

536.764

**ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ С ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИМИ
ПАРАМЕТРАМИ ПОРЯДКА**

М. А. Анисимов, Е. Е. Городецкий, В. М. Запрудский

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	103
2. Фазовые диаграммы с поликритическими точками	104
а) Смесь изотонов гелия (104). б) Галогениды аммония (105). в) Сегнетоэлектрики и антиферромагнетики (106). г) Твердые растворы (107). д) Многокомпонентные жидкие растворы (107).	
3. Феноменологическое описание поликритических явлений	108
а) Теория Ландау (108). б) Область применимости теории Ландау (111). в) Масштабная гипотеза. Кроссоверные явления (112).	
4. Теоретическое исследование фазовых переходов в системах с несколькими параметрами порядка	114
а) Постановка задачи (114). б) Взаимодействие двух параметров порядка. Условия появления поликритических точек (115).	
5. Трикритические точки	117
а) Теория (117). б) Эксперимент (121).	
6. Бикритические и тетракритические точки	126
а) Теория (126). б) Эксперимент (129).	
7. Искаженное поликритическое поведение	130
а) Трикритическое поведение при фазовом переходе изотропная жидкость — нематический жидкий кристалл (130). б) Кривая сосуществования жидкость — газ вблизи критической точки ртути (133). в) Точка пересечения линий ориентационных фазовых переходов в бромистом аммонии (133).	
8. Заключение	134
Список основных сокращений и обозначений	134
Цитированная литература	135

1. ВВЕДЕНИЕ

Прошло всего лишь несколько лет, как была решена проблема критических явлений (фазовых переходов второго рода) — одна из труднейших проблем современной макроскопической физики. Универсальность в поведении объектов самой различной природы — наиболее привлекательный результат флюктуационной теории фазовых переходов (см. 1–5). Критические аномалии характеризуются набором универсальных констант (критических индексов), которые зависят лишь от типа симметрии параметра порядка. Теоретически, как правило, исследовались лишь сравнительно простые модели (например, модели Изинга, Гейзенберга). Универсальность означает, в частности, что при одинаковой симметрии параметров порядка модельной и реальной системы должны быть одинаковы (изоморфны) и особенности соответствующих термодинамических величин. Поэтому отличия в поведении термодинамических величин реальных и модельных систем (если они существуют) могут быть связаны с наличием

взаимодействия параметра порядка в реальных системах с другими степенями свободы, которые в простейших моделях не учитываются.

В последние годы проблеме учета взаимодействия параметра порядка с какими-либо другими переменными было посвящено довольно большое число как теоретических, так и экспериментальных работ, основные результаты которых можно кратко сформулировать следующим образом: взаимодействие параметра порядка с другими степенями свободы приводит:

- 1) к появлению линий фазовых переходов второго рода, где изоморфность сохраняется;
- 2) к появлению на этих линиях особых (поликритических) точек, характер аномалий вблизи которых меняется;
- 3) к срыву перехода второго рода на переход первого рода.

Следует подчеркнуть, что экспериментальная ситуация вблизи поликритических точек гораздо сложнее, чем в объектах с обычными критическими точками, где точность экспериментального определения критических индексов иногда лучше точности теоретических предсказаний⁶. Поэтому мы ограничились рассмотрением только достаточно надежных экспериментальных данных и из большого числа объектов с поликритическими точками выбрали лишь наиболее характерные и хорошо изученные экспериментально.

Это прежде всего раствор $\text{He}^3 - \text{He}^4$, ставший уже классическим примером системы с трикритической точкой, а также сравнительно хорошо изученные экспериментально антиферромагнетики и галогениды аммония (вблизи ориентационных переходов).

Кроме того, в обзоре мы рассмотрели некоторые фазовые переходы, которые, на первый взгляд, не имеют ничего общего с поликритическими точками: переход в жидкокристаллическое состояние, критическая точка жидкость — пар ртути, тройные точки в галогенидах аммония. Во всех этих случаях, как оказалось, представление о взаимодействии параметров порядка может служить основой для понимания характера этих явлений, а сами переходы можно считать искаженными в той или иной степени поликритическими точками.

2. ФАЗОВЫЕ ДИАГРАММЫ С ПОЛИКРИТИЧЕСКИМИ ТОЧКАМИ

а) Смесь изотопов гелия

На рис. 1 представлена фазовая диаграмма раствора $\text{He}^3 - \text{He}^4$ при давлении насыщенных паров⁷. В изотопе He^4 при температуре $T = 2,17 \text{ K}$ происходит фазовый переход второго рода в сверхтекучее состояние (λ -переход). Добавление изотопа He^3 приводит к снижению температуры λ -перехода. При содержании He^3 больше 67 атомных % переход в сверхтекучее состояние осуществляется скачком, сопровождаясь расслоением на две фазы разного состава. Сверхтекучая фаза обогащена изотопом He^4 , нормальная фаза обогащена He^3 . Точка, в которой линия фазовых переходов второго рода сменяется линией переходов первого рода, называется трикритической точкой (критической точкой Ландау)⁸.

На рис. 2 та же диаграмма⁹ представлена в координатах температура — химический потенциал^{*)} (μ — величина, термодинамически сопряженная концентрации). Трикритическая точка (ТКТ) раствора $\text{He}^3 - \text{He}^4$ — наиболее хорошо изученный экспериментально объект среди поликритических точек.

^{*)} Точнее, разность химических потенциалов изотопов He^3 и He^4 .

б) Галогениды аммония

В галогенидах аммония в зависимости от температуры и давления (P) реализуются фазы с различным ориентационным упорядочением ионов аммония. На рис. 3 изображена фазовая диаграмма NH_4Br ¹⁰. В тройной

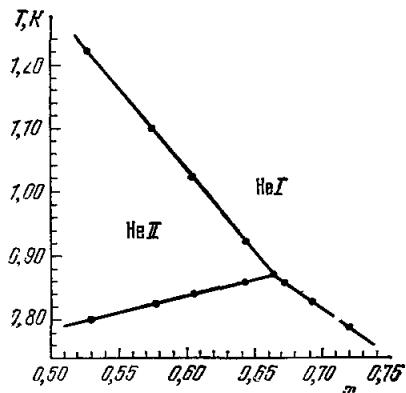


Рис. 1. Фазовая диаграмма смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$.

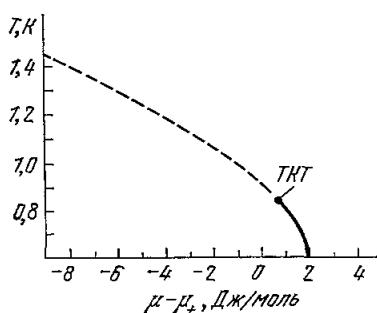


Рис. 2. Фазовая диаграмма смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$ в координатах температура — химический потенциал.
Фазовые переходы второго и первого рода — соответственно пунктируемая и сплошная линии.

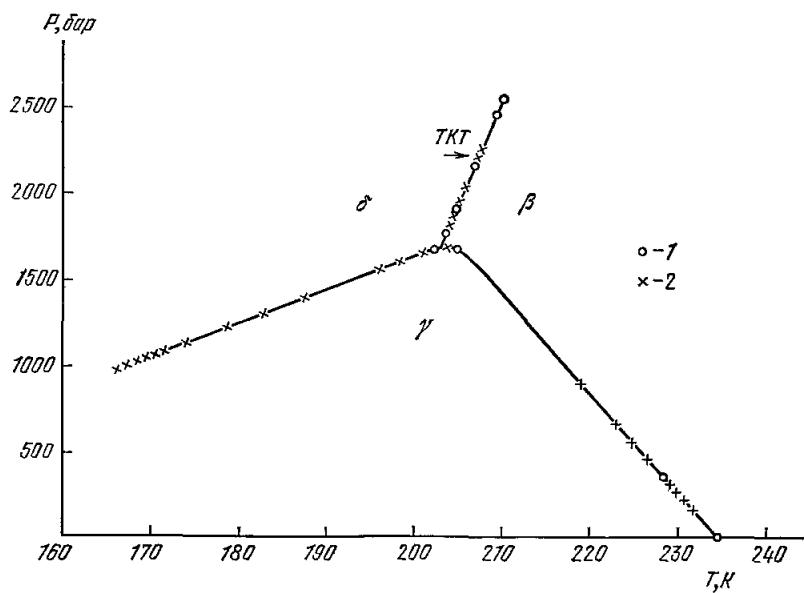


Рис. 3. Фазовая диаграмма NH_4Br : 1 — точка максимума $C_P(T)$, 2 — точка излома адиабаты.

точке сосуществуют три фазы (β — неупорядоченная, δ — упорядочение ферромагнитного типа, γ — упорядочение антиферромагнитного типа). Переходы между фазами вблизи точки 0 все первого рода, поэтому не следует путать эту точку с трикритической. Однако при увеличении давления

переход $\beta \rightarrow \delta$ становится переходом второго рода и, следовательно, возникает ТКТ. Давление одинаково в существующих фазах, поэтому диаграмма рис. 3 является аналогом диаграммы для $\text{He}^3 - \text{He}^4$ в координатах T , μ . Такие же ТКТ на линии переходов $\beta \rightarrow \delta$ обнаружены и в других галогенидах аммония.

в) Сегнетоэлектрики и антиферромагнетики

ТКТ найдены также и в сегнетоэлектриках. Наиболее хорошо экспериментально изучен KH_2PO_4 . Фазовая диаграмма для KH_2PO_4 в координатах T , P , E (электрическое поле) представлена на рис. 4. Характерной и редко встречающейся особенностью данного случая является то, что поле E , термодинамически сопряженное параметру порядка (поляризации), можно реализовать экспериментально. В ТКТ сходятся три линии переходов второго рода: две линии при $E \neq 0$ и одна линия при $E = 0$. Отсюда и название этой точки — трикритическая¹².

В сильно анизотропных антиферромагнетиках, например диспрозий-алюминиевом гранате (ДАГ), FeCl_2 , DyPO_4 при температурах, больших трикритической, происходит непрерывный фазовый переход из однородно намагниченного парамагнетика в антиферромагнитное состояние. При более низких температурах этот переход сопровождается скачком намагниченности. На рис. 5 представлена фазовая диаграмма FeCl_2 в координатах температура — намагниченность^{13, 14}. Видно, что она качественно совпадает с диаграммой раствора $\text{He}^3 - \text{He}^4$ (см. рис. 1). Роль концентрации He^3 выполняет здесь намагниченность. В координатах температура — магнитное поле фазовая диаграмма подобных антиферромагнетиков соответственно имеет такой же вид, как и диаграмма рис. 2.

В слабоанизотропных антиферромагнетиках (например, MnF_2) ситуация другая. При увеличении магнитного поля H , когда антиферромагнитное упорядочение становится невыгодным, средние намагниченности подрешеток отклоняются от оси легчайшего намагничения. Переход из этой (спин-флоп) фазы в однородно намагниченную происходит по второму роду. Переход же спин-флоп — антиферромагнетик — первого рода.

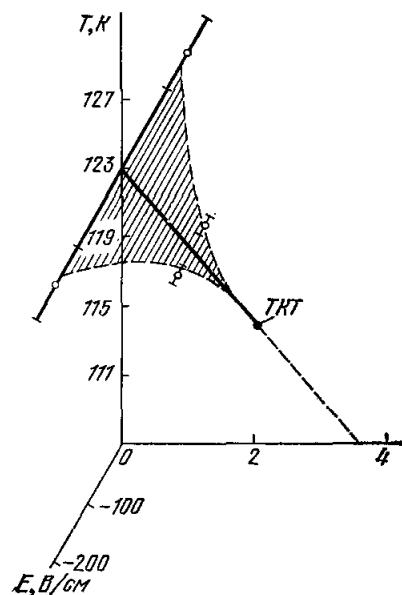


Рис. 4. Фазовая диаграмма KH_2PO_4 .

Фазовые переходы второго и первого рода — соответственно пунктирные и сплошные линии. // — переход первого рода; // — сегнетоэлектрик — антиферромагнетик.

В результате имеем фазовую диаграмму, изображенную на рис. 6¹⁵. Точку, где таким образом сходятся две линии переходов второго рода и одна линия переходов первого рода, называют бикритической¹⁶.

В более сложных случаях возможно возникновение еще одной (промежуточной) фазы¹⁷. В поликритической точке при этом сходятся четыре линии переходов второго рода. Поэтому эта точка получила название тетракритической¹⁶.

г) Твердые растворы

Промежуточная фаза реализуется в двухкомпонентных твердых растворах антиферромагнетиков, например $\text{Fe}_x\text{Mn}_{1-x}\text{WO}_4$. Кристаллические структуры обеих чистых компонентов FeWO_4 и MnWO_4 очень близки друг

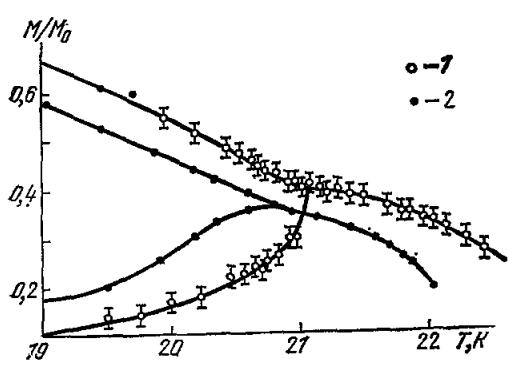


Рис. 5. Фазовая диаграмма FeCl_2 .
 M_0 — намагниченность насыщения. 1 — данные работы ¹⁸, 2 — данные работы ¹¹.

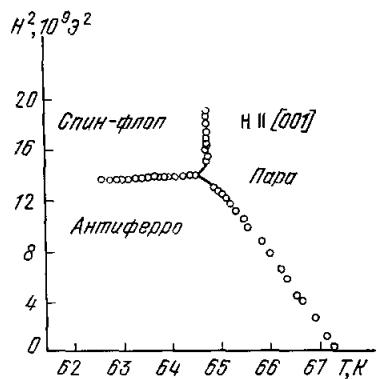


Рис. 6. Фазовая диаграмма MnF_2 .

к другому. В то же время элементарные магнитные ячейки совершенно различны ¹⁸ (рис. 7). Рассеяние нейтронов на этой смеси показывает, что

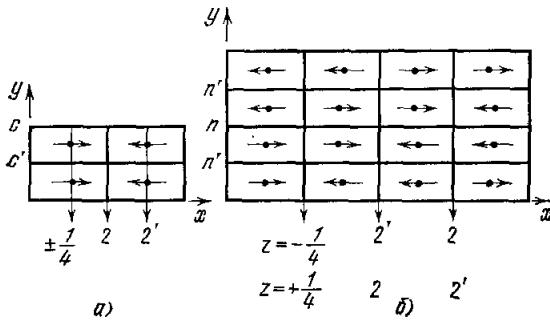


Рис. 7. Магнитные структуры FeWO_4 (a) и MnWO_4 (b).

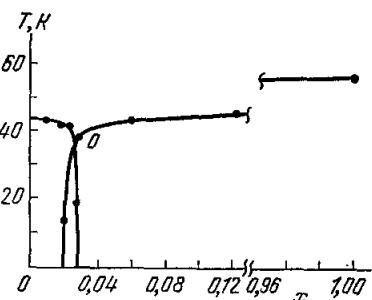


Рис. 8. Фазовая диаграмма $\text{K}_2\text{Mn}_{1-x}\text{Fe}_x\text{F}_4$.

в некотором интервале концентраций x ($0,12 < x < 0,32$) присутствуют рефлексы как структуры (a), так и структуры (b) (см. рис. 7).

В работе ¹⁹ изучалась, в частности, фазовая диаграмма раствора $\text{K}_2\text{Mn}_{1-x}\text{Fe}_x\text{F}_4$. На рис. 8 представлена эта диаграмма в координатах T , x . В точке O пересекаются четыре линии переходов второго рода, т. е. эта точка тетракритическая.

д) Многокомпонентные жидкие растворы

В многокомпонентных жидкостях растворах (с числом компонентов $N \geq 3$) существуют критические точки высшего порядка, в которых становятся идентичными три и более фаз ²⁰. При совпадении трех фаз (например, двух жидких и одной газовой) эта точка оказывается трикритической ²¹.

3. ФЕНОМЕНОЛОГИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ПОЛИКРИТИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

а) Теория Ландау

Рассмотрим условия появления поликритических точек в рамках теории фазовых переходов Ландау²², в которой термодинамический потенциал имеет вид разложения по степеням параметра порядка φ :

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2} A\varphi^2 + \frac{1}{3} B\varphi^3 + \frac{1}{4} C\varphi^4 + \frac{1}{5} D\varphi^5 + \frac{1}{6} E\varphi^6 + \dots \quad (3.1)$$

Коэффициенты разложения зависят от температуры, давления и других полевых (принимающих одинаковые значения в сосуществующих фазах) переменных.

Рассмотрим сначала симметричный случай, когда инвариантов нечетного порядка нет по соображениям симметрии (например, φ — вектор). Если коэффициент $C > 0$, то при $A = 0$ происходит переход второго рода. При $C < 0$ фазовый переход оказывается переходом первого рода. Следовательно, термодинамическая «поверхность», определяемая условиями

$$A = 0, \quad C = 0, \quad (3.2)$$

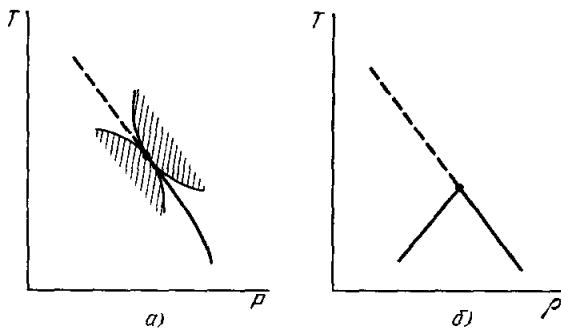


Рис. 9. Фазовые диаграммы систем с трикритической точкой в теории Ландау в переменных температура — поле (а) и температура — «плотность» (б).

Фазовые переходы второго и первого рода — соответственно пунктирные и сплошные линии. Заштрихована область трикритического поведения.

мой «плотности»), например от давления к объему, от магнитного поля к намагниченности, от химического потенциала к концентрации, то фазовая диаграмма с ТКТ имеет вид, изображенный на рис. 9, б.

Условия

$$A = 0, \quad C = 0, \quad E = 0 \quad (3.3)$$

определяют местоположение критических точек четвертого порядка (по терминологии Стенли и др.²³) и т. д. При этом в критической точке четвертого порядка сходятся линии критических точек третьего порядка. Вообще, в точке порядка $\theta + 1$ сходятся линии точек порядка θ . Отметим, что критическая точка порядка θ характеризуется тем, что в термодинамическом потенциале (3.1) первым незануляющимся членом является φ^θ . В этой терминологии обычная критическая точка является критической точкой второго порядка.

Согласно правилу фаз Гиббса⁸

$$i = n + 1 - f, \quad (3.4)$$

где n — число независимых термодинамических переменных, f — число сосуществующих фаз. В рассматриваемом (симметричном) случае числу фаз в критической точке порядка θ следует приписать значение²³

$$f = \theta + 1. \quad (3.5)$$

Если инварианты нечетного порядка не равны тождественно нулю, то ²⁴

$$f = 20 - 1. \quad (3.6)$$

Из (3.4) следует, что число независимых переменных $n \geq f - 1$. Так как f больше в несимметричном случае ($20 - 1 \geq \theta + 1$), то для возникновения критических точек высших порядков в несимметричном случае требуется большее число независимых переменных, чем в симметричном. Например, трикритическая точка ($\theta = 3$) в жидких растворах возможна лишь при числе компонентов, равном трем (четыре независимые переменные).

Рассмотрим теперь более общий случай двух взаимодействующих параметров порядка. Термодинамический потенциал можно представить в виде

$$\Phi^*(\varphi_1, \varphi_2) = \Phi_0 + \Phi_1(\varphi_1) + \Phi_2(\varphi_2) + \Phi_{\text{Int}}(\varphi_1, \varphi_2). \quad (3.7)$$

Возможны три случая: 1) φ_1 — вектор, φ_2 — скаляр; 2) φ_1, φ_2 — оба вектора; 3) φ_1, φ_2 — оба скаляры.

1) φ_1 — вектор, φ_2 — скаляр:

$$\Phi^* = \Phi_0 + \frac{1}{2} A_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{4} C_1 \varphi_1^4 + \frac{1}{6} E_1 \varphi_1^6 + \frac{1}{2} A_2 \varphi_2^2 + \lambda \varphi_1^2 \varphi_2, \quad (3.8)$$

где $A_1 = a_1 \tau_1 \equiv a_1 (T - T_{c1})/T_{c1}$, $A_2 = a_2 \tau_2 \equiv a_2 (T - T_{c2})/T_{c2}$, константа взаимодействия $\lambda = -(a_1/2T_{c1}) (dT_{c1}/d\varphi_2)$. Членами высших порядков по φ_2 мы пренебрегли, так как предполагаем, что $T_{c2} < T_{c1}$, т. е. переход по φ_2 независимо от перехода по φ_1 не реализуется. В этом случае можно свести двухпараметрический потенциал (3.8) к однопараметрическому потенциалу вида (3.1). Действительно, из условия $\partial\Phi^*/\partial\varphi_2 = h_2$, где h_2 — поле, термодинамически сопряженное φ_2 , находим

$$\varphi_2 = \frac{h_2 - \lambda \varphi_1^2}{a_2 \tau_2}.$$

Переходим к потенциалу, зависящему от полевой переменной h_2 :

$$\Phi(\varphi_1, h_2) = \Phi^*(\varphi_1, \varphi_2) - h_2 \varphi_2 =$$

$$= \Phi_0 + \frac{1}{2} \left(a_1 \tau_1 + \frac{2h_2 \lambda}{a_2 \tau_2} \right) \varphi_1^2 + \frac{1}{4} \left(C_1 - \frac{2\lambda^2}{a_2 \tau_2} \right) \varphi_1^4 + \frac{1}{6} E_1 \varphi_1^6. \quad (3.9)$$

Сравнивая с (3.1), находим

$$A = a_1 \tau_1 + \frac{2h_2 \lambda}{a_2 \tau_2}, \quad C = C_1 - \frac{2\lambda^2}{a_2 \tau_2}, \quad E = E_1, \quad B = D = 0.$$

При понижении температуры τ_2 уменьшается и коэффициент C может изменить знак. Условия $A = 0, C = 0$ соответствуют ТКТ. При фиксированном φ_2 ТКТ определяется из условий

$$A_1 = -\frac{2h_2 \lambda}{a_2 \tau_2}, \quad C_1 = \frac{2\lambda^2}{a_2 \tau_2},$$

и фазовая диаграмма имеет вид, изображенный на рис. 9, б.

2) φ_1, φ_2 — оба векторы:

$$\Phi^* = \Phi_0 + \frac{1}{2} A_1 \varphi_1^2 + \frac{1}{4} C_1 \varphi_1^4 + \frac{1}{2} A_2 \varphi_2^2 + \frac{1}{4} C_2 \varphi_2^4 + \frac{1}{2} \lambda \varphi_1^2 \varphi_2^2. \quad (3.10)$$

Если T_{c1} и T_{c2} зависят от какой-либо переменной g , то возможно пересечение линий переходов. Точка пересечения будет бикритической (рис. 10, а) при $\lambda^2 \geq C_1 C_2$ и тетракритической (рис. 10, б) при $\lambda^2 < C_1 C_2$ (см. ²⁵). Отметим, что условием возникновения бикритической точки является сильное взаимодействие параметров порядка.

Минимизируя по одному из параметров порядка, мы опять приходим к однопараметрическому потенциалу вида (3.1). При этом может оказаться, что, несмотря на отсутствие инвариантов нечетного порядка в двухпараметрическом потенциале, такие инварианты появятся в однопараметрическом представлении. Число независимых переменных в рассматриваемом случае равно четырем (T , g , φ_1 , φ_2). Точка пересечения критических линий невариантна ($i = 0$), т. е. $f = n + 1 = 5$. В симметричном случае $\theta = f - 1 = 4$, в несимметричном — $\theta = (f + 1)/2 = 3$. В работе²⁶ показано, что в бикритической точке сходятся линии трикритических точек в пространстве T , g , h_1 , h_2 и, согласно²³, бикритическая точка одновременно является критической точкой четвертого порядка. По отношению к тетракритической точке подробного исследования проведено не было.

3) φ_1 , φ_2 — оба скаляры:

$$\Phi^* = \Phi_0 + \Phi_1(\varphi_1) + \Phi_2(\varphi_2) + \lambda\varphi_1\varphi_2. \quad (3.11)$$

Этот случай характерен для жидких смесей. Условия устойчивости имеют вид

$$\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\varphi_1^2} > 0, \quad (3.12^I)$$

$$\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\varphi_2^2} > 0, \quad (3.12^{II})$$

$$\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\varphi_1^2} \frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\varphi_2^2} - \left(\frac{\partial^2\Phi^*}{\partial\varphi_1\partial\varphi_2} \right)^2 > 0. \quad (3.13)$$

В предыдущих случаях со стороны разупорядоченной фазы $\partial^2\Phi^*/\partial\varphi_1\partial\varphi_2 = 0$, и устойчивость определялась одним из выражений (3.12). В рассматриваемом случае билинейного взаимодействия параметров порядка

$\partial^2\Phi^*/\partial\varphi_1\partial\varphi_2 \neq 0$, и устойчивость определяется выражением (3.13), т. е., вообще говоря, нельзя выяснить, по какому из параметров порядка происходит нарушение устойчивости. Различия выявляются лишь в присутствии некритической фазы, т. е. в так называемых конечных критических точках. Для двухкомпонентных смесей ситуация наиболее проста, так как φ_1 можно определить через состав смеси (x), а φ_2 — через плотность (ρ). В бинарных смесях возможны два типа критических точек: равновесия жидкость — газ и жидкость — жидкость. В термодинамическом отношении оба эти типа эквивалентны и в качестве критического можно выбрать любой из параметров x или ρ . Однако для описания критических точек жидкость — газ удобно выбрать плотность в качестве критического параметра, так как линия критических точек заканчивается в критических точках компонентов смеси. При переходе к полевым переменным — химическому потенциалу μ (или давлению P) получим однопараметрический потенциал $\Phi(T, \rho, \mu)$ (или $\Phi(T, x, P)$), который при фиксированном значении μ (или P) изоморфен потенциалу идеальной системы с изолированной критической точкой: $\Phi = \Phi(T, \rho)$ — однокомпонентная

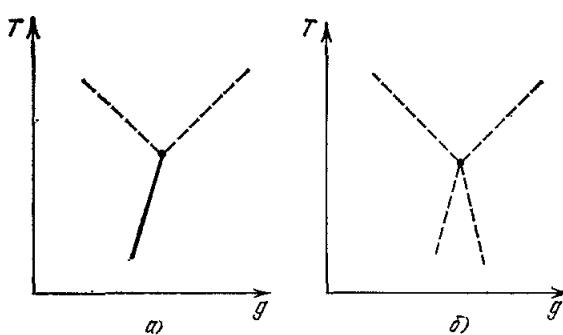


Рис. 10. Фазовые диаграммы систем с бикритической (а) и тетракритической (б) точками в теории Ландау.

Фазовые переходы второго и первого рода — соответственно пунктирные и сплошные линии.

сия жидкость — газ и жидкость — жидкость. В термодинамическом отношении оба эти типа эквивалентны и в качестве критического можно выбрать любой из параметров x или ρ . Однако для описания критических точек жидкость — газ удобно выбрать плотность в качестве критического параметра, так как линия критических точек заканчивается в критических точках компонентов смеси. При переходе к полевым переменным — химическому потенциалу μ (или давлению P) получим однопараметрический потенциал $\Phi(T, \rho, \mu)$ (или $\Phi(T, x, P)$), который при фиксированном значении μ (или P) изоморфен потенциалу идеальной системы с изолированной критической точкой: $\Phi = \Phi(T, \rho)$ — однокомпонентная

жидкость, $\Phi = \Phi(T, x)$ — несжимаемая бинарная смесь. Подробнее об изоморфности см. работы^{27, 28}. Необходимо подчеркнуть, что везде на критических линиях двухкомпонентных смесей сохраняется изоморфность и критические точки высших порядков отсутствуют. В трехкомпонентной смеси мы уже имеем дело с критическими поверхностями и соответственно с линиями конечных критических точек. Эти линии могут сходиться, образуя критическую точку порядка $\theta = 3$, т. е. ТКТ. Это — единственная выделенная точка на критической поверхности. Основные отличия этой точки от симметричной ТКТ следующие: нет отдельных линий критических точек; нельзя выделить критический и некритический параметры порядка, т. е. особенности всех соответствующих термодинамических величин, относящихся к разным параметрам порядка, одинаковы. При большем числе компонентов, кроме критических точек порядка $\theta = 3$, могут возникать критические точки порядка $\theta > 3$. Так, в пятикомпонентной смеси возможна критическая точка четвертого порядка.

б) Область применимости теории Ландау

Известно, что в непосредственной близости к критической точке теория Ландау, пренебрегающая флуктуациями параметра порядка, неприменима. Критерий Гинзбурга, определяющий область применимости теории Ландау, имеет вид³

$$\frac{\langle (\Delta\phi)^2 \rangle}{\Phi_0^2} \ll 1, \quad (3.14)$$

где $\langle (\Delta\phi)^2 \rangle \sim 1/a |\tau| r_c^d$ — флуктуации в объеме с линейными размерами порядка радиуса корреляции r_c , Φ_0 — равновесное значение параметра порядка. Радиус корреляции, вычисленный в предположении малости флуктуаций (приближение Орнштейна — Цернике⁸), равен

$$r_c = r_0 |\tau|^{-1/2}, \quad (3.15)$$

где r_0 — радиус прямой корреляции, измеренный в единицах расстояния между частицами. Тогда критерий (3.14) принимает вид

$$\frac{a |\tau|^{(d-2)/2}}{r_0^d \Phi_0^2} \ll 1. \quad (3.16)$$

В области трикритического поведения, как это следует из разложения (3.1) при $B = D \equiv 0$, $C\Phi^4 \ll E\Phi^6$, равновесное значение параметра порядка

$$\Phi_0 = \left(\frac{a |\tau|}{E} \right)^{1/4}, \quad (3.17)$$

и теория Ландау применима при условии

$$|\tau|^{(3-d)/2} \gg \frac{E^{1/2}}{a^{3/2} r_0^d}. \quad (3.18)$$

Это условие выполняется всегда при $d > 3$. При $d = 3$ учет флуктуаций, как будет показано ниже, приводит к появлению логарифмических поправок к результатам теории Ландау, т. е. поведение остается «почти классическим».

В области критического поведения ($C\Phi^4 \gg E\Phi^6$)

$$\Phi_0 = \left(\frac{a |\tau|}{C} \right)^{1/2}, \quad (3.19)$$

и теория Ландау применима, если

$$|\tau|^{(4-d)/2} \gg \frac{C}{a^2 r_0^d}, \quad (3.20)$$

что выполняется всегда при $d > 4$. При $d = 3$ $|\tau| \gg C^2/a^4 r_0^6$, область применимости теории Ландау появляется либо при уменьшении константы C либо при $r_0^3 \gg 1$ (даленодействие). В широком круге объектов (жидкости, гелий, ферромагнетики) $r_0 \approx 1$, область применимости теории Ландау отсутствует, и правильное описание дает флюктуационная теория^{3,5}. Ситуация аналогична и вблизи бикритической и тетракритической точек.

в) Масштабная гипотеза. Кроссоверные явления

Характерной чертой всех рассматриваемых нами систем является наличие изолированной особой точки (поликритической точки) на линии фазовых переходов $T_c(g)$. Мы ввели здесь обобщенное термодинамическое поле g , которое для различных систем может иметь разный смысл (разность химических потенциалов компонентов в смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$; магнитное поле, точнее H^2 — в антиферромагнетиках и т. д.). Поликритическая точка имеет место при $g = g_0$. Соответствующую температуру $T = T_c(g_0)$ будем обозначать через T_0 .

Особенности термодинамических величин на линии фазовых переходов и в поликритической точке различны. На линии фазовых переходов сохраняется изоморфность идеальной системе, т. е. системе, термодинамический потенциал которой зависит только от температуры и параметра порядка. В поликритической точке изоморфность нарушается. По мере приближения к критической точке $T_c(g)$, близкой, но не совпадающей с поликритической точкой T_0 , поведение системы должно изменяться от поликритического к критическому. Для описания такого переходного поведения можно воспользоваться гипотезой об однородности термодинамических функций²⁹. Эта гипотеза является обобщением масштабной гипотезы¹, на которой основана флюктуационная теория критической точки.

Представим любую термодинамическую величину A в виде суммы регулярной и сингулярной частей. Предположим, что:

1) сингулярная часть величины A есть функция безразмерных отклонений температуры от точки перехода $\tau = (T - T_c(g))/T_c(g)$ и поля g от поликритического значения $\Delta g = (g - g_0)/g_0$;

2) сингулярная часть величины A есть однородная функция своих переменных

$$A_S = \tau(g)^{-a_0} f(z), \quad z = \frac{\Delta g}{\tau(g)^{1/\varphi}}; \quad (3.21)$$

a_0 — критический индекс, характеризующий поведение величины A в поликритической точке; φ — так называемый кроссоверный индекс²⁹, характеризующий ширину области перехода от поликритического к критическому. $f(z)$ — неаналитическая функция. Найдем условия, которым должна удовлетворять эта функция вблизи поликритической ($z \ll 1$) и критической ($z \gg 1$) точек. При $z \ll 1$ аномалия величины A характеризуется индексом a_0 , т. е.

$$f(z) = \text{const.}$$

При $z \gg 1$ сингулярная часть величины A характеризуется индексом $a_c \neq a_0$, т. е. $A_S \sim |\tau(g)|^{-a_c}$, где a_c — критический индекс величины A

в идеальной системе и

$$f(z) = \text{const} \cdot z^{(a_c - a_0)\varphi}.$$

Уравнение критической линии определяется индексом φ и имеет вид

$$T_c(g) = T_0(1 + b\Delta g^\varphi + \dots) \quad (3.22)$$

Кроме выписанного главного неаналитического члена, есть также и регулярные по Δg слагаемые.

Переход от поликритического к критическому поведению происходит при $z \sim 1$, т. е. $\tau \sim \Delta g^\varphi$. В теории Ландау трикритической точки $\varphi = 2$, так как переход от критической области к трикритической происходит при $\tau \sim C^2/aE$, а роль Δg играет величина C . В бикритической и тетракритической точках в теории Ландау $\varphi = 1$.

Весьма существенно, что термодинамические функции, найденные экспериментально, должны быть однородными функциями типа (3.21) лишь в том случае, если эксперимент действительно проводился при фиксированном поле g (например, разности химических потенциалов He^3 и He^4). Лишь фиксирование полевых переменных, в отличие от «плотностей», как показано в работах ²⁸, позволяет сохранить изоморфность. Это условие иногда выполнить невозможно. Так, в системе $\text{He}^3 - \text{He}^4$ все измерения проводятся при фиксированном значении концентрации $\text{He}^3 x$. В этом случае все величины должны быть выражены через параметр $\tau(x) = (T - T_c(x))/T_c(x)$. Критические индексы при этом перенормируются.

Таким образом, индекс, характеризующий величину A , может вблизи поликритической точки меняться по двум причинам:

1) переход от поликритической области к критической (первый тип кроссоверных явлений);

2) переход к области перенормировки при приближении к критической или поликритической точке по неизоморфному пути (второй тип кроссоверных явлений).

В поликритической области перенормированные значения индексов равны ³⁰

$$a_0^* = \begin{cases} a_0/(1-\alpha_0) & \text{при } \varphi(1-\alpha_0) > 1, \alpha_0 > 0, \\ a_0\varphi & \text{при } \varphi(1-\alpha_0) \leq 1, \varphi > 1, \\ a_0 \text{ (перенормировки нет)} & \text{при } \varphi(1-\alpha_0) > 1, \alpha_0 < 0 \text{ или} \\ & \varphi(1-\alpha_0) \leq 1, \varphi < 1. \end{cases} \quad (3.23)$$

В критической области индекс a_c перенормируется единственным образом:

$$a_c^* = \begin{cases} a_c/(1-\alpha_c) & \text{при } \alpha_c > 0, \\ a_c \text{ (перенормировки нет)} & \text{при } \alpha_c < 0, \end{cases} \quad (3.24)$$

так как вблизи критической точки $z \gg 1$.

Ширина области перенормировки в случае, когда g — химический потенциал, определяется, как показано в работе ²⁷, параметром

$$\xi \sim x \left(\frac{1}{T_c} \frac{\partial T_c}{\partial x} \right)^2.$$

Например, вблизи критической точки перенормировка происходит в области

$$\xi \tau(x)^{-\alpha_c} \gg 1. \quad (3.25)$$

Экспериментальное исследование систем вблизи поликритических точек чрезвычайно затруднено именно наличием этих кроссоверных явле-

ний. Практически все эксперименты по исследованию поликритических точек проводились либо в первой, либо во второй переходной областях.

Задачей микроскопической теории является вычисление всех критических индексов (как в критической, так и в поликритической точках) и кроссоверной функции $f(z)$. При экспериментальной проверке такой теории наиболее целесообразно изучать степень однородности всех термодинамических функций, а не «эффективные» критические индексы, меняющиеся по мере приближения к точке перехода.

4. ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В СИСТЕМАХ С НЕСКОЛЬКИМИ ПАРАМЕТРАМИ ПОРЯДКА

а) Постановка задачи

Все реальные фазовые переходы второго рода происходят на линиях или поверхностях, поскольку, кроме параметра порядка, существуют другие степени свободы. Единственным исключением является критическая точка однокомпонентной жидкости. В принципе любую равновесную степень свободы можно рассматривать как дополнительный параметр порядка. Таким образом, можно представить гамильтониан системы в виде суммы гамильтонианов невзаимодействующих подсистем, каждая из которых характеризуется своим параметром порядка φ_m , и члена \mathcal{H}_{int} , учитывающего взаимодействие между ними:

$$\mathcal{H}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} = \sum_{m=1}^n \mathcal{H}_m\{\varphi_m\} + \mathcal{H}_{\text{int}}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}, \quad (4.1)$$

где

$$\mathcal{H}_m\{\varphi_m\} = \mathcal{H}_{0m}\{\varphi_m\} + \int d^d r \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_m^{(k)}}{k!} \varphi_m^{2(k+1)}(r) - h_m \varphi_m(r) \right], \quad (4.2)$$

$$\mathcal{H}_{0m}\{\varphi_m\} = \frac{1}{2} \int d^d r [\tau_m \varphi_m^2(r) + (\nabla \varphi_m(r))^2], \quad \tau_m = \frac{T - T_{cm}}{T_{cm}}. \quad (4.3)$$

Интегрирование ведется по всему пространству размерности d , T_{cm} — температуры переходов по параметрам φ_m в отсутствие взаимодействия. Гамильтониан \mathcal{H}_m — хорошо известный гамильтониан Ландау⁸, а вид \mathcal{H}_{int} определяется конкретным типом симметрии параметров порядка.

На φ_m в (4.1) не наложено никаких дополнительных ограничений; это означает, что мы работаем при фиксированных значениях термодинамически сопряженных переменных φ_m полей h_m .

Согласно флуктуационной теории фазовых переходов второго рода^{2, 3} при приближении к критической точке константы исходного гамильтониана (4.1) перенормируются, стремясь к некоторым универсальным значениям. На языке теории это означает наличие устойчивой фиксированной точки (ФТ) преобразований ренорм-группы. Характер фазового перехода, в частности критические индексы, целиком определяется параметром устойчивой ФТ. Учет дополнительных переменных φ_m приводит, как правило, к появлению новых ФТ, каждая из которых имеет свою область устойчивости по константам гамильтониана (4.1). При этом возможен один из следующих трех случаев:

1. ФТ, соответствующая идеальной системе, остается устойчивой. Фазовый переход оказывается изоморфным переходу в идеальной системе.

2. Старая ФТ становится неустойчивой. Устойчива новая ФТ, характер фазового перехода меняется. На фазовых диаграммах это соответствует появлению поликритических точек.

3. Устойчивых ФТ вообще нет. Происходит срыв перехода второго рода на первый. Этот случай подробно исследовался в работах^{31–33}.

б) Взаимодействие двух параметров порядка.
Условия появления поликритических точек

Рассмотрим гамильтониан взаимодействия \mathcal{H}_{int} в виде

$$\mathcal{H}_{\text{int}} \{\varphi_1, \varphi_2\} = \lambda \int d^d r Q_1(r) Q_2(r), \quad (4.4)$$

где λ — константа взаимодействия, операторы $Q_m(r)$ зависят только от $\varphi_m(r)$. Во всех интересующих нас случаях оператор $Q_1(r) = \varphi_1^2(r)$. Оператор $Q_2(r)$ в зависимости от симметрии может быть равен либо $\varphi_2(r)$ (если φ_2 — скаляр), либо $\varphi_2^2(r)$ (если φ_2 — вектор).

Два случая в дальнейшем приводят к существенно различным результатам:

1. Критические температуры невзаимодействующих подсистем T_{c1} и T_{c2} различны. Как будет показано ниже, при этом на фазовой диаграмме может возникнуть трикритическая точка.

2. Критические температуры T_{c1} и T_{c2} одинаковы. Это условие приводит к бикритической или тетракритической точке в зависимости от числа компонентов параметров порядка φ_1 и φ_2 .

В первом случае ($T_{c1} \neq T_{c2}$) критическим является лишь один из параметров порядка (скажем, φ_1). Интегрируя статистическую сумму системы

$$Z = \int d\varphi_1 d\varphi_2 \exp(-\beta \mathcal{H} \{\varphi_1, \varphi_2\}) \quad \left(\beta = \frac{1}{k_B T} \right) \quad (4.5)$$

при $\tau_1 \ll 1$ по некритической моде φ_2 ³⁴, мы сведем задачу вычисления статистической суммы (4.5) двухкомпонентной системы к вычислению статистической суммы однокомпонентной системы с эффективным гамильтонианом $\mathcal{H}_{\text{эфф}} \{\varphi_1\}$, который определяется по формуле

$$\mathcal{H}_{\text{эфф}} \{\varphi_1\} = -\frac{1}{\beta} \ln \int d\varphi_2 \exp(-\beta \mathcal{H} \{\varphi_1, \varphi_2\}). \quad (4.6)$$

Разлагая (4.6) по \mathcal{H}_{int} , найдем

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{эфф}} \{\varphi_1\} &= \mathcal{H}_1 \{\varphi_1\} - \\ &- \frac{1}{\beta} \sum_l \frac{(-4)^l}{l!} (\beta \lambda)^l \int B_2^{(l)}(r_1, \dots, r_l) \prod_{i=1}^l Q_1(r_i) d^d r_i, \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $B_2^{(l)}$ — неприводимые средние l -го порядка от операторов $Q_2(r)$:

$$B_2^{(l)}(r_1, \dots, r_l) = \langle\langle Q_2(r_1) \dots Q_2(r_l) \rangle\rangle. \quad (4.8)$$

Усреднение при вычислении $B_2^{(l)}$ ведется по функции распределения $\exp(-\beta \mathcal{H}_2 \{\varphi_2\})$. Основной вклад в интегралы (4.7) дают масштабы $r_{c2} \ll r_{c1}$ (r_{ci} — радиусы корреляции флуктуаций φ_1 и φ_2 соответственно). Поэтому в основном по r_{c2}/r_{c1} приближении можно заменить в (4.7) произведение операторов $\prod_{i=1}^l Q_1(r_i)$ на $Q_1^{(l)}(r)$. Эффективный гамильтониан тогда будет представлять собой полином по критическому параметру порядка φ_1 , аналогичный гамильтониану идеальной системы $\mathcal{H}_1 \{\varphi_1\}$, с константами, зависящими от температуры и поля, термодинамически сопряженного параметру φ_2 . Это, естественно, приводит к появлению на фазовой диаграмме линий критических точек $T_c(h_2)$ переходов по параметру порядка φ_1 . При

$$\Delta\tau \equiv \frac{T_c(h_2) - T_{c2}}{T_{c1}} \sim 1$$

$B_2^{(l)}$ представляют собой регулярные функции T и h_2 , и гамильтониан

$\mathcal{H}_{\text{эфф}} \{\varphi_1\}$ изоморфен гамильтониану $\mathcal{H}_1 \{\varphi_1\}$. На языке ренормализационной группы это означает, что устойчивые ФТ гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{эфф}} \{\varphi_1\}$ (система с возмущением) и $\mathcal{H}_1 \{\varphi_1\}$ (идеальная система) совпадают. Необходимо подчеркнуть, что изоморфность сохраняется почти на всей фазовой диаграмме и нарушается лишь в особых точках.

Найдем условия нарушения изоморфности. При изменении h_2 меняется и $T_c(h_2)$; при этом $T_{c1}(h_2)$ и T_{c2} могут сближаться, и константы гамильтониана $\mathcal{H}_{\text{эфф}} \{\varphi_1\}$ приближаются к границам устойчивости ФТ. Если выход за пределы области устойчивости происходит при конечной (пусть даже малой) величине Δt , на фазовой диаграмме возникает триkritическая точка.

Поясним, почему ТКТ появляется при сближении $T_c(h_2)$ и T_{c2} . ФТ идеальной системы устойчива, пока коэффициент при φ_1^4 положителен. Из (4.7) следует, что добавка к четверному члену отрицательна и связана с коррелятором $B_2^{(2)}$ (напомним, что $Q_1 = \varphi_1^2$), который растет при уменьшении τ_2 . При этом эффективный коэффициент $u_{\text{эфф}}$ уменьшается и может стать отрицательным. В случае скалярного параметра порядка φ_2 $Q_2 = \varphi_2$ и

$$u_{\text{эфф}} = u_1 - \frac{1}{2} \beta \lambda^2 G_2(\tau_2, h_2), \quad (4.9)$$

где $G_2(\tau_2, h_2)$ — функция Грина флуктуаций φ_2 .

Граница устойчивости ФТ, характеризующей фазовый переход в идеальной системе, соответствует обращению в нуль $u_{\text{эфф}}$ при некоторой температуре T_t :

$$u_{\text{эфф}} = u_1 - \frac{1}{2} \beta \lambda^2 G_2(\tau_{2t}, h_{2t}) = 0, \quad \tau_{2t} = \frac{T_t - T_{c2}}{T_{c2}}. \quad (4.10)$$

Другими словами, в точке фазовой диаграммы, температура и поле h_2 , которой определяются уравнением (4.10) и дополнительным условием

$$T_c(h_{2t}) = T_t, \quad (4.11)$$

кривая фазовых переходов второго рода $T_c(h_2)$ переходит в кривую переходов первого рода. T_t, h_{2t} — координаты ТКТ.

Приведенный выше анализ можно провести только при несовпадающих точках перехода подсистем T_{c1} и T_{c2} . При пересечении двух линий критических точек $T_{c1} = T_{c2}$ оба параметра порядка являются критическими и переход к эффективному гамильтониану, зависящему только от одной из переменных, невозможен. Изоморфность нарушается. Как только мы отходим от точки пересечения, условие $T_{c1} = T_{c2}$ уже не выполняется, один из параметров порядка становится некритическим, и вдоль линий сохраняется изоморфность. Будет ли точка пересечения бикритической или тетракритической, зависит от числа компонент параметров порядка³⁴.

Мы не будем подробно рассматривать срыв перехода второго рода на первый. Отметим лишь три возможных механизма такого срыва.

1. В изоморфных переменных — переход второго рода, в неизоморфных — первого. Характерный пример рассмотрен в работе³¹, в которой учитывалось взаимодействие параметра порядка с фононами (голдстоунская, т. е. всюду критическая мода). При этом физические переменные (P, T) оказались неизоморфными, и при приближении к точке перехода константа $u_{\text{эфф}}$ становится отрицательной.

2. Существует устойчивая ФТ, но константы исходного гамильтониана находятся вне области ее устойчивости³².

3. Устойчивых ФТ нет. Этот случай реализуется, например, при взаимодействии критических параметров порядка одинаковой размер-

ности, что приводит к появлению дополнительных инвариантов четвертого порядка, в частности квадрата скалярного произведения параметров порядка³³.

5. ТРИКРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

a) Теория

Введем трикритические индексы — показатели степенных зависимостей термодинамических величин вблизи ТКТ, следуя работе³⁵ (табл. I). Знаки + и — относятся соответственно к правой и левой ветвям перехода первого рода в координатах T , φ_2 (см. рис. 1 и табл. II). Индекс χ определяет форму критических линий в нулевом упорядочивающем поле h_1 . Во всех остальных случаях в табл. I подразумевается $h_1 = 0$.

Из 19 введенных нами трикритических индексов только три, например α_t , γ_t и φ , являются независимыми. Остальные могут быть вычислены с помощью следующих соотношений:

1) Соотношения теории подобия¹:

$$\begin{aligned} \alpha_t + 2\beta_t + \gamma_t &= 2, \quad \beta_t (\delta_t - 1) = \gamma_t, \quad 2 - \alpha_t = dv_t, \\ \gamma_t &= v_t (2 - \eta_t), \quad \gamma_+ = \gamma_- = \gamma_u, \quad \delta_+ = \delta_-, \quad \beta_+ = \beta_- = \beta_u, \\ d_u + 2\beta_u + \gamma_u &= 2, \quad \beta_+ (\delta_+ - 1) = \gamma_+. \end{aligned} \quad (5.1)$$

2) Соотношения, являющиеся следствием перенормировки при переходе к неизоморфным переменным³⁰ *):

$$\gamma_t^* = \gamma_t \varphi, \quad v_t^* = v_t \varphi, \quad \kappa = (\beta_t \delta_t \varphi)^{-1}, \quad \gamma_u = \alpha_t \varphi, \quad \beta_u = (1 - \alpha_t) \varphi. \quad (5.2)$$

Исследуем вид фазовой диаграммы и термодинамику вблизи ТКТ, исходя из эффективного гамильтониана (4.7), который в импульсном пространстве имеет вид **)

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}_{\text{эфф}} \{ \varphi_1 \} = \int d^d k \left\{ \frac{1}{2} [\tau_1(h_2) + k^2] |\varphi_1(k)|^2 + \right. \\ \left. + \frac{u(h_2)}{4!} \prod_{i=1}^4 \varphi_1(k_i) \delta \left(\sum_{k=1}^4 k_i \right) + \frac{v}{6!} \prod_{i=1}^6 \varphi_1(k_i) \delta \left(\sum_{i=1}^6 k_i \right) \right\} - h_1 \varphi_1(k=0). \end{aligned} \quad (5.3)$$

Член, пропорциональный φ_1^6 , необходимо оставить ввиду изменения знака $u(h_2)$ при переходе через ТКТ.

Переходя в (5.3) к новой переменной

$$\varphi_1(k) = \tilde{\varphi}(k) + \sigma_0 \delta(k)$$

и выбирая σ_0 таким образом, чтобы кубический по $\tilde{\varphi}$ член в гамильтониане $\tilde{\mathcal{H}}_{\text{эфф}} \{ \tilde{\varphi} \}$ обратился в нуль, находим, что, кроме λ -линии

$$\sigma_0 = \tau_1(h_2) = h_1 = 0 \quad (\text{при } u(h_2) > 0), \quad (5.4)$$

к ТКТ подходят еще две линии фазовых переходов второго рода при $h_1 \neq 0$

$$\sigma_0 = \pm \left(-\frac{6u}{v} \right)^{1/2}, \quad h_1 = \pm \left(-\frac{6u}{v} \right)^{1/\kappa} \cdot \frac{v}{45}, \quad \kappa = \frac{2}{5} \quad (\text{при } u(h_2) < 0). \quad (5.5)$$

*.) Как было отмечено в гл. 3, подобная перенормировка происходит при условии $\varphi(1 - \alpha_t) \leqslant 1$, которое выполняется в ТКТ ($\varphi = 2$, $\alpha_t = 1/2$).

**) Дальнейшее изложение этого раздела в основном следует работе³⁶, к которой мы и отсылаем за подробностями.

Таблица I
Трикритические индексы

Термодинамическая величина	Обозначение	Термодинамический путь	Зависимость
а) Величины, связанные с критическим параметром порядка			
Восприимчивость	$\chi_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial h_1}$	$h_2 = h_{2t}$ $\varphi_2 = \varphi_{2t}$	$\tau^{-\gamma_t}$ $\tau^{-\gamma_t^*}$
Параметр порядка	φ_1	$h_2 = h_{2t}, T < T_t$ $h_2 = h_{2t}, T = T_t$	τ^{β_t} h_1^{1/δ_t}
Теплоемкость	C_{h_2}	$h_2 = h_{2t}$	$\tau^{-\alpha_t}$
Радиус корреляции флюктуации	r_{c1}	$h_2 = h_{2t}$ $\varphi_2 = \varphi_{2t}$	$\tau^{-\nu_t}$ $\tau^{-\nu_t^*}$
Корреляционная функция	$G_1(k)$	$h_2 = h_{2t}, T = T_t$	$k^{2-\eta_t}$
Критические линии в ненулевом упорядочивающем поле	$T_c - T_t$	—	$h_1^{1/\kappa}$
Линии переходов первого рода при $h_1 = 0$	$T_u(h_2) - T_c(h_2)$	—	$(h_2 - h_{2t})^\Phi$
б) Величины, связанные с некритическим параметром порядка			
Восприимчивость	$\chi_2 = \frac{\partial \varphi_2}{\partial h_2}$	$\varphi_2 = \varphi_{2t}, T > T_t$ $\varphi_2 = \varphi_2^+, T < T_t$ $\varphi_2 = \varphi_2^-, T < T_t$	$\tau^{-\gamma_u}$ $\tau^{-\gamma_+}$ $\tau^{-\gamma_-}$
Параметр порядка	$\varphi_2^+ - \varphi_2^-$ $\varphi_2^+ - \varphi_{2t}$ $\varphi_{2t} - \varphi_2^-$ $\varphi_2 - \varphi_{2t}$ $\varphi_{2t} - \varphi_2$	$T < T_t$ $T < T_t$ $T < T_t$ $\varphi_2 > \varphi_{2t}, T = T_t$ $\varphi_2 < \varphi_{2t}, T = T_t$	τ^{β_u} τ^{β_+} τ^{β_-} $(h_2 - h_{2t})^{1/\delta_+}$ $(h_2 - h_{2t})^{1/\delta_-}$
Теплоемкость	C_{φ_2}	$\varphi_2 = \varphi_{2t}$	$\tau^{-\alpha_u}$

Так как индекс $\kappa < 1$, то все три критические линии касаются в ТКТ. Для вычисления критических индексов и уравнения состояния удобно выделить в гамильтониане (5.3) члены, соответствующие среднему

Таблица II

Соответствие между раствором изотопов гелия и антиферромагнетиками

	$\text{He}^3 - \text{He}^4$	Антиферромагнетики
φ_1	φ — сверхтекущий параметр порядка *)	l — антиферромагнитный параметр порядка
φ_2	x — концентрация He^3	M — намагниченность
h_1	h — поле, сопряженное φ (нефизическое)	H_{st} — знакопеременное поле
h_2	μ — разность химических потенциалов He^3 и He^4	H_i — внутреннее магнитное поле

*) φ — волновая функция, имеющая две компоненты (амплитуда и фаза) и поэтому эквивалентна двухкомпонентному вектору. Так как x — скалярная величина, то взаимодействие параметров порядка имеет вид $\varphi^2 x$, что приводит к ТКТ (см. гл. 3).

значению параметра порядка $\varphi_{10} = \varphi_1 (k = 0)$, после чего, исключая величину $\tau_1 (h_2)$ из уравнений для упорядочивающего поля h_1 и восприимчивости χ_1 :

$$h_1 = \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}_{\text{эфф}}}{\partial \varphi_{10}} \right\rangle, \quad \chi_1^{-1} = \frac{\partial h_1}{\partial \varphi_{10}}, \quad (5.6)$$

получаем параметрическое уравнение состояния, предложенное Мигдалом для описания особенностей термодинамических величин вблизи точек фазовых переходов второго рода:

$$h_1 = \chi_1^{-1-\beta/\nu} \psi(m), \quad \varphi_{10} = \chi_1^{-\beta/\nu} m, \quad (5.7)$$

где

$$\psi(m) = m - g(\chi_1) m^3 - \frac{4}{5!} p(\chi_1) m^5. \quad (5.8)$$

При усреднении в (5.6) затравочные константы взаимодействия $u (h_2)$ и v в (5.3) перенормируются и становятся универсальными функциями восприимчивости $\tilde{u} (\chi_1)$ и $\tilde{v} (\chi_1)$, каждая из которых имеет свою скэйлинговую размерность. Переход к новым универсальным функциям

$$g(\chi_1) = \tilde{u}(\chi_1) \chi_1^{(4-d)/2}, \quad p(\chi_1) = \tilde{v}(\chi_1) \chi_1^{d-3}, \quad (5.9)$$

скэйлинговые размерности которых равны нулю, приводит к наиболее простой записи уравнения состояния (5.7), так как скэйлинговые размерности функций m и ψ также равны нулю.

Уравнение состояния (5.7) описывает всю окрестность ТКТ (включая λ -линию и линию переходов первого рода). Однако в таком простом виде его удается записать лишь в пренебрежении индексом корреляционной функции η , т. е. при условии

$$\frac{\beta_c}{\gamma_c} = \frac{\beta_t}{\gamma_t}, \quad (5.10)$$

где значки c и t относятся соответственно к индексам в критической и три-критической точках. При учете η_c член пятого порядка по m изменяется. Поэтому сохранение этого члена в приближении $\eta_c = 0$ является преувеличением точности. Однако так как $\eta_t = 0$, то в интересующей нас три-критической области уравнение состояния (5.7) дает правильное описание

поведения вещества, а малость η_c ($\eta_c \approx 0,05^6$) позволяет надеяться на не слишком большие отклонения в критической области.

Функции $g(\chi_1)$ и $p(\chi_1)$ определяются нелинейными дифференциальными уравнениями, аналогичными уравнениям ренормализационной группы. Эти уравнения имеют две ФТ, одна из которых соответствует критическому, а другая — трикритическому поведению. Для нахождения особенностей термодинамических величин вблизи критической или трикритической точек необходимо поставить в уравнение состояния (5.7), (5.8) значения g и p в соответствующих ФТ. Характер изменения g и p вблизи ФТ обычно определяет неасимптотические добавки к термодинамическим величинам, и только при определенной, так называемой предельной, размерности пространства d_c влияет на асимптотические особенности термодинамических величин. Для критической точки $d_c = 4$, для трикритической — $d_c = 3$. ФТ, соответствующая ТКТ, определяется следующими выражениями (при $d = 3$):

$$g_t = 0, \quad p_t \sim \ln^{-1} \chi_1 \rightarrow 0. \quad (5.11)$$

Учет логарифмической зависимости (5.11) приводит к появлению логарифмических добавок к чисто степенным (скэйлинговым) особенностям некоторых термодинамических величин (табл. III). И выше, и ниже

Таблица III
Результаты теоретического исследования трикритического поведения теплоемкости и параметра порядка

		Самосогласованное поле (теория Ландау)	Флуктуационная теория
C_{h_2}	$T > T_t$	const	$\tau^{-1/2} \ln^{-1/2} \frac{1}{\tau}$
	$T < T_t$	$ \tau ^{-1/2}$	$ \tau ^{-1/2} \ln^{1/2} \frac{1}{ \tau }$
Φ_1	$T < T_t$	$ \tau ^{1/4}$	$ \tau ^{1/4} \ln^{1/4} \frac{1}{ \tau }$

ТКТ есть логарифмические поправки к теплоемкости, причем разные: при $\tau > 0$ особенность слабее чисто корневой, при $\tau < 0$ — сильнее. Отношение коэффициентов при особенностях теплоемкости ниже и выше ТКТ универсально и равно $5\sqrt{5}/\pi$.

Перечислим основные отличия предсказаний флуктуационной теории от результатов классической теории Ландау.

1. Есть особенности термодинамических величин в неупорядоченной фазе.

2. Некоторые особенности не чисто степенные.

3. В плоскости T, φ_2 все три линии переходов (см. рис. 1) подходят к ТКТ с разными наклонами в отличие от выводов теории Ландау. Это объясняется тем, что наряду с теплоемкостью в неупорядоченной фазе имеет сингулярную ($\sim \tau^{-\alpha}$) часть и величина $(\partial \varphi_2 / \partial h_2)_T$ (в случае смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$ — $(\partial x / \partial \mu)_T$)²⁸.

Следует отметить, что все отличия от теории Ландау возникают при последовательном учете логарифмических поправок. Без учета логарифмического члена в (5.11) ТКТ полностью описывается классической теорией.

б) Эксперимент

Трикритические точки обнаружены в системах, претерпевающих фазовые переходы самого разного типа: магнитного^{38, 39}, ориентационного⁴⁰⁻⁴⁶, жидкокристаллического⁴⁷⁻⁵⁰ и т. д. Соответственно различны и искающие факторы, приводящие к отличию экспериментально определенных индексов от истинных, асимптотических. Например, в магнетиках одной из главных трудностей является корректный учет размагничивающих полей. Для образцов строго эллипсоидальной формы размагничивающее поле однородно, и его можно учесть. В случае отклонения формы от эллипсоидальной появляется неоднородное поле, качественно меняющее поведение в непосредственной близости к точке перехода. Это обстоятельство, по всей вероятности, привело к отличным от теоретических значениям индексов вбли-

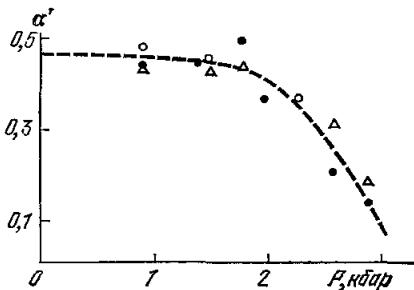


Рис. 11. Зависимость трикритического индекса теплопроводности NH_4Cl от давления.

Значки разной формы относятся к разным способам обработки эксперимента.

зи ТКТ в антиферромагнетике $\text{CsCoCl}_3 \cdot 2\text{D}_2\text{O}$ ⁵¹, где из-за неправильной формы образца величина неоднородного размагничивающего поля была отнюдь не мала (~ 25 Э³⁹).

Еще одной причиной, влияющей на величину индексов, является кроссовер. Если измерения проводятся не в асимптотической области, то поведение термодинамических величин описывается некоторыми эффективными индексами. Так, полученное значение эффективного индекса теплопроводности при ориентационном переходе в NH_4Cl плавно меняется при изменении давления⁴⁰ (рис. 11). В работе⁴¹ исследовалось поведение критического параметра порядка ϕ_1 в ND_4Cl . Оказалось, что величина индекса β существенно зависит от пути подхода к точке фазового перехода. Например, около критической точки $T_c = 280$ К, $2\beta_c = 0,61 \pm \pm 0,04$ при $P = P_c$ и $2\beta_c = 0,50 \pm 0,04$ при $T = T_c$. Аналогичное расхождение получено и вблизи ТКТ: $2\beta_t = 0,36 \pm 0,01$ при $P = P_t$ и $2\beta_t = 0,28 \pm 0,01$ при $T = T_t$. Это объясняется тем, что из-за большой крутизны линии перехода $P(T)$ путь $T = \text{const}$ большей частью лежит в переходной области (рис. 12).

Мы отметили две причины, влияющие на величину индексов: искающие факторы и кроссовер. Есть еще одна причина, связанная с тем фактом, что трикритическое поведение описывается не чисто степенными зависимостями, и обработка результатов измерений без учета логарифмических множителей может привести к неверным значениям индексов.

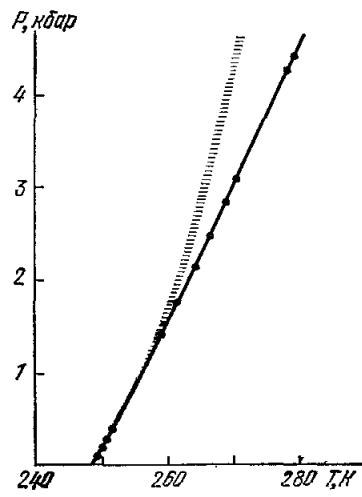


Рис. 12. Фазовая диаграмма ND_4Cl .

Заштрихованная область перехода от критического поведения к трикритическому.

Особенно явно это проявляется при определении малого по величине индекса β_t . Различие между чисто степенной зависимостью $\varphi_1 \sim |\tau|^{|\beta_t|}$ и теоретической $\varphi_1 \sim |\tau|^{1/4} \ln^{1/4} |b/\tau|$ даже при едином выборе T_t на интервале $|\tau| = 10^{-4} - 10^{-1}$ не превышает 2% при $\beta_t = 0,20$ и 4%

Таблица IV
Трикритические индексы. Сопоставление с экспериментом

Система	α_t	α'_t	β_t	γ_t	ν_t	δ_t
DyPO ₄	$0,50 \pm 0,04^{71}$	$0,46 \pm 0,04^{71}$	—	—	—	—
KH ₂ PO ₄	—	—	$\approx 0,25^{52}$	$1,01 \pm 0,02^{53}$	—	$5,1 \pm 0,8^{53}$
NH ₄ Cl	—	$0,45 \pm 0,07^{40}$	—	—	—	—
ND ₄ Cl	—	$0,57 \pm 0,07^{42}$	—	—	—	—
NH ₄ Br	—	$0,50 \pm 0,07^{42}$	$0,18 \pm 0,01^{41}$	$1,05 \pm 0,20^{41}$	$0,52 \pm 0,08^{41}$	—
НЖК	$0,18 \pm 0,06^{54}$	$0,35 \pm 0,03^{54}$	$0,48 - 0,20^{57}$	1^{55}	$0,5^{56}$	—
Флуктуационная теория	$0,5^*)$	0,5	0,25	1	0,5	5

*) В теории Ландау $\alpha_t = 0$.

при $\beta_t = 0,18$. Неудивительно поэтому, что данные по интенсивности рассеяния нейтронов в ND₄Cl⁴¹ (точность ~7%) одинаково хорошо описываются и чисто степенной, и теоретической формулами⁴⁰.

Исследование трикритического поведения в смеси He³ — He⁴ и многокомпонентных жидких смесях характерно тем, что эксперимент проводится при постоянной концентрации, т. е. при $\varphi_2 = \text{const}$, и необходимо учитывать перенормировку индексов. Соответствующие экспериментальные величины приведены в табл. V и согласуются с теоретическими значениями. С учетом сделанных выше замечаний согласуются с теорией и величины неперенормированных индексов (см. табл. IV).

Таблица V
Перенормированные трикритические индексы

Система	γ_t^*	γ_t^{**}	ν_t^*	ν_t^{**}
He ³ — He ⁴	—	—	1^{61}	—
C ₆ H ₆ — C ₂ H ₅ OH — H ₂ O — (NH ₄) ₂ SO ₄	$2,20 \pm 0,12^{65}$	$1,98 \pm 0,11^{65}$	$1,15 \pm 0,1^{64}$	$1,03 \pm 0,06^{65}$
Теория	2	2	1	1

Форма фазовой диаграммы в координатах T, h_2 определяется кроссоверным индексом φ . Все имеющиеся экспериментальные данные (см. табл. VI) согласуются с теоретическим значением $\varphi = 2$. Кроме того, подтверждено экспериментально^{60, 67}, что линия перехода $T(h_2)$ имеет в ТКТ непрерывную первую и разрывную вторую производные. Так, в работе⁶⁷ найдено, что линия перехода в ДАГ имеет вблизи ТКТ следующий вид (знаки \pm относятся к $T \geq T_t$):

$$h_{2\pm} - h_{2t} = A_{\pm}(T - T_t) + B_{\pm}(T - T_t)^2,$$

причем A_+ и A_- совпадают с точностью 5%, а $B_+ \neq B_-$ ($B_+/B_- = 3,9 \pm \pm 1,4$). Нахождение критических линий в ненулевом упорядочивающем поле h_1 затруднено, так как в смеси изотопов гелия оно является нефизическими, а для антиферромагнетиков h_1 — знакопеременное поле H_{st} . К счастью, из-за специальной симметрии в ДАГ наложение магнитного

Таблица VI

Индексы, характеризующие форму фазовой диаграммы вблизи ТКТ

Система	φ	χ
He ³ — He ⁴	$1,95 \pm 0,08$ ⁶⁸	—
ДАГ	$1,95 \pm 0,11$ ⁶⁸	$0,41 \pm 0,03$ ⁶⁹
Теория	2	$0,4$

поля вдоль оси [111] индуцирует H_{st} ⁷⁰, и удается найти⁶⁹ форму критических линий при $H_{st} \neq 0$. Значение критического индекса χ согласуется с теоретическим (см. табл. VI). В сегнетоэлектрике KH_2PO_4 роль

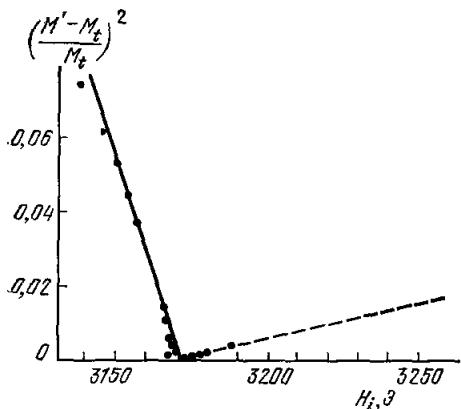


Рис. 13. Намагниченность ДАГ при $T = T_t$.

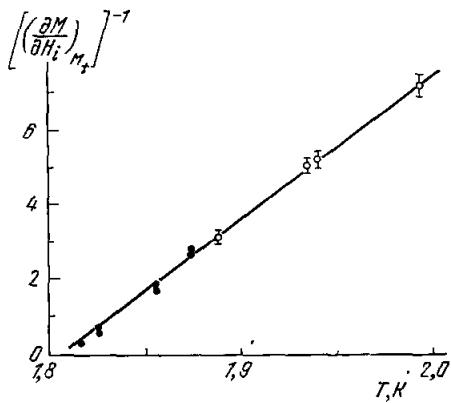


Рис. 14. Восприимчивость ДАГ при $M = M_t$.

h_1 играет электрическое поле E (см. рис. 4), и можно построить всю фазовую диаграмму. Однако для нахождения индекса χ имеющихся экспериментальных данных недостаточно.

Многочисленные исследования фазовой диаграммы смеси He³ — He⁴ в координатах T , x ^{7, 58, 60, 61} все согласуются с теорией (в качестве примера на рис. 1 представлена фазовая диаграмма, взятая из работы⁷). Отметим, что хотя все линии линейно подходят к T_t , есть отличия (~15—20%) в величинах наклонов, полученных в разных работах, связанные, по всей вероятности, с гравитационным эффектом⁶¹.

На рис. 5 представлены фазовые диаграммы FeCl_2 , полученные разными методами: с помощью дифракции нейтронов¹³ и из измерений магнитного кругового дихроизма¹⁴. В обеих работах линии T_L и T_+ подходят к T_t линейно и имеют разные наклоны, как и предписано теорией, однако форма линии T_- совершенно различна. Индекс β_- равен 0,36¹³ и $1,13 \pm 0,14$ ¹⁴. Это отличие в величине индекса может быть вызвано разницей почти на 2% в положении ТКТ. К сожалению, причины различия

в T_t не ясны. По-видимому, главная причина может быть связана с трудностью учета размагничивающих полей.

Наиболее полно исследовано поведение некритического параметра порядка ϕ_2 вблизи ТКТ в двух системах: диспрозийалюминиевом гранате и смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$. На рис. 13 и 14 представлены результаты измерения соответственно намагниченности ДАГ вдоль трикритической изотермы

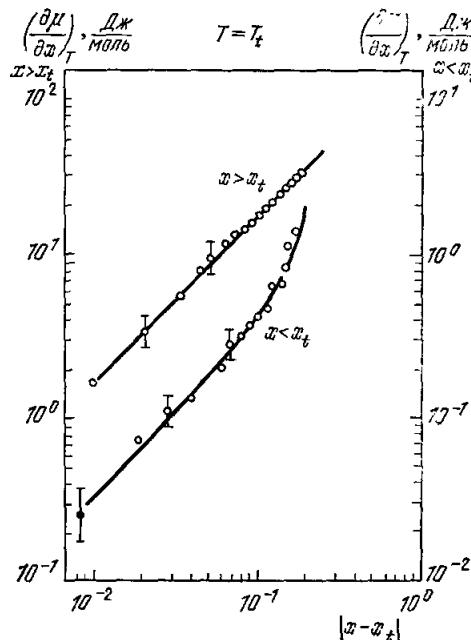


Рис. 15. Зависимость восприимчивости по некритическому параметру порядка $(\partial x / \partial \mu)_T$ в смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$ от концентрации при $T = T_t$.

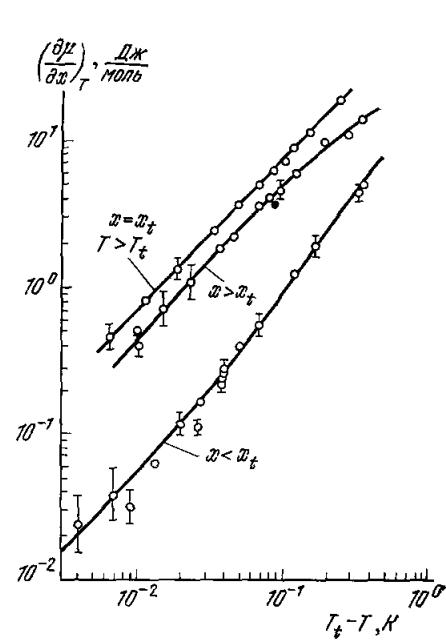
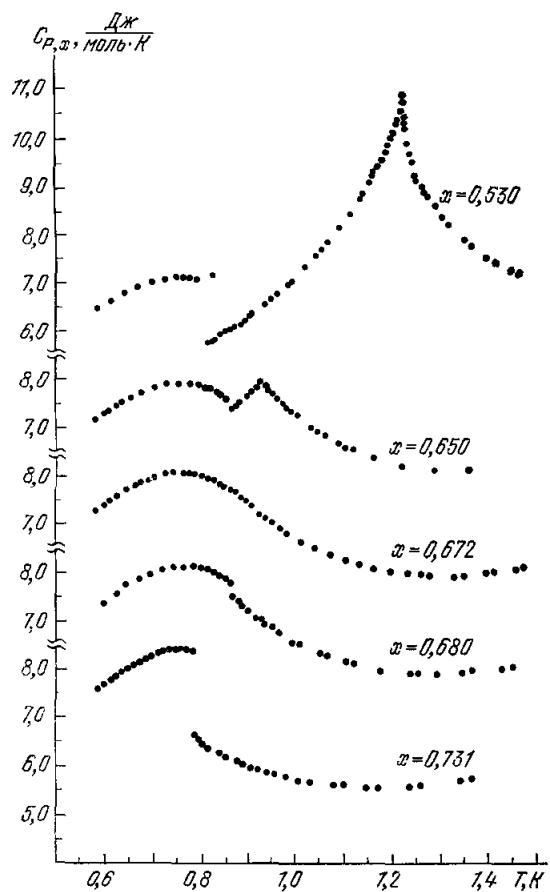
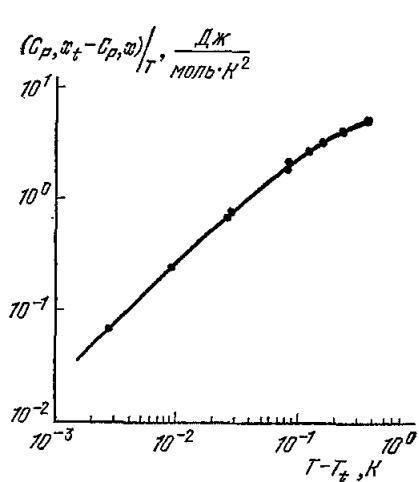
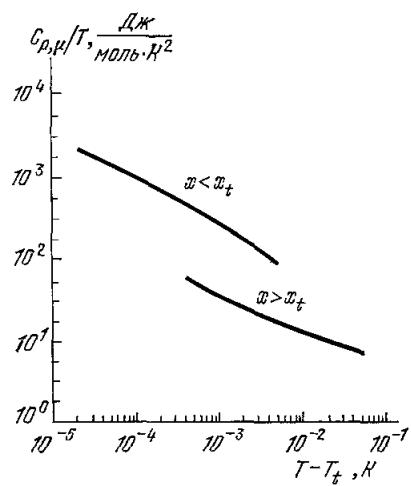


Рис. 16. Зависимость восприимчивости $(\partial x / \partial \mu)_T$ в смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$ от температуры при $x = x_t$ и вдоль линий переходов первого рода.

и восприимчивости по некритическому параметру порядка при $M = M_t$ ⁶⁶. Видно, что данные согласуются с теоретическими значениями индексов $\delta_{\pm} = 2$, $\gamma_u = 1$. Аналогичные результаты для смеси изотопов гелия⁶⁰ приведены на рис. 15 и 16. Вообще следует отметить, что все экспериментальные данные подтверждают теоретические значения индексов $\delta_{\pm} = 2$, $\gamma_u = \gamma_{\pm} = 1$ (табл. VII). Существует лишь одно известное нам исключение, которое может служить примером необходимости тщательного учета влияния искажающих факторов. В работе⁶² с помощью рассеяния света исследовалось поведение $\partial x / \partial \mu$ в смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$ и было получено значение $\gamma_- = 1,67 \pm 0,1$. Чуть позже те же авторы получили $\gamma_- = 1,00 \pm 0,05$ ⁶⁵. Оказалось, что область асимптотического степенного поведения величины $\partial x / \partial \mu$ в сверхтекучей фазе очень мала: $\Delta T = T_t - T \ll 10 \text{ мK}$. В работе же⁶² при $\Delta T < 10 \text{ мK}$ проявлялся гравитационный эффект, что привело к искажению особенности и воспрепятствовало нахождению асимптотического значения индекса γ_- .

В смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$ измерялась также теплоемкость при постоянной концентрации He^3 , $C_{P,x}$. По мере приближения к трикритической точке наряду с уменьшением скачка при переходе первого рода типа расслоения величина $C_{P,x}$ вдоль λ -линий также убывает⁷ (рис. 17). Вдоль трикритической «изохоры» $x = x_t$ теплоемкость $C_{P,x}$ убывает линейно⁵⁹

Рис. 17. Теплоемкость $C_{P,x}$ смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$.Рис. 18. Температурная зависимость теплоемкости $C_{P,x}$ смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$ при $x = x_t$.Рис. 19. Температурная зависимость теплоемкости $C_{P,\mu}$ смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$ при $\mu = \mu_t$.

(рис. 18), что согласуется с теоретическим значением индекса $\alpha_u = -1$. Аналогичное значение получено из обработки данных по рассеянию света с использованием скэйлинговых соотношений между индексами⁶⁴. Значение $\alpha_u = -1$, естественно, соответствует $\alpha_t = 1/2$. Непосредственное

Таблица VII
Индексы некритического параметра порядка

Система	β_u	β_+	β_-	γ_u	γ_+
He ³ —He ⁴ ДАГ FeCl ₂ Флуктуационная теория Теория Ландау	1,00±0,05 ⁹ 0,97±0,04 ⁶⁹ 1,11±0,11 ¹⁴ 1	1 ⁹ 1 ⁶⁶ 1,03±0,05 ¹⁴ 1	1 ⁹ 1 ⁶⁶ 1,13±0,14 ¹⁴ 1	1,02±0,03 ⁶³ 1,01±0,07 ⁶⁶ 1 0	1,00±0,02 ⁶³ 1 ⁶⁷ 1 0
Система	γ_-	δ_+	δ_-	α_u	
He ³ —He ⁴ ДАГ FeCl ₂ Флуктуационная теория Теория Ландау	1,00±0,05 ⁶³ 1 ⁶⁷ 1 1	2,05±0,1 ⁹ 2,12±0,24 ⁶⁶ 2 1	2,07±0,1 ⁹ 2,14±0,26 ⁶⁶ 2 2	-1 ⁵⁹ -0,9±0,2 ⁶⁴ -1 0	

измерение теплоемкости при постоянном химическом потенциале $C_{P,\mu}$ (т. е. C_{h_2}) практически невозможно, однако в работе⁵⁹ был произведен перерасчет из $C_{P,\alpha}$ в $C_{P,\mu}$. Результаты (рис. 19) согласуются со значением $\alpha_t = 1/2$.

6. БИКРИТИЧЕСКИЕ И ТЕТРАКРИТИЧЕСКИЕ ТОЧКИ

а) Теория

В гл. 4 было показано, что наличие двух параметров с несовпадающими точками перехода приводит к перенормировке всех констант эффективного гамильтониана. Характер этой перенормировки зависит от характера взаимодействия между переменными φ_1 и φ_2 . В частности, в системах типа He³—He⁴ (оператор взаимодействия имеет вид (4.4) с $Q_2 = \varphi_2$) флуктуации некритической моды φ_2 перенормируют главным образом константу четверного взаимодействия u_1 . Температура же перехода по переменной φ_1 практически не зависит от флуктуаций φ_2 . Это приводит к появлению на фазовой диаграмме ТКТ.

Другой тип взаимодействия реализуется, например, в антиферромагнетиках со слабой анизотропией⁷², а также в некоторых веществах, испытывающих кристаллографические переходы (SrTiO₃⁷³). Перекрестный по φ_1 и φ_2 член в этих системах имеет вид

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \lambda \int d^4r \varphi_1^2(r) \varphi_2^2(r). \quad (6.1)$$

Нетрудно показать, что при таком выборе \mathcal{H}_{int} флуктуации некритической переменной φ_2 , во-первых, сдвигают температуру перехода по параметру φ_1 и, во-вторых, перенормируют затравочную константу четверного взаимодействия u_1 . Подставляя в (4.7) и (4.8) $Q_1 = \varphi_1^2(r)$ и $Q_2 = \varphi_2^2(r)$, получим в пределе слабой связи (общий случай рассмотрен в работе⁷⁴⁾

$$\begin{aligned}\Delta T_{c1} &\sim \lambda \int d^d k \langle |\varphi_2(k)|^2 \rangle, \\ \Delta u_1 &\sim \lambda^2 \int d^d r d^d r' \langle \langle \varphi_2^2(r) \varphi_2^2(r') \rangle \rangle.\end{aligned}\quad (6.2)$$

Добавка к u_1 пропорциональна коррелятору энергий параметра φ_2 , который равен теплоемкости системы, описывающейся гамильтонианом $\mathcal{H}_2\{\varphi_2\}$. В случае разнесенных точек перехода выражения (6.2) представляют собой аналитические функции своего аргумента $\Delta\tau \equiv (T_{c1} - T_{c2})/T_{c2}$, и эффективный гамильтониан оказывается изоморфным гамильтониану $\mathcal{H}_1\{\varphi_1\}$.

Однако при $\Delta\tau \rightarrow 0$ как эффективная константа четверного взаимодействия, так и сдвигка температуры перехода являются неаналитическими функциями разности критических температур $\Delta\tau$. Фазовый переход при этом неизоморфен «идеальному» фазовому переходу.

Найдем особенности термодинамических величин в этом случае. В качестве основного приближения теперь удобнее выбрать модель, гамильтониан которой имеет вид (4.1) с температурами переходов по переменным φ_1 и φ_2 , слабо отличающимися друг от друга

$$T_{c1}(g) = T_0 + a\Delta g, \quad T_{c2}(g) = T_0 - b\Delta g, \quad (6.3)$$

где Δg — отклонение неупорядочивающего поля от некоторого значения g_0 , определяющегося уравнениями

$$T_{c1}(g_0) = T_{c2}(g_0) \equiv T_0, \quad (6.4)$$

$$a = \frac{An_2}{n}, \quad b = \frac{An_1}{n}, \quad n = n_1 + n_2, \quad A > 0, \quad (6.5)$$

где n_1 и n_2 — числа компонент соответственно φ_1 и φ_2 . \mathcal{H}_{int} имеет вид (6.1). В случае антиферромагнетика (см. рис. 6) температуры переходов являются функциями магнитного поля ($g \sim H^2$). $T_{c1}(H^2)$ — температура перехода в спин-флоп фазу, $T_{c2}(H^2)$ — температура перехода в антиферромагнитную фазу $\Delta g = H^2 - H_0^2 \approx 2H_0 \Delta H$.

При $\Delta g > 0$ критическим является параметр порядка φ_1 , при $\Delta g < 0$ — параметр порядка φ_2 . При $T < T_0$ и изменении знака Δg в системе происходит переход первого рода: фаза с $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 = 0$ сменяется фазой с $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 \neq 0$ (возможен и более сложный случай возникновения промежуточной фазы).

При $\Delta g = 0$ оба параметра порядка являются критическими, и переход к эффективному гамильтониану, зависящему только от одной из переменных, невозможен. Особенности термодинамических величин в этом случае могут быть найдены методом ренормализационной группы в рамках ϵ -разложения. Полагая, что размерность пространства d близка к 4, $d = 4 - \epsilon$ (размерность $d = 4$ выделена, так как все флуктуации в четырехмерном пространстве оказываются гауссовскими, а особенности термодинамических величин — классическими), можно воспользоваться теорией возмущений по малому параметру ϵ . Все константы взаимодействия при этом перенормируются и также оказываются порядка ϵ .

Уравнения для полных функций Грина $G_1(k) = \langle |\varphi_1(k)|^2 \rangle$ в первом порядке по ε имеют вид

$$\begin{aligned} G_1^{-1} &= \tau_1 + (n_1 + 2) \tilde{u}_1 G_1^{-1} \ln G_1^{-1} + \frac{n_2}{2} \tilde{\lambda} G_2^{-1} \ln G_2^{-1} \\ G_2^{-1} &= \tau_2 + (n_2 + 2) \tilde{u}_2 G_2^{-1} \ln G_2^{-1} + \frac{n_1}{2} \tilde{\lambda} G_1^{-1} \ln G_1^{-1}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Индексы восприимчивостей $\gamma_{1,2}$ (по первому и второму параметрам порядка) получаются подстановкой значений перенормированных констант взаимодействия в ФТ в уравнения (6.6)

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1 + (n_1 + 2) \tilde{u}_1 + \frac{n_2}{2} \tilde{\lambda}, \\ \gamma_2 &= 1 + (n_2 + 2) \tilde{u}_2 + \frac{n_1}{2} \tilde{\lambda}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Вблизи точки пересечения кривых $T_{c1}(g)$ и $T_{c2}(g)$ все термодинамические величины имеют характерный «однородный» вид (3.21), в частности

$$G_1^{-1} = \tau^{v_1} f_1 \left(\frac{\Delta\tau}{\tau^{1/\Phi}} \right), \quad G_2^{-1} = \tau^{v_2} f_2 \left(\frac{\Delta\tau}{\tau^{1/\Phi}} \right), \quad (6.8)$$

где $\tau = (T - T_\text{n})/T_0$, кроссоверный индекс Φ в первом порядке по ε равен

$$\Phi = \frac{1}{\Phi} = 1 - \frac{1}{2} \tilde{\lambda} (n_1 + n_2). \quad (6.9)$$

Температура перехода T_n и функции f_1 и f_2 определяются из уравнений (6.6). В частности, $T_\text{n} - T_0 \sim \Delta\tau^\Phi$.

В зависимости от числа компонент параметров порядка будет реализовываться бикритическая или тетракритическая точка³⁴. Так, при $n = n_1 + n_2 < 4$ будет существовать бикритическая точка. В этом случае

$$\begin{aligned} \tilde{u}_1 = \tilde{u}_2 &= \frac{\tilde{\lambda}}{2} = \frac{\varepsilon}{2(n+8)}, \\ \gamma_1 = \gamma_2 &= 1 + \frac{\varepsilon(n+2)}{2(n+8)}, \quad \Phi = 1 + \frac{\varepsilon n}{2(n+8)} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Так как $\Phi > 1$, то, в отличие от теории Ландау, критические линии в бикритической точке касаются.

При $n > 4$ точка пересечения будет тетракритической, т. е. появляется промежуточная фаза. Однако следует различать два случая:

1) $(n - 8)(n + 16) > (n_1 - n_2)^2$ —«расцепленная» тетракритическая точка;

2) $4 < n < 8 + (n_1 - n_2)^2/(n + 16)$.¹

В первом случае

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda} &= 0, \quad \tilde{u}_1 = \frac{\varepsilon}{2(n_1+8)}, \quad \tilde{u}_2 = \frac{\varepsilon}{2(n_2+8)}, \\ \gamma_1 &= 1 + \frac{\varepsilon(n_1+2)}{2(n_1+8)}, \quad \gamma_2 = 1 + \frac{\varepsilon(n_2+2)}{2(n_2+8)}, \quad \Phi = 1. \end{aligned} \quad (6.11)$$

То есть система в «расцепленной» тетракритической точке ведет себя как две невзаимодействующие подсистемы, линии переходов пересекаются в этой точке под углом ($\Phi = 1$).

Во втором случае $\tilde{\lambda} > 0$, $\Phi > 1$ и линии переходов касаются друг друга в тетракритической точке. Другими оказываются и индексы³⁴.

б) Эксперимент

Экспериментальное изучение бикритических точек находится и насторожнее времени на самом начальном этапе. Сравнительно небольшое число работ ограничивается главным образом измерением формы линий фазовых переходов вблизи бикритической точки, т. е. определением единственного критического индекса φ (см. (6.9)). Все исследовавшиеся системы представляют собой анизотропные антиферромагнетики с анизотропией типа «легкая ось» (фазовая диаграмма приведена на рис. 6).

Наряду с обычными экспериментальными трудностями исследования фазовых переходов в твердых телах (неоднородности образцов, большие времена релаксации и т. п.) здесь имеется еще одна специфическая именно для данных экспериментов трудность: необходимость точного совпадения направления внешнего магнитного поля H и оси легчайшего намагничения (ОЛН). При отклонении направления от ОЛН фазовая диаграмма сильно усложняется²⁵. В частности, переход из антиферромагнитной фазы в спин-флоп фазу перестает быть переходом первого рода⁷⁵. По всей видимости, имеют смысл измерения при различных углах расхождения поля H и ОЛН и экстраполяция результатов измерений на нулевой угол⁷⁶. В работе⁷⁶ линии фазовых переходов GdAlO_3 определялись по максимумам магнитной восприимчивости, и кроссоверный индекс φ находился из выражения⁷⁷

$$H^2 - H_b^2 - pt_{\parallel, \perp} = \omega_{\parallel, \perp} [t_{\parallel, \perp} + q(H^2 - H_b^2)]^\varphi, \quad (6.12)$$

где

$$t_{\parallel, \perp} = \frac{T_c^{\parallel, \perp} - T_b}{T_b}, \quad p = T_b \left(\frac{\partial H_{SF}}{\partial T} \right)_b, \quad q = -\frac{n+2}{3n} \frac{1}{T_b} \left(\frac{\partial T_c''}{\partial H^2} \right)_{H=0};$$

$T_c^{\parallel, \perp}$ — критические температуры переходов парамагнетик — антиферромагнетик и парамагнетик — спин-флоп фаза соответственно, ω_{\parallel} и ω_{\perp} — неуниверсальные коэффициенты, отношение которых универсально и зависит только от полного числа компонент параметров порядка $n = n_1 + n_2$. Знаки b и SF относятся к бикритической точке и линии переходов антиферромагнетик — спин-флоп фаза. При обработке предполагалось⁷⁶, что $\omega_{\parallel} = \omega_{\perp}$, т. е. сразу навязывалась суммарная размерность параметров порядка $n = 2$ (табл. VIII). Индекс φ оказался равным $1,25 \pm 0,07$,

Таблица VIII

Результаты экспериментального исследования бикритических точек

Система	φ	$\omega_{\perp}/\omega_{\parallel}$	β_u	γ_u
GdAlO_3	$1,25 \pm 0,07$ ⁷⁶	1 ⁷⁶	$0,92 \pm 0,03$ ⁷⁶	$0,15$ ⁷⁶
MnF_2	$1,279 \pm 0,031$ ⁷⁹	$1,56 \pm 0,35$ ⁷⁹	—	—
$\text{NiCl}_2 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$	$1,21 \pm 0,04$ ⁸⁰	1 ⁸⁰	—	—
$\text{CsMnBr}_3 \cdot 2\text{D}_2\text{O}$	$1,20 \pm 0,03$ ⁸¹	—	—	—
RbMnF_3	$1,278 \pm 0,02$ ⁸²	—	—	—
Теория	$n=2$ $n=3$	$1,175 \pm 0,015$ ⁷⁸ $1,250 \pm 0,015$ ⁷⁸	1 $2,51$	$0,85 \pm 0,04$ $0,85 \pm 0,04$ $0,40 \pm 0,07$

что находится в разумном согласии с теоретическим значением⁷⁸. В работе⁷⁶ также была предпринята попытка определения еще двух критических индексов: γ_u — индекса некритической восприимчивости и β_u — скачка полной намагниченности при $T < T_b$. Экспериментальное значение индекса β_u неплохо согласуется с теоретическим предсказанием. Полученные же значения индекса γ_u оказались несколько заниженными

по сравнению с теоретической оценкой, что связано, по всей видимости, с влиянием кроссовера.

Измерения формы линий фазовых переходов в MnF_2 ^{15, 79} дает промежуточный между $n = 2$ и $n = 3$ результат. Величина индекса ϕ хорошо согласуется с теоретическим значением для $n = 2$, в то время как универсальное отношение $\omega_{\perp}/\omega_{\parallel}$ лежит между теоретическими значениями для $n = 2$ и $n = 3$ (см. табл. VIII).

Экспериментальные данные вблизи тетракритической точки носят качественный характер и заключаются в основном в доказательстве существования промежуточной фазы. Точность экспериментов явно недостаточна для определения формы линий фазовых переходов (т. е. индекса ϕ). Из других критических индексов определялся¹⁹ только индекс β , описывающий поведение параметра порядка, но не в самой тетракритической точке, а на критических линиях.

7. ИСКАЖЕННОЕ ПОЛИКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ

а) Триkritическое поведение при фазовом переходе изотропная жидкость — нематический жидкий кристалл

В жидкокристаллических веществах при переходе из нематической или холестерической фазы в смектическую обнаружены трикритические точки⁴⁷⁻⁵⁰ (рис. 20).

Существуют попытки⁸³ объяснить возникновение трикритической точки в рамках теории Ландау взаимодействием смектического параметра порядка ψ (двухкомпонентный вектор) и нематического параметра порядка $Q = \left\langle \frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1) \right\rangle$, где θ — угол между ориентацией осей молекул и выделенным направлением^{84 *}). Член в термодинамическом потенциале, учитывающий взаимодействие параметров порядка, имеет вид $\lambda |\psi|^2 Q$, как и в смеси $He^3 - He^4$ (см. гл. 3, а).

В отличие от перехода нематик — смектик фазовый переход изотропная жидкость — нематический жидкий кристалл ($I \rightleftharpoons N$) является везде переходом первого рода и традиционно описывается теорией Ландау:

$$\Phi - \Phi_0 = \frac{1}{2} a \tau Q^2 - \frac{1}{3} B Q^3 + \frac{1}{4} C Q^4. \quad (7.1)$$

Малость константы $B \approx 0,06$ ⁸⁵ приводит к тому, что скачок энтропии мал и переход близок к переходу второго рода ($B = 0$).

Неожиданно малой оказалась и константа C , что поставило вопрос о близости перехода $I \rightleftharpoons N$ к трикритической точке ($C = 0$)⁸⁵. Кривая теплоемкости, следующая из теории Ландау с учетом флуктуационных поправок в приближении Орнштейна — Цернике представлена сплошной линией на рис. 21⁵⁴. Экспериментальная кривая принципиально отличается от теоретической отсутствием скачка в регулярных частях и большой величиной аномалии в изотропной фазе. При сопоставлении зависимостей теплоемкости от температуры вблизи $I \rightleftharpoons N$ перехода и вблизи ТКТ в NH_4Br бросается в глаза их поразительное сходство⁸⁶ (рис. 22). В то же время попытка описать температурную зависимость теплоемкости законом с фиксированным показателем $\alpha = 0,5$ (как в ТКТ) приводит к неадекватности модели. При варьировании критических индексов модель становится адекватной, однако значения α и α' (см. табл. IV) не вписываются ни в одну из теоретических схем. Такой результат можно объяс-

*) Строго говоря, нематический параметр порядка — тензор второго ранга, и излагаемое рассмотрение является существенным упрощением.

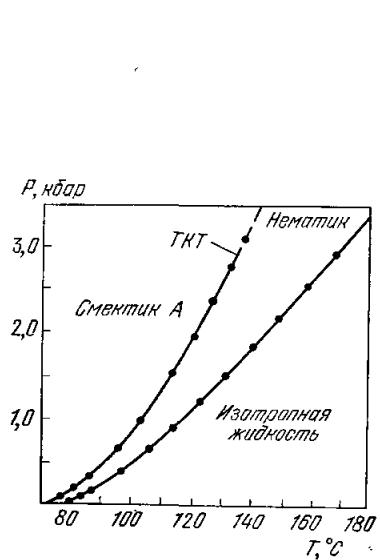


Рис. 20. Фазовая диаграмма жидкого кристалла СВНА⁴⁷.

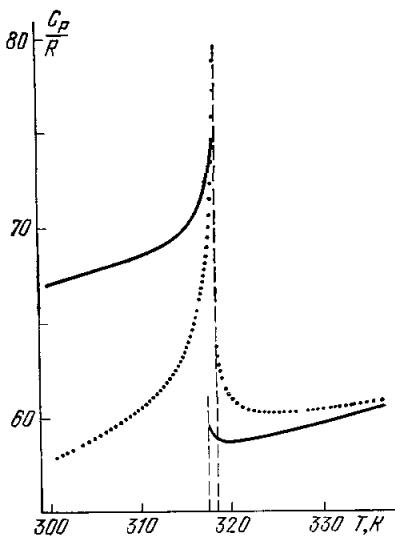


Рис. 21. Экспериментальные значения теплоемкости МББА и результаты теории Ландау-де Жена с учетом флуктуационных поправок в приближении Оринштейна — Цернике (сплошная линия).

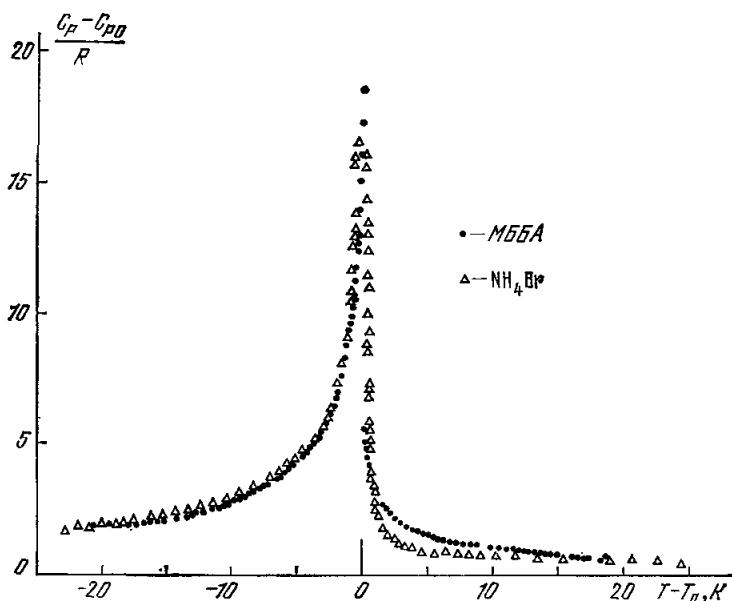


Рис. 22. Сопоставление температурной зависимости теплоемкости МББА и NH_4Br .

нить, во-первых, кроссовером от трикритического поведения к критическому (см. гл. 3) и, во-вторых, необходимостью учета логарифмических множителей. Поэтому данные по теплоемкости метоксибензилиденбутиланилина (МББА) и бутилметоксиазоксибензола (БМОАБ) были проанализированы⁵⁴ на соответствие кроссоверной модели (3.21) с функцией (z) , выбранной в простейшем виде

$$f(z) = K_0 [1 + Kz^{(\alpha_t - \alpha_c)\eta}]^{-1}, \quad (7.2)$$

т. е. обработка экспериментальных данных производилась по формуле

$$C_P = [K_1 |\tau|^{0.5} + K_2 |\tau|^{\infty}]^{-1} + (C_P)_{\text{перг.}} \quad (7.3)$$

Наилучшее согласие достигается при $\alpha = 0.1$. При этом модель (7.3) адекватно описывает данные в обеих фазах. Константа K_2 во всех случаях в 15–30 раз меньше, чем K_1 , поэтому второй член в (7.3) сравнивается с первым только при $|\tau| < 10^{-3}$. Следовательно, во всем экспериментальном интервале температур как в нематической, так и в изотропной фазе определяющим является трикритическое поведение. Что касается логарифмических множителей, то на фоне кроссовера при существующей точности калориметрического эксперимента их можно не учитывать.

За переход $I \rightleftharpoons N$ ответственны существенно короткодействующие межмолекулярные силы, поэтому с самого начала было трудно ожидать согласия теории Ландау с экспериментом. Тем более вызывало удивление «классическое» поведение восприимчивости $\chi \sim (T - T_c)^{-1}$ и радиуса корреляции $r_c \sim (T - T_c)^{-1/2}$, которое следовало из довольно аккуратных экспериментов⁵⁶. Высказанная выше идея о близости перехода $I \rightleftharpoons N$ к трикритическому позволяет непротиворечиво объяснить весь набор экспериментальных данных: «классическое» значение показателей γ и v (см. табл. IV), впервые отмеченное Кисом⁵⁷ значение показателя $\beta \approx 1/4$ *).

Предполагаемая близость перехода $I \rightleftharpoons N$ к ТКГ ставит много вопросов. Хотя в рамках теории Ландау можно получить трикритическое поведение в области $\tau \gg B^{4/3}$, $\tau \gg C^2$ ⁵⁵, причины такого поведения не ясны. Можно предположить, что нематический параметр порядка взаимодействует с другими степенями свободы (например, внутримолекулярными)**). Не исключено, что такое взаимодействие приводит к малости одновременно коэффициентов B и C , обеспечивая и близость перехода к переходу второго рода и черты трикритического поведения.

В работе⁵⁹ предложено объяснение экспериментальных результатов, основанное на том, что переход $I \rightleftharpoons N$ близок не к ТКГ, а к специальному переходу второго рода, принципиальная возможность которого была доказана в работах^{58, 59}. Этот переход должен характеризоваться особым набором критических индексов. Однако вычисленные значения критических индексов существенно отличаются от экспериментальных. Нам кажется весьма маловероятным, что более точный расчет индексов приведет, как предположено в работе⁵⁹, к согласию с экспериментом.

*) Экспериментальные данные скорее указывают на значение $\beta = 0,18 - 0,20$ ⁵⁷. Как отмечалось выше, это значение легко поднять до 0,25 учетом логарифмических поправок. Кроме того, к приведенным значениям β следует относиться с осторожностью, так как обработка температурном зависимости параметра порядка производилась в узком температурном интервале (меньше порядка по τ).

**) По-видимому экспериментальное подтверждение этого предположения недавно получено в работе⁶⁰.

б) Кривая сосуществования жидкость — газ вблизи критической точки ртути

Вблизи критической точки ртути экспериментально обнаружены особенности уравнения состояния, резко отличающие ее от непроводящих жидкостей⁹⁰. Для ртути характерна неприменимость закона соответственных состояний и необычно сильное отклонение диаметра кривой сосуществования жидкость — газ от прямолинейности (рис. 23). Эти особенности можно объяснить⁹¹ взаимодействием двух параметров порядка: плотности ρ , характеризующей переход жидкость — газ, и концентрации электронов в зоне проводимости n , характеризующей переход металл — диэлектрик. Рассмотрение этого взаимодействия в приближении самосогласованного поля проведено в работе⁹¹. Термодинамический потенциал взаимодействия Φ_{int} был выбран в простейшей форме, допускаемой по соображениям симметрии и полученной из модельных соображений в работе⁹²:

$$\Phi_{\text{int}} = -B\rho n. \quad (7.4)$$

На рис. 23 представлены экспериментальные точки⁹⁰ и теоретическая кривая сосуществования⁹¹ (сплошная линия) ртути. Жирной линией при $\rho = \rho^*$ показан переход металл — диэлектрик. Пунктирная линия — экстраполяция из низкотемпературной области без учета взаимодействия параметров порядка (см.⁹⁰). Учет этого взаимодействия существенно меняет форму кривой сосуществования. Критическая точка перехода жидкость — газ «подтягивается» к линии перехода металл — диэлектрик. Однако ТКТ в данном случае не реализуется из-за следующего обстоятельства. О «переходе» металл — диэлектрик в закритической области принято говорить условно, имея в виду линию, где электропроводность меняется почти скачкообразно. Следует отметить также, что даже если бы переход металл — диэлектрик был настоящим фазовым переходом, он тем не менее не мог бы быть переходом второго рода. Этому препятствует наличие в термодинамическом потенциале системы члена взаимодействия (7.4) линейного по n .

в) Точка пересечения линий ориентационных фазовых переходов в бромистом аммонии

Если бы переходы $\beta \rightarrow \delta$ и $\beta \rightarrow \gamma$ в NH_4Br (см. рис. 3 и гл. 2) были второго рода, то тройная точка O была бы типичной бикритической точкой, причем теплота перехода $\delta \rightarrow \gamma$ стремилась бы к нулю в точке O . Однако вблизи точки O $\beta \rightarrow \delta$ и $\beta \rightarrow \gamma$ переходы первого рода, и точку их пересечения можно считать «бикритической» лишь в меру близости их к второму роду, т. е. в меру малости отношения $\lambda/RT \ll 0,1$. Эта близость тем не менее оказывается достаточной, как показывает эксперимент⁹³,

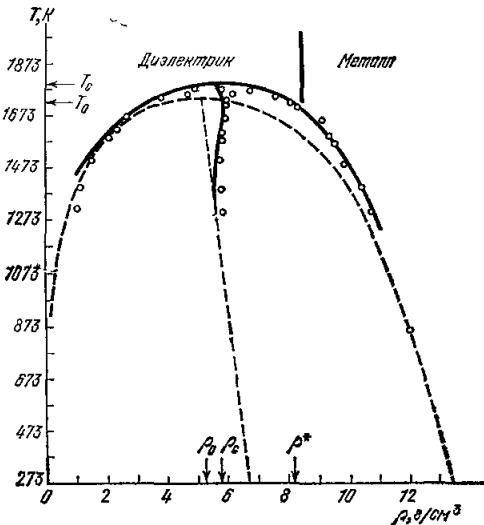


Рис. 23. Фазовая диаграмма ртути вблизи критической точки.

чтобы привести к резкому уменьшению теплоты перехода $\delta - \gamma$. В NH_4Br существуют два критических параметра порядка: один характеризует параллельную, другой — антипараллельную ориентацию тетраэдров аммония в кристаллической решетке. Их взаимодействие должно было бы привести к бикритической точке. Однако взаимодействие критических параметров порядка с некритическими степенями свободы вызывает срыв на переход первого рода (ТКТ на линии $\beta - \delta$). К сожалению, до сих пор не ясно, какие степени свободы ответственны за этот срыв.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Главным итогом исследования систем с взаимодействующими параметрами порядка является существенное расширение возможности универсального описания реальных фазовых переходов на языке более или менее простых моделей. Раньше реальные системы рассматривались с точки зрения искажения модели с одним параметром порядка (например, модель Изинга с примесью, учет асимметрии в модели решеточного газа и т. п.). Теперь уже и ряд моделей с несколькими взаимодействующими параметрами порядка могут играть роль «идеальных систем», и тем самым можно включить в физику критических явлений то, что в силу своей сложности до сих пор было объектом специальных областей (физики магнитных явлений, физики жидких кристаллов, физико-химии растворов и т. п.). И хотя в настоящее время лишь для смеси $\text{He}^3 - \text{He}^4$ существует физически ясное и теоретически строгое описание трикритического поведения в модели взаимодействующих параметров порядка (волновой функции и концентрации), мы уверены в общности такого подхода к поликритическим явлениям.

За пределами нашего обзора остались многочисленные объекты, поведение которых, по-видимому, также можно объяснить взаимодействием параметров порядка. Это, прежде всего, недавно открытые⁹⁴ переходы в сверхтекущее состояние в He^3 , которые заслуживают отдельного обзора. Не рассматривались так называемые критические точки Лифшица, разделяющие линии соразмерных и несоразмерных фазовых переходов^{95,96}, фазовые переходы в несобственных сегнетоэлектриках, которым посвящен специальный обзор⁹⁷.

В последнее время большой интерес вызывают диссилативные структуры⁹⁸. Рассмотрение взаимодействия нескольких параметров порядка в таких системах должно привести к аналогам поликритических точек для неравновесных процессов (перспективный в этом отношении объект — конвективная неустойчивость в смесях).

Московский институт нефтехимической
и газовой промышленности им. И. М. Губкина

Всесоюзный научно-исследовательский институт
физико-технических и радиотехнических измерений,
Менделеево (Московская обл.)

СПИСОК ОСНОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

ТКТ — трикритическая точка,

ФТ — фиксированная точка преобразований ренормализационной группы,

ОЛН — ось легчайшего намагничения,

ДАГ — диспрозий-алюминиевый гранат,

НЖК — нематический жидкий кристалл,

МББА — метоксибензилidenбутиланилин,

БМОАБ — бутилметоксиазоксибензол,

T — температура,

T_c — критическая температура (значок с относится к критическим параметрам),

T_0 — температура поликритической точки,
 T_t — температура ТКТ (значок t относится к трикритическим параметрам),
 T_b — температура бикритической точки (значок b относится к бикритическим параметрам),
 P — давление,
 μ — химический потенциал,
 x — концентрация,
 E — электрическое поле,
 H — магнитное поле,
 H_1 — внутреннее магнитное поле,
 H_{st} — знакопеременное магнитное поле,
 M — намагниченность,
 M_0 — намагниченность насыщения,
 d — размерность пространства,
 \mathcal{H} — гамильтониан,
 Φ — термодинамический потенциал,
 $\tau = (T - T_c)/T_c$,
 ϕ — параметр порядка,
 h — поле, термодинамически сопряженное ϕ ,
 G — функция корреляции флюктуаций,
 r_c — радиус корреляции флюктуаций,
 r_0 — радиус прямой корреляции,
 χ — восприимчивость,
 C — теплоемкость,
 n_i — число компонент параметра порядка ϕ_i ,
 $n = \sum_i n_i$,
 k — волновой вектор,
 Φ — кроссоверный индекс,
 α — индекс, определяющий форму критических линий в ненулевом упорядочивающем поле вблизи ТКТ,

α β γ δ ν η	— критические индексы	{ теплоемкости параметра порядка, восприимчивости, критической изотермы корреляционного радиуса корреляционной функции.
--	-----------------------	---

Индексы с штрихом (α' и т. п.) относятся к упорядоченной фазе, перенормированные индексы обозначены дополнительно звездочкой (α^* , $\alpha^{*\prime}$ и т. п.), индексы величин, связанных с некритическим параметром порядка, отмечены снизу буквой u (γ_u и т. п.).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Стенли Г. Фазовые переходы и критические явления.— М.: Мир, 1973.
- Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и ε-разложение.— М.: Мир, 1975.
- Паташинский А. З., Покровский В. Л. Флуктуационная теория фазовых переходов.— М.: Наука, 1975.
- Паташинский А. З., Покровский В. Л.— УФН, 1977, т. 121, с. 55.
- Анисимов М. А.— УФН, 1974, т. 114, с. 249.
- Анисимов М. А., Берестов А. Т., Воронов В. П., Князенко Ю. Ф., Ковальчук Б. А., Малышев В. М., Смирнов В. А.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 1661.
- Alvesalo T. A., Berglund P. M., Islander S. T., Pickett G. R., Zimmermann W.— Phys. Rev. Ser. A, 1971, v. 4, p. 2354.
- Ландau Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Ч. 1.— М.: Наука, 1976.
- Riedel E. K., Meyer H., Behringer R. P.— J. Low Temp. Phys., 1976, v. 22, p. 369.
- Бондарчук Е. В., Колобкова Е. А., Мильнер Г. А., Пономаренко Е. И.— Тр. ВНИИФТРИ, 1977, вып. 32 (62), с. 106.
- Schmidt V. H., Western A. B., Baker A. G.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 839.
- Griffiths R. B.— Ibid., 1970, v. 24, p. 715.
- Birgeneau R. J., Shirane G., Blume M., Koehler W. C.— Ibid., 1974, v. 33, p. 1098.

14. Griffin J. A., Schnatterly S. E.— *Ibid.*, p. 1576.
15. Shapira Y., Becerra C. C.— *Phys. Lett.*, 1976, v. 57A, p. 483.
16. Fisher M. E., Nelson D. R.— *Phys. Rev. Lett.*, 1974, v. 32, p. 1350.
17. Mukamel D.— *Phys. Rev.*, 1976, v. B14, p. 1303.
18. Obermayer H. A., Dachs H., Schröcke H.— *Sol. State Comm.*, 1973, v. 12, p. 779.
19. Bevaart L., Frikkee E., Lebesque J. V., de Jonge L. J.— *Ibid.*, 1978, v. 25, p. 539.
20. Кричевский И. Р., Ефремова Г. Д., Пряникова Р. О., Серебрякова А. В.— ЖФХ, 1963, т. 37, с. 1924.
21. Griffiths R. B.— *J. Chem. Phys.*, 1974, v. 60, p. 195.
22. Ландай Л. Д. Собрание трудов.— М.: Наука, 1969.— Т. 1, с. 234.
23. a) Chang T. S., Hankey A., Stanley H. E.— *Phys. Lett. Ser. A*, 1973, v. 44, p. 25.
б) Hankey A., Chang T. S., Stanley H. E.— *Phys. Rev. Ser. A*, 1974, v. 9, p. 2573.
24. Widom B.— *J. Phys. Chem.*, 1973, v. 77, p. 2196.
25. Люксютов И. Ф., Покровский В. Л., Хмельницкий Д. Е.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 1817.
26. Kosterlitz J. M., Nelson D. R., Fisher M. E.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1976, v. 13, p. 412.
27. Fisher M. E.— *Phys. Rev.*, 1968, v. 176, p. 257.
28. а) Анисимов М. А., Воронель А. В., Городецкий Е. Е.— ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 1117.
б) Анисимов М. А., Городецкий Е. Е., Шмаков Н. Г.— ЖЭТФ, 1972, т. 63, с. 2165.
29. Riedel E., Wegner F.— *Zs. Phys.*, 1969, v. 225, p. 195.
30. Bergman D. J., Entin-Wohlmann O.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1974, v. 10, p. 305.
31. Ларкин А. И., Пикин С. А.— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 1664.
32. Люксютов И. Ф., Покровский В. Л.— Письма ЖЭТФ, 1975, т. 24, с. 22.
33. Бразовский С. А., Дзялошинский И. Е., Кухаренко Б. Г.— ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 2257.
34. Городецкий Е. Е., Запрудский В. М.— ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 1013.
35. Griffiths R. B.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1973, v. B 7, p. 545.
36. Городецкий Е. Е., Запрудский В. М.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 2299.
37. Мигдал А. А.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 1559.
38. Белов К. П., Звездин А. К., Кадомцева А. М., Левитин Р. З.— УФН, 1976, т. 119, с. 447.
39. Staryewski E., Giordano N.— *Adv. Phys.*, 1977, v. 26, p. 487.
40. Амитин Е. Б., Ковалевская Ю. А., Пауков И. Е.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 700.
41. Yelon W. B., Cox D. E., Kortman P. J., Daniels W. D.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1974, v. 9, p. 4843.
42. Garland C. W., Baloga J. D.— *Ibid.*, 1977, v. 16, p. 331.
43. Egert G., Jahn I. R., Renz D.— *Sol. State Comm.*, 1974, v. 9, p. 775.
44. Brunskill I. R., Jahn I. R., Dachs H.— *Ibid.*, 1975, v. 16, p. 835.
45. Press W., Eckert J., Cox D. E., Rotter C., Kamitakahara W.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1976, v. 14, p. 1983.
46. Анисимов М. А., Мильнер Г. А., Пономаренко Е. И.— В кн. 19-е Всесоюзное совещание по физике низких температур НТ-19: Тезисы докладов.— Минск, 1976.— С. 615.
47. McKee T. J., McColl J. R.— *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 34, p. 1076.
48. Johnson D. L., Maze C., Oppenheim E., Reynolds B.— *Ibid.*, p. 1143.
49. Hardoin F., Sigaud G., Achard F. M., Gasparoux H.— *Sol. State Comm.*, 1977, v. 22, p. 343.
50. Keyes P. H., Weston H. T., Daniels W. B.— *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 31, p. 628.
51. Bongartz A. L. M., de Jonge W. J. M.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1977, v. 15, p. 3434.
52. Bastié P., Vallade M., Vettier C., Zeyen C. M. E.— *Phys. Rev. Lett.*, 1978, v. 40, p. 337.
53. Western A. B., Vallade M., Vettier C., Zeyen C. M. E.— *Phys. Rev. Lett.*, 1978, v. 40, p. 337.
54. Анисимов М. А., Запрудский В. М., Мамницкий В. М., Соркин Е. Л.— Письма ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 523.
55. Stinson T. W., Litster J. D.— *Phys. Rev. Lett.*, 1973, v. 30, p. 688.

56. Gulary E., Chu B.— J. Chem. Phys., 1975, v. 62, p. 798.
57. Haller J.— Progr. Sol. State Chem., 1975, v. 10, p. 103.
58. Graf E. H., Lee D. M., Reppu J. D.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 417.
59. Islander S. T., Zimmermann W.— Phys. Rev. Ser. A., 1973, v. 7, p. 488.
60. Goellner G., Behringer R., Meyer H.— J. Low Temp. Phys., 1973, v. 13, p. 113.
61. Ahlers G., Greywall D. S.— In: LT-13,— 1973.— V. 1, p. 586.
62. Watts D. R., Webb W. W.— Ibid., p. 581.
63. Leiderer P., Watts D. R., Webb W. W.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 483.
64. Achiam Y., Imry Y.— J. Phys. Ser. C, 1977, v. 10, p. 39.
65. Wu E. Sh.— Phys. Rev. Ser. A, 1978, v. 18, p. 1641.
66. Giordano N., Wolf W. P.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 799.
67. Giordano N., Wolf W. P.— Magn. and Magnet. 21st Annu. Conf., 1976, p. 459.
68. Giordano N.— Phys. Rev. Ser. B, 1976, v. 14, p. 2927.
69. Giordano N., Wolf W. P.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 324.
70. Blume M., Corliss L. M., Hastings J. M., Schiller E.— Ibid., 1974, v. 32, p. 544.
71. Regis M., Ferre J., Farge Y., Jahn I. R.— Physica Ser. B, 1977, v. 86—88, p. 599.
72. Nelson D. R., Kosterlitz J. M., Fisher M. E.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 813.
73. Bruse A. D., Aharonov A.— Phys. Rev. Ser. B, 1975, v. 11, p. 478.
74. Lyuksyutov I. F.— Phys. Lett. Ser. A, 1976, v. 56, p. 135.
75. Rohrer H., Gerber Ch.— J. Appl. Phys., 1978, v. 49, p. 1341.
76. Rohrer H.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 34, p. 1638.
77. Fisher M. E.— Ibid., p. 1634.
78. Pfeuty P., Jasnow D., Fisher M. E.— Phys. Rev. Ser. B, 1974, v. 10, p. 2088.
79. King A. R., Rohrer H.— Ibid., 1979, v. 19, p. 5864.
80. Oliveira N. F., Filho A. P., Salinas S. R.— Phys. Lett. Ser. A, 1975, v. 55, p. 293.
81. Baster J. A. J., Frikkee E., de Jonge W. J. M.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 897.
82. Shapira Y., Oliveira N. F.— J. Appl. Phys., 1978, v. 49, p. 1374.
83. De Gennes P. G.— a) Sol. State Comm., 1972, v. 10, p. 753; b) Mol. Cryst.— Liq. Cryst., 1973, v. 21, p. 49.
84. де Жен П. Физика жидкых кристаллов.— М.: Мир, 1977.
85. Анисимов М. А., Гарбер С. Р., Есипов В. С., Мамницкий В. М., Оводов Г. И., Смоленко Л. А., Соркин Е. Л.— ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 1983.
86. Анисимов М. А., Есипов В. С., Мамницкий В. М., Мильнер Г. А., Пономаренко Е. И., Соркин Е. Л.— В кн. Всесоюзный симп. звук по фазовым переходам и критическим явлениям: Тезисы докладов. Новосибирск, 1977.— С. 135.
87. Кеуес Р. Н.— Phys. Lett. Ser. A, 1978, v. 67, p. 132.
88. Городецкий Е. Е., Запрудский В. М.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 202.
89. Корженевский А. Л., Шалаев Б. Н.— ЖЭТФ, 1979, т. 76, с. 2166.
90. Никонин И. Н., Сенченков А. П., Науразаков С. П., Гельман Э. Б., Препринт ИАЭ-2310.— Москва, 1973.
91. Анисимов М. А., Запрудский В. М.— ДАН СССР, 1979, т. 245, с. 78.
92. Vedenev A. A.— In: Conference on Cuiescent Plasma.— Frascati, 1967.
93. Мильнер Г. А. Автореферат канд. диссертации.— М., 1980.
94. Сверхтекучесть гелия-3.— М.: Мир, 1977.
95. Ноглгейх R. M., Luban M., Shtrikman S.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 1678.
96. Асланян Т. А., Леванюк А. П.— ФТТ, 1978, т. 20, с. 804.
97. Леванюк А. П., Савников Д. Г.— УФН, 1974, т. 112, с. 561.
98. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах.— М.: Мир, 1979.
99. Аверьянов Е. М., Жуйков В. А., Корец А. Я., Шабанов В. Ф., Адоменов П. В.— Письма ЖЭТФ, 1980, т. 31, с. 511.