1980 г. Сентябрь *Том 132, вып. 1*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

ИЗ ИСТОРИИ ФИЗИКИ

530.12 (09)

ЕДИНЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ*)

П. Бергман

Большая часть жизни Эйнштейна была посвящена поискам теории, объединяющей поле тяготения и другие поля в обобщенную геометрическую схему, вытекающую из общей теории относительности.

Вдохновлявшая Галилея, Ньютона, Эйнштейна и Бора в их попытках познать природу вера в то, что разнообразие физических явлений может быть описано едиными принципами, лежит в основе единых теорий поля. На ранних этапах, в отсутствие физических фактов, могущих придать им должное направление, поиски единых теорий опирались в основном на геометрические идеи. В последние годы квантовая физика и теория элементарных частиц породили новые направления, некоторые из них, может быть, приведут к успеху. Прежде чем мы будем обсуждать это новейшее развитие, напомним о некоторых предпосылках теории.

ПРОВОЗВЕСТИЕ

После геометрической интерпретации частной теории относительности Германом Минковским [1] соотношение между полями физических сил и пространством-временем казалось непосредственным. Частицы описывают траектории в четырехмерном пространственно-временном континууме, а поля следует понимать как совокупности функций четырех пространственно-временных координат, скажем, x, y, z и t. Само пространство-время наделяется неизменным свойством — метрикой Минковского, которая приписывает каждой паре точек в пространстве-времени («событиям», локализованным как в пространстве, так и во времени) не зависящий от выбора лоренцевых координат «интервал».

Физическая теория лоренц-инвариантна (или, в современной терминологии,— пуанкаре-инвариантна), если динамические законы, описываемые, предположительно, системами дифференциальных уравнений, имеют одинаковый вид во всех возможных лоренцевых системах координат. Преобразования Лоренца, или преобразования Пуанкаре, определяются как переходы между произвольными четырехмерными системами координат, в которых интервал имеет стандартный вид

$$\tau^2 = c^2\Delta t^2 - (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2). \quad (1)$$

*) Bergmann Peter G., Unitary Field Theories.— Physics Today, 1979, v. 32, No 3. pp. 44—51.— Перевод Н. Н. Николаева.

П. Г. Бергман — профессор физики Сиракузского университета, штат Нью-Йорк, США.

С появлением в 1916 г. общей теории относительности соотношение между структурой пространства-времени и физическими полями претерпело глубокое изменение. Имевшееся ранее четкое различие между геометрией пространства-времени, в котором движутся частицы, и полями, воздействующими на движение частиц, стало более расплывчатым. Физической

В своей лекции 1931 г. Эйнштейн описывает, как общая теория относительности интерпретирует гравитационные поля как следствие кривизны пространства-времени, описываемой тензором R_{ik}(фото Браун Бразерс).

причиной этого было то, что в присутствии гравитационных полей все электронейтральные и немагнитные массивные тела движутся по траекториям, зависящим только от начальных положения и скорости, но не от масс тел («принцип эквивалентности»). Эйнштейн осознал значение этого принципа и для физического определения и интерпретации геометрии пространства-времени. Многообразие возможных в поле тяготения траекторий напоминало, по крайней мере локально, многообразие траекторий, следующих в отсутствие внешних сил из закона инерции Ньютона, гласящего, что в отсутствие внешних сил частицы распространяются прямолинейно с постоянными скоростями. Но если в ньютоновской физике, да и в физике

Эйнштейна — Минковского четырехмерные координатные системы (системы отсчета), в которых выполняется закон инерции, могут быть введены сразу во всей физической Вселенной, то теперь координатные системы, где траектории свободно падающих тел являются прямыми, могут быть введены только локально. Такие локальные системы отсчета можно назвать свободно-падающими системами отсчета. Любая попытка связать их в единую глобальную инерциальную систему отсчета обречена на провал, и именно эта невозможность отличает гравитационное поле от пространства-времени без тяготения.

Представление о необходимости замены глобальных инерциальных систем отсчета, определенными только локально свободно падающими системами, лежит в основе общей теории относительности. В этой теории понятие интервала по-прежнему сохраняется, но он определен только для бесконечно близких пар точек:

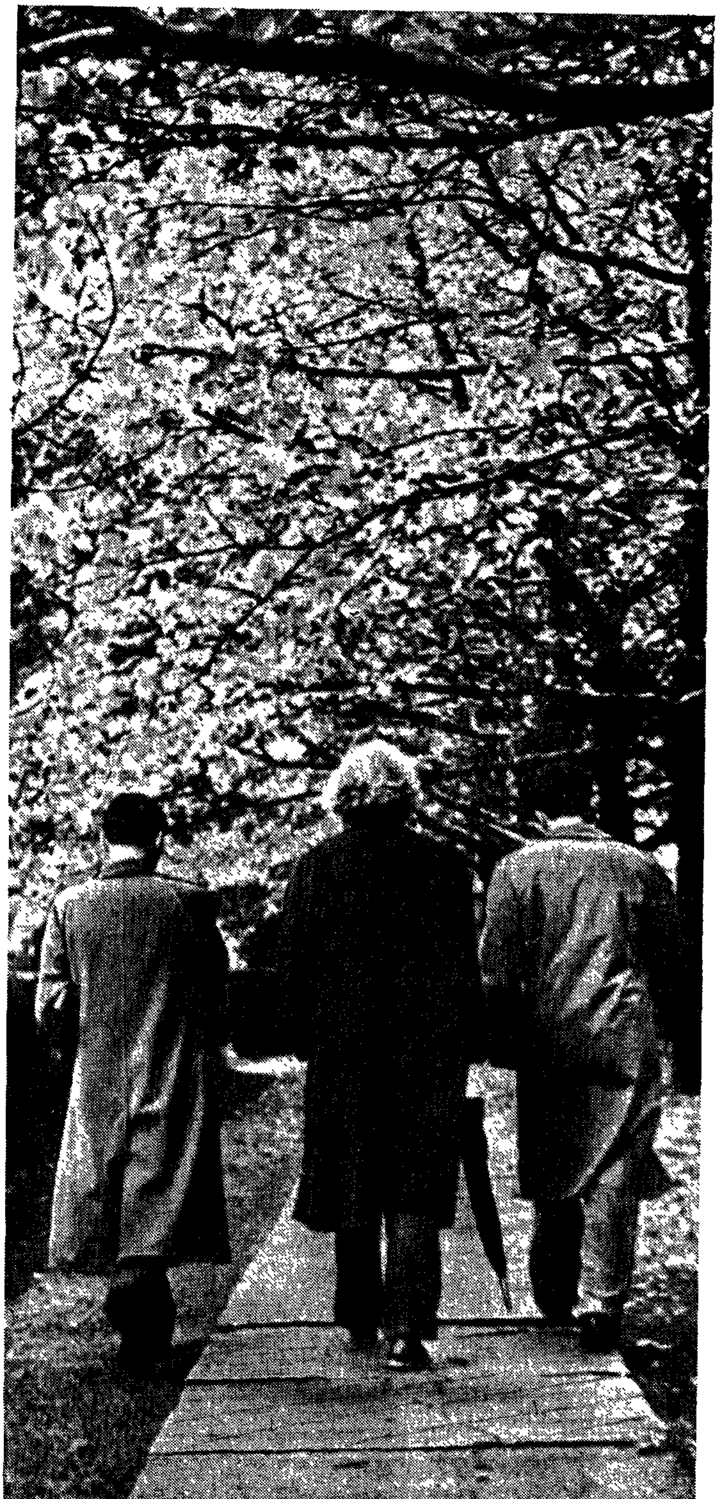
$$d\tau^2 = \sum_{\mu,\,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu. \tag{2}$$

Коэффициенты $g_{\mu\nu}$ теперь не константы. Они становятся полями, зависящими от пространственно-временных координат. И сами координаты становятся определенными менее жестко, чем координаты в частной теории относительности. Аналога преобразований Пуанкаре не сохраняется. Теперь от координатной системы и ее связей с другими координатными системами требуется только однозначное, непрерывное и дифференцируемое соответствие с точками, образующими пространственно-временно́й континуум.

Появившиеся в уравнении (2) метрические коэффициенты $g_{\mu\nu}$ являются полями. Их зависимость от четырех пространственно-временных координат характеризует внутренние геометрические свойства пространственно-временного континуума. Например, оказывается, что в некотором поле, отождествляемом физически с создаваемым изолированной массой (поле Шварцшильда), наиболее близкие к прямой линии траектории (геодезические), замкнуты в пространстве (спирали в пространстве-времени) и явля- являются приближенно эллиптическими. Таким образом, коэффициенты $g_{\mu\nu}$ ются потенциалами физического поля — поля тяготения. Эта двойственная роль $g_{\mu\nu}$ — быть физическим потенциалом и описывать геометрию — является важнейшей чертой общей теории относительности.

Эйнштейн[2] сформулировал дифференциальные динамические уравнения, описывающие гравитационные поля и обобщающие закон Ньютона квадрата обратных расстояний для сил тяготения. В общей теории относительности динамические уравнения должны иметь один и тот же вид в любой произвольно выбранной системе координат, т. е. быть общековариантным. Полевые уравнения являются существенно нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных для метрических коэффициентов $g_{\mu\nu}$.

Источниками гравитационного поля являются массы, движение тел и натяжения; для электромагнитного поля аналогичными источниками являются заряды и токи. Все физические поля, отличные от самого гравитационного поля, дают вклад в источники гравитационного поля в правой части уравнений Эйнштейна. Уравнения для всех физических полей содержат в свою очередь в качестве коэффициентов гравитационные потенциалы $g_{\mu\nu}$, так что гравитационные и негравитационные поля связаны и взаимодействуют друг с другом. И все же они входят в теорию несимметричным образом. Нелинейность уравнений гравитационного поля, в силу связи между гравитационным и остальными полями означает, что никакие линейные законы не могут быть общековариантными.



Валентин Баргманн, Эйнштейн и Петер Бергман на прогулке по университетскому городку Принстона. Они выполнили несколько совместных работ по единым теориям поля (фото Люсьена Эгнера)

В общей теории относительности гравитационное поле является единственным физическим полем, связанным непосредственно с геометрической структурой пространства-времени. Для остальных полей эта связь только косвенная, посредством их связи с гравитационным полем. Физически это отсутствие симметрии оправдывается тем, что частицы подчиняются

Герману Вейлю принадлежат многочисленные труды по математической физике, включая обобщение римановой геометрии (набросок Элизабет П. Корн).

не зависящим от их внутренних характеристик законам движения (т. е. движутся по геодезическим), только если они не связаны, посредством электрического заряда или как-то еще, с негравитационными полями. Следует признать, что это различие в известной мере предопределено.

Выделенная роль гравитационного поля среди всех других физических полей обусловлена тем, что в уравнение (2), описывающее геометрию пространства-времени, входят одни только гравитационные потенциалы. Возможно, что различные определения того, что понимается под словами «геометрия пространства-времени», могут привести к различным результатам. Но неизменно одно свойство, отличающее поле тяготения от всех остальных полей. Именно, если в качестве константы связи частицы с гравитационным полем принимается ее масса, подобно тому как электрический заряд принимается константой связи с электромагнитным полем, то из всех мыслимых констант связи только масса не влияет на кинематику движения частицы. Частицы с различными массами движутся в гравитационном поле по одной и той же траектории, в то время как частицы с различными зарядами движутся в электрическом поле по различным траекториям. Было бы точнее сказать, что частицы с разными зарядами двигались бы по совпадающим траекториям, если бы имели одинаковые отношения заряда к массе.

Почти с самого зарождения общей теории относительности предпринимались попытки построить теории, в которых все физические поля, и гравитационное и негравитационные,— играли бы одинаковую роль и поддавались бы геометрической интерпретации. Поэтому такие теоретические построения были названы едиными теориями поля. Эйнштейн и сам неустанно, с начала 1920-х годов до конца своей жизни, занимался поисками по-настоящему удовлетворительной теории поля. В ходе подобных попыток как Эйнштейна, так и многих других, сам смысл понятий «геометрия» и «объединение» претерпел много тонких изменений.

МНОГООБРАЗИЯ

Понятие многообразия лежит в основе многих формулировок того, что называется «геометрией». В топологии многообразием называется бесконечная совокупность элементов, называемых точками, обладающая многими локальными свойствами обычного n-мерного пространства. Точки многообразия можно отождествить с наборами n вещественных значений их координат так, что точки с численно близкими координатами будут находиться в окрестности друг друга. Может оказаться, что нельзя использовать единую систему координат для всего многообразия, но можно накрыть многообразие перекрывающимися «клочками» координатных сетей. Например, поверхность сферы является двумерным многообразием. Не существует способа накрыть всю сферу одной несингулярной координатной сеткой. Но можно взять две сетки с центрами в северном и южном полюсах, простирающиеся каждая за экватор. В тропиках будет область перекрытия, в пределах которой каждая точка может быть описана как северными, так и южными координатами (Между прочим, обычные долгота и широта непригодны на полюсах в том смысле, что одной и той же точке отвечает бесконечный набор долгот.).

Многообразие далеко не самая общая модель топологического пространства. Но оно довольно близко к тому, что понимается интуитивно под пространством и оказывается полезным и достаточно широко известным понятием. На многообразиях можно задать всевозможные геометрические структуры, описывающие их «геометрические» свойства.

Пример такой структуры — метрика, приписывающая участкам кривых длину дуги согласно уравнениям (1) и (2). На всех дифференцируемых многообразиях (многообразиях, на которых перекрывающиеся координатные сетки таковы, что уравнения перехода от одной сетки к другой дифференцируемы) можно построить векторные поля, состоящие в каждой точке из векторов, касательных к проходящим через эту точку кривым. Метрика наделяет каждый вектор нормой: квадратичной функцией компонент вектора. Можно сказать, что общая теория относительности построена на наделенном метрикой многообразии. Многообразия с метрической структурой называются римановыми многообразиями. Даже если в каждой точке многообразия определены векторы, априори это не означает существования какой-либо связи между векторами в соседних точках. Можно назвать произвольный вектор в одной точке «соответствующим» данному вектору в другой точке. На такое соответствие следует наложить некоторые естественные требования, важнейшее из которых — совместность закона соответствия для параллельных векторов с законом векторного сложения. Как только правила соответствия определены для векторов

Бергман и Эйнштейн за работой в кабинете Эйнштейна в начале 1938 г., когда они активно занимались попытками построения единых теорий поля (фото Лотте Якоби).

в соседних точках, они могут быть продолжены непрерывно для векторов вдоль кривой, поточечно приближая кривую ломаной. Если многообразие наделено как метрикой, так и законом соответствия векторов в соседних точках (аффинной связностью), то две различные структуры могут быть сопоставлены друг другу требованием равенства норм соответственных векторов.

Что происходит при смещении вектора вдоль замкнутой кривой, следуя принятому закону соответствия? В общем случае после возвращения в начальную точку получающийся вектор не совпадает с начальным вектором, а аффинная связность неинтегрируема. Мерой неинтегрируемости является кривизна (аффинная). Метрика и аффинная связность являются примерами геометрических структур, которые можно определить на многообразии.

Геометрами изучено много и других структур как, например, симплектическая структура фазового пространства, играющая столь важную роль в гамильтоновой механике. По-видимому, немало и других могущих оказаться полезными структур, до которых еще просто никто не додумался. В большинстве единых теорий поля постулируются структуры, которые, по той или иной причине, считаются поддающимися физической интерпретации.

РАССЛОЕНИЯ

Геометрические структуры многих типов могут быть описаны как расслоения. Расслоения стали популярны среди физиков после того как более двадцати лет назад Янг Чженьнин и Роберт Л. Миллс использовали их для описания изотопического спина, хотя математикам расслоения были известны задолго до этого. В данном многообразии типа пространства-времени, называемом базисным многообразием, к каждой точке приписываются новые многообразия. Эти приписанные многообразия, все эквивалентные друг другу, образуют слои. Они могут иметь произвольную размерность, отличную от размерности базисного многообразия. Каждый слой можно подвергнуть отображению сам в себя, сохраняющему все существенные свойства слоя. В интересующем нас случае метрического многообразия в каждой точке можно построить набор взаимно перпендикулярных единичных векторов, могущий служить базисом для всех векторов в данной точке. В каждой точке эти базисные векторы можно вращать, получая отображения соответствующих векторных пространств само в себя. Для данного слоя и его разрешенных отображений само в себя можно ввести связность, устанавливающую соответствие между слоями в соседних точках. В общем случае эта связность неинтегрируема.

Примером хорошо известного в квантовой механике расслояния является волновая функция, определенная на конфигурационном пространстве в качестве базисного многообразия. Пучки образуются всеми комплексными значениями, которые волновая функция может принимать в каждой точке. Поскольку прямой физический смысл имеет только квадрат модуля волновой функции, то можно помножать волновую функцию на любой комплексный множитель с равным единице модулем, выбирая этот множитель в разных точках различным. Но и фаза волновой функции существенна, например, при построении оператора канонического импульса. Поэтому необходимо правило распознавания «той же самой фазы» в соседних точках. Для волновой функции заряженной частицы это должно быть правило вида

$$i\hbar\nabla\psi+\frac{e}{c}\,\mathbf{A}\psi=0,\quad i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}-e\Phi\psi=0, \tag{3}$$

где $\mathbf{A}$ и Φ — векторный и скалярный потенциалы. Если волновая функция помножается на множитель $\exp(iQ/\hbar)$, то для сохранения прежнего вида уравнений (3) следует ввести соответствующие изменения и в $\mathbf{A}$ и в Φ:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}+\frac{c}{e}\,\nabla Q,\quad \Phi'=\Phi-\frac{1}{e}\,\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{4}$$

В этом случае связностью являются электромагнитные потенциалы. Калибровочное преобразование (4) указывает, как следует изменять связность при отображении слоев в себя при одном из допустимых преобразований.

Мы опишем вкратце две из принадлежащих истории единых теорий поля, предложенных Германом Вейлем и Теодором Калуцой, а затем перейдем к третьей — «супергравитации»,— находящейся сейчас в самом центре внимания.

КОНФОРМНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ВЕЙЛЯ

Вейль предложил сменить метрическую структуру пространства-времени на структуру, известную сейчас как конформная. Вместо приписывания каждому вектору своей нормы, в геометрии Вейля имеющим абсолютное значение считается только отношение норм векторов в одной и той же точке пространственно-временного многообразия. Если в римановой геометрии базисы взаимно перпендикулярных векторов в каждой точке можно было произвольно вращать, то в геометрии Вейля их можно также удлинять или укорачивать в произвольное число раз. В результате аффинную связность римановой геометрии следует дополнить новым правилом, отличающим векторы одинаковой длины в соседних точках (хотя сами длины и остаются неопределенными). Эта дополнительная аффинная структура была проинтерпретирована Вейлем как электромагнитный потенциал задолго до того, как эти потенциалы были рассмотрены как связности, требуемые неопределенной фазой волновой функции в квантовой теории.

Геометрия Вейля, рассматриваемая как обобщение римановой геометрии, была привлекательна по меньшей мере математически. В пользу геометрии Вейля говорят уравнения Максвелла для электромагнитного поля, но уравнения для полей частиц с отличной от нуля массой нельзя сформулировать в пространстве Вейля. Если аффинная геометрия не выжила в физике, так это потому, что стабильные частицы имеют определенные массы и соответственно определенные комптоновские длины волн. Четырехмерный волновой вектор, пропорциональный четырехмерному релятивистскому импульсу, имеет норму, пропорциональную квадрату массы частицы. Эта норма может быть использована повсюду в физической Вселенной в качестве эталона, которым можно измерить длины всех других векторов. Таким образом, постулированное Вейлем отсутствие абсолютной нормы представляется противоречащим тому, с чем мы имеем дело в природе.

В геометрии Вейля примечательно, по-видимому, то, что вне всякой связи с квантовой механикой электромагнитные потенциалы возникают как связности при переносе нормы или длины вектора. Формальный аспект аналогии в том, что в обоих случаях степень произвола в описании геометрической структуры сводится к вещественному скаляру. В геометрии Вейля в качестве этого скаляра выбирается норма вектора; в волновой механике это вещественная переменная Q в преобразовании волновой функции

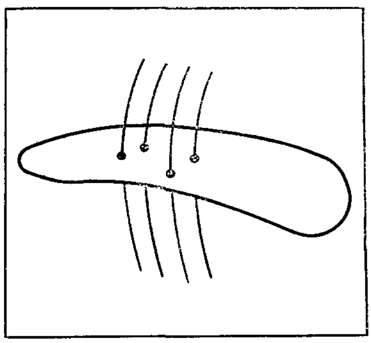
$$\psi'(x) = e^{iQ(x)/\hbar}\psi(x) \qquad (5)$$

И в том и другом случае преобразование связности, являющейся четырехмерным вектором, сводится к добавлению четырехмерного градиента, т. е. в точности к тому, что называется сейчас калибровочным преобразованием электромагнитного потенциала. Между прочим, сам термин «калибровочное преобразование», ныне общеупотребительный в электродинамике, принадлежит Вейлю, говорившему о перекалибровке нормы вектора.

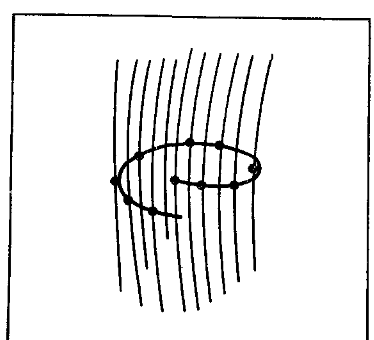
В геометрии Вейля построенный в каждой точке пространства-времени «слой» состоял из всевозможных тетрад взаимно перпендикулярных векторов равной длины, а разрешенные отображения пучка сам на себя состояли из преобразований Лоренца и растяжений. Этот набор отображений с определенностью образует группу, но не «простую» группу; в применении к группам термин «простая» означает, что группы нельзя разложить далее на произведение (полупрямое) групп меньшей размерности так, чтобы это разложение сохранялось под действием преобразований самой группы. В группе Вейля такое разложение возможно: на группу лоренцевых вращений с равным единице определителем, часто обозначаемую в современных обозначениях как SO(3, 1), и на изотопические растяжения. Как следствие этого теоретико-группового разложения группы отображений пучков связности также расщепляются, так что «объединение» гравитации и электромагнетизма отчасти иллюзорное.

ПЯТИМЕРНАЯ ТЕОРИЯ КАЛУЦЫ

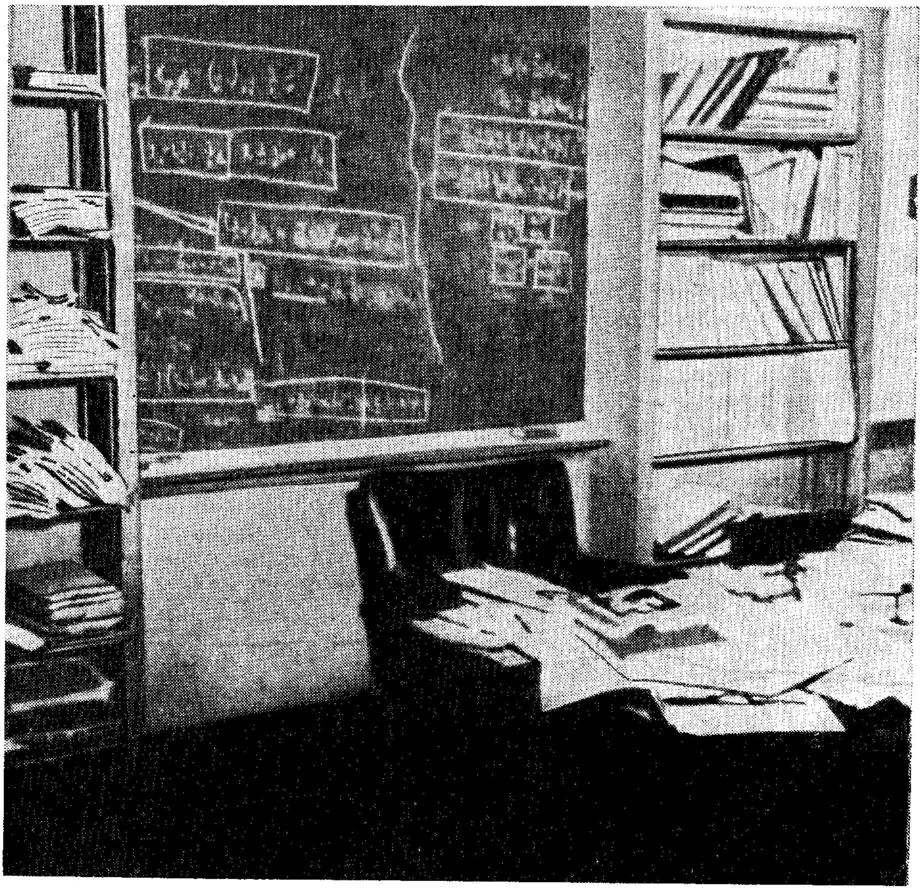
Значительный исторический интерес представляет также попытка объединения Калуцы. Калуца ввел пятимерное многообразие, призванное заменить четырехмерное пространство-время, и наделил его пятимерной метрикой. Четыре из измерений должны были быть пространственно-подобными, а пятое — времениподобным. Для воспроизведения наблюдаемой четырехмерности пространства-времени Калуца постулировал конгруэнтность пространственно-подобных кривых: через каждую точку его многообразия могла проходить одна и только одна кривая. Все точки вдоль одной кривой должны были быть эквивалентными во всех отношениях, так что ее геометрическая структура могла быть полностью описана на любой четырехмерной гиперповерхности, пересекающей каждую из кривых.



Это означает, разумеется, что для двух данных кривых Калуцы их расстояние друг от друга должно быть одинаковым и сверху и снизу вдоль кривых. Эти расстояния интерпретируются как метрика физического четырехмерного пространства-времени. В качестве модели пространства-времени может быть принята любая из рассекающих четырехмерных гиперповерхностей. Хотя, по-определению, смещения поверхности вверх или вниз не должны сказываться на внутренней структуре такой поверхности, локальные углы пересечения с кривыми Калуцы меняются. Естественным выбором была бы гиперповерхность, везде перпендикулярная к кривым Калуцы. Однако в общем случае это невозможно. Возьмите любую замкнутую кривую и сместите ее точки пересечения с кривыми Калуцы вверх или вниз так, чтобы пересечение со всеми кривыми Калуцы происходило под прямым углом. По возвращении к исходной кривой Калуцы обнаружится, что она теперь пересекается в двух разных точках.



Отсутствие нормальной везде гиперповерхности означает, что конгруэнтность кривых Калуцы обладает кручением, имеющим формально те же свойства, что и электромагнитное поле. Можно опять перейти к языку расслоений и проинтерпретировать пятимерное пространство Калуцы как расслоение, чьим базисным многообразием является пространство-время,



Кабинет Эйнштейна в Принстоне в апреле 1955 г., после того как Эйнштейн покинул его в последний раз. В болях он был увезен в госпиталь, где скончался через несколько дней во сне от разрыва аневризмы. Уравнения на доске относятся к его продолжавшейся работе над едиными теориями поля (фото Алана Ричардса).

и слои которого одномерны. Каждый слой отображается сам в себя сдвигом. «Связностью» является соотнесение точке на соседнем пучке, достигаемое переносом под прямым углом к пучку. Эта связность неинтегрируема.

В геометрическом построении Калуцы имеется дополнительный скаляр, приведший вначале к затруднениям. Если четырехмерная гиперповерхность смещается вдоль кривых Калуцы без разрывов, то смещения вдоль различных кривых должны быть связаны друг с другом. В терминах пятимерной метрики величины смещений необязательно равны друг другу, и их отношения представляют собой внутреннее скалярное поле. Не видя никакого физического приложения этому скаляру, Калуца попросту положил его равным единице и, таким образом, фактически исключил его. Уже позднее многие ученые, Карл Бранс и Роберт Дике, последними, попытались извлечь какую-либо пользу именно из этого скалярного поля и придать ему космологический смысл. Хотя это представляется и весьма разумным обобщением исходного подхода Калуцы, наблюдательные данные не говорят в пользу скалярно-тензорной теории. Тем не менее, по моему мнению, ее все же не следует отбрасывать, поскольку эти наблюдательные данные находятся на грани возможностей современной техники. Кроме этого, возможны и другие способы включения скаляра в единую теорию поля. Следует подчеркнуть, что с теоретической точки зрения построения Калуцы и его последующие модификации, как и геометрия Вейля, не обеспечивают настоящего объединения.

Другое обобщение пятимерного подхода Калуцы обсуждалось Эйнтейном, Валентином Баргманом и мной [7]. Мы заменили требование точной эквивалентности точек вдоль кривых Калуцы менее жестким предположением замкнутости пятимерного мира в пятом измерении с субатомной длиной огибающей. Пятимерное многообразие имело бы тогда вид тонкой трубы. Вдоль окружности трубы поля были бы непостоянными, а могли бы меняться произвольно с периодом, равным длине окружности трубы. В то время мы надеялись, что периодичность позволит учесть квантовые явления. Но сходство оказалось не более чем поверхностным, и постепенно мы забросили эти попытки.

СУПЕРСИММЕТРИЯ И СУПЕРГРАВИТАЦИЯ

Совершенно новым подходом к единым теориям поля являются так называемые суперсимметричные теории. Побуждением к этим теориям послужило наблюдение, что все известные в природе частицы принадлежат к одному из двух семейств. Частицы с целыми спинами являются бозонами, а с полуцелым спином — фермионами. Для фермионов выполняется принцип запрета Паули, гласящий, что никакие два фермиона одного и того же типа не могут иметь совпадающими все квантовые числа. Например, содержащиеся в атоме электроны не могут столпиться все на наинизшем энергетическом уровне, а должны распределиться таким образом, что каждое состояние или пустое, или занято одним электроном. Для бозонов подобных ограничений нет. Например, в любой моде светового луча может быть сколь угодно большое число фотонов. Идея суперсимметрии — разрешить преобразования, переводящие фермионы и бозоны друг в друга. Физический стимул к этому — существование среди элементарных частиц супермультиплетов, в которые группируются вместе частицы с различными спинами.

В описании систем многих тождественных частиц удобен называемый квантованием поля формализм, в котором числа частиц данного сорта могут быть изменены операторами, называемыми операторами рождения и уничтожения. Как говорят их названия, эти операторы, воздействуя на вектора состояния, переводят их в векторы, содержащие на одну частицу больше или меньше, чем исходное состояние. Должно быть по одному оператору рождения и уничтожения на каждое квантовое состояние. В случае фермионов невозможно родить или уничтожить две тождественные частицы из одного и того же квантового состояния; следовательно, квадраты соответствующих операторов равны нулю. Они нильпотентны. Более того, можно показать, что операторы уничтожения любых двух различных фермионов должны антикоммутировать, т. е., для любых двух таких операторов a_k и a_l,

$$a_k a_l = -a_l a_k.$$

Если не считать того, что в силу нильпотентности a_k их комбинации, образованные сложением и умножением, в общем случае, не имеют обратных операторов, то можно построить замкнутую алгебраическую систему операторов, удовлетворяющих таким законам антикоммутации. Если полиномы из антикоммутирующих операторов имеют неисчезающую числовую часть, то существуют и обратные операторы. Так, легко убедиться, что оператором, обратным к $(1 + a_k)$, является $(1 - a_k)$. (Напомним, что $a_k^2 = 0$.) Алгебры, порождённые обычными числами, антикоммутирующими величинами и их степенями, называются алгебрами Грассмана. Нетрудно убедиться, что произведения нечетного числа антикоммутирующих переменных также антикоммутируют друг с другом. Например,

$$(a_1a_2a_3)\,(a_4a_5a_6a_7a_8) = -(a_4a_5a_6a_7a_8)\,(a_1a_2a_3),$$

в то время как четные произведения коммутируют и друг с другом, и с нечетными произведениями. Тем не менее, и четные произведения не есть обычные числа — они нильпотентны.

В суперсимметрии вводятся бок о бок поля с целочисленным спином, составленные из коммутирующих переменных (необязательно обычных чисел), и поля с полуцелым спином, компоненты которых антикоммутируют. Предполагается, что все эти поля удовлетворяют Пуанкаре-инвариантным законам. Сверх этого, вводится понятие суперсимметрии — инвариантности относительно порожденных антикоммутирующими операторами преобразований, которые переводят фермионные поля в бозонные и наоборот. Одними из первых, предложивших такую теорию, были Юлиус Весс и Бруно Зумино.

Преобразования суперсимметрии замечательны тем, что они действуют также на координаты пространства-времени (которое в первоначальных суперсимметричных теориях предполагалось пространством Минковского). В самом деле, коммутатор двух преобразований суперсимметрии *) ведет себя подобно операции трансляции, хотя и отличается от обычной трансляции тем, что приращения координат в пространстве-времени нильпотентны. Генератор этих «трансляций», который должен быть подобен полному импульсу физической системы, также не может быть обычной величиной.

Переход от суперсимметрии к супергравитации тесно следует приобретенному на формализме расслоений опыту: вместо одного преобразования суперсимметрии во всем пространстве вводятся локальные преобразования, называемые суперкалибровочными; они отображают сам на себя довольно сложный слой. Для этого необходима связность, обладающая как бозонными, так и фермионными компонентами. Любое «суп рполе», вводимое как носитель физики, будет иметь как бозонные, так и фермионные компоненты, переходящие друг в друга при суперкалибровочных преобразованиях.

Супергравитационные теории являются истинно едиными теориями в том смысле, что фигурирующие в них поля не допускают инвариантного разложения. В любой произвольной суперкалибровочной системе отсчета разложение полей можно ввести, но это разложение не сохраняется неиз менным при суперкалибровочных преобразованиях. Рассматриваемые в суперсимметричных супергравитационных теориях группы симметрии являются простыми группами, так называемыми градуированными группами Ли. В некоторых из теорий группу фундаментальной симметрии

*) В тексте, по-видимому, описка: «суперкалибровочных преобразований». *Прим. перев.*)

можно выбрать так, чтобы она содержала в качестве подгрупп представляющиеся важными с точки зрения физики элементарных частиц группы.

Грассмановы переменные, возникающие в теориях как суперсимметрии, так и супергравитации, интерпретировать непросто. Они играют, в определенной мере, роль обычных чисел, выступая, например, как координаты точек. В квантовой физике мы обучены тому, как из операторов получать обычные числа — средние физических величин, описываемых этими операторами. Для грассмановых переменных в суперсимметрии или супергравитации аналогичного алгоритма не существует. Возможно такой формализм возникнет, когда эти теории будут полностью проквантованы. Суперсимметрия и супергравитация появились столь недавно и обладают столькими привлекательными чертами, что, конечно же, не следует отказываться от них только потому, что их физическая интерпретация оставляет желать лучшего. Не следует упускать из виду и того, что во многих отношениях эти теории все еще остаются фрагментарными. Последующие несколько лет, возможно, научат нас многому, что приведет к более определенным оценкам.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Minkowski H. Space and Time; Address delivered at the 80th Assembly of Natural Scientists and Physicians.— Köln, 1908; reprinted in Einstein A., Lorentz H. A., Weyl H., Minkowski H. The Principle of Relativity.— N.Y.: Dover, 1952.
2. Einstein A.— Ann. Phys. (Lpz.), 1916, Bd. 49, S. 716.
3. Yang C. N., Mills R. L.— Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 191.
4. Weyl H.— Sitzungsber Preuss Akad. Wiss., 1918, S. 465; Ann. Phys. (Lpz), 1919, Bd. 59, S. 101.
5. Kaluza Th.— Sitzungsber Preuss Akad. Wiss., 1921, S. 966.
6. Brans C. H., Dicke R. H.— Phys. Rev., 1961, v. 124, p. 925.
Эта же геометрия изучалась ранее А. Эйнштейном и П. Г. Бергманом, П. Иорданом и И. Р. Сайри.
7. Einstein A., Bergmann P.— Ann. Math., 1938, v. 39, p. 683.
Einstein A., Bargmann V., Bergmann P.— In: Theodore von Karman Anniversary Volume — Pasadena: Cal. Techn., 1941.— P. 212.
8. Wess J., Zumino B.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 70, p. 39.— С того времени появилось много работ по суперсимметрии.
9. Arnowitt R., Nath P., Zumino B.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 56, p. 81.
Nath P., Arnowitt R.— Ibid. p. 177.
Friedman D. Z., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 3214.
Deser S., Zumino B.— Phys. Lett. Ser. B, 1976, v. 62, p. 335.
И это всего лишь маленькая подборка ранних работ по этой тематике.