1981 г. Январь *Том 133, вып.1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

537.312.62

НИЗКОТЕМПЕРАТУРНАЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ ЧИСТЫХ МЕТАЛЛОВ

Р. Н. Гуржи, А. И. Копелиович

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение 33
а) Качественные соображения (34). б) Кинетическое уравнение (36).
2. Диффузионное уравнение 38
а) Низкотемпературное разложение (39). б) Анализ диффузионного уравнения. Учет процессов переброса (41).
3. Электропроводность металлов 45
а) Открытые поверхности Ферми. Поверхности Ферми с узкими перемычками (45). б) Закрытые поверхности Ферми (48).
4. Гальваномагнитные свойства металлов 54
а) Сильные поля. Закрытые поверхности Ферми (56). б) Сильные поля. Открытые поверхности Ферми (60). в) Область промежуточных магнитных полей (65).
Заключение 70
Приложения 71
Цитированная литература 74

1. ВВЕДЕНИЕ

К настоящему времени в исследовании низкотемпературной электропроводности металлов накоплен огромный материал. Это относится как к экспериментальным данным, так и к развитию соответствующих теоретических представлений. В данном обзоре мы ни в коей мере не ставим себе целью осветить и классифицировать всю эту огромную информацию. Речь будет идти только о проводимости типичных, чистых, нормальных металлов, процессы релаксации в которых целиком определяются столкновениями электронов с фононами. В основу изложения положена определенная группа тесно связанных между собой вопросов: малоугловой характер рассеяния электронов при низких температурах, взаимное влияние нормальных процессов и процессов переброса, зависимость механизмов релаксации от топологических свойств поверхности Ферми (ПФ). Главной нашей целью является достижение принципиальной ясности в вопросах подобного рода и в рассмотрении разнообразных физических следствий. При этом предпочтение будет отдаваться простым моделям, позволяющим аналитически исследовать качественную сторону вопроса, по сравнению с численными расчетами, основанными на более конкретных данных. Мы не ставим своей задачей сколько-нибудь подробное изложение экспериментальной ситуации и будем привлекать экспериментальные данные только для иллюстрации выводов теории. В основе изложения лежит развитый авторами метод диффузного уравнения, позволяющий, как нам кажется, с единой точки зрения осветить весь

круг рассматриваемых вопросов и сформулировать результаты в терминах конкретных физических механизмов.

Некоторые результаты, полученные в связи с написанием настоящего обзора, публикуются впервые. Это относится, в частности, к приложениям, а также к гальваномагнитным свойствам металлов с двумерной сеткой открытых орбит.

а) Качественные соображения

Современная теория электропроводности металлов основана в начале 30-х годов главным образом в работах Блоха и Пайерлса [1, 2]. Вычисления электропроводности, выполненные в этот период, базировались на весьма грубых представлениях как о спектрах электронов и фононов, так и о взаимодействии между ними. Однако качественные соображения Пайерлса, обладая чрезвычайной ясностью и полнотой, оказались весьма плодотворными для дальнейшего развития теории.

На основе анализа кинетического уравнения Блох показал, что электрическое сопротивление металла, связанное с электрон-фононным взаимодействием, пропорционально пятой степени температуры:

$$\rho \sim T^5, \quad T \ll \theta, \tag{1.1}$$

где θ — температура Дебая. Блох исходил из простейшей модели свободных электронов, взаимодействующих с продольными фононами, закон дисперсии которых линеен и изотропен, а также принял, что фононы описываются равновесной бозевской функцией распределения.

Результат (1.1) нетрудно понять из следующих соображений. Хотя при низких температурах плотность фононов пропорциональна T^3, число фононов, способных рассеивать данный электрон с импульсом $\mathbf{p}$, ограничено законами сохранения энергии и импульса $\varepsilon_{\mathbf{p}\pm\mathbf{q}} - \varepsilon_{\mathbf{p}} = \pm\omega_{\mathbf{q}}$ и поэтому пропорционально T^2 ($\varepsilon_{\mathbf{p}}$, $\omega_{\mathbf{q}}$ — энергии электрона и фонона). Кроме того, квадрат матричного элемента электрон-фононного взаимодействия пропорционален импульсу фонона $q \approx T/s$ (s — скорость звука). Поэтому время свободного пробега электрона относительно столкновений с фононами $\tau' \sim T^{-3}$. Далее следует учесть, что отдельное столкновение приводит к небольшому изменению импульса электрона и поэтому мало эффективно. В результате столкновений с фононами электрон испытывает случайные блуждания по ПФ с величиной шага q и временем τ'. Электрическое поле смещает электронное распределение в $\mathbf{p}$-пространстве в направлении вектора $e\mathbf{E}$. Для восстановления равновесия необходимо диффузионное перемещение электрона на расстояние порядка характерного размера ПФ p_F, поэтому транспортное время релаксации $\tau_{tr} \approx \tau' (p_F/q)^2$. В итоге электрическое сопротивление $\rho \sim (\tau_{tr})^{-1} \sim T^5$.

Из сказанного ясно, что результат (1.1) не связан с принятыми Блохом простейшими предположениями о спектрах электронов и фононов — достаточно, чтобы тепловой импульс фононов был мал в сравнении со всеми характерными размерами ПФ. Другое предположение Блоха — о равновесности фононного распределения, напротив, имеет принципиальное значение. Если не делать этого допущения и ограничиться нормальными столкновениями, сохраняющими суммарный квазиимпульс, то электрическое сопротивление равно нулю. Последнее утверждение становится очевидным, если заметить, что при наличии одних только нормальных столкновений электрон-фононная система, находясь в состоянии внутреннего равновесия, может двигаться как целое с произвольной скоростью. При этом был бы возможен незатухающий электрический ток в отсутствие внешнего поля.

Как указал Пайерлс, равновесность фононной системы может быть обеспечена фонон-фононными столкновениями с перебросом. Однако с понижением температуры вероятность этих U-процессов спадает по экспоненциальному закону: соответствующая частота столкновений $(\tau_{pp}^{U})^{-1} \equiv \nu_{pp}^{U} \sim \exp(-\gamma\theta/T)$, где γ — численный коэффициент порядка единицы ($2\gamma\theta$ равно наименьшему значению суммы энергий всех трех сталкивающихся фононов с учетом законов сохранения энергии и квазиимпульса). Кроме того, коротковолновые фононы, участвующие в процессах переброса, с подавляющей верностью передают импульс не тепловым фононам, а непосредственно электронам.

Таким образом, предположение о равновесности фононов трудно обосновать. Во всяком случае, очевидно, что для каждого металла существует некоторая характерная температура, ниже которой U-процессы уже не могут обеспечить равновесность фононов. Сравнение с экспериментальными данными по теплопроводности диэлектриков (см., например, [3]) показывает, что такое положение должно иметь место в достаточно широкой области низких температур, скажем, при $T/\theta \lesssim 1/10$.

Степень связи фононов с электронами определяется частотой фонон-электронных столкновений $\nu_{pe} \sim T$. (По порядку величины соответствующая длина свободного пробега $l_{pe}(T) \approx l_{ep}(\theta)\ \theta/T$, где $l_{ep}(\theta) \approx \approx 10^{-5}$—$10^{-6}$ см — длина свободного пробега электрона, взятая при температуре Дебая.) С другой стороны, частота нормальных фонон-фононных столкновений $\nu_{pp}^{N} \sim T^5$, а частота рассеяния фононов на микроскопических дефектах кристаллической решетки $\nu_{pl} \sim T^4$. Поэтому при достаточно низких температурах справедливы неравенства $\nu_{pe} \gg \nu_{pp}^{N}$, ν_{pl}, ν_{pp}^{U}. Это значит, что фононная система жестко связана с электронной, т. е. имеет место полное увлечение фононов электронами.

При достаточно низких температурах, когда фонон-фононными U-процессами можно пренебречь, электрическое сопротивление определяется процессами переброса при столкновениях электронов с фононами. Отсюда сразу следует существенно различное поведение решеточного сопротивления при $T \to 0$ для металлов с закрытыми и открытыми ПФ. Если ПФ закрытая и число электронов не равняется числу дырок, то электропроводность должна возрастать с понижением температуры по экспоненциальному закону. Действительно, для осуществления процесса переброса необходим фонон с импульсом, превосходящим минимальное расстояние Δp между замкнутыми электронными или дырочными группами. Если тепловой импульс фононов меньше Δp, то количество таких фононов пропорционально $\exp(-\Delta ps/T)$.

Иное положение, согласно Пайерлсу, имеет место в металлах с открытыми ПФ. В этом случае закон Блоха $\rho \sim T^5$ должен соблюдаться при произвольно низких температурах благодаря тому, что процессы переброса при столкновениях электронов с фононами оказываются возможными, сколь малы бы ни были импульсы этих фононов. Таким же образом зависит от температуры сопротивление скомпенсированного металла: полный квазиимпульс, сообщаемый электрическим полем, при этом равен нулю, а роль фононов сводится к обмену импульсом между электронной и дырочной подсистемами посредством нормальных столкновений.

Следуя Пайерлсу, выясним более детально механизм релаксации квазиимпульса в электрон-фононной системе при наличии процессов переброса. Рассмотрим в качестве примера ПФ типа «гофрированный цилиндр» рис. 1. Если ограничиться только нормальными столкновениями, т. е. процессами типа a, то суммарный импульс фононов в направлении

электрического поля будет неограниченно возрастать со временем. Поэтому в стационарном состоянии примерно половина неравновесных электронов должна следовать по траекториям типа b с участием процессов переброса. (Поглощенный фононный импульс, очевидно, равен вектору, направленному из точки рождения неравновесного электрона в точку его исчезновения в расширенном p-пространстве.) Если процессы одного из типов по какой-либо причине затруднены, то электропроводность будет определяться именно этим типом процессов. Ясно, что приведенные рассуждения применимы и к случаю закрытой ПФ, с тем отличием, что траектории типа b, наряду с диффузионными участками, будут теперь содержать «перескоки» между электронными или дырочными группами.

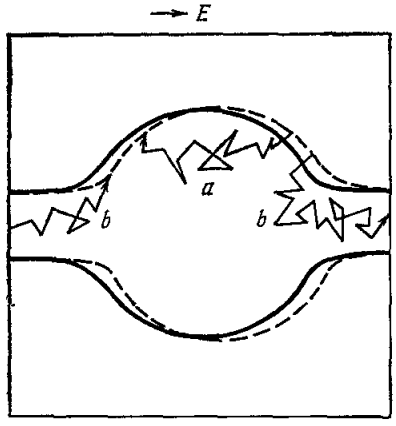

Рис. 1. Два пути диффузии на открытой поверхности Ферми.
Штриховой линией отмечена ПФ, смещенная под действием электрического поля.

Разумеется, приведенные соображения относятся только к достаточно совершенным металлическим образцам, в которых фононный механизм рассеяния доминирует вплоть до весьма низких температур. Соответствующие ограничения на концентрацию дефектов кристаллической решетки существенным образом зависят от экспериментальной ситуации и могут быть легко сформулированы в каждом конкретном случае (см. ниже примечание на стр. 58).

б) Кинетическое уравнение

Будем исходить из кинетических уравнений, описывающих систему взаимодействующих между собой электронов и фононов во внешнем электрическом поле:

$$I^{e}\{\chi_{\mathbf{p}},\ \Phi_{\mathbf{q}}\} = e\mathbf{E}\,\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}, \tag{1.2}$$

$$I^{p}\{\Phi_{\mathbf{q}},\ \chi_{\mathbf{p}}\} = 0, \tag{1.3}$$

$$\left.\begin{aligned} &I^{e} = \sum_{\mathbf{k},\mathbf{q}} (\Gamma^{+}_{\mathbf{pkq}} - \Gamma^{-}_{\mathbf{pkq}}), \quad I^{p} = \sum_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \Gamma^{-}_{\mathbf{pkq}}, \\ &\Gamma^{\pm}_{\mathbf{pkq}} = \frac{2\pi}{\hbar}\,|B_{\mathbf{pkq}}|^{2}\frac{dN_{\mathbf{q}}}{d\omega_{\mathbf{q}}}(n_{\mathbf{p}} - n_{\mathbf{k}})\quad(\chi_{\mathbf{p}} - \chi_{\mathbf{k}} \pm \Phi_{\pm\mathbf{q}})\,\delta(\varepsilon_{\mathbf{p},\mathbf{k}} \pm \omega_{\mathbf{q}}), \\ &\varepsilon_{\mathbf{p},\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{p}} - \varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad B_{\mathbf{pkq}} = b_{\mathbf{pkq}} \sum_{\mathbf{g}} \delta_{\mathbf{p},\mathbf{k}+\mathbf{q}+\mathbf{g}}; \end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

здесь $B_{\mathbf{pkq}}$ — матричный элемент электрон-фононного взаимодействия; δ — символ отражает закон сохранения квазиимпульса с точностью до вектора обратной решетки $\mathbf{g}$ (поскольку $|\mathbf{qg}| < g^2$, то для каждой пары состояний $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ в сумме по $\mathbf{g}$ остается только одно слагаемое, отвечающее $\mathbf{g}$, равному нулю или одному из минимальных векторов обратной решетки). Неравновесные добавки к функциям распределения электронов и фононов представлены соответственно в виде: $-\chi_{\mathbf{p}}dn_{\mathbf{p}}/d\varepsilon_{\mathbf{p}}$ и $-\Phi_{\mathbf{q}}dN_{\mathbf{q}}/d\omega_{\mathbf{q}}$, где $n_{\mathbf{p}}$ и $N_{\mathbf{q}}$ — равновесные фермиевская и бозевская функции распределения.

Укажем теперь на некоторые свойства уравнений (1.2, 1.3), являющиеся следствием закона сохранения квазиимпульса.

Если по какой-либо причине процессы переброса отсутствуют, то однородная система кинетических уравнений имеет решение

$$\chi_{\mathbf{p}} = \mathbf{u}\mathbf{p}, \quad \Phi_{\mathbf{q}} = \mathbf{u}\mathbf{q}, \tag{1.5}$$

которое описывает совместный дрейф электронов и фононов с произвольной скоростью $\mathbf{u}$.

В общем случае из уравнений (1.2, 1.3) следует

$$\sum_{\mathbf{pkq}} \mathbf{g}\Gamma^{+}_{\mathbf{pkq}} = \sum_{\mathbf{p}} e\left(\mathbf{E}\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}\right)\mathbf{p}. \tag{1.6}$$

Левая часть этого равенства представляет собой скорость изменения полного квазиимпульса системы в результате процессов переброса, правая — в результате действия электрического поля.

В случае металла с замкнутой ПФ

$$-\sum_{\mathbf{p}} e\left(\mathbf{E}\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}\right)\mathbf{p} = e\mathbf{E}(n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{h}}), \tag{1.7}$$

где n_{e} и n_{h} — плотности электронов и дырок.

В случае открытой ПФ, как нетрудно показать,

$$-\sum_{\mathbf{p}} e\left(\mathbf{E}\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}\right)\mathbf{p} = e^{*}\mathbf{E}\frac{2}{h^{3}}V - e^{*}\frac{2}{h^{3}}\sum_{\mathbf{g}} \mathbf{g}(\mathbf{E}\mathbf{S}_{\mathbf{g}}). \tag{1.8}$$

Здесь под V, в зависимости от удобства, можно понимать либо объем ячейки, занятый электронами, либо свободный от электронов «дырочный» объем. При этом соответственно заряду e^{*} нужно приписывать разные знаки. Вектор $\mathbf{S}_{\mathbf{g}}$ равен по абсолютной величине площади соприкосновения объема V с гранью ячейки и направлен по внешней нормали к грани, $\mathbf{g}$ — вектор обратной решетки, отвечающий этой грани. Если ПФ состоит из нескольких полостей и некоторые из них замкнуты, то объемы электронных и дырочных групп с соответствующими знаками должны быть включены в величину V.

Из равенств (1.6—1.8) следует принципиально важная роль процессов переброса в электропроводности металлов с открытыми и замкнутыми (но $n_{\mathrm{e}} \neq n_{\mathrm{h}}$) ПФ. Говоря о процессах переброса, следует принимать во внимание, что различие между N- и U-процессами в значительной мере условно. Как известно, выбор основной ячейки в импульсном пространстве содержит произвол — необходимо только, чтобы она включала в себя все неэквивалентные состояния (не более одного раза). Понятно, что при соответствующем выборе основной ячейки переход между любыми фиксированными состояниями $\mathbf{p}$ и $\mathbf{k}$ может описываться как N-, так и U-процессом.

Сказанное позволяет сформулировать общий вывод: электрическое сопротивление отлично от нуля, если никаким выбором основной ячейки нельзя устранить процессы переброса. Как нетрудно понять, это эквивалентно следующему требованию: необходимо, чтобы под действием столкновений с фононами хотя бы часть электронов могла уйти на бесконечность в расширенном $\mathbf{p}$-пространстве, причем, если в некоторых направлениях уход на бесконечность невозможен, то электрическое поле $\mathbf{E}$ должно быть перпендикулярно этим направлениям. За исключением скомпенсированных металлов и специального случая строго цилиндрической ПФ (см. приложение II), это условие является и необходимым и достаточным. Если упомянутые инфинитные траектории содержат «перескоки» на конечные расстояния, то асимптотическое поведение сопротивления

при $T \to 0$ будет экспоненциальным; в противном случае справедлив закон Блоха $\rho \sim T^5$.

Заканчивая этот раздел, остановимся вкратце на роли процессов переброса в теплопроводности металлов с замкнутыми ПФ. Условие баланса квазиимпульса принимает в этом случае вид

$$\sum_{\mathbf{pkq}} \mathbf{g}\Gamma^{+}_{\mathbf{pkq}} = -\sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p}\,\frac{\varepsilon_{\mathbf{p}}-\mu}{T}\left(\nabla T\,\frac{\partial n_{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{p}}\right) - \sum_{\mathbf{q}} \mathbf{q}\,\frac{\omega_{\mathbf{q}}}{T}\left(\nabla T\,\frac{\partial n_{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}}\right) - e\mathbf{E}'\,(n_{\mathrm{e}}-n_{\mathrm{h}}), \tag{1.9}$$

где $\mathbf{E}' = \mathbf{E} - e^{-1}\,(\partial\mu/\partial T)\nabla T$, μ — химический потенциал.

Легко видеть, что роль процессов переброса в теплопроводности скомпенсированных и нескомпенсированных металлов является в некотором смысле обратной по сравнению со случаем электропроводности.

Действительно, при $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{h}}$ условие баланса (1.9), очевидно, не может быть удовлетворено без учета процессов переброса. Это связано с тем, что совместный дрейф электронов и фононов сопровождается переносом тепла при нулевом электрическом токе $\mathbf{j} = e\,(n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{h}})\,\mathbf{u}$. В результате коэффициент теплопроводности нарастает с понижением температуры экспоненциальным образом *). Однако поле термоэдс $\mathbf{E}$, определяемое из условия $\mathbf{j} = 0$, изменяется с температурой по степенному закону.

Если $n_{\mathrm{e}} \neq n_{\mathrm{h}}$, то условие баланса (1.9), напротив, не требует учета процессов переброса. В таком случае из (1.9), с точностью до экспоненциально малых при $T \to 0$ членов, следует выражение для поля термоэдс

$$e\mathbf{E}' = \left[\alpha\,\frac{T}{\mu} + \beta\left(\frac{T}{\theta}\right)^3\right]\nabla T, \tag{1.10}$$

где α и β — численные коэффициенты порядка единицы. Существенно, что термоэдс не связана в данном случае с требованием обращения в нуль электрического поля. Последнее условие позволяет определить произвольный вектор $\mathbf{u}$ в решении (1.5) однородной системы кинетических уравнений. (При $n_{\mathrm{e}} = n_{\mathrm{h}}$, когда процессы переброса необходимо учитывать, решение (1.5) отсутствует.) Коэффициент теплопроводности, естественно, зависит от температуры степенным образом.

2. ДИФФУЗИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Большинство работ, посвященных вычислению электропроводности металлов, основано на использовании вариационного принципа для кинетического уравнения (см., например, [4]). Главный вопрос, возникающий при применении этого метода, состоит в выборе пробных функций, описывающих распределение электронов и фононов. Обычно используются простейшие дрейфовые функции вида (1.5) с, вообще говоря, различными значениями скорости $\mathbf{u}$ для электронов и фононов. Точность дрейфового приближения трудно проконтролировать. В ряде случаев оно приводит к существенно завышенному вкладу процессов переброса в электросопротивление. Последнее обстоятельство наиболее очевидно в случае открытой ПФ, так как функция $\chi_{\mathbf{p}} = \mathbf{up}$ не удовлетворяет условию периодичности в $\mathbf{p}$-пространстве.

В последнее время Каганом, Жерновым и Флеровым выполнен цикл работ [5-7], в которых осуществлен выход за рамки стандартного «одномоментного» приближения: пробная функция для электронов выбирается в виде углового полинома с учетом ограничений, накладываемых симмет-

*) Можно показать, что эта зависимость должна проявляться при более низких температурах, чем в электропроводности нескомпенсированного металла.

рией кристалла. Это позволяет удовлетворить условию периодичности в случае открытых ПФ и учесть анизотропию функции распределения в случае замкнутых ПФ.

Наше рассмотрение, основанное на принципиально ином — диффузионном подходе, последовательно использует главную физическую особенность электрон-фононного рассеяния при низких температурах — его малоугловой характер. Еще Бете и Зоммерфельд[8] указали на возможность разложения кинетического уравнения по малому параметру q/p_F. Клеменс и Джексон [9], исходя из физических соображений, записали уравнение, описывающее диффузию электронов на ПФ, для простейшей модели (законы дисперсии электронов и фононов считались изотропными, а фононы равновесными).

а) Низкотемпературное разложение

Переходя к вычислениям, заметим, что кинетическое уравнение (1.3) может быть разрешено относительно фононной функции распределения $\Phi_{\mathbf{q}}$. Подставляя это выражение в (1.2), приходим к весьма сложному интегральному уравнению для электронной функции $\chi_{\mathbf{p}}$, исследование которого в общем виде не представляется возможным. Задача существенно упрощается при достаточно низких температурах, когда импульс фонона $q \sim T/s$ мал в сравнении со всеми характерными размерами ПФ. Можно показать, что в таких условиях искомая функция $\chi_{\mathbf{p}}$ с большой степенью точности не зависит от энергии (см. приложение I), а в пределах изоэнергетической поверхности существенно изменяется лишь на расстояниях, сравнимых с характерными размерами этой поверхности *). Поэтому $\chi_{\mathbf{p}-\mathbf{q}}$ и другие фигурирующие в интеграле столкновений плавные функции квазиимпульса могут быть разложены в ряд по степеням q, причем отличный от нуля результат возникает только в квадратичном по q приближении. Однако соответствующие вычисления оказываются весьма громоздкими, а их результат не удается представить в обозримом виде.

Гораздо более удобно использовать при выводе диффузионного уравнения определенный прием, который сразу приводит к компактному выражению для интеграла столкновений. Просуммируем уравнение (1.2) по некоторой области V_0 в $\mathbf{p}$-пространстве. Пусть эта область включает в себя участок ПФ, размеры которого много больше теплового импульса фононов.

Учитывая, что $B_{\mathbf{pkq}} = B^*_{\mathbf{kp},-\mathbf{q}}$, после простых преобразований получаем

$$\sum_{\mathbf{p}\subset V_0} I^{\mathrm{e}} = \Big(\sum_{\mathbf{p}\subset V_0,\ \mathbf{k}\not\subset V_0,\ \mathbf{q}} - \sum_{\mathbf{p}\not\subset V_0,\ \mathbf{k}\subset V_0,\ \mathbf{q}} \Big) \Gamma^+_{\mathbf{pkq}}. \tag{2.1}$$

Существенно, что при разложении этого выражения по q не нулевой результат возникает уже в линейном приближении, тогда как при разложении самой величины I^{e} необходимо учитывать члены второго порядка. (Противоречия тут нет, так как (2.1) содержит лишнюю степень q за счет малости области суммирования: переходы могут осуществляться только из узкого слоя вблизи границы области V_0). Именно в этом и состоит преимущество используемого способа вывода.

*) Равновесие по энергиям устанавливается быстро — в результате одного столкновения с тепловым фононом, в то время как полная релаксация, как правило, требует большого числа столкновений, необходимых для перемещения электрона через всю ПФ (к этому вопросу мы еще вернемся в гл. 3). Отметим, что сказанное относится к релаксации под действием электрического поля, которое в главном по параметру T/μ приближении не изменяет распределения электронов по энергиям. При наличии градиента температуры функция $\chi_{\mathbf{p}}$ зависит от энергии, что существенно сказывается на виде диффузионного уравнения (см. приложение I).

Разделим интеграл столкновений на две части:

$$I^{e} = I^{ep} + I^{epe},$$

где I^{ep} — интеграл столкновений с равновесными фононами (т. е. без $\Phi_{\mp q}$ в выражении (1.4) для $\Gamma^{\pm}_{pkq}$), а I^{epe} описывает взаимодействие между электронами через посредство фононов.

Рассмотрим сумму $\sum I^{ep}$. Заметим, что в первом порядке по q разность $\chi_p - \chi_k$, где $\mathbf{k} = \mathbf{p} - \mathbf{q} - \mathbf{g}$, может быть записана в виде $\chi_p - \chi_k = \mathbf{q}\,\partial\chi_p/\partial\mathbf{p}$ при любом $\mathbf{g}$ (напомним, что χ_p — периодическая с периодом $\mathbf{g}$ непрерывная функция квазиимпульса). Все остальные вычисления достаточно проводить в низшем неисчезающем приближении по q. В частности, матричный элемент взаимодействия можно записать в виде

$$|b_{pkq}|^2 = qM_p(\mathbf{e}), \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{q}}{q},$$

причем в силу эрмитовости гамильтониана $M_p(-\mathbf{e}) = M_p(\mathbf{e})$

Результат вычислений удается представить в виде [10]

$$\sum_{p\subset V_0} I^{ep} = \frac{2}{h^3}\oint_{\mathbf{l}} (\hat{D}_p\nabla\chi_p)\,d\mathbf{l}.$$

Интегрирование здесь идет вдоль линии пересечения ПФ с границей области V_0, вектор $d\mathbf{l}$ направлен вдоль внешней нормали к этой линии, лежащей в касательной плоскости к ПФ. Оператор ∇ означает двумерную операцию, производимую в касательной плоскости к ПФ $\nabla = \hat{P}\,\partial/\partial\mathbf{p}$. При выполнении квадратичных дифференциальных операций нужно учитывать, что оператор проектирования $\hat{P}$ зависит от импульса.

Тензор диффузии имеет вид

$$D_p^{ik} = T^5\frac{30\zeta(5)}{\pi^2\hbar^4 v_p^2}\int_0^{2\pi}\frac{M_p(\mathbf{e})}{s^5(\mathbf{e})}e^i e^k\,d\varphi, \tag{2.2}$$

где угол φ измеряется в касательной плоскости к ПФ (с точностью до величин порядка q/p_F и s/v орт $\mathbf{e}$ (φ) лежит в этой плоскости).

Применяя теорему Гаусса, получаем

$$\sum_{p\subset V_0} I^{ep} = \frac{2}{h^3}\int_{V_0}\operatorname{div}(\hat{D}_p\nabla\chi_p)\,dS_p,$$

где интегрирование идет по части ПФ, заключенной в области V_0, $\operatorname{div} A = \nabla_i A_i$.

Аналогичным образом

$$\sum_{p\subset V_0} I^{epe} = -\frac{2}{h^3}\int_{V_0}\operatorname{div}(\hat{D}_p\mathbf{a}_p)\,dS_p,$$

где

$$\mathbf{a}_p = \int \hat{A}_{pp'}\nabla\chi_{p'}\,dS_{p'}, \tag{2.3}$$

$$\hat{A}_{pp'} = \frac{2\hat{D}_p^{-1}\hat{D}_p(\boldsymbol{\mu})\,D_{p'}(\boldsymbol{\mu})}{\alpha(\boldsymbol{\mu})\,|[\mathbf{n}_p\mathbf{n}_{p'}]|}, \tag{2.4}$$

$$\alpha(\boldsymbol{\mu}) = \int D_{p''}(\boldsymbol{\mu})\,\delta(\boldsymbol{\mu}\mathbf{n}_{p''})\,dS_{p''}.$$

Интегрирование в (2.3) идет по всей ПФ, $\mathbf{n}_p = \mathbf{v}_p/v_p$, $\boldsymbol{\mu}$ — орт вектора $[\mathbf{n}_p\mathbf{n}_{p'}]$, $D_p(\mathbf{e})$ — «парциальный» коэффициент диффузии, определяемый

соотношениями

$$\hat{D}_{\mathbf{p}} = \int_0^{2\pi} \hat{D}_{\mathbf{p}}(\mathbf{e})\, d\varphi, \quad D_{\mathbf{p}}^{ik}(\mathbf{e}) = D_{\mathbf{p}}(\mathbf{e})\, e^i e^k.$$

Итак, все члены кинетического уравнения (1.2), проинтегрированного по области V_0, представлены в виде интегралов по участку ПФ, заключенному в этой области (для полевого члена $e\mathbf{E}\,\partial n_{\mathbf{p}}/\partial \mathbf{p}$ такое преобразование очевидно). Учитывая, что область V_0 произвольна, получим искомое диффузионное уравнение

$$\operatorname{div} \hat{D}_{\mathbf{p}} (\nabla \chi_{\mathbf{p}} - \mathbf{a}_{\mathbf{p}}) = -e\mathbf{E}\mathbf{n}_{\mathbf{p}}, \tag{2.5}$$

где величины $\hat{D}_{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{a}_{\mathbf{p}}$ определяются формулами (2.2), (2.3).

Заметим, что величина $\hat{D}_{\mathbf{p}}$ в уравнении (2.5) не имеет обычной размерности p^2/t коэффициента диффузии: $[\hat{D}_{\mathbf{p}}] = p^2/vt$. Это связано с тем, что плотность неравновесных электронов на ПФ пропорциональна $v_{\mathbf{p}}^{-1}\chi_{\mathbf{p}}$, тогда как диффузионный поток пропорционален $\nabla\chi_{\mathbf{p}}$.

б) Анализ диффузионного уравнения. Учет процессов переброса

Уравнение (2.5) описывает диффузию электронов на ПФ при наличии электрического поля, которое определяет плотности источников и стоков. Это уравнение является интегро-дифференциальным, причем интегральный член $\mathbf{a}_{\mathbf{p}}$ связан с увлечением фононов. Последнее нетрудно понять. Излучение фонона некоторым электроном приводит к двум следствиям: во-первых, этот электрон смещается по ПФ на величину импульса фонона и, во-вторых, изменяется импульс другого электрона, поглотившего излученный фонон.

1) Открытые поверхности Ферми. В диффузионном приближении импульс фонона следует считать бесконечно малым. Поэтому для открытой ПФ процессы переброса полностью учитываются наложением периодических граничных условий на функцию $\chi_{\mathbf{p}}$:

$$\chi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \chi_{\mathbf{p}}, \quad \nabla\chi_{\mathbf{p}+\mathbf{q}} = \nabla\chi_{\mathbf{p}}, \tag{2.6}$$

т. е. функция $\chi_{\mathbf{p}}$ и ее первые производные должны сшиваться на эквивалентных гранях зоны.

Для дальнейшего анализа удобно записать (2.5) в виде чисто интегрального уравнения относительно векторной функции $\nabla\chi$ (индекс $\mathbf{p}$ всюду, где это не может привести к недоразумениям, будет опускаться):

$$\nabla\chi - \mathbf{a} = \hat{D}^{-1}\boldsymbol{\psi}, \tag{2.7}$$

где поток $\boldsymbol{\psi}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\psi} = -e\mathbf{E}\mathbf{n}. \tag{2.8}$$

Соответствующее (2.7) однородное уравнение имеет нетривиальное решение $\nabla\chi = \nabla\mathbf{u}\mathbf{p} = \mathbf{u}_{||}$, где $\mathbf{u}_{||}$ — параллельная ПФ составляющая дрейфовой скорости $\mathbf{u}$. В приложении II показано, что это решение является единственным, если исключить из рассмотрения случай строго цилиндрической ПФ *).

*) Для цилиндрической ПФ диффузионное уравнение неразрешимо. Поскольку этот результат может представлять интерес при изучении электропроводности двумерных систем, остановимся на нем подробнее. В случае цилиндрической ПФ все фононы могут быть разделены на группы, каждая из которых взаимодействует только

Интегральное ядро $\hat{A}$ в уравнении (2.7) не является симметричным, но симметрично произведение $\hat{D}\hat{A}$ (см. (2.4)). Отсюда следует, что транспонированное однородное уравнение имеет единственное решение $\nabla\chi = \hat{D}\mathbf{u}_{\|} = \hat{D}\mathbf{u}$, и поэтому условие разрешимости уравнения (2.7) имеет вид

$$\int \psi \, dS = 0. \tag{2.9}$$

Смещение электрона в **p**-пространстве равно изменению квазиимпульса фононной системы. Условие (2.9) означает, что суммарный квазиимпульс, поступающий в фононную систему от электронов, равен нулю. Для ПФ, имеющей три непараллельных направления открытости, (2.9) наверняка *может быть выполнено, так как к решению уравнения (2.8) всегда можно* добавить некоторый поток $\delta\psi$ такой, что $\operatorname{div} \delta\psi = 0$. В случае замкнутой ПФ решение однородного уравнения с отличным от нуля полным потоком $\int \delta\psi \, dS$ обязательно имеет особенности.

Соотношение (2.9) позволяет легко получить условие баланса квазиимпульса в диффузионном приближении:

$$\frac{1}{2} \int_L \mathbf{g} (\hat{D} (\nabla\chi - \mathbf{a}), \ d\mathbf{l}) = e \int \mathbf{p} (\mathbf{E}\mathbf{n}) \, dS. \tag{2.10}$$

Интегрирование здесь идет вдоль линии L пересечения ПФ с границами основной ячейки; вектор $\mathbf{g}$ различен на различных участках этой линии; элемент $d\mathbf{l}$ направлен по нормали к линии L в касательной плоскости и так, что $\mathbf{g} \, d\mathbf{l} > 0$.

Поскольку само уравнение (2.5) не содержит процессов переброса, не удивительно, что соответствующее однородное уравнение имеет дрейфовое решение $\chi = \mathbf{u}\mathbf{p}$. Иными словами, уравнение (2.5) инвариантно относительно преобразования Галилея $\chi = \chi' - \mathbf{u}\mathbf{p}$, но неинвариантны граничные условия к нему:

$$\chi'_{\mathbf{p}+\mathbf{g}} - \chi'_{\mathbf{p}} = \mathbf{u}\mathbf{g}, \quad \nabla\chi'_{\mathbf{p}+\mathbf{g}} = \nabla\chi'_{\mathbf{p}}, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{u}$ — *произвольная скорость системы отсчета.*

Обсудим теперь следующий вопрос: существует ли такая система отсчета, в которой неравновесность фононов мало существенна, благодаря чему интегральным членом $\mathbf{a}\{\nabla\chi'\}$ можно в разумном приближении пренебречь? Как показано в приложении II, частное решение уравнения (2.7) может быть получено методом итераций по интегральному члену $\mathbf{a}$, т. е. общее решение имеет вид

$$\Delta\chi = \mathbf{C}\{\psi\} - \mathbf{u}_{\|}, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{C}\{\psi\} = \hat{D}^{-1}\psi + \mathbf{a}\{\hat{D}^{-1}\psi\} + \ldots, \tag{2.13}$$

с электронами, расположенными вдоль одной или нескольких пар симметричных образующих. (Исключение составляют фононы с импульсами параллельными образующим, взаимодействующие со всеми электронами на ПФ.) Поэтому в процессе релаксации *во внешнем электрическом поле импульсы отдельных групп будут неограниченно* нарастать со временем, хотя полный импульс фононной системы может оставаться постоянным. Стационарное состояние, по-видимому, всегда может быть достигнуто при учете столкновений между фононами. При этом, в зависимости от соотношения между частотами столкновений фононов с фононами $\nu_{\mathbf{pp}}^{\mathrm{N}}$ и фононов с электронами $\nu_{\mathbf{pe}}$, могут представиться две возможности: а) если $\nu_{\mathbf{pp}}^{\mathrm{N}} \gg \nu_{\mathbf{pe}}$, то диффузионное приближение остается в силе (см. примечание на стр. 43); б) при $\nu_{\mathbf{pp}}^{\mathrm{N}} \ll \nu_{\mathbf{pe}}$ редкие фонон-фононные столкновения определяют скорость диффузии электронов, что приводит к существенному изменению температурной зависимости электропроводности.

причем сумма $\mathbf{C}$ сходится не медленнее некоторой убывающей геометрической процессии. Скорость $\mathbf{u}$ в (2.12) должна быть определена из граничных условий (2.6) (последние также окончательно устраняют произвол в выборе ψ). Систему отсчета, в которой задача может быть решена итерациями по неравновесности фононов, мы будем называть сопутствующей. Очевидно, что если бы распределение фононов было дрейфовым, то в сопутствующей системе фононы были бы равновесными. Поэтому высшие итерации в (2.13) (т. е. разность $\mathbf{C}\{\psi\} - \hat{D}^{-1}\psi$) учитывают отклонение фононного распределения от дрейфового. Ниже на конкретном примере (см. формулу (3.8)) будет показано, что соответствующие «недрейфовые» поправки к проводимости численно невелики. Дело в том, что фононы с заданным импульсом $\mathbf{q}$ взаимодействуют со всеми электронными состояниями, расположенными вдоль линии $\mathbf{qv} = 0$. Благодаря этому анизотропия ПФ, как правило, мало сказывается на фононном распределении. Однако в случае ПФ, сильно вытянутой вдоль некоторого направления, высшие члены итерационного ряда могут оказаться существенными.

Таким образом, в низшем по $a\{\nabla\chi'\}$ приближении функция распределения и скорость сопутствующей системы могут быть определены из уравнений (2.8), (2.9), (2.6) и (2.12), где следует положить $\mathbf{C}\{\psi\} = \hat{D}^{-1}\psi$. Эквивалентной и более удобной для дальнейшего использования является следующая система уравнений *):

$$\operatorname{div} D\Delta\chi' = -e\,\mathbf{En}, \tag{2.14}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_L \mathbf{g}\,(\hat{D}\nabla\chi',\ \mathrm{d}\mathbf{l}) = -e\int \mathbf{p}\,(\mathbf{En})\,\mathrm{d}S \tag{2.15}$$

с граничными условиями (2.11). Интеграл в правой части равенства (2.15) определяется формулой (1.8).

Отметим, что система уравнений (2.14), (2.15) в некотором смысле является переопределенной. Если воспользоваться тем, что условие баланса квазиимпульса (2.15) справедливо при любом допустимом выборе основной области в $\mathbf{p}$-пространстве, то из этого условия следует уравнение (2.14) (но не наоборот!). Таким образом, можно пользоваться либо только уравнением (2.15), предполагая его справедливым при любом выборе основной области, либо системой обоих уравнений (2.14), (2.15) при фиксированном выборе основной области.

Отметим, что в «одномерной» модели, в которой ПФ является поверхностью вращения и все величины зависят только от одной координаты, измеряемой вдоль оси вращения, решение легко может быть доведено до конца. Имеем:

$$|\nabla\chi'| = eE\,\frac{V - \pi r^2 g}{2\pi r g D}, \tag{2.16}$$

где r — радиус некоторого сечения ПФ, D — значение коэффициента диффузии на этом сечении.

2) Закрытые поверхности Ферми. В этом случае процессы переброса (точнее, перескока между связными участками ПФ) должны быть учтены явно в диффузионном уравнении (2.5). Граничное же условие (2.6) теряет смысл, поскольку основная область в $\mathbf{p}$-пространстве может быть выбрана непересекающей ПФ.

*) Рассмотрение в рамках уравнений (2.14), (2.15) является асимптотически точным в условиях, когда частые нормальные фонон-фононные столкновения навязывают фононам дрейфовое распределение: $\nu_{\mathrm{pp}}^{\mathrm{U}} \ll \nu_{\mathrm{pe}} \ll \nu_{\mathrm{pp}}^{\mathrm{N}}$. При не слишком низких температурах эти неравенства могут реально выполняться в некоторых металлах и особенно в полуметаллах.

Прежде всего отметим, что при достаточно низких температурах, когда характерное время перебросов $\tau^U \sim \exp(s\Delta p/T)$ велико по сравнению со всеми остальными временами релаксации *), учет процессов переброса не составляет труда. При нахождении электропроводности *скомпенсированного металла ими можно пренебречь. В случае же нескомпенсированного металла нормальные столкновения формируют совместный дрейф электронов и фононов, скорость которого* **u** может быть найдена из условия баланса квазиимпульса. При этом электрический ток $\mathbf{j} = e(n_e - n_h)\mathbf{u} \sim \exp(s\Delta p/T)$. Однако на эксперименте эта асимптотическая зависимость не наблюдается в чистом виде из-за влияния электрон-*примесного рассеяния*.

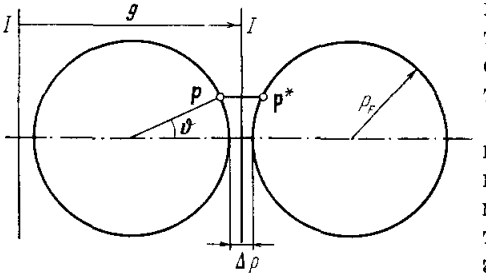

Рис. 2а. Сферическая поверхность Ферми в схеме повторяющихся зон (*I* — грани зоны Бриллюэна).

В широкой области низких температур типичной является ситуация, когда время τ^U сравнимо (или даже мало) со временем диффузии электрона через ПФ. Тем не менее и в этом случае процессы переброса можно в определенном смысле считать редкими. *Дело в том, что U-процессы* возможны только в областях наибольшего сближения замкнутых полостей ПФ, занимающих малую часть ее поверхности. (Мы будем называть такие области лунками.) В таких условиях, как нетрудно показать, можно пренебречь влиянием процессов переброса на распределение фононов, а также неравновесности фононов на процессы переброса. Аналогичным образом в случае открытой ПФ, содержащей узкие перемычки, в пределах *последних можно пренебречь неравновесностью фононов*.

С учетом сказанного процедура, изложенная в п. а), приводит к диффузионному уравнению (2.5) с дополнительным членом

$$\Pi_{\mathbf{p}} = \frac{1}{v_{\mathbf{p}}} \int I_{\mathbf{p}}^{U}\, d\varepsilon, \tag{2.17}$$

где $I_{\mathbf{p}}^{U}$ — отвечающая U-процессам часть интеграла столкновений (1.2) при $\Phi_{\mathbf{q}} = 0$.

Произведем низкотемпературное разложение величины $\Pi_{\mathbf{p}}$, причем сделаем это на примере модели относительно широких лунок, которые возникают при сближении гладких участков ПФ, имеющих радиус кривизны порядка p_F (рис. 2а). Характерный размер r_0 такой лунки легко оценить, учитывая, что в пределах лунки должно выполняться неравенство $|\mathbf{p} - \mathbf{p}^*| - \Delta p \leqslant q \approx T/s$ ($\mathbf{p}^*$ — ближайшая к **p** точка на соседней ПФ), откуда $r_0 \approx \sqrt{qp_F}$. Из данной точки **p** переходы происходят в окрестность точки $\mathbf{p}^*$, имеющую размер $r_1 \approx \sqrt{2q\Delta p + q^2}$. Поскольку $r_0 > r_1$, то для U-процессов применимо «локальное» приближение: в выражении для I^U можно принять $\chi_{\mathbf{k}} = \chi_{\mathbf{p}^*}$. С той же степенью точности точки **p** и $\mathbf{p}^*$ можно считать лежащими на одной горизонтали, как это показано на рис. 2а.

---

*) В таких условиях кинетические явления в металлах имеют гидродинамический характер, и в связи с этим возникает ряд специфических эффектов: минимум в температурной зависимости электропроводности образцов ограниченного размера, слабо затухающие колебания типа второго звука и др. [11].

Окончательно после интегрирования в (2.17) по энергиям $\varepsilon_{\mathbf{p}}$ и $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ получим

$$\Pi_{\mathbf{p}} = -\frac{1}{v_{\mathbf{p}}} \nu_{\mathbf{p}}^{\mathrm{U}} (\chi_{\mathbf{p}} - \chi_{\mathbf{p}*}),$$
$$\nu_{\mathbf{p}}^{\mathrm{U}} = \frac{16\pi^2}{h^4} \int |B_{\mathbf{pkq}}|^2 \omega_{\mathbf{q}} \left| \frac{\mathrm{d}N_{\mathbf{q}}}{\mathrm{d}\omega_{\mathbf{q}}} \right| \frac{\mathrm{d}S_{\mathbf{k}}}{v_{\mathbf{k}}}, \tag{2.18}$$

где $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{p} - \mathbf{g}$, $\mathrm{d}S_{\mathbf{k}}$ — элемент площади соседней поверхности, $\mathbf{g}$ — вектор обратной решетки, отвечающий данной лунке.

Заметим, что диффузионное приближение в области «широкой» лунки оправдано, так как $r_0 \gg q$ *). Если же сближаются участки ПФ большой кривизны, то возникают лунки малого размера. При этом как локальное приближение для перебросов (2.18), так и диффузионное приближение для нормальных столкновений в пределах лунки могут нарушаться. Однако минимальный размер лунки $r_0 \gtrsim q$, поэтому даже в худшем случае указанные приближения находятся на границе своей применимости. Более того, обычно дело обстоит таким образом, что изменением функции распределения $\chi_{\mathbf{p}}$ внутри малой лунки можно пренебречь по сравнению с ее изменением на расстояниях порядка p_{F}:

Аналогичные (2.14), (2.15) уравнения, определяющие функцию распределения в низшем порядке итераций по а $\{\nabla\chi'\}$, имеют вид

$$\operatorname{div} \hat{D} \nabla \chi'_{\mathbf{p}} - \frac{1}{v} \nu_{\mathbf{p}}^{\mathrm{U}} (\chi_{\mathbf{p}} - \chi_{\mathbf{p}*}) = -e\mathbf{E}\mathbf{n}, \tag{2.19}$$

$$\frac{1}{h^3} \int_F \mathbf{g} \nu_{\mathbf{p}}^{U} (\chi_{\mathbf{p}} - \chi_{\mathbf{p}*}) \frac{\mathrm{d}S}{v} = e\mathbf{E} (n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{h}}). \tag{2.20}$$

3. ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТЬ МЕТАЛЛОВ

В этой главе на основе метода диффузионного уравнения рассмотрена низкотемпературная электропроводность металлов в отсутствие магнитного поля. Поскольку в общем виде диффузионное уравнение проинтегрировать нельзя, вычисления будут проведены в рамках некоторых упрощенных моделей. Главной нашей целью является выяснение связи механизма электропроводности со структурой ПФ.

а) Открытые поверхности Ферми. Поверхности Ферми с узкими перемычками

Пусть ПФ состоит из больших электронных или дырочных групп, соединенных узкими перемычками. ПФ, вообще говоря, расположена в нескольких зонах, некоторые из групп могут быть изолированными. При этом в задаче возникает малый параметр $d/p_{\mathrm{F}} \ll 1$ (d — диаметр перемычки), и решение может быть доведено до конца. Ясно, что именно в такой модели эффекты увлечения наиболее существенны, так как при стремлении ширины перемычки к нулю электропроводность обращается в бесконечность (если не учитывать процессы переброса). ПФ с узкими перемычками имеют, например, благородные и многие поливалентные

*) Если $q \ll \Delta p$, то электрон в результате столкновения с перебросом приобретает энергию $\Delta ps \gg T$, т. е. оказывается в нетепловом слое энергий. Нормальные столкновения, возвращающие электрон на ПФ, перемещают его на расстояние Δp, а не на q Однако при таких низких температурах, когда $\Delta p \gtrsim r_0$, функция распределения изменяется на расстояниях порядка p_{F}, и поэтому при $\Delta p \ll p_{\mathrm{F}}$ диффузионное приближение не нарушается.

металлы. Кроме того, возникающая здесь аналогия с электрическими цепями будет неоднократно использована при дальнейшем рассмотрении.

Переходя к вычислениям, прежде всего заметим, что по узкой перемычке протекает диффузионный ток большой плотности $D\,|\nabla\chi\,| \sim eEp_F^2/d$ (см. формулу (2.16)). Поэтому в области перемычки интегральным членом а можно пренебречь по сравнению с $\nabla\chi$ (высшие итерации в (2.13) малы, так как особенность $1/r$ при интегрировании исчезает). Действием электрического поля также можно пренебречь, так как соответствующее изменение потока пропорционально площади перемычки. Поэтому в пределах перемычки диффузионное уравнение имеет вид

$$\operatorname{div} \hat{D}\nabla\chi = 0. \tag{3.1}$$

При дальнейшем рассмотрении вопроса полезно использовать аналогию данной задачи с течением стационарных токов по разветвленной цепи. Перемычки соответствуют проводникам цепи, большие группы — узлам. Ток, протекающий по перемычке,

$$J = \oint \hat{D}\nabla\chi\, \mathbf{dl},$$

где интегрирование идет по замкнутой линии, охватывающей перемычку.

Аналогом потенциала является неравновесная добавка χ'. Перепад «потенциала» происходит в основном на узких перемычках, в пределах же больших групп потенциал можно считать постоянным.

В силу линейности уравнений ток J подчиняется «закону Ома»:

$$\chi_2' - \chi_1' = JR,$$

где χ_1' и χ_2' — потенциалы на больших группах, «сопротивление» R определяется свойствами только самой перемычки и может быть найдено из уравнения (3.1).

Далее нетрудно показать (см. [10]), что для токов справедливы правила Кирхгофа:

$$\sum J = 0, \quad \sum JR = 0.$$

В первом равенстве суммируются токи, входящие по перемычкам в данную большую группу; второе относится к любой «внутренней» цепи, не пересекающей границ зоны. На границе зоны потенциал χ' испытывает скачок, равный $\mathbf{ug}$ (см. (2.11)). Поэтому во «внешние» цепи включены источники эдс.:

$$\sum JR = \mathbf{ug}, \tag{3.2}$$

где $\mathbf{g}$ — вектор обратной решетки, замыкающий цепь, знак которого определяется направлением обхода цепи.

Кроме того, уравнение баланса квазиимпульса (2.10) приводит к условию (основные ячейки выбраны таким образом, что они пересекают ПФ только по перемычкам)

$$\sum_{\mathbf{g}} J\mathbf{g} = e\mathbf{E}V, \tag{3.3}$$

где V — разность электронных и дырочных объемов, ограничиваемых ПФ и гранями зоны.

Записанных уравнений достаточно для определения всех токов и скорости сопутствующей системы $\mathbf{u}$. В рассматриваемой модели электрический ток $\mathbf{j} = 2e\mathbf{u}Vh^{-3}$, поскольку в системе отсчета, связанной с решеткой, электронное распределение в пределах большой группы является дрейфовым. Для простейшего случая, когда все перемычки пересекаются грани-

цами зоны, из (3.2) и (3.3) получаем

$$\hat{\sigma} = \frac{2e^2}{h^3} V^2 \hat{S}, \quad (S^{-1})_{ik} = \sum \frac{g_i g_k}{R},$$

суммирование идет по всем перемычкам.

Для оценки сопротивления перемычки можно воспользоваться «одномерной» моделью, рассмотренной в гл. 2. Если характерная ширина перемычки d порядка радиуса закругления перемычки $\mathscr{R}$, то из (3.1) следует

$$R \approx D^{-1} \ln \frac{p_F}{d}. \tag{3.4}$$

В предельном случае $d \ll \mathscr{R}$ имеем

$$R \approx D^{-1} \sqrt{\mathscr{R} d^{-1}}, \tag{3.5}$$

причем характерная длина перемычки равна $\sqrt{d\mathscr{R}}$.

До сих пор предполагалось, что тепловой импульс фононов много меньше всех характерных размеров ПФ. При наличии длинных перемычек ($d \ll \mathscr{R}$) представляет интерес область промежуточных температур, в которой тепловой импульс фонона удовлетворяет неравенствам

$$d \ll q \ll \sqrt{d\mathscr{R}} \tag{3.6}$$

При этом диффузное приближение остается в силе, но тензор $\hat{D}$ существенно изменяет свой вид:

$$D = Ar, \quad A = \frac{4\pi^3}{15\hbar^4} \left(\frac{T}{s(\mathbf{e})}\right)^4 \frac{M_p(\mathbf{e})}{v_p^2}; \tag{3.7}$$

здесь D — диагональная составляющая тензора диффузии вдоль оси перемычки, $\mathbf{e}$ — орт этой оси, r — расстояние данной точки ПФ от оси вращения.

Воспользовавшись (3.7), получаем

$$R = \frac{1}{4A} \sqrt{\frac{\mathscr{R}}{d^3}}.$$

Итак, в условиях (3.6) $R \sim d^{-3/2} T^{-4}$, тогда как при $q \ll d$, согласно (3.5), $R \sim d^{-1/2} T^{-5}$. Изменение характера температурной зависимости связано с одномерным характером диффузии: взаимодействовать с электронами могут лишь фононы, импульсы которых почти параллельны оси перемычки. Количество таких фононов пропорционально T, а не T^2, как в случае двумерной диффузии. Таким образом, у металлов с длинными перемычками в области температур (3.6) электрическое сопротивление оказывается пропорциональным T^4.

Отметим, что при использовании приведенных результатов для анализа электропроводности конкретных металлов следует проявлять осторожность. Малым параметром, оправдывающим сделанные приближения, фактически является отношение сопротивления большой группы к сопротивлению перемычки. В случае короткой перемычки этот параметр порядка $(\ln p_F/d)^{-1}$ и реально не может быть достаточно малым. Кроме того, как показали прямые измерения Гантмахера и Гаспарова [12, 13], у некоторых металлов вероятность электрон-фононного рассеяния на перемычке значительно больше, чем в пределах большой группы. (Возможно, это связано с малым значением скорости электронов v_p в области перемычки или с существенно большим вкладом рассеяния на поперечных колебаниях в этой области.)

Приближение слабой связи. Рассмотрим простейшую модель, в рамках которой возможно точное решение задачи. Пусть сферическая ПФ пересекается только одной парой брэгговских плоскостей и, следовательно, расположена в двух энергетических зонах (рис. 2б; искажение ферми-сферы вблизи границ зоны в рассматриваемой модели несущественно [10]). Допустим, что все характеристики металла изотропны и, в частности, тензор диффузии сводится к постоянному скаляру D. Электрическое поле, естественно, перпендикулярно брэгговским плоскостям.

В рассматриваемой модели ядро диффузионного уравнения (2.4) принимает вид

$$A^{ik}_{\mathbf{pp}'} = \frac{\mu_i \mu_k}{\pi^2 p_F^2 \sin(\hat{\mathbf{n}\mathbf{n}'})}.$$

Опуская вычисления [10], приведем окончательный результат. Плотность электрического тока $j = neu$, скорость дрейфа u может быть записана в виде

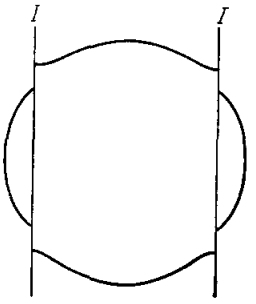

Рис. 2б. Открытая поверхность Ферми в приближении слабой связи.

$$u = u_0 - u_0\gamma^{-1} + u_0(\gamma^{1/2} - \gamma^{-1/2})^2 + u_1, \quad (3.8)$$

$$u_0 = \frac{eEp_F}{2D}, \quad \gamma = \frac{1}{3\cos^2\vartheta_0} \ln\frac{1+\cos\vartheta_0}{1-\cos\vartheta_0},$$

$$u_1 = \frac{2u_0}{3\cos^2\vartheta_0} \sum_{i=3}^{\infty} \frac{2i+1}{i(i+1)} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_i} [P_i(\vartheta_0)]^2, \quad (3.9)$$

$$\lambda_i = \frac{1-(-1)^i}{i(i+1)} \left[\frac{i!!}{(i-1)!!}\right]^2;$$

здесь $\cos\vartheta_0 = g/2p_F$, $P_i(\vartheta)$ — полиномы Лежандра.

Первые два слагаемых в формуле (3.8) соответствуют результатам уже упомянутой работы Клеменса и Джексона[9], в которой не учитывалось увлечение фононов. Легко показать, что u_0 есть скорость дрейфа электронов в условиях, когда фононы равновесны и процессы переброса отсутствуют. Второе слагаемое $(-u_0\gamma^{-1})$ связано с процессами переброса. Третье слагаемое обусловлено дрейфом фононов.

Наконец, член u_1 связан с отклонением фононного распределения от дрейфового. Анализ формулы (3.9) показывает, что вклад от этого слагаемого относительно мал. Например, для трехвалентных ГЦК металлов $g/2p_F = 0{,}89$ и, как дают вычисления, $u_1/u \approx 0{,}22$. Таким образом, учет высших членов итерационного ряда по $\mathbf{a}_p$ (см. (2.13)) приводит в данном случае лишь к незначительному изменению численного коэффициента.

Приведенные результаты без труда обобщаются на случай более реалистической модели с несколькими направлениями открытости [10].

б) Закрытые поверхности Ферми

Как уже неоднократно отмечалось, электропроводность металла с замкнутой ПФ и $n_e \neq n_h$ при достаточно низких температурах должна изменяться по закону $\sigma \sim \exp(T_0/T)$ ($T_0 \approx \Delta ps$, Δp — минимальное расстояние между изолированными частями ПФ). Однако до настоящего времени нет данных об экспериментальном наблюдении хорошо выраженной экспоненты Пайерлса, хотя для некоторых металлов измерения проведены при температурах, значительно меньших T_0. Вероятно, наиболее благоприятными объектами для наблюдения этой зависимости явля-

ются щелочные металлы, в которых расстояния между замкнутыми электронными группами весьма велики: $\Delta p \approx p_F/3$ (для Na температура $T_0 \approx 20\ K$, а для K $T_0 \approx 10$ K). В экспериментах Вудса [14] наблюдалась следующая температурная зависимость электросопротивления Na: $\rho \sim T^5$ в интервале $15\ K > T > 9\ K$ и более быстрый ход, примерно, $\rho \sim T^6$ в интервале $9\ K > T > 5\ K$; при $T \leqslant 5\ K$ преобладает примесное рассеяние. Закон, близкий к T^6, наблюдался и для K при 4,2 K $> T >$ 1,3 K Цоем и Гантмахером [15]; подобные результаты были получены Экином и Максфильдом [16], а также рядом других авторов.

В связи с изложенным выше возникают два вопроса. 1) Начиная с каких температур должна проявиться экспоненциальная зависимость электропроводности? 2) Какая температурная зависимость предшествует экспоненциальной?

Для выяснения этих вопросов в настоящем разделе будет рассмотрена электропроводность металлов с закрытыми сферическими ПФ [17]. Конкретные вычисления, выполненные в рамках такой модели, непосредственно относятся к щелочным металлам, но, как станет ясно из дальнейшего, некоторые общие выводы справедливы для произвольных закрытых ПФ.

1) Идеализированная модель. Рассмотрим сначала простейшую модель, в которой в схеме повторяющихся зон близко подходят друг к другу ферми-сферы, расположенные вдоль одной прямой (рис. 2а). Электрическое поле, естественно, направлено вдоль этой прямой. Функция распределения зависит от одного угла ϑ, измеряемого вдоль дуги большого круга от точки наибольшего сближения сфер.

Величина Δp будет предполагаться чрезвычайно малой, так что

$$\ln \frac{p_F}{\Delta p} \gg 1. \tag{3.10}$$

Благодаря этому неравенству переход от диффузионного уравнения (2.5) к упрощенной системе (2.19), (2.20) является, как легко показать, асимптотически точной процедурой. В рассматриваемой модели уравнения (2.19), (2.20) имеют вид

$$\Delta\chi' - A(\vartheta)\chi = -\frac{eE}{D}\cos\vartheta, \tag{3.11}$$

$$\int A(\vartheta)\chi\, dS = \frac{eE}{gD}\cdot\frac{4}{3}\pi p_F^3, \tag{3.12}$$

где

$$A(\vartheta) = \frac{2}{vD}\nu^U(\vartheta) = \frac{f(|\mathbf{p}-\mathbf{p}^*|\, q^{-1})}{15\zeta(5)\, q^2} \qquad q = \frac{T}{\hbar s},$$

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{e^y}{(e^y-1)^2}\, y^3\, dy, \quad D = T^5 \frac{30\zeta(5)\, M}{\pi\hbar^4 v^2 s^5};$$

здесь Δ — угловая часть лапласиана, $|\mathbf{p}-\mathbf{p}^*| \approx \Delta p + \vartheta^2 p_F$ — расстояние от точки $\mathbf{p}$ до соседней сферы; учтено, что в силу нечетности χ как функции $\mathbf{p}$ и одномерности задачи $\chi_{\mathbf{p}^*} = -\chi_{\mathbf{p}}$; $\chi = \chi' \pm (\mathbf{ug}/2)$, где знак плюс отвечает правой лунке, знак минус — левой; интегрирование в (3.12) ведется в пределах правой лунки.

Из уравнений (3.11), (3.12) следует, что $\int \cos\vartheta\Delta\chi' dS = 0$ (это соотношение выражает закон сохранения импульса при нормальных столкновениях и справедливо в любом порядке итераций по а). Отсюда $\int \cos\vartheta\cdot\chi'\, dS = 0$. Таким образом, в сопутствующей системе отсчета электрический ток отсутствует, и поэтому электропроводность $\sigma = neuE^{-1}$.

Для определения скорости дрейфа u необходимо решить уравнение (3.11) совместно с условием (3.12). Вдали от лунки вторым членом в левой части (3.11) можно пренебречь, в результате

$$\chi' = \frac{eEp_F^2}{2D}\left[\cos\vartheta - \frac{1}{3}\beta(\vartheta)\right], \quad \beta(\vartheta) = \ln\frac{1+\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta}.$$

Точно решить уравнение (3.11) в пределах лунки невозможно. Однако характер решения можно понять из следующих соображений. Логарифмическое возрастание функции χ' при приближении к границе лунки связано с протеканием постоянного диффузионного потока $2\pi\vartheta D\ \mathrm{d}\chi'/\mathrm{d}\vartheta \approx \approx 2/3\ eE\pi p_F^2$. Внутри лунки диффузионный поток уменьшается, так как часть полного потока уносится электронами, переходящими на соседнюю сферу. Поэтому в области лунки функция χ' изменяется медленнее, чем по лагарифмическому закону (достигая конечного значения в центре лунки). Это приводит к тому, что при определении скорости дрейфа u с помощью (3.12) изменением χ' в пределах лунки можно пренебречь (при выполнении неравенства (3.10)).

После простых вычислений имеем

$$u = \frac{1}{6}\, eEp_F\,(R_д + R_п), \tag{3.13}$$

$$R_д = \frac{1}{D}\ln\frac{p_F}{q}, \quad R_п = \frac{1}{DF},$$

$$F = \frac{1}{4\pi}\int A(\vartheta)\,\mathrm{d}S = \frac{p_F}{60\zeta(5)\,q}\int\limits_{T_0/T}^{\infty}\frac{y^3e^y}{(e^y-1)^2}\left(y - \frac{\Delta p}{q}\right)\mathrm{d}y.$$

Здесь введены величины $R_д$, $R_п$ — «сопротивления» относительно диффузии и процессов переброса. Интерполяционная формула для F, асимптотически точная при $q \gg \Delta p$ и $q \ll \Delta p$, имеет вид

$$F = \frac{1}{60\zeta(5)}\frac{p_F}{q}\left[24\zeta(3) + \left(\frac{\Delta p}{q}\right)^3\right]\exp\left(-\frac{\Delta p}{q}\right).$$

Обсудим физический смысл результата (3.13). Электропроводность пропорциональна полному времени релаксации, за которое электрон совершает замкнутый цикл в **p**-пространстве: диффузию через ПФ и перескок в результате процесса переброса. Подчеркнем, что в условиях увлечения фононов соответствующие времена складываются.

Первое слагаемое $R_д$ в (3.13) пропорционально времени диффузии электрона из центральной области ПФ к лунке и зависит от температуры по закону $T^5 \ln(p_F s/T)$ (см. аналогичный результат для короткой перемычки (3.4)). Второе слагаемое $R_п$ в (3.13) пропорционально времени переброса и зависит от температуры как $T^{-1}\exp(T_0/T)$, если $T \ll T_0$.

Из (3.13) следует, что температура $T_п$, ниже которой проявляется экспонента Пайерлса, при $\Delta p \ll p_F$ значительно меньше T_0. Этот важный результат связан с двумя обстоятельствами. 1) Хотя вероятность U-процесса экспоненциально мала уже при $T < T_0$, переход электрона на соседнюю сферу совершается в результате одного столкновения, тогда как диффузионный путь через всю ПФ требует большого числа шагов. 2) Каждая из трех величин — квадрат матричного элемента взаимодействия, площадь участка ПФ, куда возможен переход ($r_1^2 \approx \Delta pq$), и слой энергий, из которого возможен переход — для фононов с импульсами порядка Δp в $\Delta p/q$ раз больше, чем для тепловых фононов. Поэтому вероятность U-процесса содержит дополнительный множитель $(\Delta p/q)^3$, большой при $T \ll T_0$.

Для иллюстрации на рис. 3 представлена зависимость от параметра задачи $p_F/\Delta p$ температуры $T_{п1}$, при которой $R_п/R_д = 0{,}25$, и температуры $T_{п2}$, при которой $R_д/R_п = 0{,}25$. Видно, что переходная область температур от закона $\rho \sim T^5/\ln p_F s/T$ к закону $\rho \sim T \exp(-T_0/T)$ является довольно широкой и отношение $T_0/T_п$ растет с увеличением $p_F/\Delta p$.

Для качественных оценок и распространения полученных результатов на другие модели ПФ, запишем проводимость в виде

$$\sigma = \frac{ne^2}{m}(\tau_д + \tau_п), \quad \tau_п = \tau_U \frac{S_F}{S_л}.$$

Здесь время переброса для электрона, находящегося в лунке, $\tau_U \approx \approx [\nu^U(\vartheta = 0)]^{-1}$, $S_л$ — площадь лунки, S_F — площадь всей ПФ. Множитель $S_F/S_л$ в выражении для $\tau_п$ учитывает, что в случае $\tau_п \gg \tau_д$ электрон, прежде чем совершить переброс, долго блуждает по всей ПФ и находится в лунке лишь малую долю $S_л/S_F$ полного времени переброса $\tau_п$.

Естественно предположить, что величина τ_U зависит в основном от соотношения между параметрами q и Δp и мало чувствительна к геометрии лунки; по порядку величины

$$\tau_U \approx \tau' \begin{cases} 1, & T \gg T_0, \\ (T/T_0)^3 e^{T_0/T}, & T \ll T_0, \end{cases}$$

где $\tau' \sim T^{-3}$ — время столкновения электрона с фононом.

В рассматриваемой модели характерная площадь лунки $S_л \approx r_0^2 \sim T$. Если же сближение поверхностей возникает, например, благодаря подходу узких отростков (так что мы имеем дело с разорванной длинной перемычкой диаметра $d \lesssim \Delta p$), то $S_л \approx dq$, т. е. также пропорциональна T. Наконец, для вытянутых лунок, возникающих при сближении поверхностей с существенно различными главными радиусами кривизны: $\mathcal{R}_1 \gg \Delta p$ и $\mathcal{R}_2 \lesssim \Delta p$ площадь лунки $S_л \approx \mathcal{R}_1^{1/2} q^{3/2} \sim T^{3/2}$. Зависимость времени диффузии от температуры также до некоторой степени связана с моделью лунки: при сближении участков большого радиуса кривизны $\tau_д \sim \sim T^{-5} \ln(\theta/T)$, а при наличии разорванной длинной перемычки $\tau_д \sim T^{-5}$ или $\tau_д \sim T^{-4}$ (3.7).

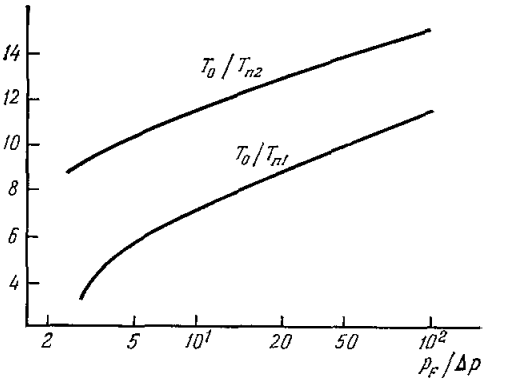

Рис. 3. Расположение и ширина переходной области температур.

Существенно, что вывод о том, что температура $T_п$ значительно меньше температуры T_0 (примерно в соответствии с рис. 3), справедлив для произвольной закрытой ПФ, если характерные размеры электронных или дырочных групп значительно больше расстояний между ними.

Вернемся теперь к предположению о независимости функции χ от энергии, существенному при выводе диффузионного уравнения. Если процессы переброса несущественны, то это предположение может быть обосновано строго (см. приложение I) и физически связано с тем обстоятельством, что энергетическая релаксация требует значительно меньшего числа столкновений, чем релаксация по импульсам. Иное положение имеет место в области лунки на замкнутой ПФ при $T \lesssim T_п$, когда релаксация по импульсу достигается, грубо говоря, в результате одного стол-

кновения с перебросом. Приобретая в результате переброса энергию Δps, электрон оказывается в нетепловом слое. Тем не менее и в этом случае время релаксации по энергии меньше, чем время переброса, и поэтому зависимость χ от ε несущественна. Действительно, излучив несколько фононов с импульсами порядка Δp, неравновесный электрон окажется в «своем» тепловом слое на участке ПФ площадью $(\Delta p)^2$; если же данный электрон претерпит столкновение с перебросом, то он окажется на соседнем участке ПФ площадью порядка $r_1^2 \approx q\Delta p$. Таким образом, отношение соответствующих времен порядка $(r_1/\Delta p)^2$ и того же порядка величины отношение зависящей от энергии части χ к независящей. В худшем случае при $T \approx T_п$ этот параметр порядка $T_п/T_0$, т. е. значительно больше, чем вне лунки, где малость энергетической добавки определяется параметрами T/ε_F и $(T/\theta)^2$. Учет энергетической зависимости в рамках вариационного метода произведен в работе [18].

2) Щелочные металлы. Некоторые из упрощающих предположений, использованных в предыдущей главе, заведомо несправедливы для щелочных металлов. Прежде всего, нечего говорить о выполнении условия (3.10), даже более слабое неравенство $\Delta p \ll p_F$ выполняется плохо. В таких условиях само диффузионное уравнение (3.11) только качественно описывает поведение функции χ в области лунки (см. примечание на стр. 45).

Тем не менее в данном пункте предпринимается попытка приблизиться к реальной ситуации в щелочных металлах и показать, что сформулированные выше качественные выводы сохраняют при этом свою силу. Наиболее важные уточнения результата (3.13) связаны с учетом зависимости χ от $\mathbf{p}$ в области лунки и того обстоятельства, что в щелочных металлах к каждой ферми-сфере близко подходят 12 других сфер. Вероятно, менее существенна анизотропия фононных спектров, поэтому мы и здесь ограничимся дебаевской моделью.

Для случая ферми-сферы с несколькими парами лунок диффузионное уравнение, аналогичное (3.11), имеет следующий вид:

$$\Delta\chi' - \frac{1}{2} A(\vartheta_k)\,(\chi_p - \chi_{p*}) = -\frac{eE}{D}\cos\vartheta; \tag{3.14}$$

здесь угол ϑ_k отсчитывается от направления вектора обратной решетки g_k, соответствующего ближайшей к точке $\mathbf{p}$ лунке, а угол ϑ — от направления электрического поля $\mathbf{E}$, которое удобно считать приложенным вдоль одного из векторов g_0 обратной решетки (поскольку в рассматриваемой модели электропроводность изотропна).

Решение уравнения (3.14) удобно искать в виде линейной комбинации решений «одномерной» задачи, отвечающих одной паре лунок:

$$\chi'_p = \sum_k \tilde{\chi}'(\vartheta_k)\cos\alpha_k + \frac{eEp_F^2}{2D}\cos\vartheta. \tag{3.15}$$

Здесь α — угол между векторами g_k и g_0, а функция $\tilde{\chi}(\vartheta)$ удовлетворяет одномерному уравнению

$$\Delta\tilde{\chi} - A(\vartheta)\left(\tilde{\chi} \pm \frac{\tilde{u}g}{2}\right) = 0. \tag{3.16}$$

Нетрудно проверить, что функция вида (3.15) удовлетворяет уравнению (3.14), если

$$\tilde{u} = u + \frac{2}{g}\sum_{k\,0}\tilde{\chi}(\alpha_k)\cos\alpha_k + \frac{eEp_F^2}{gD}$$

и величину $\tilde{\chi}(\vartheta_{k'\neq k})$ принять постоянной в пределах k-й лунки.

Условие, аналогичное (3.12), как нетрудно убедиться, имеет вид

$$\int A(\vartheta)\left(\tilde{\chi} + \frac{\tilde{u}g}{2}\right) dS = \frac{eE}{gDn_л} 8\pi p_F^3 \tag{3.17}$$

где $n_л$ — общее число лунок.

Вдали от лунки функция $\tilde{\chi}$ может быть определена из (3.16) и (3.17), аналогично тому, как это сделано в предыдущем пункте:

$$\tilde{\chi} = -\beta(\vartheta)\cdot\frac{2eEp_F^3}{n_л g D}.$$

В области лунки уравнение (3.16) может быть решено асимптотически точно в двух предельных случаях: $R_д \ll R_п$ и $R_д \gg R_п$. Однако выражение для проводимости может быть проще получено другим путем. Как легко убедиться, уравнению (3.16) отвечает вариационный принцип

$$\delta \int \tilde{\chi}\,[\Delta\tilde{\chi} - A(\vartheta)(\tilde{\chi} + 2\tilde{\mathbf{u}}\mathbf{p})]\,dS = 0, \tag{3.18}$$

где $\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{u}\mathbf{g}/g$.

Выберем пробную функцию распределения в виде

$$\tilde{\chi} = -\frac{2eEp_F^3}{gDn_л}\tilde{\beta}(\vartheta), \quad \tilde{\beta}(\vartheta) = \begin{cases} \beta(\vartheta), & \vartheta > \vartheta_0, \\ \beta(\vartheta_0), & \vartheta < \vartheta_0, \end{cases}$$

здесь ϑ_0 — вариационный параметр, который совместно с $\tilde{u}$ должен быть определен из (3.18) и (3.17).

Вычисления приводят к следующему результату [17].

$$\sigma \approx \frac{ne^2 p_F}{2D}\left\{1 - 2\frac{p_F}{g}(1-\cos\vartheta_0) + \frac{8p_F^2}{n_л g^2}\left[\sum_k \tilde{\beta}(\alpha_k)\cos\alpha_k + \frac{1}{F} - \frac{C\ln 2}{\ln 2 + F}\right]\right\} + \sigma',$$

$$\vartheta_0^2 = \frac{q}{p_F}\ln[2(FC+1)], \quad C = \int_{\ln 2}^{\infty} e^{-x}\frac{dx}{x}; \tag{3.19}$$

здесь $\alpha_0 = \vartheta_0$, функция F определяется формулой (3.13); σ' — добавка к электропроводности, связанная с учетом интегрального члена a_p в сопутствующей системе отсчета,

$$\sigma' = \frac{8ne^2p_F^3}{n_л g^2 D}\sum_{i=3}^{\infty}\frac{2i+1}{i(i+1)}\frac{\lambda_i}{1-\lambda_i}\times$$
$$\times\sum_k [P_i(\alpha_k)]^2\cos\alpha_k,$$

λ_i определяется формулой (3.9).

На рис. 4 приведена зависимость величины ρT^{-5} (в условных единицах) от относительной температуры T/T_0, вычисленная по формуле (3.19). Для сравнения на том же рисунке штриховой линией представлен результат, полученный в диффузионном приближении, но без учета увлечения фононов. Видно, что увлечение играет существенную роль: в интервале температур (0,15—0,6) T_0 результаты отличаются почти в два раза, при более низких температурах ход кривых совершенно различен.

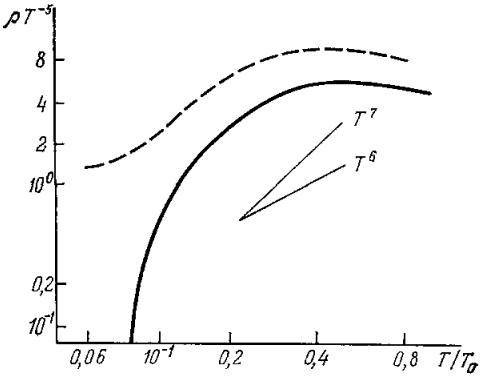

Рис. 4. Зависимость сопротивления щелочного металла от температуры (теория).
Штриховая линия — температурная зависимость в отсутствие увлечения.

Для калия $T_0 \approx 10$ К и наклон кривой в области промежуточных температур довольно хорошо согласуется с экспериментальными результатами [15, 16], в которых при таких температурах наблюдались зависимости, близкие к $\rho_T \sim T^6$ и $\rho_T \sim T^7$ ($\rho_T = \rho - \rho_0$, ρ_0 — остаточное сопротивление). Для натрия $T_0 \approx 20$ К и, как видно из рис. 4, переход от закона $\rho_T \sim T^5$ к более быстрой зависимости происходит примерно при 8 К, что согласуется с экспериментальными данными Вудса [14].

В заключение этого параграфа сделаем два замечания.

1. Симметрия кристалла запрещает в щелочных металлах «горизонтальный» переброс из центра лунки (т. е. переход между ближайшими точками на соседних ферми-сферах) с участием фонона поперечной поляризации. Поэтому в процессах переброса участвуют поперечные фононы с непараллельными соответствующему вектору обратной решетки импульсами. Такие «косые» переходы приводят к несколько иной

асимптотической зависимости проводимости при $T \to 0$, чем это следует из (3.13): $\sigma \sim T^{-2} \exp(T_0/T)$ вместо $\sigma \sim T^{-1} \exp(T_0/T)$ (асимптотику определяют именно поперечные фононы, скорость которых меньше, чем продольных). Однако на эксперименте асимптотическая зависимость не достигается. Оценка же характерного угла между импульсом фонона и вектором g ($\delta\vartheta \lesssim \sqrt{T/T_0}$) показывает, что в интервале температур $T_п < T < T_0$ запрет на горизонтальные переходы приводит к незначительному изменению сопротивления.

2. Сопротивление щелочных металлов вычислялось многими авторами (в частности, в работах [19, 20]) на основе вариационного принципа в одномоментном приближении (пробная функция $\chi = \mathbf{up}$). Наиболее детальные вычисления Каве и Визера [21] приводит к хорошему согласию с экспериментом. Заметим в связи с этим, что при $T > T_п$ разность $\chi_p - \chi_{p*}$ мала в сравнении с перепадом функции χ в пределах всей ПФ. Функция же **up**, не обладая этим свойством, приводит к завышенному вкладу процессов переброса. Но одновременно занижается вклад диффузии, поскольку дрейфовая функция является более плавной, чем реальная функция χ, изменяющаяся на расстояниях меньших p_F. Поэтому использование функции **up** приводит к перераспределению вкладов между диффузией и перебросами (при фиксированной пробной функции в вариационном методе соответствующие сопротивления складываются: $\rho = \rho_N + \rho_U$). Полное значение сопротивления при этом может измениться мало. Такое положение, по-видимому, характерно для вариационного метода: использование далекой от истинной пробной функции может привести к относительно небольшим ошибкам в величине сопротивления.

Недавно появилось сообщение[7] о расчете сопротивления щелочных металлов в многомоментном приближении. Эти вычисления более детально учитывают особенности спектров электронов и фононов и взаимодействия между ними, чем изложенные выше, и поэтому, возможно, приводят к более точным численным результатам. С другой стороны, приведенное рассмотрение позволяет проследить физическую картину, *связанную с конкуренцией процессов диффузии и переброса, имеющую место независимо* от конкретной модели ПФ.

4. ГАЛЬВАНОМАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА МЕТАЛЛОВ

Как известно, в сильных магнитных полях асимптотическое поведение электросопротивления металла как функции напряженности поля целиком определяется топологическими свойствами ПФ и направлением поля. Этот результат может быть доказан строго, без каких-либо предположений о механизме рассеяния электронов [22]. Однако такие свойства магнитосопротивления, как его зависимость от температуры и других характеризующих столкновения параметров, зависимость от ориентации магнитного поля, а также величина поля, при котором устанавливается асимптотическое поведение, существенным образом определяются характером механизма рассеяния электронов. В общем случае можно только утверждать, что проводимость является монотонно убывающей функцией поля [23] и этот спад становится заметным при $\Omega\tau_{tr} \gtrsim 1$ (τ_{tr} — время свободного пробега, определяющее электропроводность в отсутствие магнитного поля, Ω — ларморовская частота).

В простейшем случае, когда характерный угол рассеяния электронов $\Phi \approx 1$ (как для столкновений с локальными дефектами кристаллической решетки типа примесных атомов), удовлетворительные результаты могут быть получены в приближении времени релаксации. При этом сопротивление зависит от единственного параметра $\Omega\tau$: в области $\Omega\tau \ll 1$ влияние магнитного поля мало («слабые поля»), асимптотическая зависимость достигается при $\Omega\tau \gg 1$ («сильные поля»). Если же характерный угол рассеяния $\Phi \ll 1$ (электрон-фононные столкновения при низких температурах, рассеяние на дислокациях), то положение существенно усложняется.

Пиппард [24] впервые обратил внимание на то обстоятельство, что в сильном магнитном поле при наличии определенных особенностей у ПФ, приводящих к быстрому изменению функции распределения электронов в импульсном пространстве, эффективность малоугловых столкновений существенно возрастает. При этом выход на асимптотические зависимости

с ростом магнитного поля сильно затягивается и осуществляется при $\Omega\tau_{tr} \gg \Phi^{-1}$ или даже при $\Omega\tau_{tr} \gg \Phi^{-2}$. Однако рассмотрение Пиппарда не учитывает ряда специфических особенностей релаксации импульса в электрон-фононной системе металла, на которых основаны результаты дальнейшего рассмотрения.

При рассмотрении гальваномагнитных явлений, так же как и электропроводности в нулевом магнитном поле, принципиально важную роль играют процессы переброса при электрон-фононных столкновениях. В металле с замкнутой ПФ при отсутствии перебросов устанавливается дрейф электронов и фононов

$$\chi_{\mathbf{p}} = \mathbf{u}_{\mathbf{x}}\mathbf{p}, \quad \Phi_{\mathbf{q}} = \mathbf{u}_{\mathbf{x}}\mathbf{q}, \quad \mathbf{u}_{\mathbf{x}} = cH^{-2}\,[\mathbf{EH}],$$

и отличны от нуля только холловские компоненты тензора поперечной проводимости

$$\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = e\,(n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{h}})cH^{-1}, \quad \sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0;$$

z — направление магнитного поля $\mathbf{H}$, $\mathbf{EH} = 0$.

Роль процессов переброса для металлов с замкнутыми ПФ (или пересечений электронами границ зоны для металлов с открытыми ПФ) хорошо видна из условия баланса перпендикулярной $\mathbf{H}$ составляющей квазиимпульса. При наличии магнитного поля диффузионное уравнение имеет вид (t — время движения по орбите в магнитном поле)

$$-\frac{1}{v}\frac{\partial\chi}{\partial t} + \operatorname{div}\hat{D}\,(\nabla\chi - \mathbf{a}) + \Pi = -e\mathbf{En}. \tag{4.1}$$

Для вывода условия баланса квазиимпульса домножим это уравнение на $[\mathbf{pH}]$ и проинтегрируем по ПФ; после несложных преобразований с использованием тождества (II.2) имеем

$$\mathbf{j}_{\perp} = e\,(n_{\mathrm{e}} - n_{\mathrm{h}})\,\mathbf{u}_X + \frac{c}{H^2}\sum_{\mathbf{g},\,\sigma}[\mathbf{gH}]\,A_{\mathbf{g},\,\sigma}, \tag{4.2}$$

$$A_{\mathbf{g},\,\sigma} = \frac{1}{h^3}\left(\int\limits_{(\mathbf{g},\,\sigma)}\Pi\,\mathrm{d}S + \int\limits_{(\mathbf{g},\,\sigma)}\mathbf{Q}\,\mathrm{d}\mathbf{l} - e^*_{\sigma}\mathbf{S}_{\mathbf{g},\,\sigma}\mathbf{E}\right), \tag{4.3}$$

$$\mathbf{Q} = \hat{D}(\nabla\chi - \mathbf{a}) + ec^{-1}[\mathbf{Hn}]\chi. \tag{4.4}$$

В этих формулах $\mathbf{j}_{\perp}$ — перпендикулярная магнитному полю составляющая плотности электрического тока, σ — номер энергетической зоны, величины e^* и $\mathbf{S}$ имеют тот же смысл, что и в формуле (1.8), суммирование идет по всем векторам обратной решетки.

Первое слагаемое в (4.2), очевидно, есть ток, связанный с холловским дрейфом. Смысл второго слагаемого легко понять: величина $A_{\mathbf{g},\,\sigma}$ дает число переходов в единицу времени с изменением импульса на вектор $\mathbf{g}$, а при каждом переходе центр орбиты смещается в координатном пространстве на вектор $ce^{-1}H^{-2}\,[\mathbf{gH}]$. Подчеркнем, что в условиях увлечения фононов только эти процессы обусловливают поперечную проводимость в магнитном поле. Если ПФ замкнутая, то в выражении (4.3) для $A_{\mathbf{g},\,\sigma}$ отлично от нуля только первое слагаемое — частота перебросов. Для открытой ПФ появляются еще диффузионный (первое слагаемое в (4.4) (и связанный с движением электронов по орбите в магнитном поле (второе слагаемое в (4.4)) потоки через границу основной ячейки. Последнее слагаемое в (4.3) связано с перемещением электронов через границу ячейки под действием электрического поля.

а) Сильные поля. Закрытые поверхности Ферми

В сильном магнитном поле (соответствующий критерий будет приведен ниже) при решении уравнения (4.1) естественно воспользоваться методом последовательных приближений. Имеем

$$\frac{\partial\chi^{(1)}}{\partial t}=e\mathbf{E}_{\perp}\mathbf{v},\quad \chi^{(1)}=\mathbf{u}_{\mathrm{X}}\mathbf{p}+f(p_z), \tag{4.5}$$

$$-\frac{\partial\chi^{(2)}}{\partial t}+v\,\mathrm{div}\,\hat{D}(\nabla\chi-\mathbf{a}(f))+v\Pi(\chi^{(1)})=-eE_zv_z. \tag{4.6}$$

В последнем уравнении учтена инвариантность потока $\nabla\chi$ — $\mathbf{a}$ относительно преобразования $\chi\to\chi+\mathbf{up}$.

При вычислении электрического тока по формуле (4.2) в сильном магнитном поле достаточно ограничиться первым приближением (4.5). Однако функция $f(p_z)$ определяется из условий разрешимости уравнения следующего приближения (4.6):

$$\langle v\,\mathrm{div}\hat{D}(\nabla f-\mathbf{a}(f))\rangle+\langle v\Pi(\chi^{(1)})\rangle=-eE_z\langle v_z\rangle, \tag{4.7}$$

$$\frac{2}{h^3}\int p_z\Pi(\chi^{(1)})\,\mathrm{d}S=-eE_z(n_{\mathrm{e}}-n_{\mathrm{h}}).$$

Угловые скобки обозначают усреднение по периоду обращения $T(p_z)$:

$$\langle\ldots\rangle=\left|\frac{eH}{c}\right|\int_0^T\ldots\,\mathrm{d}t.$$

Произведем далее замену $f(p_z)=u_cp_z+\psi(p_z)$ и тем самым перейдем к сопутствующей системе отсчета, в которой, согласно определению, уравнение (4.7) можно решать путем итераций по интегральному члену $\mathbf{a}$. Мы ограничимся первой итерацией (т. е. просто опустим в сопутствующей системе член $\mathbf{a}$). После простых преобразований придем окончательно к следующим уравнениям для функции $\psi(p_z)$ и скорости u_c:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_z}D\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}p_z}+\langle v\Pi(\mathbf{up}+\psi)\rangle=-eE_z\langle v_z\rangle, \tag{4.8}$$

$$\frac{2}{h^3}\int p_z\Pi(\mathbf{up}+\psi)\,\mathrm{d}S=-eE_z(n_{\mathrm{e}}-n_{\mathrm{h}}), \tag{4.9}$$

где

$$D(p_z)=\left\langle D_{\zeta\zeta}\frac{v_\perp^2}{v}\right\rangle,\quad \mathbf{u}_\perp=\mathbf{u}_{\mathrm{X}},\quad u_z=u_c;$$

здесь $D_{\zeta\zeta}$ — диагональный элемент тензора диффузии $\hat{D}$ по направлению, перпендикулярному орбите. Член с производными в уравнении (4.8) описывает диффузию электронов на ПФ в направлении, перпендикулярном орбитам; $-D\,\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}p_z$ — полный диффузионный поток через сечение $p_z=\mathrm{const}$. Подчеркнем, что в сильном магнитном поле диффузионным смещением вдоль орбиты можно пренебречь, и поэтому диффузия носит одномерный характер. Член $\langle v\Pi\rangle$ дает переходы электронов между орбитами, проходящими через эквивалентные лунки. Уравнение (4.9) описывает баланс квазиимпульса в направлении магнитного поля.

Характер решения уравнений (4.8), (4.9) существенно зависит от взаимного расположения лунок на ПФ, ориентации магнитного поля и интервала температур. Мы начнем с анализа наиболее простой физической ситуации: допустим, что слои орбит, проходящих через каждую лунку («пояски» на ПФ, рис. 5), не перекрываются и расстояние между ними b значительно больше их ширины.

В рассматриваемом случае результат решения уравнений (4.8), (4.9) может быть сформулирован в терминах протекания стационарных токов по разветвленным электрическим цепям. Заметим, что благодаря одномерности диффузии аналогия с цепями является здесь более полной, чем в отсутствие магнитного поля.

Аналогом потенциала является функция $\psi(p_z)$. Диффузионный ток

$$J_д = -D\frac{d\psi}{dp_z}. \tag{4.10}$$

Рассмотрим случай скрещенных полей **E** и **H**. Тогда из (4.8) разность потенциалов

$$\delta\psi = J_д R_д, \quad R_д = \int\limits_{p_{z1}}^{p_{z2}} \frac{dp_z}{D(p_z)}. \tag{4.11}$$

Здесь интегрирование идет в пределах слоя между двумя соседними поясками, $R_д$ — сопротивление этого участка.

Ток переброса через данную лунку

$$J_п = R_п^{-1}(\mathbf{ug} + \psi_л - \psi_л^*), \quad R_п^{-1} = \int v_p^U \frac{dS}{v_p}; \tag{4.12}$$

здесь $\psi_л$ — значение функции $\psi(p_z)$ в данной лунке, $\psi_л^*$ — в эквивалентной лунке. (Изменением функции $\psi(p_z)$ в пределах пояска в рассматриваемой модели можно пренебречь.) Величина $R_п$ имеет смысл сопротивления перебросу.

Проинтегрировав уравнение (4.8) по малой области, охватывающей один поясок, найдем

$$J_{д1} + J_{д2} + J_п = 0, \tag{4.13}$$

где $J_{д1}$, $J_{д2}$ — диффузионные потоки на границах пояска; для первой лунки, отвечающей минимальному p_z, $J_{д1} = 0$, а для последней $J_{д2} = 0$. (Положительным считается выходящий из лунки ток.)

Уравнения (4.11) — (4.13) совместно с условием непрерывности функции $\psi(p_z)$ совпадают с законами Кирхгофа для некоторой электрической цепи. Обобщение на случай $E_z \neq 0$ производится без труда [25].

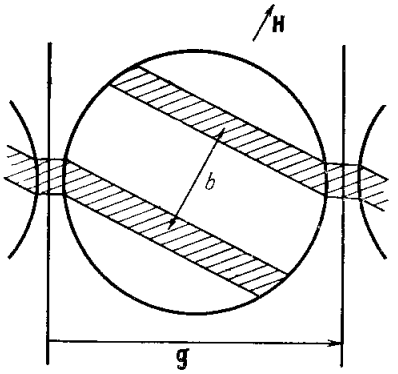

Рис. 5. Лунки и луночные пояски на сферической поверхности Ферми.

Изображена одна пара лунок, пояски заштрихованы.

Приведенные соотношения позволяют найти функцию $\psi(p_z)$ и скорость сопутствующей системы u_c. В соответствии с (4.2) плотность электрического тока

$$\mathbf{j}_\perp = -\frac{c}{h^3H^2}\sum_{\mathbf{g}} [\mathbf{gH}]\, J_п + e(n_e - n_h)\,\mathbf{u}_X, \tag{4.14}$$

$$j_z = \frac{2e}{h^3}\int \mathbf{n}_z \psi\, dS + e(n_e - n_h)\, u_c. \tag{4.15}$$

Обсудим физический смысл полученных результатов. По порядку величины $J_п \approx \mathbf{u}_X\mathbf{g}\,(R_д + R_п)^{-1}$ и, согласно (4.14), поперечная проводимость

$$\sigma_{xx} \approx \left(\frac{c^2g^2}{h^3H^2}\right)(R_д + R_п)^{-1}. \tag{4.16}$$

Из этого выражения видно, что поперечная проводимость требует в рассматриваемой ситуации как процессов переброса, так и диффузии: хотя σ_{xx} пропорциональна числу перебросов (см. (4.14)), но если пренебречь диффузией, то концентрации неравновесных электронов на эквивалентных лунках окажутся равными и $\sigma_{xx} = 0$. Иными словами, поперечная проводимость в сильном магнитном поле, так же как и проводимость при $H = 0$, обусловлена возможностью инфинитного движения электрона в обратном пространстве. Характерное время релаксации в сильном магнитном поле складывается из времени переброса и времени диффузии между луночными поясками — за это время центр электронной орбиты смещается на вектор $\mathbf{g}$ (см. рис. 5).

Заметим в связи с этим, что выражение (4.16) можно представить в виде *)

$$\sigma_{xx} \approx \frac{n_{\text{эфф}} e^2}{m\Omega^2 \tau_{\text{эфф}}}, \tag{4.17}$$

$$n_{\text{эфф}} \approx \frac{b}{p_F} n, \quad \tau_{\text{эфф}} \approx \tau_{\text{д}}^b + \frac{p_F b}{r_0^2} \tau_U;$$

здесь $n_{\text{эфф}}$ — число электронов, участвующих в инфинитном движении; b — расстояние между поясками ($b \gg r_0$); $\tau_{\text{д}}^b \approx p_F(b/v)\, R_{\text{д}}^b \approx \tau_F\, (b/p_F)^2$ — время, отвечающее диффузионному перемещению на расстояние b; $\tau_U \approx \approx r_0^2 R_{\text{п}}/v$ — время переброса для электрона, находящегося в лунке, $r_0^2/p_F b$ — вероятность нахождения электрона в лунке. Диффузионное сопротивление слоя толщиной b равно $R_{\text{д}}^b \approx R_F b/p_F$, где $R_F \approx p_F/D \sim T^5$ соответствует диффузионному перемещению через всю ПФ.

Как было показано в предыдущей главе, вплоть до весьма низких температур $T_{\text{п}}$, $R_F \gg R_{\text{п}}$ и проводимость определяется диффузионным временем. В сильном же магнитном поле, как это следует из формул (4.16), (4.17), можно избежать конкуренции диффузионного и переброcного времен, направив магнитное поле так, чтобы электрон мог попасть из исходной лунки в эквивалентную в результате движения по орбите. Таким образом, появляется возможность экспериментального исследования процессов переброса в широком интервале температур и, в частности, зависимости $\sigma_{xx} \sim \exp(-T_0/T)$ при $T < T_0$. Подчеркнем, что этот результат не зависит от соотношения между числом электронов и дырок.

Из приведенных формул также видно, что при $T > T_{\text{п}}$ поперечная проводимость сильно анизотропна

$$\frac{\sigma_{xx}^{\max}}{\sigma_{xx}^{\min}} \approx \left(\frac{R_F}{R_{\text{п}}}\right)\left(\frac{b_{\max}}{p_F}\right),$$

где $b_{\max}$ — наибольшее расстояние между луночными поясками, а отношение $R_F/R_{\text{п}}$ достигает максимума при $T \approx T_0$.

На опыте обычно измеряется тензор сопротивлений $\rho = \hat{\sigma}^{-1}$. По порядку величины поперечное сопротивление

$$\rho_{yy} \approx \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xy}^2} \approx \frac{g^2}{e^2 h^3 (n_e - n_h)} (R_{\text{д}} + R_{\text{п}})^{-1}, \qquad n_e \neq n_h,$$

$$\rho_{yy} \approx \sigma_{xx}^{-1} \approx \frac{h^3 H^2}{c^2 g^2} (R_{\text{д}} + R_{\text{п}}), \qquad n_e = n_h.$$

*) Заметим, что условия, при которых фононный механизм рассеяния преобладает над примесным в сильном магнитном поле, вообще говоря, легче, чем в отсутствие магнитного поля. Действительно, обусловленная примесями проводимость $\sigma_{xx} \approx \approx ne^2/m\Omega^2\tau_i$ (τ_i — время свободного пробега относительно рассеяния на примесях) мала по сравнению с (4.17), если $\tau_i \gg \tau_F b/p_F + \tau_U (p_F/r_0)^2$, тогда как при $H = 0$ и $T > T_{\text{п}}$ вклад примесей мал при выполнении более трудного условия $\tau_i \gg \tau_F$.

Из этих формул видно, что при $T > T_п$ для направлений магнитного поля, отвечающих перекрытию лунок, сопротивление имеет максимум, если $n_e \neq n_h$, и имеет минимум, если $n_e = n_h$.

Обсудим теперь область применимости полученных соотношений. Правила Кирхгофа (4.11)—(4.13), по существу, основаны только на предположении о том, что изменение функции $\psi(p_z)$ в пределах луночного пояска мало по сравнению с разностью значений функции распределения на эквивалентных лунках и благодаря этому эффекты от диффузии и перебросов могут быть разделены. Поэтому приведенные результаты справедливы не только в области $b \gg r_0$, но и для любых направлений магнитного поля, если при $b \approx r_0$ выполняется условие $R_д^b \ll R_п$. Величина сопротивления перебросу $R_п$ существенно зависит от структуры ПФ в области лунки. Если в этой области хотя бы один из радиусов кривизны ПФ сравним с зазором $\Delta p \ll p_F$ («узкие» или «вытянутые» лунки), то правила Кирхгофа справедливы при любых направлениях магнитного поля *).

Иначе обстоит дело в металлах с «широкими» лунками (оба радиуса кривизны порядка p_F, $r_0 \approx \sqrt{qp_F}$). В этом случае при $T \gtrsim T_0$ переход от «диффузионной» ситуации к «переброcной» осуществляется при значительном перекрытии лунок, и зависимость $\psi(p_z)$ оказывается весьма существенной [25]. Результат вычислений может быть качественно описан формулой (4.17), в которой

$$\tau_{эфф} \approx \tau_д^b + \frac{p_F(r_0+b)}{r_0^2}\tau_U, \quad n_{эфф} \approx n\frac{b+r_0}{p_F}.$$

Угловая зависимость поперечной проводимости представлена на рис. 6, *а*, причем параметр b_0 имеет вид

$$b_0^2 \approx r_0 q \begin{cases} 1, & T > T_0, \\ \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 \exp\left(\frac{T_0}{T}\right), & T < T_0. \end{cases}$$

При перекрытии нескольких пар лунок картина, естественно, усложняется [25].

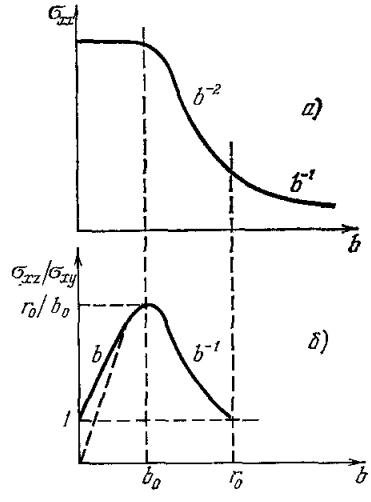

Рис. 6. Анизотропия компонент проводимости σ_{xx} и σ_{xz} в случае закрытой ПФ.

$b = g\vartheta$, ϑ — угол отклонения магнитного поля от направления, отвечающего точному перекрытию лунок.

Отметим, что наряду с поперечной проводимостью существенную анизотропию имеет также величина σ_{xz}. Физически это связано с тем обстоятельством, что при уходе на бесконечность вдоль цепочки луночных орбит электрон неизбежно смещается и в направлении оси p_z (если $b \neq 0$, см. рис. 5). В результате возникает анизотропная по p_z часть функции $\psi(p_z)$ и, согласно (4.15), ток вдоль оси z. Вычисления, основанные на формулах (4.8), (4.9) и (4.15), приводят к следующему соотношению, которое по порядку величины справедливо при любой модели лунок:

$$\sigma_{xz}(b) \approx \frac{nec}{H}\left[\frac{\sigma_{xx}(b)}{\sigma_{xx}(p_F)}\frac{b}{g} + \lambda\right], \tag{4.18}$$

где $\lambda \approx 1$ — плавная функция углов, существенно изменяющаяся в пределах всей ПФ. Соответствующая угловая зависимость представлена на

*) Специфическая ситуация возникает в условиях магнитного пробоя, когда размер лунки чрезвычайно мал ($r_0 \ll q$), и в то же время вероятность перехода при ее прохождении порядка единицы [26].

рис. 6, *б*; штриховая кривая отвечает случаю, когда при точном перекрытии лунок $\sigma_{xz} = 0$ из-за симметрии задачи.

Подчеркнем, что утверждение о большой анизотропии поперечной проводимости относится лишь к тем металлам, у которых, во-первых, размер лунки при $T = T_0$ достаточно мал в сравнении с p_F и, во-вторых, лунок не слишком много, так что имеются направления **H**, при которых они далеки от перекрытия. Для ряда металлов (щелочные, Al, In и др.) оба эти условия не выполнены: для них трудно ожидать большой анизотропии проводимости и, тем более, детального ее поведения в соответствии с приведенными формулами. Благоприятными с точки зрения наблюдения анизотропии могут оказаться такие металлы, как W и Mn. С другой стороны, вывод о возможности исключения в сильном магнитном поле конкуренции процессов переброса и диффузии не связан с указанными ограничениями и относится, в частности, к щелочным металлам.

б) Сильные поля. Открытые поверхности Ферми

В металлах с открытыми ПФ характер проводимости существенно зависит от направления магнитного поля: при наличии открытых орбит электрон уходит на бесконечность в **p**-пространстве, двигаясь по орбите в магнитном поле; если же все орбиты замкнуты, уход на бесконечность осуществляется путем перемещения вдоль цепочки замкнутых орбит. Ниже будет рассмотрен диффузионный механизм релаксации в этих ситуациях, что, в частности, позволит проследить анизотропию проводимости, связанную с появлением открытых орбит.

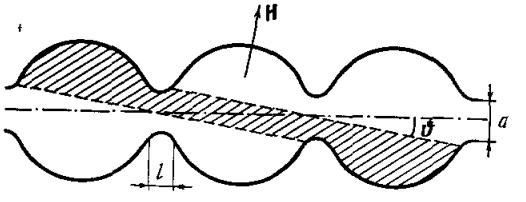

Рис. 7. Выбор основной ячейки в **p**-пространстве в случае открытой поверхности Ферми, $\vartheta = b/g$.

1) Открытые орбиты отсутствуют. В этом случае основную ячейку в **p**-пространстве всегда можно выбрать таким образом, чтобы ее границы пересекали ПФ только по сечениям $p_z = \text{const}$ (рис. 7). Решение диффузионного уравнения, как и для замкнутой ПФ, полностью сводится к правилам Кирхгофа для эквивалентной электрической цепи. Для плотности электрического тока из (4.2) имеем

$$\mathbf{j}_\perp = e(n_e - n_h)\,\mathbf{u}_X - \frac{c}{h^3H^2}\sum_{\mathbf{g},\sigma}[\mathbf{gH}]\,(J_{\mathbf{g},\sigma} + e^*_\sigma S_{\mathbf{g},\sigma}E_z),$$

где $J_{\mathbf{g},\sigma}$ — диффузионные токи, протекающие через границы ячейки. По порядку величины поперечная проводимость $\sigma_{xx} \approx c^2g^2/h^3H^2R$. При выходе на «открытость» (т. е. при приближении **H** к тем направлениям, для которых возникают слои открытых орбит) соответствующие диффузионные сопротивления стремятся к нулю.

Как известно [22], существуют различные типы открытых орбит, отличающиеся размерностью области, которую они образуют на стереографической проекции направлений магнитного поля. Ниже будет рассмотрено поведение проводимости в некоторых наиболее типичных случаях выхода на открытость.

1. Открытые орбиты наиболее простого типа, связанные с одним направлением открытости ПФ. Им соответствует линия на стереографической

проекции — направления **H** в перпендикулярной вектору обратной решетки g плоскости.

Конкретные вычисления могут быть легко проведены для следующей модели. Основная часть ПФ — сфера радиуса p_F; перемычки предполагаются узкими и короткими: диаметр перемычки $d \ll p_F$, а ее длина $l \lesssim d$. Магнитное поле отклонено на малый угол ϑ от перпендикулярной направлению открытости плоскости. Топология электронных орбит зависит от направления магнитного поля. При $b \equiv g\vartheta > d$ имеются два типа орбит: состоящих из одной окружности и орбит из двух окружностей, соединенных узкой перемычкой — «восьмерок». При $b < d$ появляются орбиты с большим числом петель (рис. 7).

Элементарные вычисления, основанные на формуле (4.11), приводят к результату (учтено, что $u_c g_z \ll u_x g_y$ при $\vartheta \ll 1$)[27]

$$\sigma_{xx} = \frac{2c^2g^2}{h^3H^2} R^{-1},$$

$$R^{-1} = 2\pi D \frac{g}{b}\left(1+\frac{d}{b}\right)\eta\left(\frac{d}{b}\right),$$

$$\frac{1}{\eta(x)} = 1 + \frac{\Delta(x)(1-\Delta(x))}{(A(x)+1)(A(x)+2)};$$

здесь $A(x)$ — целая часть x, $\Delta(x) = x - A(x)$; функция $\eta(x) \approx 1$ осциллирует с периодом единица с изломами при $x = n$. Угловая зависимость величины σ_{xx} представлена на рис. 8. Отметим, что период осцилляций $\delta(1/b) = 1/d$, а их амплитуда не зависит от b.

Физический механизм, приводящий к поперечной проводимости, состоит в том, что электрон, переходя от одних траекторий к другим, смещается вдоль оси p_y в импульсном пространстве и соответственно вдоль оси x в координатном пространстве. Изломы и осцилляции связаны со скачкообразным возникновением орбит с большим на единицу числом петель. Плавную часть угловой зависимости $\sigma_{xx}(b)$ можно интерпретировать как результат случайных блужданий электрона вдоль цепочки, состоящей из слоев протяженных орбит

$$\sigma_{xx} \approx P_{\text{эфф}} e^2 \frac{(\delta x)^2}{\tau_{\text{эфф}}}; \qquad (4.19)$$

здесь $\delta x \approx cg/eH$ — величина шага блужданий, $\tau_{\text{эфф}} \approx \tau_F (b/p_F)^2 \sim T^{-5}$—время диффузионного перемещения электрона через слой толщиной b, $P_{\text{эфф}} \approx (b + d)\, g\, (vh^3)^{-1}$ — эффективная плотность состояний. Отметим, что угловая зависимость $\sigma_{xx} \sim b^{-2}$ при $b \ll d$, полученная Лифшицем и Песчанским[28] в приближении времени релаксации, имеет другое происхождение: $\tau_{\text{эфф}}$ не зависит от b, но величина шага $\delta x \approx (cg/eH)d/b$.

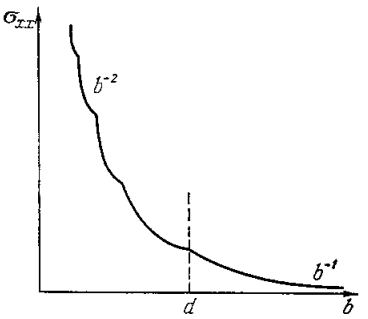

Рис. 8. Анизотропия поперечной проводимости в случае открытой поверхности Ферми, $q \ll b$, d.

Нетрудно понять, как меняются полученные результаты при отказе от некоторых предположений, связанных с моделью ПФ. Если перемычка широкая ($d \approx g$), то зависимость $\sigma_{xx} \sim b^{-1}$ может не проявляться, но при $b \ll d$ закон $\sigma_{xx} \sim b^{-2}\eta(d/b)$ останется в силе. Если перемычка достаточно длинная ($l \gg d$), то при $b \gtrsim dg/l$ исчезнут орбиты с числом петель, большим единицы и, следовательно, нарушится зависимость $\sigma_{xx} \sim b^{-1}$. Однако при меньших b полученные результаты остаются в силе,

если в них принять $d = d(b)$, где $d(b)$ — толщина слоя «сквозных» орбит, проходящих через перемычку.

Перейдем теперь к обсуждению эффектов, связанных с конечностью теплового импульса фононов $q \approx T/s$. Допустим сначала, что импульс q мал в сравнении с характерными размерами перемычки, но превосходит ширину одного слоя протяженных орбит: $b < q \ll d, l$. Легко понять, что в этом случае по-прежнему имеют место случайные блуждания вдоль цепочки орбит, но теперь за один шаг электрон может перескочить через несколько слоев орбит. Поэтому все предыдущие результаты сохраняются, но осцилляции при $q > b$ смазываются.

При более высоких температурах, когда $q \gtrsim d, l$, нарушение диффузионного приближения становится весьма существенным. Чтобы избежать перебросов, т. е. переходов, минующих перемычку, будем сначала считать перемычку длинной и примем, что $l \gg q \gg d$. Механизм поперечной проводимости заключается при этом в следующем. За время одного столкновения с фононом $\tau_{эфф} \approx \tau_F (q/p_F)^2$ электрон, находящийся в слое протяженных орбит, с подавляющей вероятностью выходит из него и попадает в область круговых орбит — «шапочку» (рис. 7). При этом электрон смещается в обратном пространстве на величину $\delta p_y \approx [(d/b) + 1]g$ и соответственно в координатном пространстве — на величину $\delta x = c\delta p_y/eH$. Для оценки проводимости можно воспользоваться формулой (4.19). Рассмотрение, основанное на решении кинетического уравнения в предположении постоянства функции $\psi(p_z)$ в пределах отдельных слоев орбит, дает [27]

$$\sigma_{xx} = \frac{3}{2} n \left(\frac{c}{H}\right)^2 \frac{D}{q^2} \lambda\left(\frac{d}{b}\right), \qquad (4.20)$$
$$\lambda(x) = x^2 + 3x + 2 + x^{-1}\Delta(x)[1 - \Delta(x)][3x + 4 - 2\Delta(x)].$$

Из этой формулы видно, что, в отличие от случая $q \ll d$, проводимость $\sigma_{xx} \sim T^3$ и при $b > d$ не зависит от b. Впрочем, с дальнейшим ростом b,

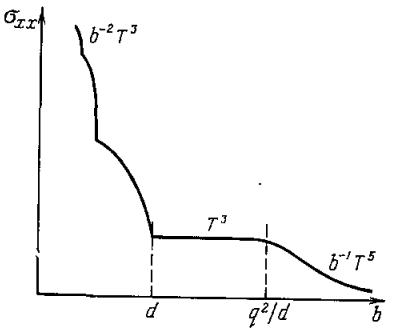

Рис. 9. Анизотропия поперечной проводимости в случае открытой поверхности Ферми, $l \gg q \gg d$.

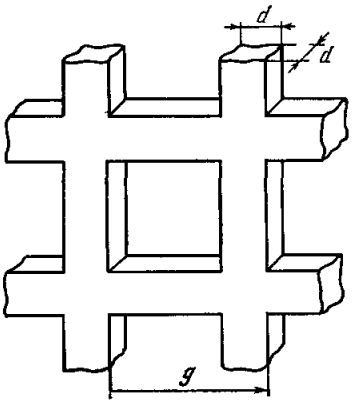

Рис. 10. Поверхность Ферми типа «плоская сетка».

как нетрудно показать [27], мы возвращаемся к результату диффузионного рассмотрения: $\sigma_{xx} \sim b^{-1}T^5$. Угловая зависимость проводимости при $l \gg q \gg d$ представлена на рис. 9.

При $q > l$ проявляются процессы переброса, вклад которых, определяемый выражением (4.17), в первом приближении просто складывается с вкладом (4.20) протяженных орбит (нетрудно показать, что последний преобладает при $b < d\sqrt{d/q}$).

Приведенные выше соображения о связи σ_{xx} с перепадом потенциала остаются в силе и для открытой ПФ, поэтому во всех рассмотренных здесь ситуациях справедливо соотношение (4.18). Таким образом, проводимость σ_{xz} также проявляет существенную анизотропию при выходе на открытость.

2. Орбиты более сложного вида формируются двумя или более направлениями открытости. При этом открытым орбитам может отвечать двумерная область на стереографической проекции [22]. Нетрудно понять, что граница такой области имеет сингулярную структуру — это следует уже из качественного различия между периодическими и апериодическими орбитами, которым соответствуют бесконечно близкие направления магнитного поля. Например, для ПФ типа «плоская сетка», изображенной на рис. 10, несложный анализ приводит к следующему результату *):

$$\operatorname{tg}\vartheta_{\max}=\frac{d}{g}\left[\left(1-\frac{d}{g}\right)\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)-\frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}\right]^{-1}.$$

Здесь $\vartheta_{\max}$ — угол между **H** и нормалью к плоскости сетки, при котором исчезают открытые орбиты; φ — угол между проекцией **H** на плоскость сетки и вектором обратной решетки **g** (следует брать тот из двух векторов, для которого $\varphi<\pi/4$); m и n — целые числа такие, что несократимая дробь $m/n=\operatorname{tg}\varphi$.

Таким образом, область открытых орбит наподобие ежа «ограничена» отрезками разной длины. Наиболее длинные отрезки соответствуют симметричным направлениям проекции **H** с малыми m и n. Размер области минимален при иррациональных значениях $\operatorname{tg}\varphi$, когда $m, n\to\infty$; открытые орбиты при этих φ являются апериодическими (рис. 11).

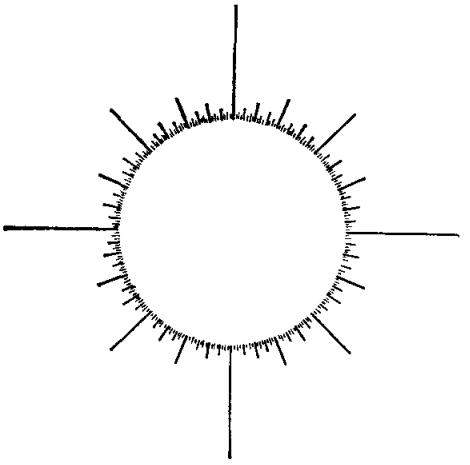

Рис. 11. Область открытых орбит на стереографической проекции для поверхности Ферми типа «плоская сетка».

Задача определения зависимости $\sigma(\vartheta, \varphi)$ при произвольных ϑ и φ сложна. Здесь мы ограничимся анализом проводимости в достаточно симметричном направлении, например в направлении 110 ($\varphi=\pi/4$) **). Отметим, что проведенное ранее [28] рассмотрение выхода на открытость в приближении времени релаксации, не учитывающее тонкую структуру границы, по существу относится именно к этому направлению магнитного поля.

Нетрудно представить, какие изменения происходят с орбитами в сечении $p_z=\text{const}$ с уменьшением ϑ до значения $\vartheta_{\max}$ при $\varphi=\pi/4$; замкнутые орбиты, каждая из которых умещается в одной элементарной ячейке, сближаются, при $\vartheta=\vartheta_{\max}$ в некотором одном сечении происходит касание и возникает бесконечно тонкий слой открытых орбит. Отметим качественное различие такого скачкообразного перехода от ситуации, рассмотренной в предыдущем пункте, когда по мере приближения к открытости длины орбит неограниченно возрастали.

*) Аналогичная формула для несколько иной модели плоской сетки получена в работе [29].

**) На самом деле полученные результаты справедливы в конечном растворе углов φ: $\Delta\varphi<\vartheta-\vartheta_{\max}$ (см. п. в)).

Проводимость σ_{xx} может быть оценена по формуле (4.19): для того чтобы сместиться на вектор $\mathbf{g}$, электрон должен продиффундировать через слой толщиной $\Delta p_z \approx g(\vartheta - \vartheta_{\max})$ (это является простым геометрическим следствием сближения орбит), соответственно $\tau_{\text{эфф}} \approx \tau_{\text{F}}(\vartheta - \vartheta_{\max})^2$ и $P_{\text{эфф}} \approx \Delta p_z g/vh^3$. В результате при $\vartheta - \vartheta_{\max} \ll \vartheta_{\max}$ имеем

$$\sigma_{xx} \approx \left(\frac{g}{h}\right)^3 \frac{g}{v} \left(\frac{c}{H}\right)^2 \frac{1}{\tau_{\text{F}}(\vartheta - \vartheta_{\max})}. \tag{4.21}$$

При достаточно малых значениях $\vartheta - \vartheta_{\max}$ отказывает приближение сильного магнитного поля (см. дальше, п. в)). Однако зависимость (4.21) может нарушаться еще в области сильных магнитных полей: при $\vartheta - \vartheta_{\max} \ll q/g$ (т. е. $q \gg \Delta p_z$) нельзя пользоваться диффузионным приближением. В этом случае смещение на вектор обратной решетки для электронов в слое толщиной порядка q происходит в результате одного столкновения с фононом. Поэтому $\tau_{\text{эфф}} \approx \tau_{\text{F}}(q/g)^2$, $P_{\text{эфф}} \approx qg/vh^3$ и, согласно (4.19),

$$\sigma_{xx} \approx \left(\frac{g}{h}\right)^3 \left(\frac{c}{H}\right)^2 \frac{g^2}{vq\tau_{\text{F}}}. \tag{4.22}$$

Нетрудно понять, как изменится ситуация при выходе на открытость по менее симметричному направлению (m, $n > 1$). В этом случае при некоторых углах $\vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_k > \vartheta_{\max}$ происходит скачкообразное удлинение замкнутых орбит, причем число k тем больше, чем больше m и n. (При $\vartheta = \vartheta_{\max}$ открытая орбита образуется в результате слияния протяженных орбит, не умещающихся в одной ячейке.) Как и в предыдущем пункте, каждое скачкообразное удлинение орбиты приводит к излому на кривой $\sigma_{xx}(\vartheta)$. При $\vartheta_k > \vartheta > \vartheta_{\max}$ справедливы выражения (4.21), (4.22).

2) Имеются открытые орбиты. В этом случае решение уравнения (4.1) путем разложения по обратному магнитному полю следует несколько модифицировать: на открытой орбите $\langle \mathbf{v}_\perp \rangle \neq 0$, и поэтому член $e\mathbf{E}\mathbf{v}_\perp$ должен быть отнесен к уравнению второго приближения (4.8).

Если все слои открытых орбит являются узкими ($\Delta \ll g$, Δ — толщина слоя), то вклад каждого слоя в проводимость имеет вид [27]

$$\sigma_{xx} = \frac{1}{3} \frac{e^2 g_y^2 \Delta^3}{h^3 D}. \tag{4.23}$$

Результат $\sigma_{xx} \sim \Delta^3 T^{-5}$ был ранее получен Кагановым, Кадигробовым и Слуцкиным [30]. В этой работе указаны и границы его применимости: при $q > \Delta$ выход из слоя осуществляется в результате одного столкновения, поэтому $\sigma_{xx} \sim \Delta T^{-3}$.

В простейшем случае, когда открытые орбиты связаны с одним направлением открытости, ширина слоя Δ определяется толщиной перемычки. Для ПФ типа плоская сетка при $\vartheta_{\max} - \vartheta \ll \vartheta_{\max} - \vartheta_{ir}$ ($\operatorname{tg}\vartheta_{ir} = (d/g)[1 - (d/g)]\sqrt{2}\cos[(\pi/4) - \varphi]$ — граница области открытых орбит при иррациональных значениях $\operatorname{tg}\varphi$), как нетрудно показать, ширина слоя открытых орбит $\Delta \approx g(\vartheta_{\max} - \vartheta)$. Воспользовавшись формулой $\sigma \approx n_{\text{эфф}} e^2 \tau_{\text{эфф}}/m$, имеем при $q \ll \Delta$

$$\sigma_{xx} \approx \left(\frac{g}{h}\right)^3 e^2 \frac{v}{g} \tau_{\text{F}} (\vartheta_{\max} - \vartheta)^3. \tag{4.24}$$

При $q \gg \Delta$, естественно, $\sigma_{xx} \sim \tau_{\text{F}}(q/g)^2(\vartheta_{\max} - \vartheta)$, что отвечает результату работы [28], полученному в приближении времени релаксации.

в) Область промежуточных магнитных полей

Как мы видели, характерные времена релаксации, определяющие электропроводность металла в области сильных магнитных полей (τ^∞) и в нулевом магнитном поле (τ^0), могут существенно отличаться. Причина такого положения состоит в том, что величина τ^0 связана с диффузионным перемещением электрона на расстояние порядка размера всей ПФ. В сильном же поле обычно необходима диффузия на значительно меньшие расстояния, так как большая часть нужного для релаксации перемещения в импульсном пространстве достигается благодаря движению электрона по орбите в магнитном поле. Вследствие этого области слабых ($\Omega\tau^0 \ll 1$) и сильных ($\Omega\tau^\infty \gg 1$) полей не смыкаются друг с другом и возникает широкая область промежуточных магнитных полей (ОПМП). Специфические механизмы релаксации проявляющиеся в этой области, могут быть выяснены в результате рассмотрения двух простейших моделей замкнутой ПФ: «одномерной» с протяженными в направлении магнитного поля перекрывающимися лунками, когда диффузией вдоль оси p_z можно в первом приближении пренебречь (п. 1)) и сферической ПФ с одной парой лунок, допускающей полное решение (п. 2)). В случае открытой ПФ проводимость определяется этими же механизмами (п. 3)).

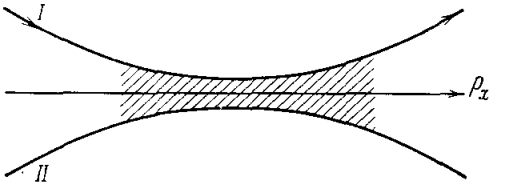

Рис. 12. Орбиты электронов вблизи лунки. Область лунки заштрихована.

1) Магнитоперебросная диффузия. Рассмотрим сначала задачу о прохождении одной лунки электроном, движущимся по орбите в магнитном поле. Поскольку диффузия по p_z не учитывается, функцию распределения можно считать зависящей только от координаты p_x, отсчитываемой вдоль касательной к траекториям I и II в лунке (рис. 12).

Пусть электронный поток величиной $p_F\Omega\psi_I(-\infty)$ входит в лунку по орбите I слева. Введем коэффициент «отражения» W, который дает долю электронов, вышедших из лунки по орбите II. Если орбиты I и II однотипны (электронные или дырочные), то по орбите II электрон может уходить в левую сторону: $\psi_{II}(-\infty) = W\psi_I(-\infty)$, $\psi_{II}(\infty) = 0$; если орбиты разнотипны, то только в правую: $\psi_{II}(\infty) = W\psi_I(-\infty)$, $\psi_{II}(-\infty) = 0$. В любом случае $\psi_I(\infty) = (1 - W)\psi_I(-\infty)$.

Процесс прохождения лунки можно описать уравнениями

$$\Omega\psi_I'(x) + \frac{1}{2}\nu_U(x)[\psi_I(x) - \psi_{II}(x)] - \nu_F\psi_I''(x) = 0, \tag{4.25}$$

$$\mp\Omega\psi_{II}'(x) + \frac{1}{2}\nu_U(x)[\psi_{II}(x) - \psi_I(x)] - \nu_F\psi_{II}''(x) = 0; \tag{4.26}$$

здесь $x = p_x/p_F$, $\nu_U(x) = 1/\tau_U(x)$, $\nu_F = 1/\tau_F$; верхний знак в (4.26) соответствует однотипным орбитам нижний — разнотипным.

В случае однотипных орбит из (4.25), (4.26) легко получить следующее уравнение для функции $\psi_s = (\psi_I + \psi_{II})/2$

$$(\Omega^2\nu_U^{-1}\psi_s' + \nu_F\psi_s')' - (\nu_F^2\nu_U^{-1}\psi_s''')' = 0. \tag{4.27}$$

При $\Omega\tau_F r_\perp \gg 1$ ($r_\perp$ — характерный размер лунки по направлению x) последним членом в (4.27) можно пренебречь. Тогда полученное уравнение описывает комбинированную диффузию электронов внутри лунки: обыч-

ную с коэффициентом диффузии $\nu_F p_F^2$ и «магнитопереброcную» с коэффициентом $\Omega^2 \nu_U^{-1}(x) p_F^2$. В результате решения этого уравнения имеем

$$W = [1 + (\Omega t_0)^{-1}]^{-1}, \quad t_0 = \frac{1}{2\Omega^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{\tau_U(x) + \nu_F \Omega^{-2}} \tag{4.28}$$

В обратном предельном случае $\Omega \tau_F r_\perp \ll 1$, как для однотипных, так и для разнотипных орбит [31]

$$W = (2 + w^{-1})^{-1}, \quad w = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} \nu_U(x)\, dx.$$

Наконец, для разнотипных орбит при $\Omega \tau_F r_\perp \gg 1$ из (4.25) и (4.26) следует

$$W = \frac{1}{2}(1 - e^{-2w}).$$

Таким образом, в случае однотипных орбит в области не сильных полей ($w \gg 1$, но $\Omega \tau_F \gg 1$) результат прохождения лунки является детерминированным ($W \approx 1$), если $\Omega \tau_F r_\perp \gg 1$, и стохастическим ($W \approx 1/2$), если $\Omega \tau_F r_\perp \ll 1$. При этом для широких лунок ($r_\perp \approx 1$) реализуется первая возможность, а для предельно узких ($r_\perp \approx q/p_F$) — только вторая. В случае разнотипных орбит результат прохождения лунки при $w \gg 1$ *всегда является стохастическим.*

Детерминированный характер движения связан с магнитопереброcной диффузией. За время прохождения лунки электрон много раз совершает переброс ($w \gg 1$). Перескакивая с одной орбиты на другую, электрон

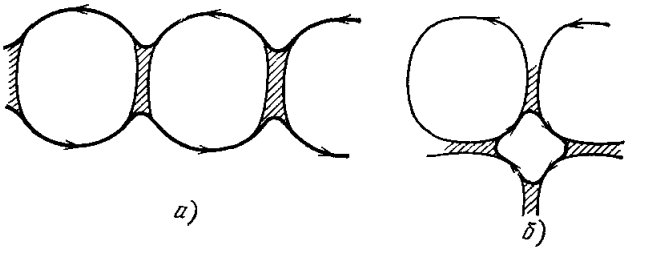

Рис. 13. Магнитопереброcная диффузия формирует эффективные открытые (*а*) или дырочные (*б*) орбиты электронов.

всякий раз изменяет направление своего движения вдоль оси x. Понятно, что такой процесс представляет собой диффузию с длиной $p_F \Omega \tau_U$ и временем τ_U элементарного шага. Начиная свой путь с левого края лунки по *орбите I, электрон с большой вероятностью не пройдет сквозь лунку,* а выйдет из нее с той же стороны, но по орбите *II*. Так обстоит дело при $\Omega \tau_F r_\perp \gg 1$, когда обычная диффузия, связанная с нормальными электрон-фононными столкновениями, мало эффективна. При $\Omega \tau_F r_\perp \ll 1$, перемещение на расстояние $r_\perp$ осуществляется быстрее благодаря обычной диффузии, чем под действием магнитного поля. Вследствие этого электрон с равной вероятностью может оказаться у любого края лунки, и возникает стохастическая ситуация.

Очевидно, что в условиях, когда результат прохождения лунки является детерминированным, возможно появление эффективно открытых траекторий электронов. Простейшим примером такой ситуации является изображенная на рис. 13, *а* цепочка электронных орбит; жирными линия-

ми показаны возникающие здесь открытые траектории, области магнитоперебросной диффузии заштрихованы.

Нетрудно понять, что величина t_0 (см. (4.28)) имеет смысл времени релаксации на открытой траектории: за это время происходит переход электрона между открытыми траекториями благодаря реализации малой вероятности прохождения лунки насквозь в процессе комбинированной диффузии. Поэтому

$$\sigma_{xx} \simeq \frac{ne^2}{mp_F} \int t_0 \, dp_z,$$

откуда

$$\sigma_{xx} \approx \frac{n_{\text{эфф}} e^2}{m} \tau, \quad n_{\text{эфф}} = nr_{\parallel}, \quad \tau^{-1} = \frac{\Omega^2}{\nu_U r_\perp} + \frac{\nu_F}{r_\perp} + \frac{\nu_F}{r_\parallel^2}. \tag{4.29}$$

Первые два члена в последней формуле обусловлены комбинированной диффузией (ν_U — частота перебросов в центре лунки). Третий член описывает не учтенный в (4.28) механизм разрушения открытой траектории: уход электрона в область замкнутых орбит вследствие диффузии по p_z ($r_\parallel$ — характерный размер лунки по этому направлению). Результат для сопротивления ρ_{yy} представлен на рис. 14, кривая *1* (принято $r_\perp \approx \approx r_\parallel \approx 1$; ОПМП в этом случае соответствует полям $\nu < \Omega < \sqrt{\nu_F \nu_U}$). ОПМП оказывается еще более широкой ($\nu_F < \Omega < \nu_U$), если имеется два не параллельных друг другу направления эффективных открытых орбит (кривая 2; изменение $\rho(H)$ в области $\nu_F < \Omega < \sqrt{\nu_F \nu_U}$ определяется относительно слабой зависимостью величин $r_\parallel$ и $r_\perp$ от магнитного поля [31]).

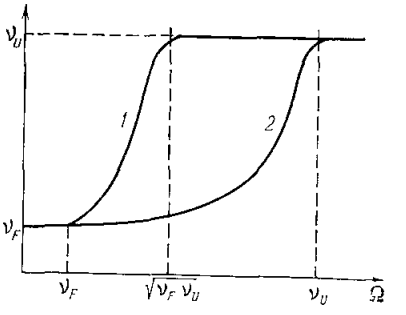

Рис. 14. Зависимость поперечного сопротивления ($\rho_{yy} ne^2/m$) в области промежуточных магнитных полей.

1 — одно направление эффективной открытости; 2 — несколько непараллельных друг другу направлений открытости.

Если лунки расположены таким образом, как это показано на рис. 13, *б*, то магнитоперебросная диффузия формирует эффективные замкнутые орбиты, отличные от тех, которые имеют место в сильном поле. Поведение сопротивления в этом случае проанализировано в [31].

Если результат прохождения лунки является стохастическим (разнотипные орбиты или сравнительно узкие лунки), поперечная проводимость определяется случайными блужданиями электрона по цепочке орбит со временем шага порядка Ω^{-1}. При этом $\sigma_{xx} \approx ne^2 r_\parallel / m\Omega$, а ОПМП определяется неравенствами $\nu_F < \Omega < \nu_U r_\perp$. Для случая предельно узких лунок аналогичные результаты были ранее получены Пиппардом [24] и Юнгом [32].

2) Сферическая поверхность Ферми. В предыдущем пункте мы ограничились случаем точного перекрытия лунок, кроме того, предполагалось, что время диффузии по направлению p_z велико в сравнении с Ω^{-1}. Оба эти ограничения могут быть сняты и получено точное в асимптотических областях решение задачи для цепочки сферических ПФ [31].

Приведем окончательный результат в виде диаграмм (рис. 15, *а*, *б*), на которых представлены области различного поведения поперечной проводимости σ_{xx}. Первая диаграмма построена в переменных $(\Omega\tau_F)^{-1}$, T при $b = 0$, вторая — в переменных $(\Omega\tau_F)^{-1}$, b при $T > T_0$. Разделяющие

области линии 1, 2, . . ., 8 задаются уравнениями

$$(\Omega\tau_F)^{-1} \approx \sqrt{\alpha\beta},\ \beta^2,\ \frac{\alpha}{\beta},\ \beta,\ \beta e^{\alpha/\beta^2},\ \ln\beta^{-1},\ \alpha\beta^{-2},\ \beta\vartheta,$$

где $\alpha = \tau_U/\tau_F$, $\beta = r_л/p_F$, $\vartheta = b/p_F$, характерный размер лунки $r_л$ несколько отличается от r_0 (см. [31]). Остальные границы областей прямые, положение которых ясно из отметок на осях. Проводимость в областях I, . . ., VIII имеет соответственно вид: — табл. I.

Области I, VII и VIII отвечают сильным, а области V и VI — слабым магнитным полям. ОПМП имеет наибольшую ширину при $T = T_0$ и $b = 0$. В области II магнитоперебросная диффузия формирует открытые орбиты,

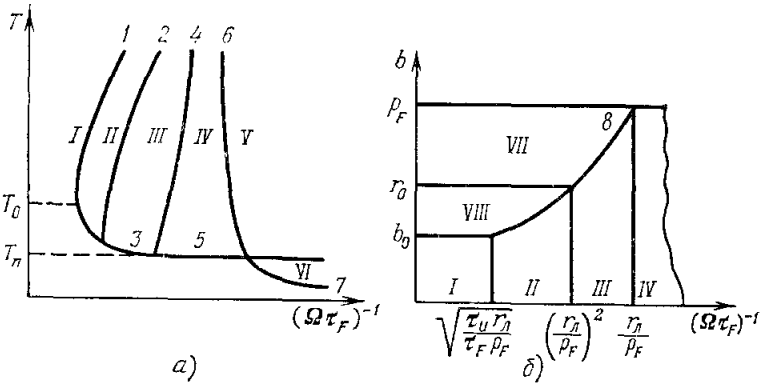

Рис. 15. *Диаграммы областей качественно различного поведения проводимости для сферической поверхности Ферми в переменных.*
а) T, $(\Omega\tau_F)^{-1}$ при $b = 0$; *б)* b, $(\Omega\tau_F)^{-1}$ при $T > T_0$ (см. табл. I).

время жизни на которых определяется диффузией электрона по направлению p_z. В области III диффузия полностью разрушает открытые орбиты, и проводимость определяется случайными блужданиями электрона вдоль цепочки замкнутых орбит со временем перескока Ω^{-1}.

Чтобы пояснить ситуацию в области IV, заметим, что на расстояниях, меньших $\delta \approx p_F(\Omega\tau_F)^{-1}$, скорость диффузионного перемещения электрона больше скорости его движения по орбите в магнитном поле. Величина δ,

Таблица I

	I	II	III	IV
$\frac{\sigma_{xx}m}{ne^2}$	$\frac{\beta^2}{\tau_U\Omega^2}$	$\tau_F\beta^3$	$\frac{\beta}{\Omega}$	$\left[\Omega^2\tau_F \ln\frac{1}{\Omega\tau_F\beta}\right]^{-1}$
	V	VI	VII	VIII
$\frac{\sigma_{xx}m}{ne^2}$	$\tau_F \ln\beta^{-1}$	$\tau_U\beta^{-2}$	$(\Omega^2\tau_F\vartheta)^{-1}$	$(\Omega^2\tau_F\vartheta^2)^{-1}\beta\sqrt{\ln\beta\vartheta^2/\alpha}$

если она превосходит $r_л$, играет роль размера лунки, так как проходящий на таком расстоянии от лунки электрон с вероятностью порядка единицы попадает в нее. На границе областей IV и V $\delta \approx p_F$.

3) Открытые поверхности Ферми. 1. Начнем с рассмотренной выше модели ПФ с узкими короткими перемычками ($l \lesssim d \ll p_F$). Результат представлен на диаграмме рис. 16 (предполагается, что $q \ll d$, l). Штриховая кривая отвечает соотношению $p_F(\Omega^*\tau_F)^{-1/2} = b$, где $\Omega^* \approx \Omega b/d$ — частота обращения по протяженной орбите ($b \ll d$). Эта

Таблица II

	I	II	III	IV	V	VI
$\frac{\sigma_{xx}m}{ne^2}$	$(\Omega^2\tau_F\vartheta)^{-1}$	$(\Omega^2\tau_F\vartheta^2)^{-1}\beta_1$	$\tau_F\beta_1^3$	$\Omega^{-1}\beta_1$	$(\Omega^2\tau_F)^{-1}\left(\ln\frac{1}{\Omega\tau_F\beta_1}\right)^{-1}$	$\tau_F\ln\frac{1}{\beta_1}$

кривая делит область II на две части, в верхней из которых проводимость испытывает осцилляции (см. п. б)), в нижней осцилляции отсутствуют. Все остальные линии на рис. 16 прямые, положение которых ясно из отметок на осях.

Проводимость в областях I, . . ., VI имеет соответственно вид (табл. II), где $\beta_1 = d/p_F$.

Сильным магнитным полям отвечает область I и, строго говоря, только верхняя часть области II. Слои орбит, отличающиеся количеством петель, имеют ширину порядка b. В нижней части области II диффузионное смещение электрона за период движения по протяженной орбите $p_F(\Omega^*\tau_F)^{-1/2} > b$, и поэтому осцилляции отсутствуют.

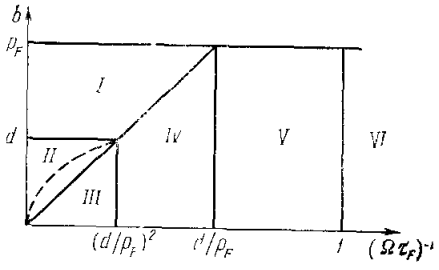

Рис. 16. Диаграмма областей качественно различного поведения проводимости в переменных b, $(\Omega\tau_F)^{-1}$ (одно направление открытости) (см. табл. II).

В области III за время $1/\Omega^*$ электрон успевает диффузионным образом выйти из слоя протяженных орбит: $p_F(\Omega^*\tau_F)^{-1/2} \gg d$. В таких условиях отличие протяженной орбиты от открытой несущественно и электропроводность определяется выражением (4.23). Правее области III выход из слоя протяженных орбит происходит уже за период Ω^{-1}. При этом, как нетрудно понять, перемычки играют такую же роль, как лунки размера d в металле с закрытой ПФ при $T > T_0$. Поэтому области IV, V на рис. 16 полностью эквивалентны областям III, IV на рис. 15. Наконец, область VI соответствует слабым полям.

2. Своеобразная ОПММП, которая возникает вблизи границы двумерной области открытых орбит, может быть проанализирована на примере модели ПФ типа «плоская сетка». При $\vartheta = \vartheta_{max}$ в определенном сечении p_{z0} имеется слой открытых орбит нулевой толщины. В сколь угодно близком сечении p_z орбиты замкнуты, но достаточно малого диффузионного смещения величиной $p_z - p_{z0}$, чтобы электрон перешел из этого сечения в соседнюю ячейку. Очевидно, что основной вклад в проводимость связан с электронами в слое $|p_z - p_{z0}| \lesssim g(\tau_F\Omega)^{-1/2} \equiv d^*$, которые через каждые полпериода обращения с одинаковой вероятностью либо переходят в соседнюю ячейку, либо остаются в исходной. В соответствии с (4.19) имеем

$$\sigma_{xx} \approx \frac{e^2g^2P_{\text{эфф}}}{m^2\Omega} \approx \left(\frac{g}{h}\right)^3 \frac{ec}{H}\frac{1}{\sqrt{\Omega\tau_F}}. \qquad (4.30)$$

Отметим, что толщина слоя открытых орбит обращается в нуль не только на границе двумерной области, но и в изолированной точке в ее центре. Выражение (4.30) для последнего случая было получено Пиппардом [24].

Легко понять, что формула (4.30) справедлива не только на самой границе, но и в интервале углов $|\vartheta - \vartheta_{max}| \ll (\Omega\tau_F)^{-1/2}$. Действительно, при $\vartheta - \vartheta_{max} \ll (\Omega\tau_F)^{-1/2}$ дополнительное диффузионное смещение $\Delta p_z = g(\vartheta - \vartheta_{max})$, необходимое для попадания электрона в соседнюю ячейку, мало по сравнению со смещением за полпериода d^*; при $\vartheta_{max} - \vartheta \ll (\Omega\tau_F)^{-1/2}$ открытых орбит, по существу, еще не возникает, поскольку электрон выходит из слоя инфинитных сечений толщиной $g(\vartheta_{max} - \vartheta)$ за время, меньшее чем Ω^{-1}. При $|\vartheta - \vartheta_{max}| \gg (\Omega\tau_F)^{-1/2}$, очевидно, справедливо приближение сильного магнитного поля.

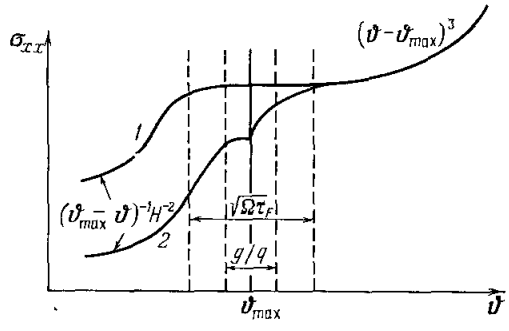

Рис. 17. Анизотропия поперечной проводимости вблизи границы двумерной области открытых орбит.
1 — случай $1 \ll \Omega\tau_F \ll (g/q)^2$, 2 — случай $\Omega\tau_F \gg (g/q)^2$.

Может показаться, что при $\vartheta = \vartheta_{max}$ стандартная асимптотика проводимости не достигается вплоть до сколь угодно сильных полей. Однако применимость выражения (4.30) ограничена диффузионным приближением, которое справедливо при $d^* \gg q$. Поэтому ОПМП на границе двумерной области углов определяется неравенствами: $1 \ll \Omega\tau_F \ll (g/q)^2$. При бóльших полях за период обращения столкновение с фононом не успевает произойти и справедливы результаты п. б). Зависимость $\sigma_{xx}(\vartheta)$ в области углов $|\vartheta - \vartheta_{max}| \ll \vartheta_{max} - \vartheta_{1r}$ изображена на рис. 17: кривая *1* — при $1 \ll \Omega\tau_F \ll (g/q)^2$, кривая 2 — при $\Omega\tau_F \gg (g/q)^2$.

Оценим, наконец, допустимую неточность в ориентации **H** относительно достаточно симметричного направления φ ($\mathrm{tg}\varphi = m/n$, $m \approx n \approx 1$), при которой результаты (4.21), (4.24) и (4.30) остаются в силе. Ограничимся для простоты диффузионным приближением. При $\vartheta - \vartheta_{max} > -(\Omega\tau_F)^{-1/2}$ поворот на угол $\Delta\varphi$ приводит к возрастанию необходимого для попадания в соседнюю ячейку диффузионного смещения на величину $g\Delta\varphi$. Эта добавка должна быть меньше хотя бы одной из величин Δp_z и d^*, откуда $\Delta\varphi \ll \vartheta - \vartheta_{max} + (\Omega\tau_F)^{-1/2}$. При $\vartheta_{max} - \vartheta > (\Omega\tau_F)^{-1/2}$ малый поворот $\Delta\varphi$ приводит к тому, что открытые орбиты становятся замкнутыми, но достаточно протяженными, длиной порядка $g(\vartheta_{max} - \vartheta)/\Delta\varphi$. Сравнивая эту величину с длиной свободного пробега на открытой орбите, получим $\Delta\varphi \ll (\Omega\tau_F)^{-1}(\vartheta - \vartheta_{max})^{-1}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уже во введении подчеркивалось, что наша цель состоит в выяснении прежде всего качественных закономерностей низкотемпературной электропроводности чистых металлов. Полученные в рамках идеализированных моделей результаты, после того как выяснен их физический смысл, позволяют проанализировать ситуацию в том или ином конкретном металле. Для детального количественного описания возможен комбинированный подход: структура функции распределения определяется из качест-

венных физических соображений, а численные параметры — из вариационного принципа (подобно тому, как это было сделано выше при рассмотрении электропроводности щелочных металлов).

По нашему мнению, особый интерес представляет экспериментальное исследование эффектов, обусловленных процессами переброса: в связи с возможностью непосредственного наблюдения U-процессов в металлах с замкнутыми ПФ (область сильных магнитных полей) и качественным изменением топологических свойств электронных орбит под влиянием магнитоперебросной диффузии (ОПМП).

В качестве не решенной еще задачи укажем на вычисление низкотемпературной электропроводности вырожденной двумерной электронной системы. Выше отмечалось, что электрон-фононные взаимодействия сами по себе не могут обеспечить равновесного состояния такой системы во внешнем электрическом поле. Это должно привести к качественному отличию в поведении электропроводности двумерных и трехмерных металлических систем. Наконец, отметим, что теплопроводность, термоэлектрические и термомагнитные явления в металлах также могут быть проанализированы на основе метода диффузионного уравнения (см. приложение 1).

Авторы благодарны М. И. Каганову, прочитавшему рукопись обзора и сделавшему ряд ценных замечаний.

ПРИЛОЖЕНИЯ

I

Как отмечалось в гл. 2, диффузионное уравнение может быть получено из кинетического путем прямого разложения по параметру q/p_F с точностью до членов второго порядка включительно. Ниже на таком пути будет доказана независимость функции распределения главного приближения от энергии (в отсутствие градиента температуры), а также определен вид этой функции и получено диффузионное уравнение для задачи теплопроводности металла.

1. Введем в импульсном пространстве некоторую криволинейную систему координат: одной из них является энергия, две другие указывают положение точки на изоэнергетической поверхности (эти координаты будут отмечаться векторным индексом $\mathbf{p}$: $\chi_{\mathbf{p}}(\varepsilon)$). Запишем результат разложения оператора столкновений по степеням параметра q/p_F в виде: $\hat{I}^e = \hat{I}^{(0)} + \hat{I}^{(1)} + \hat{I}^{(2)} + \ldots$

Наиболее существенной для дальнейшего является структура оператора $\hat{I}^{(0)}$

$$\hat{I}^{(0)}\chi_{\mathbf{p}}(\varepsilon) = -\int d\varepsilon' K_{\mathbf{p}}(\varepsilon, \varepsilon')[\chi_{\mathbf{p}}(\varepsilon) - \chi_{\mathbf{p}}(\varepsilon')], \tag{I.1}$$

причем $K_{\mathbf{p}}(\varepsilon, \varepsilon') = K_{\mathbf{p}}(\varepsilon', \varepsilon)$, $K_{\mathbf{p}}(\varepsilon, \varepsilon') > 0$. По этим причинам однородное уравнение $\hat{I}^{(0)}\chi = 0$ имеет единственное нетривиальное решение $\chi = C_{\mathbf{p}}$ ($C_{\mathbf{p}}$ — не зависящая от энергии произвольная функция поверхностных переменных) и для любой функции $\chi_{\mathbf{p}}(\varepsilon)$

$$\int \hat{I}^{(0)}\chi \, d\varepsilon = 0. \tag{I.2}$$

Отметим, что в задаче имеется еще один малый параметр: $s/v \ll 1$. Можно, в частности, показать, что учет неравновесности фононов (т. е. функции $\Phi_{\mathbf{q}}$) приводит в операторе $\hat{I}^{(0)}$ к поправке пропорциональной $(s/v)^2$, которой можно пренебречь. В этом приближении

$$K_{\mathbf{p}}(\varepsilon, \varepsilon') = \frac{4\pi}{\hbar h^3 v}\left[\int_0^{2\pi} d\varphi \frac{M_{\mathbf{p}}(\mathbf{e})}{s^3(\mathbf{e})}\right]_{\mathbf{e}=0}\left(-\frac{dN}{d\omega}\right)\omega^2 \, |n_\varepsilon - n_{\varepsilon'}|, \tag{I.3}$$

где $\omega = \varepsilon - \varepsilon'$.

Укажем без доказательства некоторые свойства оператора $\hat{I}^{(1)}$.

Если выделить в этом операторе части разного порядка по параметру s/v: $\hat{I}^{(1)} = I_0^{(1)} + I_1^{(1)}$, $I_1^{(1)} \sim s/v$, то $\hat{I}_0^{(1)} C_{\mathbf{p}} = 0$ и для любой функции χ $\int \hat{I}_0^{(1)} \chi \, d\varepsilon = 0$. Кроме того,

$$\int \hat{I}^{(1)} C_{\mathbf{p}} \, d\varepsilon = 0. \tag{I.4}$$

Применяя к кинетическому уравнению (1.2) метод последовательных приближений, имеем ($\chi = \chi^{(0)} + \chi^{(1)} + \ldots$)

$$\hat{I}^{(0)} \chi^{(0)} = 0, \tag{I.5}$$

$$\hat{I}^{(0)} \chi^{(1)} + \hat{I}^{(1)} \chi^{(0)} = 0, \tag{I.6}$$

$$\hat{I}^{(0)} \chi^{(2)} + \hat{I}^{(1)} \chi^{(1)} + \hat{I}^{(2)} \chi^{(0)} = e\mathbf{E} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}}. \tag{I.7}$$

Полевой член не может быть отнесен к уравнениям (I.5) и (I.6), так как иначе эти уравнения оказались бы неразрешимыми вследствие уравнений (I.2), (I.4).

Как уже отмечалось, единственным нетривиальным решением уравнения (I.5) является $\chi^{(0)} = C_{\mathbf{p}}$. Таким образом, независимость функции главного приближения от энергии доказана. Зависимость функции $\chi^{(0)}$ от поверхностных переменных может быть установлена из условия разрешимости уравнения (I.7) (член $\hat{I}^{(1)} \chi^{(1)}$ мал по параметру s/v)

$$\int \hat{I}^{(2)} \chi^{(0)} \, d\varepsilon = \int e\mathbf{E} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{p}} \, d\varepsilon. \tag{I.8}$$

Это соотношение эквивалентно диффузионному уравнению (2.5).

2. Основное отличие низкотемпературного разложения для задачи теплопроводности металла состоит в том, что в этом случае крайне важной становится энергетическая зависимость функции распределения χ.

Запишем кинетическое уравнение в виде *)

$$\hat{I}^{e} \chi = \mathbf{v} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{r}}. \tag{I.9}$$

В низшем по q/p_{F} и $T/\varepsilon_{\mathrm{F}}$ приближении имеем ($\mathbf{v}_{\mathrm{F}}$ — скорость на ПФ)

$$\hat{I}^{(0)} \chi^{(0)} = -\frac{\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{F}}}{T} \mathbf{v}_{\mathrm{F}} \nabla T \frac{dn}{d\varepsilon}. \tag{I.10}$$

Это уравнение разрешимо, поскольку интеграл по ε от его правой части равен нулю. Решение можно представить в виде $\chi^{(0)} = \varphi_{\mathbf{p}}(\varepsilon) + C_{\mathbf{p}}$, где $\varphi_{\mathbf{p}}(\varepsilon)$ — нечетная функция $\varepsilon - \varepsilon_{\mathrm{F}}$, а $C_{\mathbf{p}}$ — произвольная функция поверхностных переменных. Вычисления, во многом аналогичные изложенным в гл. 2, приводят к следующему диффузионному уравнению для функции $C_{\mathbf{p}}$:

$$\operatorname{div} \hat{D} (\nabla C - \mathbf{a} \{\nabla C\}) = \nabla T \left(\mathbf{n} \frac{d\mu}{dT} + \frac{\pi^2}{3} T \mathbf{n} \frac{\mathcal{R}_1^{-1} + \mathcal{R}_2^{-1}}{v} + \frac{\pi^2}{3} T \mathbf{n}' \right) + \operatorname{div} \mathbf{Q}, \tag{I.11}$$

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{p}} = \int \left\{ \hat{P}_{\mathbf{p}} \psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}) - \frac{D_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}) \, \delta(\mathbf{e}\mathbf{n}_{\mathbf{p}})}{\alpha(\mathbf{e})} \int \psi_{\mathbf{p}'}(\mathbf{e}) \, dS_{\mathbf{p}'} \right\} dO_{\mathbf{e}},$$

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{e}) = \frac{4\pi M_{\mathbf{p}}(\mathbf{e})}{\hbar h^3 v_{\mathbf{p}}^3 s^3(\mathbf{e})} \delta'(\mathbf{e}\mathbf{n}_{\mathbf{p}}) \, \mathbf{e} \int_0^\infty \omega^3 \frac{dN}{d\omega} (n_\varepsilon - n_{\varepsilon+\omega}) \, \varphi_{\mathbf{p}}(\varepsilon) \, d\varepsilon \, d\omega;$$

здесь $\mu(T)$ — химический потенциал, $\mathcal{R}_{1,2}$ — главные радиусы кривизны ПФ в точке $\mathbf{p}$, $\mathbf{n}' = (\partial/\partial\varepsilon) \, \mathbf{n}_{\mathbf{p}}(\varepsilon)_{\varepsilon=\varepsilon_{\mathrm{F}}}$. Отметим, что все слагаемые в правой части уравнения (I.11) одного порядка: $\nabla T \, T/\varepsilon_{\mathrm{F}}$.

Поясним смысл полученных соотношений. Неоднородный член $X = \mathbf{v} \, \partial n/\partial \mathbf{r}$ в кинетическом уравнении (I.9) естественно представить в виде $X = X_1 + X_2$, выде-

*) В этом уравнении не выписан член с электрическим полем, так как реакция системы на электрическое поле рассмотрена выше. Кроме того, в кинетическом уравнении для фононов опущен член $\mathbf{s} \, \partial N/\partial \mathbf{r}$, поскольку эффект увлечения электронов фононами в металлах при достаточно низких температурах мал.

лив антисимметричное по энергии слагаемое X_1: $\int X_1\, d\varepsilon/v = 0$, $X_2 \approx (T/\varepsilon_F)\, X_1$. Реакция системы на возмущение X_1 описывается уравнением (I.10) и характеризуется энергетическим временем релаксации $\tau' \sim T^{-3}$. С другой стороны, неравновесность, связанная с X_2, не может быть устранена за одно столкновение; ее релаксация описывается диффузионным уравнением (I.11), правая часть которого содержит $\int X\, d\varepsilon/v$. Слагаемое div $\mathbf{Q}$ в (I.11) связано с тем обстоятельством, что при изменении энергии электрон перемещается также и вдоль ПФ.

II

Рассмотрим уравнение

$$\eta - \mathbf{a}\{\eta\} = \hat{D}^{-1}\psi, \tag{II.1}$$

где $\eta \equiv \nabla\chi$, а вектор ψ подчиняется условию (2.8). Выясним два вопроса: 1) единственность решения соответствующего (II.1) однородного уравнения, 2) сходимость итерационной процедуры при решении уравнения (II.1).

1. Легко показать, что интегральное ядро уравнения (II.1) обладает свойством

$$\int A^{ik}_{\mathbf{pp}'}\, dS_{\mathbf{p}'} = \delta_{ik}. \tag{II.2}$$

Воспользовавшись этим, запишем однородное уравнение $\eta - \mathbf{a}\{\eta\} = 0$ в виде

$$\int \hat{A}_{\mathbf{pp}'}(\eta_{\mathbf{p}} - \eta_{\mathbf{p}'})\, dS_{\mathbf{p}'} = 0. \tag{II.3}$$

Домножим последнее уравнение на вектор $\hat{D}_{\mathbf{p}}\eta_{\mathbf{p}}$ и проинтегрируем по всей ПФ. Учитывая, что $\hat{D}_{\mathbf{p}}\hat{A}_{\mathbf{pp}'} = \hat{D}_{\mathbf{p}'}\hat{A}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}$, получим

$$\int \frac{D_{\mathbf{p}}(\mu)\, D_{\mathbf{p}}(\mu)}{\alpha(\mu)\, |\mathbf{n}_{\mathbf{p}} \times \mathbf{n}_{\mathbf{p}'}|}\, [(\eta_{\mathbf{p}} - \eta_{\mathbf{p}'})\, \mu]^2\, dS_{\mathbf{p}}\, dS_{\mathbf{p}'} = 0. \tag{II.4}$$

Подынтегральное выражение в (II.4) неотрицательно. Приняв, что при всех $\mathbf{p}$ и μ $D_{\mathbf{p}}(\mu) \neq 0$, имеем

$$(\eta_{\mathbf{p}} - \eta_{\mathbf{p}'})\, \mu = 0. \tag{II.5}$$

Имеет ли уравнение (II.5) какое-либо нетривиальное решение, кроме дрейфового? Пусть в точках $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ таких, что $\mathbf{n}_1 \neq \pm\mathbf{n}_2$, функция η имеет значения η_1 и η_2. Из (II.5) следует, что из четырех компонент векторов η_1 и η_2 три можно выбирать независимо: компоненты, параллельные вектору $\mu_{12} \sim \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$, равны. Очевидно, что эти два вектора можно записать как проекции некоторого трехмерного вектора $\mathbf{u}$ на ПФ в точках $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$: $\eta_1 = (\mathbf{u}_{\parallel})_1$ и $\eta_2 = (\mathbf{u}_{\parallel})_2$, причем вектор $\mathbf{u}$ определен этими соотношениями однозначно. Рассмотрим еще некоторую точку $\mathbf{p}_3$ на ПФ, такую, что орты $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_3$ не лежат в одной плоскости. Если записать $\eta_3 = (\mathbf{u}_{\parallel})_3 + \delta\eta_3$, то для $\delta\eta_3$ из (II.5) получаем: $\delta\eta_3\mu_{13} = \delta\eta_3\mu_{23} = 0$, откуда $\delta\eta_3 = 0$, так как векторы μ_{13} и μ_{23} непараллельны. Наконец, если выбрать точку $\mathbf{p}_4$ такую, что $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ и $\mathbf{n}_4$ лежат в одной плоскости, то для доказательства равенства $\eta_4 = (\mathbf{u}_{\parallel})_4$ вместо векторов η_1 и η_2 можно использовать векторы η_1 и η_3.

Итак, доказано, что если на ПФ можно найти три точки с нележащими в одной плоскости нормалями, то однородное уравнение $\eta = \mathbf{a}\{\eta\}$ имеет только дрейфовое решение и, следовательно, неоднородное уравнение (II.1) разрешимо при любом ψ, удовлетворяющем условию (2.8).

Исключением, таким образом, является цилиндрическая ПФ. В этом случае общее решение однородного уравнения (II.3) имеет вид: $\eta = \mathbf{u} + \eta_{\perp}$, где $\mathbf{u}$ — дрейф в направлении образующих цилиндрической поверхности, а $\eta_{\perp}$ перпендикулярно $\mathbf{u}$ и произвольным образом зависит от координаты, измеряемой в направлении, перпендикулярном образующим (учтено, что rot $\eta = 0$). Условие разрешимости неоднородного уравнения (II.1) может быть представлено в виде

$$\int \hat{D}(\mathbf{u} + \eta_{\perp})\, \hat{D}^{-1}\psi\, dS = \int (\mathbf{u}\psi + \eta_{\perp}\psi)\, dS = 0.$$

Отсюда ввиду произвола дрейфа $\mathbf{u}$ и функции $\eta_{\perp}$ следует, что $\psi \equiv 0$. Но, с другой стороны, ψ должно удовлетворять уравнению: div $\psi = -e\mathbf{E}\mathbf{n}$. Поэтому в случае цилиндрической ПФ диффузионное уравнение (II.1) неразрешимо.

2. Заметим, что собственные функции η_i интегрального оператора $\mathbf{a}$ образуют полный набор и удовлетворяют условиям ортогональности

$$\langle \eta_i \mid \eta_k \rangle \equiv \int \eta_i \hat{D} \eta_k \, dS = \delta_{ik}.$$

Это следует из того факта, что уравнение $\mathbf{a}\{\eta_i\} = \lambda_i \eta_i$, переписанное для функций $\varkappa_i = \sqrt{\hat{D}}\eta_i$ в виде $\sqrt{\hat{D}}\mathbf{a}\{\sqrt{\hat{D}^{-1}}\varkappa_i\} = \lambda_i \varkappa_i$, обладает симметричным ядром $\sqrt{\hat{D}_{\mathbf{p}}}\hat{A}_{\mathbf{pp'}}\sqrt{\hat{D}_{\mathbf{p'}}^{-1}}$.

Теперь легко показать, что n-й член итерационного ряда для решения уравнения (II.1) имеет вид

$$\eta^{(n)} = \sum_{i>1} \lambda_i^n C_i \eta_i, \quad C_i = \langle \eta_i \mid \hat{D}^{-1}\psi \rangle.$$

Дрейфовая функция $\eta_1 = \mathbf{u}_{\parallel}$ с $\lambda_1 = 1$ не участвует в разложении, так как вследствие условия разрешимости (2.9) $C_1 = 0$. Таким образом, итерационная процедура сходится при условии, что для всех $i > 1$ собственные значения $\lambda_i < 1$. Для доказательства последнего утверждения заметим, что величина $\langle \eta \mid \eta - \mathbf{a}\{\eta\} \rangle$, записанная в левой части уравнения (II.4), существенно положительна при любом η, не являющемся решением однородного уравнения (II.3). Если учесть, что уравнение (II.3) не имеет других решений, кроме η_1, то при $i > 1$ имеем

$$\langle \eta_i \mid \eta_i - \mathbf{a}\{\eta_i\} \rangle = 1 - \lambda_i > 0.$$

Физико-технический институт низких температур
АН УССР, Харьков

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Bloch F.— Zs. Phys., **1928**, v. 52, p. 555; **1930**, v. 59, 208.
2. Peierls R.— Ann. Phys., **1930**, v. 4, p. 121; **1932**, v. 12, p. 154.
3. Berman R.— Zs. Phys. Chem., **1958**, Bd. 16, S. 10.
4. Займан Дж. *Электроны и фононы.— М.: ИЛ, 1962.*
5. Каган Ю. М., Жернов А. П.— ЖЭТФ, **1971**, т. 50, с. 1107.
6. Каган Ю. М., Флеров В. Н.— Ibid., **1974**, т. 66, с. 1374.
7. Zhernov A. P., Kagan Yu. M. Preprint IAE-3041.— Moscow, 1978.
8. Бете Г., Зоммерфельд А. Электронная теория металлов.— М; Л., 1938.— Возможность низкотемпературного разложения обсуждалась также в работе: Supek J.— Nuovo Cimento, **1959**, v. 12, p. 250.
9. Klemens P. G., Jackson J. L.— Physica, **1964**, v. 30, p. 2031.
10. Гуржи Р. Н., Копелиович А. И.— Письма ЖЭТФ, **1971**, т. 13, с. 569; ЖЭТФ, **1971**, т. 61, с. 2514.
11. Гуржи Р. Н.— УФН, **1968**, т. 94, с. 689.
Гуржи Р. Н., Конторович В. М.— ЖЭТФ, **1968**, т. 55, с. 1105; ФТТ, **1969**, т. 11, с. 3109.
12. Гантмахер В. Ф., Гаспаров В. А.— ЖЭТФ, **1973**, т. 64, с. 1712.
13. Гаспаров В. А.— Ibid., **1975**, т. 68, с. 2259.
14. Woods S. B.— Can. J. Phys., **1956**, v. 34, p. 223.
15. Цой В. С., Гантмахер В. Ф.— ЖЭТФ, **1969**, т. 56, с. 1232.
16. Ekin J. W., Maxfield B. W.— Phys. Rev. Ser. B, **1971**, v. 4, p. 4215.
17. Гуржи Р. Н., Копелиович А. И.— ЖЭТФ, **1973**, т. 64, с. 380.
18. Жернов А. П., Пашаев Х. М.— ФММ, **1975**, т. 40, с. 471.
19. Ziman J. M.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, **1954**, v. 226, p. 436.
20. Bailyn M., Brooks H.— Bull. Am. Phys. Soc. Ser. II, **1956**, v. 1, p. 300
21. Kaveh M., Wiser N.— Phys. Rev., **1974**, v. 9, p. 4042, 4053.
22. Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов.— М.: Наука, 1971.
23. Аванесян Г. Т., Каганов М. И.— ЖЭТФ, **1972**, т. 63, с. 1472.
24. Pippard A. B.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, **1968**, v. 305, p. 291.
25. Гуржи Р. Н., Копелиович А. И.— Письма ЖЭТФ, **1974**, т. 19, с. 630; ЖЭТФ, **1974**, т. 67, с. 2307.
26. Копелиович А. И., Моргун В. Н.— ФНТ, **1978**, т. 4, с. 163.
27. Гуржи Р. Н., Копелиович А. И.— ЖЭТФ, **1976**, т. 71, с. 635.
28. Лифшиц И. М., Песчанский В. Г.— ЖЭТФ, **1958**, т. 35, с. 1251.
29. Алексеевский И. Е., Гайдуков Ю. П., Лифшиц И. М., Песчанский В. Г.— ЖЭТФ, **1960**, т. 39, с. 1201.
30. Каганов М. И., Кадигробов А. М., Слуцкин А. А.— ЖЭТФ, **1967**, т. 53, с. 1135.
31. Гуржи Р. Н., Копелиович А. И.— ФНТ, **1977**, т. 3, с. 1143.
32. Joung R. A.— Phys. Rev., **1968**, v. 175, p. 813.