

53(092)

**МАКСВЕЛЛОВСКИЙ «ТРАКТАТ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСТВЕ
И МАГНЕТИЗМЕ»***М. Л. Левин, М. А. Миллер*

В этой небольшой статье (скорее из набросков, нежели обзорной) мы хотим поделиться некоторыми ассоциациями, которые должны (так нам кажется) возникать при знакомстве с «Трактатом об электричестве и магнетизме» у людей, занимающихся спустя столетие все той же максвелловской электродинамикой. Для советских физиков это знакомство будет облегчено изданием в ближайшее время полного перевода «Трактата» в издательстве «Наука» *).

1. БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Джеймс Клерк Максвелл (13.06.1831—05.11.1879) **) завершил и опубликовал свой трактат в 1873 г. Это было единственное издание, увидевшее свет при его жизни ⁷. Незадолго до смерти, уже будучи безнадежно больным, он предпринял подготовку второго издания, но успел продвинуться только до начал электростатики, переписав, правда, еще и вступительную главу (Preliminary), из которой можно сделать только некоторые предположения о его дальнейших замыслах — предположения, в общем-то неоднозначные: в них просматривается сразу несколько тенденций, по завершении которых он, вероятно, еще вернулся бы к началу.

Второе, уже посмертное, издание (1881) было подготовлено проф. Нивеном ***), который, по-видимому, перенес все максвелловские поправки из рукописного текста, коснувшиеся первых девяти глав, и снабдил остальные главы некоторыми собственными пояснениями, сделанными, вполне возможно, в духе максвелловских лекций, читанных уже после выхода первого издания. К сожалению, однако, он не всегда отмечал эти инородные вставки значками, лишив нас возможности отделить «деяния от толкования». Сравнительно скоро (даже по нашим временам) — в 1891 г. было выпущено третье издание «Трактата» ⁸, в котором проф. Нивен, как сказали бы сейчас, из-за сильной занятости административными делами и большой педагогической нагрузкой не смог принять участие ****), и

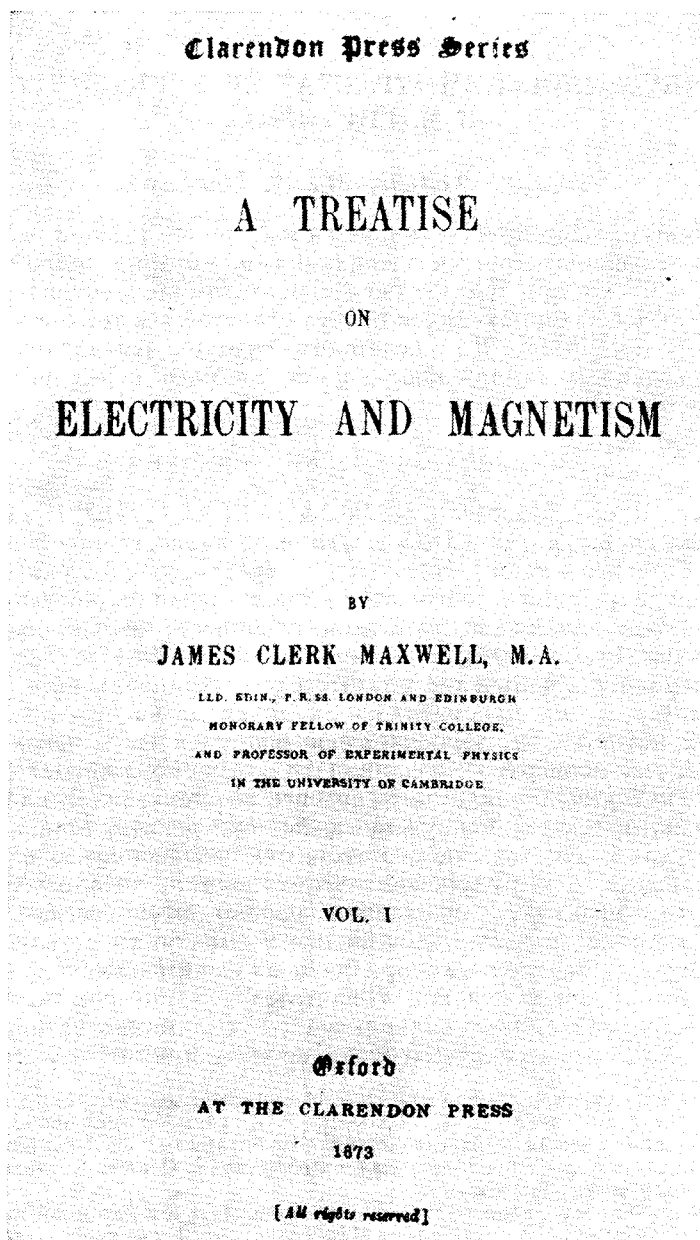
*) Ранее на русском языке были изданы лишь избранные отрывки из публикаций Максвелла, в том числе и из «Трактата» ¹, с сопроводительными заметками Дж. Дж. Томсона и очень выразительными комментариями Л. Больцмана. Предисловие к «Трактату» было заново переведено в сборнике ². Сейчас эти издания за давностью лет стали мало доступными.

**) Многие из того, о чем будет говориться далее, в той или иной мере сплетено с личными жизненными обстоятельствами Максвелла, что, в частности, воспроизведено в нескольких почти равноценных биографических очерках: Нивен — Предисловие к ⁹, Кемпбелл и Гарнетт ¹⁰, Смит-Роуз ³, Мак-Дональд ⁴, Кляус — в сборнике ⁵, а также в увлекательном варианте — В. Л. Карцев в серии ЖЗЛ ⁶.

***) По тексту нивеновского издания были выполнены немецкий (1883) и французский (1889) переводы «Трактата».

****) Впрочем, допустимо, что это было лишь респектабельной мотивировкой отказа: проф. Нивен только что выпустил двухтомное собрание сочинений Максвелла ⁹ (огорчительно отсутствующее в русском переводе), и ему, конечно, было нелегко сразу же включиться еще в одно новое и не менее трудоемкое редактирование.

издательство обратилось к Дж. Дж. Томсону, соприкосновение которого с «Трактатом» оказалось историческим. Он проверил все утверждения Максвелла и, не трогая первоизданного (вернее, уже «второизданного»)



Титульный лист первого тома издания «Трактата об электричестве и магнетизме».

текста, щедро его прокомментировал — уточнил, подправил, продолжил, присовокупив к нему даже «Дополнительный том» (Supplement Volume), хотя рабочая жизнь максвелловской электродинамики началась, по суще-

ству, уже несколько раньше. Все последующие издания стереотипно повторяли третье.

Вряд ли стоит (да и невозможно) останавливаться здесь на многолетнем процессе методической и математической «доводки» и раскрытия основных идей, заложенных в «Трактате». В результате этого процесса максвелловской электродинамике была придана та привычная (даже, пожалуй, уже и рутинная) форма, которой мы пользуемся сейчас, хотя значение этих модернизаций, вообще говоря, несколько преувеличивается. Однако, разумеется, без усилий таких людей, как Хевисайд и Герц (каноническая запись уравнений, 1889—1890), Пойнтинг (закон сохранения энергии электромагнитного поля, 1884), Г. А. Лоренц (1875), Фитцджеральд (1878) (краевая задача и получение френелевских формул), снова Герц (1889; поле элементарного источника)..., все эти и последующие обобщения непременно должны были бы быть проведены кем-то другим *).

2. ЯЗЫК

Интерес к раздумьям над электрическими и магнитными явлениями возник у Максвелла в 1855 г., когда ему уже было 24 года и он мог уверенно считать себя физиком. А понимание существования взаимной и замкнутой связи между этими явлениями произошло, вероятно, в 1861 г. Что же касается итогового «Трактата», то он создавался, если так можно выразиться, в пике мудрости автора; возможно даже, что это был тот (увы, нередкий) случай, когда максимум приходится на границу интервала. Искренность высказываний, несомненно, возрастает по мере становления человека, ибо познавший успех возвышается над страхом заблуждений. Поэтому с современной точки зрения «Трактат» представляет собой удивительный (а следовательно, педагогически поучительный) образец научной искренности. Он вполне может быть уподоблен зданию, у которого, хотя строительные леса уже удалены, но еще заметны следы работ. Вполне допустимо, что это и послужило причиной того, что не все и не сразу оценили величие вознесенного собора.

А сейчас, когда мы знаем, что ответ правилен, именно это обстоятельство, т. е. некоторая незавершенность, местами рукописность, делают «Трактат» уникальным документом, позволяющим оценить «факторы риска», проследить разветвления сомнений и оценить настойчивость хода по тупиковым путям. В этих случаях показательны не только тактика и техника подхода, но даже и семантика — построение фразы и рассуждения, причинно-следственная их структура, способы оговорок частных случаев и т. п. В какой-то мере это, конечно, навязывается нормами и традициями (восходящими у Максвелла к Шекспиру и Стерну) родного языка (что тоже ведь влияет на манеру мышления), но в основном это характеристики надъязыковые, относящиеся к личности автора и, следовательно, пригодные для диагностики его личных свойств.

Стиль Максвелла своеобразен. Обычно не спеша, повторяясь от фразы к фразе, он постепенно развивает тот или иной тезис, словно разглядывая его под разными углами. При этом отдается предпочтение условным оборотам: «если предположить», «если допустить», «если взять» и даже «если обозначить», как бы позволяя свободу и другим возможностям. Эта вкрадчивая осторожность вдруг прерывается взрывами вдохновенного патетизма, проявляемыми, как правило, через очень необычные и точные выражения мысли.

*) Интересно, что Максвелл успел ознакомиться с работами Лоренца и Фитцджеральда, но это никак не повлияло на начальные главы «Трактата», хотя можно предполагать, что их результаты вошли бы в раздел, посвященный волнам.

Вместе с частыми и порой непредсказуемыми разбиениями на песнеподобные абзацы это производит впечатление заветного текста, обогащенного многочисленными отступлениями — «притчами» самостоятельной ценности: притча об измерениях, притча о гальванометрах, притча о состоянии поляризованности, о телесных углах, об аналогиях и т. п.

Язык Максвелла и скуден, и богат. Особенно разнообразен он терминологически, некоторые его понятия живут, развиваются, а затем исчезают вовсе, некоторым он остается верен до конца, но непременно сохраняет в запасниках еще несколько словечек того же назначения. Вот, например, диэлектрическая проницаемость, — она сначала появляется как электрическая индуктивная емкость или способность, потом как диэлектрическая постоянная, потом как проницаемость и т. д. Интересно, что эти метания не затухли и до сих пор, несмотря на отчаянные усилия стандартизаторов. Непомерно многозначна его терминология, связанная с полями. Напряженность электрического поля приобретает новые имена при всяком своем независимом появлении на свет, — это и электрическая сила, когда она из одного точечного заряда действует на другой, это и электрическая интенсивность (напряженность), когда она — самостоятельное поле в среде (но направленное, по-прежнему, вдоль линий силы), это напряженность электродвижущей силы или просто электродвижущая напряженность или даже электродвижущая сила в точке, т. е. плотность, когда поле возникает в результате изменения потока магнитной индукции. А вот с напряженностью магнитного поля никаких многоликостей нет, — она всегда фигурирует как магнитная сила (хотя, заметим, и не имеющая размерности механической силы *)). И все это, конечно, отражает тот процесс укрупнения и соединения понятий (разные по происхождению поля E слились в единое, а магнитное поле H осталось самим собою), который неотделим от процесса переименования связей между физическими явлениями.

Скорее всего, Максвелла совершенно не угнетали эти промежуточные, временные неоднозначности, равно как и вообще свободное пользование таким неформализованным языком. Он следовал здесь Фарадею, он шел от его представлений и образов с намерениями их развить, а не обкарнить. Так он и говорит: «Идеи Фарадея были выражены на языке, более всего пригодном для науки, находящейся в стадии зарождения, ибо язык этот до некоторой степени чужд стилю тех физиков, которые привыкли устанавливать математические формы мышления» («Трактат», п. 528). И далее с еще большим убеждением в защитных функциях неканонизированного языка: «Он не чувствовал потребности втискивать свои результаты в приемлемые ... формы, т. е. выражать их в виде, доступном для нападок ... и благодаря этому он был оставлен в покое и мог делать свою работу, ему присущую, ..., прибегая к языку естественному, а не профессиональному» («Трактат», п. 528).

3. СПОСОБ МЫШЛЕНИЯ

Будучи по образованию в общем-то математиком, Максвелл по своему способу мышления и исследования принадлежал, скорее всего, к «модельным» физикам в тогда еще не задержанном значении этого понятия. По-видимому, все, что было им понимаемо, он мог себе представить. И всюду,

*) Речь идет об английском слове *force*. Соответствующее ему русское слово *сила* подверглось еще большим перегрузкам, как результат непредсказуемого терминологического инбридинга и легкомыслия первопереводчиков. С помощью *силы* переводится на русский язык еще и другое, уже «безразмерное», английское наименование *strength*, например, *сила тока*, *сила полюса* и т. п.; *живой силой* до сих пор (правда, с архаическим почтением) называют кинетическую энергию тела, а иногда *сила* обретает размерность мощности, как в случае лошадиной силы, т. е. *horse power*.

где к этому проявлялась какая-либо предрасположенность, Максвелл обращался к моделям, заимствованным из фундаментальной науки Динамики (так он ее и называет всегда — уважительно и с большой буквы), проверяя на них почти каждое электродинамическое утверждение. В известной мере это способствовало выживанию (сверх положенного срока существования) легенды о максвелловском механическом эфире, проникшей даже в учебники наших дней с приведением «шестереночных картинок» *) из его начальных, «разведочных» работ (см. ^{1,9}). Однако уже в первом издании «Трактата» эти вспомогательные постройки убраны, и электромагнитное поле фигурирует как самостоятельный (т. е. независимо измеряемый) физический объект. Поскольку в те времена динамика была, пожалуй, единственной областью физики с логически замкнутым теоретическим описанием (постулаты → измерения → правила → измерения → выводы → измерения → постулаты), то даже при отказе от сведения к ней всех других явлений, сопоставление их с динамическими было естественным, т. е. вероятно, даже составляло потребность. Интересно, что сейчас роль таких «контрольных весов» для сравнения и интерпретации явлений разной природы (в том числе и механических!) нередко играет максвелловская макроэлектродинамика, предоставляющая благодаря теперь уже своей замкнутости, простоте измерений параметров и, главное, простоте выработки интуитивных образов и постановки экспериментов, весьма удобное поприще для аналогий. В известном смысле Максвелл предложил принципиальные варианты построения аналоговых машин еще в предшествовавшие составления уравнений, т. е. не исходя из общности математического описания, а наоборот, получая его из соображений физического сродства явлений. Привычность нашего обращения с аналогами притупляет остроту воспринимания неочевидности тех первых максвелловских — доуравнениевых! — модельных сопоставлений **).

А вот другой, уже конкретный образец максвелловского модельного рассуждения, неожиданно освещающий, казалось бы, формально полностью решенную задачу. Мы позволим себе воспроизвести его в более привычных сейчас словах и обозначениях.

Речь идет о токах, наводимых внешними источниками в тонком (но с конечной толщиной d) плоском проводящем (с конечной проводимостью σ)

*) Напомним знаменитую и часто цитируемую фразу А. Пуанкаре: «Система Максвелла была странна и мало привлекательна, так как он предполагал весьма сложное строение эфира; можно было подумать, что читаешь описание завода с целой системой зубчатых колес, рычагами, передающими движение и сгибающимися от усилия центробежными регуляторами и передаточными ремнями». Это заявление было воспроизведено, в частности, в русском сборнике «Теория Максвелла и герцовские колебания» (СПб., 1900) ¹¹ и могло свидетельствовать о том, что А. Пуанкаре не был до конца знаком с «Трактатом», хотя выход в свет последнего как раз пришелся на его студенческую пору. Допустимо также, что и сам Кельвин, немало способствовавший вовлечению Максвелла в электромагнетизм, так и не прочитал «Трактата», во всяком случае ко времени своих Балтиморских лекций (1884) ¹².

**) Построение механического аналога электродинамической системы, исходящее из уже «готовых» уравнений Максвелла, в принципе неоднозначное, неоднократно предпринималось позднее и даже в наше время — иногда с прикладными намерениями, а иногда и просто так (см., например, статью Э. Келли в сборнике ⁹). Вот один из наиболее очевидных путей. Сначала все пространство разбивается на ячейки, масштаб (шаг) которых определяется точностью воспроизведения, но, конечно, должен быть меньше длины волны. В пределах такой ячейки электромагнитные поля могут быть упряманы в квазистационарные сосредоточенные элементы — самоиндукцию, емкость, сопротивление, ведущие себя аналогично механическим элементам: массе, коэффициенту упругости, коэффициенту диссипации. Такое соответствие было уже известно Максвеллу. Обратная аналогия в некоторых случаях более естественно реализуема, потому что механические модели гиротропных, резонансных, диспергирующих (особенно с пространственной дисперсией), электромагнитных сред требуют известной изощренности.

листе ($z = 0$). Если считать эти источники хотя бы слегка переменными (следя за тем, чтобы скин-слой в металле с запасом превышал d), то наводимый ток распределится по толщине листа равномерно, т. е. его действие будет эквивалентно действию некоторого поверхностного тока \mathbf{i} , текущего по плоскости $z = 0$ с приписанной ей поверхностной проводимостью $\sigma' = \sigma d$. Тогда вектор-потенциал \mathbf{A} , определяющий поле этого тока ($\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}$), будет четной функцией z , и потому он должен иметь отличные от нуля только поперечные ($\perp \mathbf{z}_0$) составляющие ($A_z = 0$, $A_{\perp}^+(z > 0) = A_{\perp}^-(z < 0) \neq 0$), которые допускают представление через скалярную величину P (являющуюся первообразной скалярного магнитного потенциала, а значит, удовлетворяющую вне источников уравнению Лапласа):

$$\mathbf{A} = \mathbf{z}_0 \times \nabla P. \quad (\alpha)$$

Ток в листе находится из условия скачка тангенциальной составляющей магнитного поля H_{τ} :

$$\mathbf{i} = \frac{c}{2\pi} \mathbf{z}_0 \times \mathbf{H}^+ = \frac{c}{2\pi} \mathbf{z}_0 \times \text{rot } \mathbf{A} |_{z=+0}. \quad (\beta)$$

Но он может быть выражен и через напряженность электрического поля:

$$\mathbf{i} = \sigma' \mathbf{E}_{\tau} = -\frac{\sigma'}{c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_{\perp} + \mathbf{A}_{\perp}^{\text{ст}}) |_{z=+0}, \quad (\gamma)$$

где $\mathbf{A}^{\text{ст}}$ — вектор-потенциал поля внешних источников (в отсутствие проводящей плоскости).

Приравнявая (β) и (γ) , получаем для положительной стороны листа

$$\mathbf{z}_0 \times \text{rot } \mathbf{A} = -\frac{2\pi\sigma'}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{A}_{\perp} + \mathbf{A}_{\perp}^{\text{ст}}) |_{z=+0}. \quad (\delta)$$

Наконец, подстановка (α) в (δ) приводит нас к искомому, выведенному Максвеллом соотношению

$$\frac{c^2}{2\pi\sigma'} \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial t} (P + P^{\text{ст}}). \quad (\varepsilon)$$

Это уравнение фактически является граничным условием задачи, решение которой может быть завершено каким-либо стандартным методом (например, разделением переменных). Но здесь Максвелл уходит от ожидаемого продолжения. Он считает, что поскольку коэффициент $V = c^2/2\pi\sigma' = c^2/2\pi\sigma d$ имеет размерность скорости, то рассматриваемой системе должно быть адекватно какое-то движение с этой постоянной скоростью. И в самом деле, релаксация токов в проводящем листе (скажем, после резкого выключения внешнего поля в момент $t = 0$) происходит так, что поле в области $z > 0$ совпадает с полем «замороженных» начальных токов, распределенных в «убегающей» плоскости $z = -Vt$.

Далее, как известно, в предельном случае идеального экрана ($\sigma \rightarrow \infty$, $V \rightarrow 0$) нормальная составляющая магнитного поля на нем обращается в нуль ($H_n |_{z=0} = 0$), и поле источников может быть построено обычным методом изображений. Отправляясь от этого, Максвелл с какой-то естественной очевидностью подводит нас к методу убегающих изображений для экранов с конечной проводимостью ($\sigma \neq \infty$, $V \neq 0$), когда в каждый интервал времени δt от изображения источника отрывается элемент $\partial P^{\text{ст}}/\partial t \delta t$, удаляющийся затем в сторону от листа со скоростью V . При непрерывном изменении все эти элементы в совокупности образуют дорож-

ку (trail) изображений, поле которой и обеспечивает решение краевой задачи с граничным условием (ϵ *). В этом примере модель (и снова в общем-то динамическая) не подменяет всего процесса, а сопоставляет одну электродинамическую систему с другой (не менее электродинамической), тем самым позволяя понять качественно возможности метода изображений и предсказать некоторые результаты в случаях, не решаемых строго, например, когда протяженность дорожки изображений становится соизмеримой с шириной экрана. Можно спросить друг друга, как часто мы откликаемся на размерностные подсказки и не упускаем случая строить «игрушечные модели», на первый взгляд ничего не добавляющие к строгому решению задачи, но в действительности обогащающие нашу интуицию и потому отказывающиеся более значительными, чем исходное частное решение, которое их породило.

Иногда Максвелл, не строя специальных моделей, просто вглядывается в различные процессы и усматривает их схожесть. Так, аналогия между электростатикой и магнитостатикой (а также между электростатикой и стационарными токами в проводящих средах), известная в общих чертах еще и ранее, приобретает у него «полевой смысл», и фактически сызлит как принцип дуальности (перестановочной двойственности) электромагнитного поля ($\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{E}$, $\epsilon \rightleftharpoons \mu$), не сформулированный в таком окончательно современном виде наверное только потому, что он просто физически не успел (умер) собрать все свои разрозненные аналогии и пропустить их через найденную систему уравнений.

4. СТРУКТУРА

«Я полагал, что будет полезен трактат, который имел бы главной своей задачей охват всего предмета в целом с общей методической точки зрения, трактат, в котором было бы указано, какая часть этого предмета делается доступной путем реальных измерений» («Трактат», Предисловие). Осуществляя эту программу, Максвелл собрал воедино практически все известные к тому времени экспериментальные и теоретические успехи в области электричества и магнетизма. Построение «Трактата» проблемно-историческое. Он начинается с электростатики, затем охватывает явления проводимости, включающие электролиз; особое внимание уделяется принципам создания источников и приборов. По той же схеме исследуются магнитные явления, и далее следует то, что сейчас называется теорией квазистационарных цепей. Это — ключевое место «Трактата», именно отсюда исходят те выдающиеся обобщения, которые и привели к созданию целостной электродинамики. После глав, содержащих систему уравнений для полей и потенциалов, Максвелл снова возвращается к обсуждению исходных величин, их измеримости, размерности и соответствия с исторически введенными в разных местах ранее. В конце «Трактата» приведены некоторые «пробные» решения уравнений поля — плоские электромагнитные волны в однородной среде и в кристаллах, эффект Фарадея по вращению плоскости поляризации. Завершающая глава посвящена волновой теории света.

*) Конечно, это не только пример аналогового подхода, но и самостоятельной важности «аппаратная» задача. Заметим, что метод убегающих изображений то появлялся, то исчезал в преемственной цепочке классических учебников по электродинамике (см. Приложение 2). На русском языке его можно найти в переводе Смайта¹³ со ссылкой на Джинса¹⁴. Но, несмотря на это, его, по-видимому, следовало бы перераскрыть, когда пришлось бы решать некоторые современные задачи о токовых шнурах около экранов в связи с проблемой УТС.

В методическом плане Максвелл с самого начала до конца остается верен Фарадею. «Я решил не читать никаких математических работ по этому предмету, пока не проштудирую вначале «Экспериментальные исследования по электричеству» Фарадея» («Трактат», Предисловие). С этих позиций фактически и был осуществлен просмотр всего электромагнетизма тех времен.

5. ИЗМЕРЯЕМАЯ ВЕЛИЧИНА

«При рассмотрении явления с математической точки зрения наиболее важным является понятие измеряемой величины» («Трактат», Предисловие). Это — начало «Трактата», это и начальная позиция его создателя. Здесь Максвелл выступает как философ (тогда это обозначало более прикладные намерения, чем сейчас), формулирующий принцип построения физической теории. И далее не позволяет себе никаких отступлений от него: физическая величина — это только такая величина, которая допускает измерения, т. е. прямые или косвенные сопоставления с эталоном. Отсюда и понятие физического смысла как соотношения между измеряемыми величинами. Несомненно, что такая твердая позиция способствовала принятию фарадеевского понятия поля как непрерывно распределенного и всюду измеримого объекта. Интересно, что Максвелл почти каждое важное формульное соотношение сопровождает словесным пересказом, как бы еще раз соотнося процедуру логической операции с рецептурой измерений.

Но этими краткими замечаниями нельзя ограничиться, отмечая отношение Максвелла к измерениям. Максвелл не принадлежал к числу «великодержавных» физиков-теоретиков, для которых измеряемая величина — это величина, измеряемая в принципе и кем-то другим. Приборы и точности составляют предмет его особых забот и участия. Тогда еще наше пресловутое разделение на теоретиков и экспериментаторов не достигло такой несовместимости, как сейчас. Целью было исследование теми средствами, которые этому исследованию адекватны. Максвелл углубляется в десятки различных конструкций гальванометров, магнетометров и других приборов, выступая и как изобретательный физик, и как вьедливый инженер. Можно сказать, что измеряемую величину он воспринимает еще и реально (руками!), умея повторить или перепроверить почти каждое действие над ней. Он в равной степени погружался и в теоретические методы исчисления, и в экспериментальные способы повышения точностей абсолютных мер: созданная им в 1874 г. Кавендишская лаборатория прежде всего предприняла цикл исследований по измерению электродинамической постоянной. С другой стороны, его восхищенное преклонение неоднократно проявлялось и по поводу удивительных возможностей извлечь почти полное представление о природе физического явления, опираясь только на сравнительные (не зависящие от эталонов) измерения, как это и было продемонстрировано Ампером при создании его электродинамики. И до, и после «Трактата» Максвелл вкладывал много сил, проявляя мастерство и страсть, не только в саму метрологию, но и в поддержание, как бы сейчас сказали, культа измерений в физике. И не случайно одно из последних, наверное, его писаний — Введение издателя к трудам величайшего экспериментатора XVIII века Генри Кавендиша (отправлено в типографию 14 июня 1879 г.!) содержало столь яркое и похвальное слово измерениям¹⁸. Оно начинается так:

«Представим, что Кавендиш позволил нам войти в свою лабораторию на Грейт-Мальборо-Стрит, какой она была создана в 1773 г. для проведения его опытов по электричеству, и мы воспользовались этой лучшей из возможностей, редко (если вообще когда-либо) предоставляемой ученым

его времени, и мы стали изучать приборы, с помощью которых электрическая жидкость вместо того, чтобы поражать нас примерами каждодневно открываемых блестящих явлений, сама делается предметом измерений, как, впрочем, и все, что попадает в этот дом».

6. ПОЛЕ

Сам Максвелл скромно оценивает свое значение в этом деле. Скалярные и векторные величины до его пришествия в науку были понимаемы и используемы. Правда, в отличие от гидродинамики, где пространственно распределенные скалярные и векторные поля имели ясную «микромодельную» интерпретацию (связь эйлерова описания с лагранжевым), в теории гравитационного, электростатического и магнитостатического взаимодействий потенциалы и их вариации предпочтительно рассматривались как удобные инструменты для получения результатов, но не для понимания механизма передачи возмущений через пространство. Сейчас, конечно, кажется удивительным, что идея электромагнитной «сплошности» была провозглашена как результат работы воображения, интуиции, чутья Великого Экспериментатора в то время, когда теоретики, имея уже готовые построения и доброкачественные физические аналогии *), воинственно молчали. Максвелл осуществил необходимую функцию соединения полевой концепции Фарадея с почти готовым формализмом, доведенным, благодаря гамильтонову кватернионному подходу (в данном случае в общем-то необязательному), до некоторой инвариантной общности. С этим, кстати, связана еще одна «легенда», не подтверждаемая знакомством с «Трактатом»: она содержит упрек Максвеллу за использование только координатной формы записи уравнений. И в самом деле, он широко этим пользуется, как и мы, впрочем, век спустя, это делаем сейчас при решении конкретных задач, радуясь разделению переменных. Однако именно Максвеллу принадлежит первая инвариантная векторная запись уравнения поля с применением гамильтонова оператора ∇ , через это, возможно, и обретшего последовавшую известность в физике. Итоговые уравнения «Трактата» записаны и через координатные составляющие, и через «те же самые» градиенты, дивергенции (конвергенции) и роторы, столь привычные и инструментальные для нас **).

Вслед за Фарадеем Максвелл воспринимал поле как некоторое «живое» образование, наделенное самостоятельными, уже не зависящими от источников, свойствами. Аналогия с гидродинамикой, как уже говорилось выше, была почти вынужденной: она приводила к конечной скорости распространения этого самостоятельного поля, и принцип близкодействия даже не требовал какого-то специального постулативного утверждения. Размышляя над топологическими свойствами векторных полей, Максвелл установил, что они исчерпывающим образом разбиваются на потенциальные и вихревые ***). И поскольку обнаружилось, что операция вихря обла-

*) «Вся теория потенциала, рассматриваемого в качестве некоторой вспомогательной величины, удовлетворяющей определенному дифференциальному уравнению в частных производных, по существу, относится к методу, названному мною фарадеевским» («Трактат», Предисловие).

**) Сейчас господствуют две «обозначенческие религии», не враждующие, но подчеркнута кастовые. Одни, считая себя приверженцами «истинной веры», обозначают вихри и расходимости словесными операторами rot и div , другие, отступники, применяют символику векторного и скалярного произведений $\nabla \times$ и $\nabla \cdot$. В этом отношении сам Учитель был эклектиком, более склоняясь к символизму, но в нескольких местах оформления; его обозначения: $(\nabla \cdot \nabla)$ и $(\nabla \times \nabla)$, где ∇ — векторная, ∇ — скалярная части единого произведения оператора на вектор.

***) Строгое доказательство утверждения о возможности разбиения произвольного (вообще говоря, дифференцируемого) векторного поля на потенциальное и вихревое в «Трактате» не приводится, но Максвелл оперирует с ним, как с очевидным.

дает особым поведением при изменении направления оси вращения (или смены левой системы координат на правую), он, вероятно, первый увидел различие векторных полей \mathbf{E} и \mathbf{H} «относительно свойств вращения», т. е. разницу между полярными, или истинными, и аксиальными, или псевдовекторами. Следующий шаг Максвелла более труден для нашего восприятия. Он делает различие между интенсивностными векторами («определенными относительно линий») — это \mathbf{E} , \mathbf{H} , векторный потенциал \mathbf{A} и т. п., и потоковыми векторами («определенными относительно площади»), — это \mathbf{D} , \mathbf{B} , \mathbf{j} и т. п. Казалось бы, связи типа $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ делают такую классификацию непостижимой. Однако именно она позволяет Максвеллу произвести безупречное отъединение чисто электромагнитных соотношений, поистине содержащих только модули типа $\oint \mathbf{E}_t d\mathbf{l}$, $\int \mathbf{B} d\mathbf{s}$, $\oint \mathbf{H}_t d\mathbf{l}$, $\int \mathbf{D} d\mathbf{s}$, $\int \mathbf{j} d\mathbf{s}$, от материальных уравнений, введенных в электромагнетизм, вообще говоря, со стороны. Правда, следует признать, что Максвелл не был привержен безотступно этой классификации — порой он вдруг изменял решения, рокируя термины интенсивность и поток, и при повторной правке тоже. Но если даже считать ее загадочной, то тогда она тем более являет собой пример открытого признания в пользовании некоторой вспомогательной, промежуточной моделью, которую можно было бы и не обнародовать, как не влияющую на конечный результат *), но которой он все-таки искренне поделился с нами, несмотря на ее неокончателность **).

7. РЕКОНСТРУКЦИЯ РАССУЖДЕНИЙ

«Теория Максвелла — это система уравнений Максвелла» — часто цитируемая фраза Герца ² имеет, несомненно, лозунговую экстремальность, подчеркивая независимость результата от поисковых блужданий. Однако если считать, что изложение теории Максвелла как раз и осуществляется в его «Трактате», то эта фраза менее всего характеризует содержание последнего. Там есть много раздумий, подходов, методов, которые остались в физике независимо, иногда даже потеряв авторство, т. е. перейдя на положение научного фольклора ***).

Но, разумеется, главное целеустремление автора было направлено на подведение читателя к уравнениям, описывающим совместно (самосогласованно) электрические и магнитные поля. Поэтому любопытно проследить, слегка реконструируя и экстраполируя, те рассуждения, которые приводили его к этому замкнутому описанию. Важно, что их несколько. И здесь тоже в общем проявился «захват легендами» — и об осеняющей, так сказать, эвристической догадке введения тока смещения, об «обеску-

*) «Метод Ампера, однако, хотя и представлен в индуктивной форме, но позволяет проследить процесс образования идей, характеризующий этот метод. Мы с трудом можем поверить в то, что Ампер на самом деле открыл закон действия лишь с помощью экспериментов, им описанных. Мы вынуждены заподозрить..., что он открыл свой закон каким-то способом, оставшимся для нас нераскрытым». («Трактат», п. 528.)

**) Следуя примеру Фарадея: «Фарадей же, наоборот, демонстрирует нам неудачные свои эксперименты наряду с удачными и незримые свои идеи наряду с развитыми; поэтому читатель, каким бы он ни был менее способным по сравнению с Фарадеем, испытывает ... искушение поверить, что при удачном стечении обстоятельств он сам бы стал первооткрывателем». («Трактат», п. 528.)

***) Так, многие разделы, посвященные статике, настолько хорошо методически отлажены, что почти не устарели в том смысле, что они могут быть вставлены в любой современный учебник, а при освежении некоторых терминов даже и не быть отличными от вновь написанных текстов (значит, выходит, что и не вновь).

раживающих вольностях» в преодолении логических трудностей *), и т. п. Это поневоле отводит внимание потомков, большая часть которых всегда и почти обо всем остается недоосведомленной, от тех поучительных, хотя местами противоречивых и недосказанных суждений, следы которых просматриваются в «Трактате».

Остановимся сначала на прямом введении тока смещения **). Проводимость относится к явлениям кинетическим, связанным с переносом носителей электрического заряда, хотя вопрос о скоростях этого переноса неясен, но до аналогии с гидродинамикой при этом должно соблюдаться уравнение непрерывности носителей

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

Поскольку электрический заряд является источником расходимости векторного поля электрического смещения, т. е. $\rho = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \mathbf{D}$, то уравнение непрерывности представляется в виде

$$\operatorname{div} \left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j} \right) = 0;$$

нет никакого другого способа удовлетворить уравнению непрерывности, кроме как путем введения недостающего члена в уравнение, будем говорить, Ампера:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \rightarrow \frac{4\pi}{c} \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right).$$

Иное дело, что Максвелл старался проникнуться всеми «промежуточными последствиями» этого ошеломляющего добавка к привычным квазистационарным соотношениям, но приведенная схема (к сожалению, мы не знаем, на каком этапе она зародилась у него) является исчерывающей и имеет характер не столько осознания, сколько установления соответствия с законом сохранения ⁵.

Это вообще очень важный момент: обращение к физической аналогии, в частности, к динамической, при построении любой новой теории, позволяет не упустить необходимости удовлетворения тем общим физическим принципам, в частности, законам сохранения, которые на данном этапе понимания природы могут быть даже и не до конца осознанными. «Образую понятия и составляя терминологию в какой-либо науке, которая, подобно науке об электричестве, имеет дело с силами и их проявлениями, мы непременно должны руководствоваться идеями, присущими фундаментальной науке Динамике. И тогда на начальной стадии развития этой

*) Приведем для примера довольно наглядный отрывок из сравнительно свежеепереведенной на русский язык книги Льюэлли ¹⁵: «Максвеллу ничего не стоит исключить какой-либо член, заменить неподходящий знак выражения обратным, подменить значение какой-нибудь буквы... Физикам не удалось привести его теории в стройный порядок, т. е. освободить и от логических ошибок и непоследовательностей. Но, с другой стороны, они не могли отказаться от теории, которая ... органически связывала оптику с электричеством».

**) Интересно, что приводимое далее почти очевидное рассуждение потребовало специальных «раскопок», приуроченных, по-видимому, к 100-летию уравнений Максвелла, и соответствующее реконструирование максвелловского хода мыслей было осуществлено Пайерлсом ⁵ и вслед за ним Шапиро ¹⁶, исходя из сравнения трех последовательных работ Максвелла: первой — «О фарадеевских линиях силы» (1855—1956) ^{1, 9}, где ток смещения отсутствовал, второй — «О физических линиях силы» (1861—1962) ^{1, 9}, где он впервые появился, и третьей — «Динамическая теория электромагнитного поля» ^{1, 9}, наиболее ясной, как бы резюмирующей первые две. «Трактат» в таком исследовании, как бы произведение более позднее, а, с учетом правки, и наиболее позднее, можно рассматривать как свидетельство самоочевидца.

науки нам удастся избежать несоответствия с уже установленными утверждениями, а после обретения более ясного понимания принятый нами язык может сослужить нам пользу, а не быть помехой» («Трактат», п. 567).

Другое рассуждение, приведшее Максвелла к необходимому обобщению уравнения, определяющего источники вихрей электрического поля, состояло в рассмотрении полей, оторванных от зарядов и токов. В его распоряжении было уравнение для магнитной индукции (его можно было бы называть уравнением Фарадея)

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} d\mathbf{s},$$

связывающее интенсивностный электрический вектор \mathbf{E} с потоковым магнитным вектором \mathbf{B} . Другое соотношение могло связывать аналогичным образом лишь интенсивностный магнитный вектор \mathbf{H} с потоковым электрическим вектором \mathbf{D} . В отличие от предыдущей схемы, здесь, конечно же, должна быть включена еще и интуиция, потому что, как уже говорилось выше и как нам представляется сейчас, именно под эти связи и подложена интенсивностно-потоковая классификация векторов.

Интуитивная подсказка (с точностью до знака, который определяется из соображений получения устойчивого электромагнитного поля) могла идти от аналогии между электрическими и магнитными полями, которая исследуется Максвеллом весьма дотошно и которая иницирует двойственную инвариантность, т. е. сохранение уравнений (по крайней мере, в областях вне источников) при замене $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$, $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \rightarrow -\mathbf{D}$. И тогда «электрическая пара» уравнений

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{D} = 0,$$

известная (с точностью до обозначений) и до Максвелла, «автоматически» порождает «магнитную пару» уравнений:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0,$$

первое из которых и являлось объектом поиска.

Наконец, третий путь, по существу, совсем не обсуждаемый максвелловцами (а, впрочем, таких людей в чистом виде, наверно, и нет, — это просто физики, получившие возможность отлучиться на время от взмыленных гонок), состоит в построении Максвеллом лагранжева описания электромагнитного поля. Он уделяет этому изрядное место в «Трактате». Мы не будем здесь останавливаться на тех интересных рассуждениях, которые привели Максвелла к написанию соотношений для плотности энергии электрического и магнитного полей, а также для тензоров натяжений силовых линий (без учета стрикционных поправок, сделанных позднее). Но именно это обстоятельство позволило ему составить функцию Лагранжа для электромагнитного поля:

$$\mathcal{L} = \int_V \left(\frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{8\pi} - \frac{\mathbf{H} \mathbf{B}}{8\pi} \right) dV,$$

из которой, как мы знаем, с помощью обычной вариационной техники выводятся уравнения электродинамики во всей их максвелловской полноте. Суть дела состоит в том, что квазистационарная функция Лагранжа для

LC-контуров

$$\mathcal{L} = \sum \left(\frac{Q^2}{2C} - \frac{LI^2}{2} \right),$$

(I — токи, Q — заряды), написанная им, исходя из электромеханической аналогии *), дает локальную, т. е. выраженную через поля в малой области пространства, и точную функцию действия электромагнитного поля, если соблюдено уравнение непрерывности заряда (в данном случае $I = dQ/dt$), а из него, как было показано выше, уравнения электродинамики почти автоматически пополняются токами смещения.

Следовательно, можно утверждать, что Максвелл смог написать уравнения электродинамики и через лагранжев формализм, хотя в том окончательном, стилизованном по-нашему, виде, в котором нам хотелось бы иметь, по возможности, все документы истории, это рассуждение в «Трактате» отсутствует.

8. ПОЛНОТА, НО НЕ ЗАВЕРШЕННОСТЬ

«Эти соотношения можно считать основополагающими. Их можно было бы скомбинировать так, чтобы исключить некоторые из величин. Однако сейчас наша задача состоит не в получении компактных математических формул, а в написании выражения для каждого соотношения, о котором мы что-либо знаем. На этой стадии исследования исключение любой величины, отражающей полезную идею, было бы скорее потерей, чем выигрышем» («Трактат», п. 615). Поскольку написанная Максвеллом система уравнений (а в ней присутствовали уравнения и для полей, и для потенциалов, и материальные связи) не была внутренне противоречивой, то вопрос об излишествах, по существу, действительно являлся второстепенным: он был потом улажен фактически на стадии установления теорем существования и единственности. Более ответственной была проблема непротиворечивости и полноты этой системы, и Максвелл не считал себя (да и не был еще тогда) вправе делать по этому поводу какие-либо утверждения. Он ограничился лишь некоторыми дедуктивными демонстрациями. Во-первых, этим уравнениям подчинялись все известные ранее описания электростатических, магнитостатических и квазистационарных полей. Во-вторых, он построил их решение для произвольно быстрого изменения во времени и получил плоские электромагнитные волны в однородной среде, переносящие энергию и импульс и распространяющиеся в вакууме со скоростью света (триумф фарадеевского провидения**). Наконец, он наметил схему объяснения «воздействия магнетизма на свет» (т. е. тоже фарадеевского эффекта вращения плоскости поляризации в замагниченной среде). Таким образом, Максвелл исчерпывающе выполнил намеченную им самим же программу — «облечь идеи Фарадея в мате-

*) «Для человеческого разума, который однажды усмотрел аналогию между явлениями самоиндукции и движением материальных тел, все-таки трудно полностью отказаться от обращения к этой аналогии. Основные динамические представления о том, что материя способна воспринимать импульс и энергию через движение, настолько переплелась с нашим образом мыслей, что стоит нам уловить лишь проблеск этой идеи в любой части природы, как мы чувствуем, что перед нами открывается путь, который рано или поздно приведет к полному пониманию предмета» («Трактат», п. 550).

**) При определении скоростей электромагнитных волн в среде с диэлектрической проницаемостью ϵ Максвелл столкнулся с очень заметными расхождениями между показателем преломления для света $n = \sqrt{\epsilon}$ и соответствующими ему значениями, извлеченными из статических ϵ . Однако, в отличие от Ньютона при оценке силы притяжения Луны, он имел достаточно уверенности (и мужества, конечно) утверждать, что это не подрывает сведение света к электромагнитным волнам, а лишь указывает на неуниверсальность ϵ , т. е. на наличие влиятельной дисперсии.

математическую форму», и эта форма в результате оказалась обладающей непротиворечивой полнотой, что в известной мере есть триумф и Фарадея тоже.

Если оставить в стороне методические усовершенствования и инструментарий, то все дальнейшее вмешательство (слово, не менее уместное, чем «обобщение») в максвелловские уравнения относится только к материальным соотношениям, т. е. к связям, навязанным извне (например, микросвойствами сред), в том числе даже и не чисто электромагнитного происхождения. И всякая переписка уравнений поля на иной лад могла быть сведена к переопределению векторов индукции \mathbf{D} и \mathbf{B} *).

Особое место занимают энергетические соотношения. Видоизменения материальных уравнений (учет немгновенности и нелокальности связей, т. е. временной и пространственной дисперсии, нелинейности и т. п.) существенно повлияли и на формы выражений для плотности электромагнитной энергии и плотности импульса, замороженного или переносимого полем. Но и здесь собственно уравнение поля, т. е. внутренние электромагнитные связи между векторами смогли остаться неизменными, т. е., как говорил Максвелл (правда, по другому поводу), «они оставляли слишком много простора для введения новых идей по мере их выявления из новых фактов» («Трактат», п. 528). И поскольку электродинамика создавалась, если не по образу и подобию, то с оглядкой на Динамику, все динамические законы сохранения были естественным образом в ней соблюдены. Таким образом, аналогия с механикой (об этом мы уже дважды упоминали) способствовала не обужению описания нового класса явлений, а подчинению их некоторым всеобщим нормам, что впоследствии стало служить непеременимым условием для любой физической теории. Так что предсказанное Максвеллом явление переноса импульса электромагнитными волнами (давление света) имеет гораздо большую научную значимость, чем утверждение «еще одного» нового эффекта в физике.

Наиболее трудным (а отчасти даже не правомочным, но с другой стороны, что же, кроме отсутствия внутренней потребности, может служить ограничением) является вопрос о незавершенности «Трактата».

Получив уравнения для электромагнитного поля, Максвелл должен был на следующем этапе осуществить всю ту методическую программу их обследования, которую он «только что» продемонстрировал при обзорном рассмотрении статических и квазистационарных приближений: внутренняя непротиворечивость, единственность, поле источников, взаимность, краевые задачи, аналогии ... Такое предположение выглядело бы, пожалуй, безответственно странным, если бы оно не опиралось на определенный стереотип, уже проглядываемый в некоторых главах «Трактата», предшествующих гл. 8, 9 второго тома, где выписаны итоговые уравнения.

Особое «непонимание» у потомков третьего и далее поколений вызывает тот факт, что сам Максвелл почти не пользовался переходом в движущиеся системы отсчета и, следовательно, не затрагивал соотношений, по которым должны при этом преобразовываться поля и токи. Несомненно, что в «эфирные» времена установление инвариантно-групповых свойств уравнений, как таковых, требовало определенных внутренних пределе-

*) В частности, именно таким путем можно симметризовать уравнения относительно токов, что и было сделано в свое время Хевисайдом, который однажды был даже официально назван великим «пропагандистом максвелловской науки»⁵. Если в области источников сделать переопределение вектора $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + 4\pi \mathbf{M}_{\text{ст}}$, а вместо $\mathbf{M}_{\text{ст}}$ ввести обозначения $\rho^m = +\operatorname{div} \mathbf{M}_{\text{ст}}$, $\mathbf{j}_m = -\partial \mathbf{M}_{\text{ст}}/\partial t$, то уравнения поля будут содержать феноменологически равноправные электрические и магнитные токи. Однако это действие, хотя и удобное для некоторых макроскопических дел, является в известном смысле антимаксвелловским, поскольку оно не подкреплено никакими микромоделями.

ний и не могло сводиться к чисто математическим процедурам¹⁷. Но вообще такого рода «недоумения», «ретроспективные предсказания» и т. п. относятся уже к компетенции виртуальной истории (ее называют почему-то альтернативной), «ход» которой в известных пределах произволен и очень зависим от загадочного механизма социального и психологического созревания идей.

9. НУ, И ЗАЧЕМ НУЖНА КЛАССИКА В ОРИГИНАЛЕ?

«Чтение оригинальных трудов дает изучающему любой предмет большое преимущество, ибо наука всегда наиболее полно усваивается в стадии зарождения» («Трактат», Предисловие). Здесь, правда, ничего не говорится об адаптированных первоисточниках — Максвеллу, пожалуй, это и не приходило в голову.

В наше время, когда интервал между появлением идеи и ее эксплуатационным истощением стал соизмерим (порой и много меньше) с активным участком времени жизни одного поколения (по-видимому, это долго еще будет характерным масштабом), мы не успеваем извлекать уроки даже из ближних историй, не говоря уже про дальние. Однако сие не должно относиться к свершениям, не только «поджигающим пожар, но и делающим эпоху», т. е. к тем, проникающее влияние которых распространяется на много поколений и которые — в силу принципа дополнительности — выстаивают, если область их применимости не расширять слишком бесцеремонно. А бифуркационная обстановка смут и неразберих, для упорядочения которой порой не хватает лишь одного затравочного толчка, возникает в естествознании примерно с периодом в два-три поколения. Поэтому изучение поведения людей и систем вблизи такого состояния может составить научную потребность, благоприятствуя прогнозированию исхода сходных коллизий в будущем. Это почти очевидно. Это, можно сказать, социальный компонент вопроса.

А есть и другой — индивидуальный и более прикладной. Следя за течением мысли классика, мы проникаемся чувством конкретного, рабочего уважения к этому Великому Человеку и, зная последующий ход событий, поражаемся его интуитивной предусмотрительности. И это учит нас «бдительности в малом», т. е. тому, что любое обобщение в задаче любого ранга, сделанное с уважительной «оглядкой на всякий случай», как правило, самоокупаемо. Таких поучительных открытий современный читатель «Трактата» может сделать для себя изрядно много, в том числе и открытий, так сказать, для личного пользования, касающихся способа решения (или предугадывания поведения решения) многих «наших» задач («Черт возьми, а ведь почти все есть у Максвелла!»). На какой-то стадии даже возникает ощущение, что прошедшее столетие, во всяком случае в области классической электродинамики, было посвящено развитию (а иногда и повторению по незнанию) максвелловских начал, не доведенных до конца по причине его преждевременного ухода из жизни.

ПРИЛОЖЕНИЕ

СЕМЕЙСТВО УЧЕБНЫХ РУКОВОДСТВ ПО МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

«Трактат» можно рассматривать как начало обширного и разветвленного семейства монографий и руководств по максвелловской электродинамике. Ниже мы попытались воспроизвести английские, немецкие и русские «языковые ветви» этого «древа», содержащие только те учебные пособия, которые сыграли определяющую образовательную роль в свои времена.

Английская ветвь

1. Thomson J. J. Notes on Recent Researches in Electricity and Magnetism.— Oxford: The Clarendon Press, 1893.
2. Jeans J. H. The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism.— Cambridge: Cambr. University Press, 1908; 5th ed., 1925.
3. Смайт В. Электростатика и электродинамика.— М.: ИЛ, 1954.
4. Страттон Дж. Теория электромагнетизма.— М.: Гостехиздат, 1948.
5. Пановский В., Филиппс М. Классическая электродинамика.— М.: ИЛ, 1963.
6. Джексон Дж. Классическая электродинамика.— М.: Мир, 1965.

Немецкая ветвь

1. Sohn E. Das Elektromagnetische Feld.— Leipzig, 1900.
2. Förppl—Abraham. Einführung in die Maxwellsche Theorie.— Leipzig, 1904.
3. Абрагам—Беккер. Теория электричества.— М.: ОНТИ, 1936.
4. Зоммерфельд А. Электродинамика.— М.: ИЛ, 1958.

Русская ветвь

1. Хвольсон О. Д. Курс физики. Т. IV, V.— 2-е изд.— Берлин: Госиздат, 1923.
2. Эйхенвальд А. А. Теоретическая физика. Ч. I: Теория поля.— М.: 1932.
3. Френкель Я. И. Электродинамика. Т. I, II.— М.; Л.: 1934.
4. Тамм И. Е. Основы теории электричества.— 2-е изд.— М.; Л., 1929.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— 6-е изд.— М.: Гостехиздат, 1973; Электродинамика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1957.

Авторы признательны С. Д. Жерносек и Е. В. Суворову за дружескую помощь.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Максвелл Дж. Клерк. Избранные сочинения по теории электромагнитного поля./Под ред. П. С. Кудрявцева.— М.: Гостехиздат, 1950.
2. Из предыстории радио: Сб. оригинальных статей и материалов/Сост. С. М. Рытов. Под ред. Л. И. Мандельштама.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948.
3. Smith—Rose R. L. James Clerk Maxwell.— London, 1948.
4. Мак-Дональд Д. Фарадей, Максвелл и Кельвин /Пер. с англ.— М.: Атомиздат, 1967.
5. Максвелл Дж. Клерк. Статьи и речи.— М.: Наука, 1968.
6. Карцев Вл. Максвелл.— М.: Молодая гвардия, 1974.— (Сер. ЖЗЛ).
7. Maxwell J. Clerk. A Treatise on Electricity and Magnetism in two volumes.— Oxford: Clarendon Press Series, 1873.
8. Maxwell J. Clerk. A Treatise on Electricity and Magnetism in two volumes.— 3rd Ed.— 1891.
9. The Scientific Papers of James Clerk Maxwell/Ed. W. D. Niven — Lnd.: Dover, 1890.
10. Campbell L., Garnett W. The Life of J. C. Maxwell.— Lnd.: 1882.
11. Пуанкаре А. Теория Максвелла и герцовские колебания.— СПб, 1900.
12. Lord Kelvin. Baltimore Lectures on Molecular Dynamics.— John Hopkins, 1884.
13. Смайт В. Электростатика и электродинамика.— М.: ИЛ, 1954.
14. Jeans J. H. The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism.— Cambridge: Cambr. University Press, 1908.
15. Льюис М. История физики.— М.: Мир, 1970.
16. Шапиро И. С. К истории открытия уравнений Максвелла.— УФН, 1972, т. 108, с. 319.
17. Дайсон Ф. Дж. Упущенные возможности.— УМН, 1980, т. 25, вып. 1, с. 171.
18. The Electrical Researches of Henry Cavendish/Ed. J. C. Maxwell.— Cambridge: Cambr. University Press, 1879.