 1970, v. 1, p. 2494.
28. Baton J. B., Laurens G., Reignier J.— a) Phys. Lett., 1970, v. 33, p. 525; б) ibid. Ser. B, 1967, v. 25, p. 419.
29. Макаров М. М. и др.— ЯФ, 1970, т. 11, с. 608.
30. Scharenquivel J. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1970, v. 22, p. 16.
31. Flatte S. et al.— Phys. Lett. Ser. B, 1971, v. 36, p. 152; 1972, v. 38, p. 232.
32. Carroll J. et al.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 28, p. 318.
33. Hyams B. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1973, v. 64, p. 134.
34. Engler A. et al.— Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 10, p. 2070.
35. Srinivasan V. et al.— Ibid., 1975, v. 12, p. 681.
36. Froggatt C., Petersen J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1975, v. 94, p. 454, 476.
37. Estabrooks P., Martin A. D.— a) Phys. Lett. Ser. B, 1972, v. 41, p. 350; б) Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 79, p. 301; в) Ibid., 1975, v. 95, p. 322.
38. а) Карамышев А. А. и др.— Письма ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 478.  
б) Kartamyshv A. A. et al.— Phys. Lett. Ser. B, 1974, v. 44, p. 310.
39. Grayer G. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1975, v. 75, p. 189.
40. Hyams B. et al.— Ibid., 1975, v. 100, p. 205.
41. Leeper R. J. et al.— Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 2054.
42. Corden M. J. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 137, p. 221; 1979, v. 157, p. 250.
43. Baton J., Laurens G., Reignier J.— Phys. Lett. Ser. B, 1967, v. 25, p. 419.
44. Карамышев А. А. и др.— Письма ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 422.
45. Lott F. W. LBL-7238.— 1977.
46. Kennedy C. N. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1973, v. 59, p. 365.
47. Hoogland W. et al.— Ibid., 1974, v. 69, p. 266; 1977, v. 126, p. 109.
48. Prukop J. P. et al.— Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 10, p. 2055.
49. Baker R. D.— Nucl. Phys. Ser. B, 1975, v. 90, p. 296.
50. Appel W. D. et al.— Phys. Lett. Ser. B, а) 1973, v. 41, p. 542; б) 1975, v. 57, p. 398.
51. Skuja A. et al.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 653.
52. David M. et al.— Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 2027.
53. Grivaz J. F. et al.— Phys. Lett. Ser. B, 1976, v. 61, p. 400.
54. Borreani G. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1979, v. 147, p. 28.
55. Protopopescu S. et al.— Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 7, p. 1279.
56. Laven H. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1978, v. 137, p. 202.

57. Caso C. et al.— *Nuovo Cimento*, Ser. A, 1968, v. 57, p. 699.
58. Colton E. et al.— *Phys. Rev. Ser. D*, 1971, v. 3, p. 2028.
59. Losty M. et al.— *Nucl. Phys. Ser. B*, 1974, v. 69, p. 185.
60. Carroll J. et al.— *Phys. Rev. Ser. D*, 1974, v. 10, p. 1430.
61. Durusoy N. B. et al.— *Phys. Lett. Ser. B*, 1973, v. 45, p. 517.
62. Cohen D. et al.— *Phys. Rev. Ser. D*, 1973, v. 7, p. 661.
63. Kravtsov A. V. et al.— *Nucl. Phys. Ser. B*, 1978, v. 134, p. 413.
64. Bensinger J. et al.— *Phys. Lett. Ser. B*, 1971, v. 36, p. 135.
65. Berglund A. et al.— *Nucl. Phys. Ser. B*, 1978, v. 137, p. 276.
66. Dulude R. S. et al.— *Phys. Lett. Ser. B*, 1978, v. 79, p. 329, 335.
67. Martin B. R., Morgan D.— In: *European Symposium on Antinucleon Nucleon Annihilations*. Strasbourg, France, 1978.— RZ-78-057.
68. Голубничий П. И. и др.— *АЭ*, 1967, т. 22, с. 168.  
Auslander V. et al.— *Phys. Lett. Ser. B*, 1967, v. 25, p. 433.
69. Hite G. E., Jacob R. J.— *Nucl. Phys. Ser. B*, 1978, v. 134, p. 291.
70. Galloway K. F. et al.— *Phys. Rev. Ser. D*, 1972, v. 5, p. 1097.
71. Colton E. et al.— *Ibid.*, 1973, v. 7, p. 3267.
72. Ferrari E., Selleri G.— *Phys. Rev. Lett.*, 1961, v. 7, p. 387.
73. Selleri G.— *Phys. Lett.*, 1962, v. 3, p. 76.
74. Amaldi U., Selleri G.— *Nuovo Cimento*, 1964, v. 31, p. 360.
75. Dürr H., Pilkuhn H.— *Nuovo Cimento*, Ser. A, 1965, v. 40, p. 899.
76. Benecke J., Dürr H.— *Ibid.*, 1968, v. 56, p. 269.
77. Wolf G.— *Phys. Rev.*, 1969, v. 182, p. 1560.
78. Ming Ma Z. et al.— *Phys. Rev. Lett.*, 1969, v. 23, p. 342.
79. Gottfried K., Jackson J. D.— *Nuovo Cimento*, 1964, v. 34, p. 735.
80. Дуранин В., Дубовиков М.— *ЯФ*, 1972, т. 15, с. 351; т. 16, с. 411.
81. Williams P. K.— *Phys. Rev. Ser. D*, 1970, v. 1, p. 1312.
82. Hagopian S. et al.— *Ibid.*, 1973, v. 7, p. 1271.
83. Батусов Ю. А. и др.— *ЖЭТФ*, 1963, т. 45, с. 913.
84. Cutkosky R. E., Deo B. B.— *Phys. Rev.*, 1969, v. 174, p. 1859.  
Ciulli R. E.— *Nuovo Cimento*, Ser. B, 1969, v. 61, p. 787; v. 62, p. 301.
85. Бекетов Г. В. и др.— *ЯФ*, 1974, т. 19, с. 1032.
86. Kimel J. D., Owens J. F.— *Nucl. Phys. Ser. B*, 1977, v. 122, p. 464.
87. Becker H. et al.— In: *Proc. of 18th Intern. Conference on High Energy Physics*. Tbilisi, 1976.
88. Becker H. et al.— *Nucl. Phys. Ser. B*, 1979, v. 151, p. 46.
89. Kimel J. D., Reya E.— *Ibid.*, 1973, v. 58, p. 513.
90. Walker W.— In: *AIP Conf. Proc.*, No. 13: Tallahassee-1973, p. 80.
91. Aachen-Bonn-CERN Collaboration.— Цит. в <sup>87</sup> с6.
92. Bösebek K. et al.— *Nucl. Phys. Ser. B*, 1971, v. 28, p. 381.  
Michael W.— *Phys. Rev. Ser. D*, 1973, v. 7, p. 1985.  
Mac-Naughton J. et al.— *Ibid.*, 1977, v. 15, p. 1832.
93. Bastien P. L. et al.— *Phys. Rev. Ser. D*, 1971, v. 3, p. 2047.
94. Laffe R. L.— *Ibid.*, 1977, v. 15, p. 267.
95. Robson D.— *Nucl. Phys. Ser. B*, 1977, v. 130, p. 328.
96. Achasov N. N., Devyanin S. A., Shestakov G. N. Препринт ТФ-109.— Новосибирск, 1980.
97. Donnachie A.— In: *Proc. of the 1970 CERN School of Physics*. Loma-Koli.— P. 41.
98. Montanet L.— В кн. *Труды Международной школы ОИЯИ — ЦЕРН по физике*.— Алушта, 1975.— С. 177.
99. Нелипа Н. Ф. *Физика элементарных частиц*. М.: Атомиздат, 1977.
100. Народецкий И. М., Симонов Ю. А.— *ЯФ*, 1978, т. 28, с. 1356.
101. Dalitz R. H., Tuan S. F.— *Ann. of Phys.*, 1960, v. 10, p. 307.
102. Lovelace C.— In: *Proc. of the Conference on  $\pi\pi$  and  $K\pi$  Interactions*.— ANZ, 1969.— P. 562.
103. Lang C. B.— *Nucl. Phys. Ser. B*, 1975, v. 93, p. 415.
104. Lang C. B.— *Ibid.*, 1975, v. 93, p. 429.
105. Williams P. K.— In: *AIP Conf. Proc.*, No. 8: Philadelphia-1972, p. 65.
106. Alston-Garnjost M. et al.— *Phys. Lett. Ser. B*, 1971, v. 36, p. 152.
107. Gray G. et al.— In: *AIP Conf. Proc.*, No. 13; Tallahassee-1973, p. 117.
108. Cohen-Tannoudji G., Salin Ph., Morel A.— *Nuovo Cimento*, 1968, v. 55, p. 412.
109. Estabrooks P. et al.— In: *AIP Conf. Proc.*, No. 13; Tallahassee-1973, p. 37.
110. Картамышев А. А. и др.— *Письма ЖЭТФ*, 1974, т. 20, с. 748.
111. Jacques P. et al.— In: *AIP Conf. Proc.*, No. 13; Tallahassee-1973, p. 322.
112. Migdal A. B. et al.— Препринт ИТФ-1976. UDS : 539. 143.



113. Мигдал А. Б.— ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 2209; Nucl. Phys. Ser. A, 1973, v. 210, p. 421.
114. Мигдал А. Б. и др.— ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 443; 1977, т. 72, с. 1247.
115. Волков М. К., Первушин В. Н.— УФН, 1976, т. 120, с. 363.
116. Бельков А. А. и др.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 652.
117. Olsson M., Yodth G. B.— Phys. Rev., 1966, v. 145, p. 1309.
118. Deler B., Valladas G.— Nuovo Cimento, 1966, v. 45, p. 559.
119. Botke J. C.— Nucl. Phys. Ser. B, 1970, v. 23, p. 253.
120. Jones J. A., Saxton W. M., Allison D. H.— Ibid., 1974, v. 83, p. 93.
121. Анисович В. В. и др.— ЯФ, 1968, т. 8, с. 583.
122. Бунятов С. А. и др.— ЯФ, 1972, т. 16, с. 1286; 1975, т. 22, с. 871.
123. Макаров М. М. и др.— Препринт ЛИЯФ АН СССР № 179.— Ленинград, 1975.
124. а) Бунятов С. А., Гулкян Т. Р. Препринт ОИЯИ Р1-8401.— Дубна, 1974.  
 б) Батусов Ю. А. и др.— ЯФ, 1975, т. 21, с. 308.  
 в) Бунятов С. А. и др.— ЯФ, 1977, т. 25, с. 325.
125. Pais A., Treiman S. B.— Phys. Rev., 1968, v. 168, p. 1858.
126. Mäpner W.— In: AIP Conf. Proc., No. 21: Boston-1974, p. 22.
127. Картамышев А. А. и др.— Письма ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 68.
128. Villet G. et al.— In: AIP Conf. Proc., No. 13: Tallahassee-1973, p. 307.
129. Гарееваншвили В. Р., Ширков Д. В.— В кн. Школа молодых ученых по физике высоких энергий.— Сухуми, 1972.— С. 249.
130. Franklin J.— Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 11, p. 513.
131. Бельков А. А., Бунятов С. А.— ЯФ, 1979, т. 29, с. 1295.
132. Rosselet L. et al.— Phys. Rev. D, 1977, v. 15, p. 574.
133. Basdevant J., Le Guillon J. C., Navelet H.— Nuovo Cimento, Ser. A, 1972, v. 7, p. 363.
134. Roy S. M.— Phys. Lett., Ser. B, 1971, v. 36, p. 353.
135. Pennington M. R., Protopopescu S. D.— Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 7, p. 2591.
136. Basdevant L. J., Froggatt C. D., Petersen J. L.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 72, p. 413.
137. Pennington M. R., Protopopescu S. D.— Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 7, p. 1429.
138. Morgan D., Shaw G.— Nucl. Phys. Ser. B, 1972, v. 43, p. 365.
139. Iliopoulos J.— Nuovo Cimento Ser. A, 1968, v. 53, p. 552.
140. Lovelace C.— Phys. Lett. Ser. B, 1968, v. 28, p. 264.
141. Волков М. К., Первушин В. Н.— ЯФ, 1974, т. 20, с. 762; Nuovo Cimento Ser. A, 1975, v. 27, p. 405.
142. Бельков А. А., Бунятов С. А., Первушин В. Н.— Препринт ОИЯИ Р2-12646.— Дубна, 1979.
143. Weinberg S.— Phys. Rev. Lett., 1966, v. 17, p. 616; 1967, v. 18, p. 188.
144. Daly L.— Lett. Nuovo Cimento, 1975, v. 14, p. 216.
145. Pascual P., Yndurain F. J.— Nucl. Phys., Ser. B, 1974, v. 83, p. 362.
146. Hite G. E., Jacob R. J.— Ibid., 1978, v. 134, p. 291.
147. Donnachie A. et al.— Phys. Lett., 1966, v. 22, p. 332.
148. Алексеева Е. А. и др.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 109.
149. Beier E. M. et al.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 399.
150. Zylbestein A. et al.— Phys. Lett., Ser. B, 1972, v. 38, p. 457.
151. Nielsen H., Oades G. C.— Nucl. Phys. Ser. B, 1972, v. 49, p. 586.
152. Bonnier B., Gauron P.— Ibid., 1973, v. 52, p. 506.
153. Basdevant J. L. et al.— Ibid., 1975, v. 98, p. 285.
154. Nagels M. M. et al.— Ibid., 1979, v. 147, p. 189.
155. Particle Data Group — Rev. Mod. Phys., 1976, v. 48, No. 2.
156. Gutay L. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1971, v. 27, p. 486.
157. Gelfand N. et al.— Ibid., 1978, v. 138, p. 365.
158. Gutay L.— In: AIP Conf. Proc., No. 8; Philadelphia-1972, p. 59.
159. Binnie D. M. et al.— Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 8, p. 2789.
160. Banaigs J. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1976, v. 105, p. 52.
161. Binnie D. M. et al.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1534.
162. Buttram M. et al.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 1153.
163. Bingham H. H. et al.— Phys. Lett. Ser. B, 1972, v. 41, p. 635.  
 Davier M. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1973, v. 58, p. 31.
164. Morgan D.— Phys. Lett. Ser. B, 1974, v. 51, p. 71.
165. Shimada T.— Progr. Theor. Phys., 1975, v. 54, p. 758.
166. Bacci C. et al.— Phys. Lett. Ser. B, 1972, v. 38, p. 551.
167. Alles-Borelli V. et al.— Nuovo Cimento, Ser. A, 1975, v. 30, p. 136.

- W o n y o u n g L e e: In: Proc. of the Intern. Symposium on Lepton and Proton Interaction at High Energies.— Stanford, 1975.— P. 213.
168. A p e l W. D. et al.— In: EPS Conference.— Geneva, 1979.
169. M a r t i n B. R., M o r g a n D.— In: European Symposium on Antinucleon-Nucleon Annihilations, Strasbourg, France, 1978.— RL-78-057.
170. O w e n s J. F., E i s n e r R. L. et al.— Nucl. Phys. Ser. B, 1976, v. 112, p. 514. D o n o h u e J. T., L e r o y e v Y., H o n t e b e y r i e M.— Ibid., 1977, v. 130, p. 309.
171. Y n d u r a i n F. J.— Ibid., 1975, v. 88, p. 318.
172. К и м З е П х е н, Ц е л л е р В.— Nucl. Phys., 1962, v. 34, p. 491.
173. C h a n g L.— Phys. Rev., 1967, v. 162, p. 1492.
174. O l s s o n M., T u r n e r L.— Ibid., 1969, v. 181, p. 2141.
175. M a u n g J. et al.— Phys. Lett. Ser. B, 1970, v. 33, p. 521.
176. А л е к с е е в а Е. А. и др. Препринт ИАЭ 3241/1. Москва, 1980.
177. Particle Data Group.— Rev. Mod. Phys., 1980, v. 52, No. 2.
178. а) К а р т а м ы ш е в А. А. и др.— Письма ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 478.  
б) М у х и н К. Н. и др.— Письма ЖЭТФ, 1980, т. 32, с. 593.
179. M i e r e F. T., S u g a w a r a M.— Phys. Rev., 1967, v. 153, p. 1702.
180. B r a u n K. J., C l i n e D. B.— Ibid. Ser. D, 1973, v. 8, p. 3792.