

537,226

## ЛЕВИТИРУЮЩИЕ ЭЛЕКТРОНЫ

В. С. Эдельман

## СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение . . . . .	675
2. Спектр электронов, локализованных над жидким гелием . . . . .	676
3. Возможные объекты исследования . . . . .	679
4. Устойчивость заряженной поверхности . . . . .	682
5. Коллективные явления в системе электронов. Вигнеровская кристаллизация . . . . .	686
6. Взаимодействие электронов с атомами пара . . . . .	691
7. Рассеяние электронов на тепловых колебаниях поверхности жидкости . . . . .	693
8. Деформационная локализация . . . . .	697
9. Нелинейные явления . . . . .	699
10. Заключение . . . . .	703
Цитированная литература . . . . .	704

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Явление электризации диэлектриков известно уже тысячи лет и его изучение, по существу, явилось основой науки об электричестве. Однако лишь совсем недавно Коул и Коэн<sup>1</sup> и, независимо от них, Шикин<sup>2</sup> обратили внимание на совершенно особый характер электризации диэлектриков с восприимчивостью  $\epsilon$ , близкой к 1 (например, жидкого  ${}^4\text{He}$  с  $\epsilon_4 = 1,0572$ <sup>3</sup>) и с отрицательным сродством к электрону. Чтобы понять, какую роль играет малость величины  $(\epsilon - 1)$ , рассмотрим поведение свободного электрона над поверхностью диэлектрика.

Как хорошо известно, электрон притягивается к поверхности диэлектрика силами электростатического изображения, и потенциал этих сил равен<sup>4</sup>:

$$\varphi(z) = -\frac{e^2(\epsilon-1)}{4(\epsilon+1)z} = -\frac{Qe^2}{z} \quad (1)$$

( $z$  — координата по нормали к поверхности). Таким образом, электрон должен подойти к поверхности диэлектрика и остаться где-то вблизи нее, так как проникновению внутрь мешает то обстоятельство, что энергия избыточного электрона внутри вещества больше, чем вне его (рис. 1) (для  ${}^4\text{He}$  высота этого барьера составляет 1 эВ<sup>1</sup>). В образовавшейся одномерной яме возникают стационарные состояния, энергию которых можно легко оценить, исходя из виральной теоремы<sup>5</sup>, приводящей в данном случае к соотношению  $2p^2/2m = Qe^2/z$ , и из соотношения неопределенности  $p \cdot z \approx \hbar$ . Учитывая эти равенства, получим, что энергия связи равна

$$E_{\text{св}} = -\frac{p^2}{2m} = -\frac{mQ^2e^4}{2\hbar^2}. \quad (2)$$

Подставляя в (2)  $\epsilon_4$ , находим  $E_{св} = 1,05 \cdot 10^{-15}$  эрг и характерное значение  $z = 76 \text{ \AA}$ . Таким образом, малость  $(\epsilon - 1)$  обеспечивает выполнение усло-

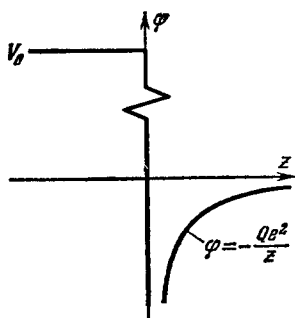


Рис. 1. Схема потенциала сил, действующих на электрон вблизи поверхности гелия.

вия  $z \gg a$ , где  $a$  — межатомное расстояние. В противоположность этому, при характерном для большинства диэлектриков значении  $\epsilon - 1 \gg 1$  оказывается, что  $z \approx a$ . В первом случае электроны локализованы далеко от поверхности диэлектрика, следствием чего, очевидно, является их свобода для движения вдоль поверхности. Во втором случае они будут связаны с отдельными атомами вещества или с дефектами кристалла и давать картину обычной электризации.

Таким образом, электроны, локализованные над диэлектриком с малым отличием  $\epsilon$  от 1, образуют двумерную проводящую систему, и возникает задача изучения этого нового физического объекта. Целью исследований должно быть получение ответа на следующие основные вопросы:

1) с какими веществами электроны могут образовывать связанные состояния, обладающие двумерной проводимостью;

2) устойчивость образующейся системы;

3) фазовое состояние;

4) свойства связанных электронов и влияние на них взаимодействия с окружающей средой и с внешними электрическими и магнитными полями.

Эти вопросы в том или ином объеме рассматривались ранее в ряде обзоров <sup>6-9</sup>. Появление в последнее время новых работ позволяет более полно описать свойства двумерной проводящей системы электронов, локализованных над диэлектриком.

## 2. СПЕКТР ЭЛЕКТРОНОВ, ЛОКАЛИЗОВАННЫХ НАД ЖИДКИМ ГЕЛИЕМ

Как ясно из приведенных выше оценок, для электрона над жидким гелием благодаря значительной удаленности его от поверхности потенциал (1) хорошо описывает взаимодействие с жидкостью по нормали к ее поверхности. Так как движение вдоль поверхности в пренебрежении взаимодействием с ее колебаниями является свободным, уравнение Шрёдингера распадается на два. Одно из них имеет решение

$$\Phi(x, y) = Ae^{i\mathbf{p}\mathbf{r}} = Ae^{i\mathbf{v}\mathbf{r}/m}, \quad (3)$$

где  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор в плоскости поверхности, а  $m$  — масса свободного электрона. Для движения вдоль оси  $z$  имеем при  $z > 0$  <sup>6,7</sup>

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Phi_l}{dz^2} + \varphi(z) \Phi_l = E_l \Phi_l \quad (4)$$

и, считая барьер в начале координат бесконечным,  $\Phi_l(z) = 0$  при  $z < 0$ . Уравнение (4) решается аналогично хорошо известному уравнению Шрёдингера для атома водорода. Собственные значения энергии  $E_l$  отличаются от уровней для атома водорода лишь множителем  $Q^2$  и равны

$$E_l = -\frac{Q^2 m e^4}{2\hbar^2 l^2}. \quad (5)$$

Как видно из (5),  $E_1$  совпадает с полученной оценкой (2). Нормированные волновые функции первых трех состояний имеют вид

$$\begin{aligned}\Phi_1(z) &= 2\gamma^{3/2}ze^{-\gamma z}, \\ \Phi_2(z) &= \frac{\gamma^{3/2}}{\sqrt{2}}ze^{-\gamma z/2}\left(1 - \frac{\gamma z}{2}\right), \\ \Phi_3(z) &= \frac{2}{3\sqrt{3}}\gamma^{3/2}ze^{-\gamma z/3}\left(1 - \frac{2\gamma z}{3} + \frac{2\gamma^2 z^2}{27}\right),\end{aligned}\quad (6)$$

с эффективным боровским радиусом

$$\frac{1}{\gamma} = \frac{\hbar^2}{mQe^2}. \quad (7)$$

Подставляя в  $Q$  значение  $\epsilon_k = 1,0572$ , находим  $1/\gamma = 7,6 \cdot 10^{-7}$  см и среднее расстояние электрона в основном состоянии от поверхности гелия  $\langle z \rangle_1 = 6/4\gamma = 114 \text{ \AA}$ . Вычисленные в этом приближении значения  $\langle z \rangle_2 = 456 \text{ \AA}$ ,  $\langle z \rangle_3 = 1026 \text{ \AA}$ .

Решение (5) хорошо описывает реальный спектр. Так, для частот перехода из основного состояния  $l = 1$  в возбужденные с  $l = 2, 3$  из (5) следует  $F_{12} = 119,7$ ,  $F_{13} = 141,8$  ГГц, а прямые измерения Граймса и др.<sup>10</sup> дают значения  $125,9 \pm 0,2$  и  $148,6 \pm 0,3$  ГГц. Учет конечной величины барьера на границе  $V_0 = 1 \text{ эВ}$ <sup>1,11</sup> и замена потенциала (1) на потенциал

$$\Phi(z) = \frac{Qe^2}{z + \beta}, \quad (8)$$

в котором устраняется расходимость при  $z = 0$ , позволили при разумном значении  $\beta_4 = 1,04 \text{ \AA}$  скорректировать расчет и добиться согласия с экспериментом<sup>10</sup>.

Электроны, очевидно, будут оставаться над жидкостью, если перпендикулярно к ней приложить не слишком сильное статическое электрическое поле  $E_\perp$ , прижимающее их к поверхности. При этом собственные значения энергии  $E_l$  изменятся благодаря появлению в потенциальной энергии добавки  $eE_\perp z$ . Так как функция  $\Phi_l(z)$  не симметрична относительно  $z$ , средние значения  $\langle z \rangle_l = \langle \Phi_l | z | \Phi_l \rangle$  не равны нулю, и уже в первом приближении теории возмущений появляются поправки к  $E_l$ , равные

$$\Delta E_l = eE_\perp \langle z \rangle_l. \quad (9)$$

Возможность перестройки спектра изменением внешнего поля значительно облегчает проведение измерений. В экспериментах Граймса и др.<sup>10</sup> значения частот перехода определялись путем изучения поглощения с. в. ч. излучения фиксированной частоты при монотонном изменении  $E_\perp$ . Для увеличения чувствительности измерений на медленно меняющееся поле  $E_\perp$  накладывалось переменное поле малой амплитуды на частоте 100 кГц. Таким образом, регистрировалась величина, пропорциональная производной сигнала поглощения (рис. 2). Линейное по полю изменение частот перехода наблюдалось лишь при небольших  $E_\perp$  (рис. 3). Связано это с тем, что средняя напряженность поля изображения  $\langle Qe/z^2 \rangle_l$  равна  $\sim 3,5 \text{ кВ/см}$ ,  $430 \text{ В/см}$  и  $130 \text{ В/см}$  для  $l = 1, 2, 3$  соответственно. Соответственно поля  $E_\perp \approx 100 \text{ В}$  уже не малы.

Измеренные в<sup>10</sup> значения  $dF_{12}/dE_\perp$  и  $dF_{13}/dE_\perp$  оказались на  $\sim 10\%$  больше даваемых формулой (9), если при усреднении пользоваться волновыми функциями (6). Однако учет конечной величины  $V_0$  и потенциала изображения, подправленного так, чтобы расчетное значение  $F_{12}(0)$  сов-

пало с измеренным, приводит к согласию вычисленных и измеренных частот перехода практически во всем исследованном диапазоне значений  $E_{\perp}$  (см. рис. 3).

Как ясно из предыдущего рассмотрения, при переходе от жидкого  $^4\text{He}$  к  $^3\text{He}$ , оставаясь в рамках водородоподобной модели, надо изменить

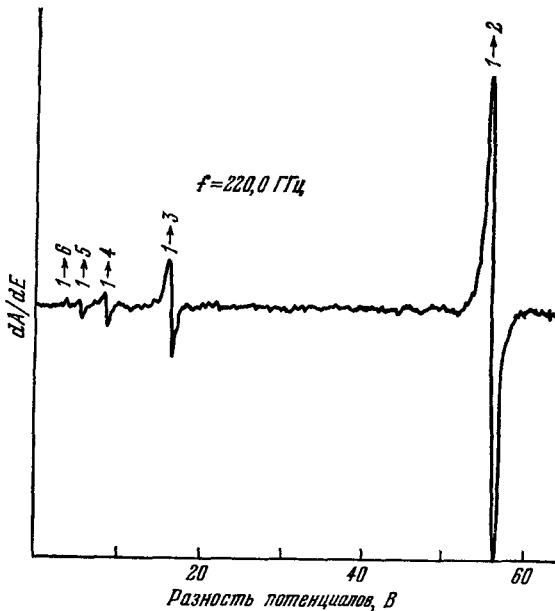


Рис. 2. Зависимость производной поглощения электронами сигнала частоты 220 ГГц от разности потенциалов, приложенной к пластинам конденсатора <sup>10</sup>.

Уровень гелия расположен в середине конденсатора с зазором 3,18 мм. Температура гелия 1,2 К.

кости и составляет  $208/189 = 1,10$ . Для электронов над  $^4\text{He}$ , согласно <sup>10</sup>,  $\delta F_{12}/\delta F_{13} = 1,08 \pm 0,05$ . Для  $^3\text{He}$  это отношение равно  $1,4 \pm 0,2$  <sup>13</sup>. Его сравнительно большая величина ставит под вопрос применимость модели.

Если сопоставить между собой относительный сдвиг частот  $\delta F_{11}/F_{11}$ , усредненный для переходов  $1 \rightarrow 2$  и  $1 \rightarrow 3$ , то получим, что он для электронов над  $^4\text{He}$  в  $1,40 \pm 0,15$  раза больше, чем над  $^3\text{He}$ . По модели <sup>10</sup> это отношение при совпадении свойств поверхностей жидких  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$  должно составить 1,33, в соответствии с отношением расстояний от электрона до поверхности жидкости в этих двух случаях. Таким образом, можно сделать вывод, что в физических свойствах поверхностей этих жидкостей, во всяком случае, нет больших различий. Если для  $^3\text{He}$  принять теоретическое значение высоты барьера  $V_0 = 0,9 \text{ эВ}$  <sup>1,14</sup>, то получим  $\beta_3 = 1,25 \pm 0,15 \text{ \AA}$  <sup>13</sup>, что практически совпадает с  $\beta_4$ .

В начале этого параграфа упоминалось, что движение электрона вдоль поверхности является свободным. Это утверждение было проверено экспериментально при изучении циклотронного резонанса. Если перпендикулярно к поверхности жидкого гелия приложить постоянное магнитное поле  $H$ , то оно приведет к квантованию движения вдоль поверхности с разностью энергии между появляющимися уровнями Ландау  $\hbar\Omega = \hbar e H / m c$ . Измерения, проведенные при низких температурах  $T \approx 0,4 \text{ К}$ , когда относительная ширина линии циклотронного резонанса мала,

эффективный заряд соответственно меньшему значению  $\epsilon_3 = 1,04276$  <sup>12</sup> для  $^3\text{He}$ . При этом энергии станут в 1,78 раз меньше, а характерные расстояния — в 1,33 раза больше, чем для  $^4\text{He}$ . Измерения Володина и Эдельмана <sup>13</sup> подтвердили это обстоятельство: для частот перехода получено  $F_{12} = 69,8 \pm 0,15$ ,  $F_{13} = 83,15 \pm 0,25 \text{ ГГц}$ , что близко к вычисленным по спектру (5) значениям 67,6 и 80,1 ГГц соответственно. Изменение частоты перехода при наложении электрического поля при малых значениях  $E_{\perp}$  хорошо описываются формулой (9) (рис. 4).

Как и в случае  $^4\text{He}$ , частоты перехода оказываются несколько большими расчетных. Согласно модели, рассмотренной в <sup>10</sup>, отношение сдвига частот для переходов  $1 \rightarrow 2$  и  $1 \rightarrow 3$  не зависит от конкретных параметров жид-

$\Delta H/H \approx 10^{-3}$ , показали, что при  $E_{\perp} \rightarrow 0$ , для электронов, локализованных над  ${}^4\text{He}$ ,  $m$  совпадает с массой свободных электронов с точностью, лучшей  $\sim 10^{-4}$  <sup>15 16</sup>.

Наиболее ярко двумерный характер движения электронов проявляется, пожалуй, при исследовании циклотронного резонанса при поле  $H$ ,

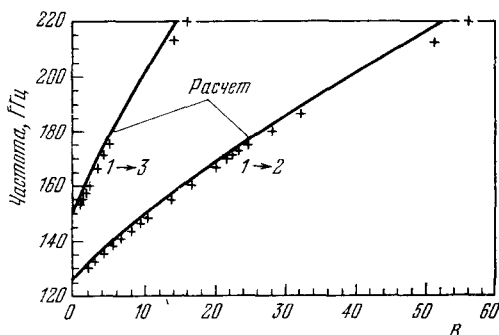


Рис. 3. Зависимость от удерживающего потенциала частот переходов  $1 \rightarrow 2$  и  $1 \rightarrow 3$  в спектре электронов, локализованных над жидким  ${}^4\text{He}$  <sup>10</sup>.

Сплошные линии — расчет. Прижимающее поле  $E_{\perp} = V/0,318$ .

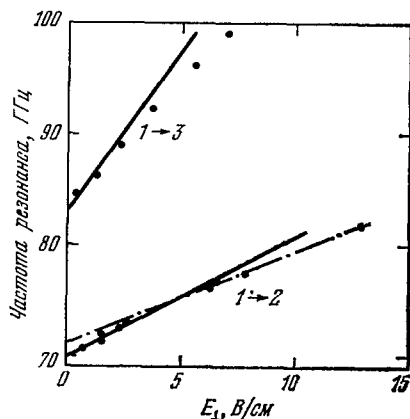


Рис. 4. Зависимость от удерживающего поля частот переходов  $1 \rightarrow 2$  и  $1 \rightarrow 3$  в спектре электронов, локализованных над жидким  ${}^3\text{He}$  <sup>13</sup>.

Сплошные линии — штарковский сдвиг, рассчитанный по водородоподобной модели.

направленном под углом к нормали  $N$  к поверхности. Так как при частотах, меньших  $F_{1,2}$ , орбиты электронов в магнитном поле лежат в плоскости поверхности, то квантование их движения определяется лишь компонентой поля  $H$ , направленной вдоль  $N$ . В этом случае  $\Omega = eH \cos(\angle N, N)/mc$ , или, иначе говоря, эффективная масса  $m^* = m/\cos(\angle N, N)$ . Экспериментально такая зависимость была обнаружена в работе <sup>17</sup> и позднее наблюдалась также в <sup>15</sup>.

### 3. ВОЗМОЖНЫЕ ОБЪЕКТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

Жидкий  $\text{He}$  — не единственный диэлектрик, с которым электроны могут образовывать связанные состояния, описанные в гл. 2. Еще в первых статьях на эту тему Коул и Коэн указали на целый ряд других диэлектриков, обладающих необходимыми свойствами <sup>1,14</sup> (см. таблицу \*)). Экспериментально электризация поверхности жидкого  ${}^4\text{He}$  наблюдалась Зоммером <sup>18</sup> еще до появления теории этого эффекта. Свойства электронов над  ${}^4\text{He}$  изучались в большом числе работ. Что касается других диэлектриков, то их экспериментальное изучение в рассматриваемом аспекте началось сравнительно недавно.

Локализация электронов над жидким  ${}^3\text{He}$  впервые наблюдалась в <sup>19</sup>. В <sup>20</sup> исследован циклотронный резонанс электронов над  ${}^3\text{He}$ , в <sup>13</sup> наблюдались переходы в водородоподобном спектре.

Недавно появилось сообщение о наблюдении локализации электронов над жидким водородом <sup>21</sup> и твердым неоном и водородом <sup>22</sup>. Исследование

\*) В этой таблице мы опустили твердые  ${}^3\text{He}$  и  ${}^4\text{He}$ , которые могут граничить только с газом весьма высокой плотности или с жидкостью.

электронов, локализованных над твердым водородом, особенно интересно вследствие выдвинутой Хайкиным идеи о возможности существования отрицательных ионов водорода большого радиуса<sup>23</sup>. Энергия связи электрона в таком ионе должна изменяться от  $\sim 17$  МэВ при радиусе иона,

Таблица

Параметры электронов, локализованных над конденсированными криогенными диэлектриками<sup>14</sup>

Вещество	Фазовое состояние	$10^3 Q$	$V_0$ , эВ		$E_{св}$ , мэВ	$1/\gamma_0$ , Å
			Теория	Эксперимент		
$^3\text{He}$	Жидкий	5,2	0,9	$1,0 \pm 0,2$	0,39	100
$^4\text{He}$	Жидкий	6,9	1,30		0,69	76
Ne	Жидкий	22	0,47		11,5	24
	Твердый	27	0,61	$0,3 \pm 0,2$	17,5	19
$\text{H}_2$	Жидкий	26	2,2		11,5	20
	Твердый	32	3,3		16,7	17
$\text{D}_2$	Жидкий	31	3,1		16	17
	Твердый	36	4,4		22	15

стремящемся к бесконечности, до  $\sim 1$  эВ при уменьшении радиуса до атомного размера.

Интересным объектом исследования могут стать электроны, локализованные над пленкой сверхтекучего гелия, расположенной на плоской подложке. Теоретически этот вопрос довольно подробно изложен в обзоре Шикина и Монархи<sup>7</sup>. Если электрон расположен над пленкой жидкого гелия толщиной  $d$ , то в первом приближении потенциал (1) следует заметить на

$$\varphi(z) = -\frac{Qe^2}{z} - \frac{Q_{\Pi}e^2}{z+d}, \quad (10)$$

где, пренебрегая отличием  $\epsilon_{\text{He}}$  от 1,  $Q_{\Pi} \approx (\epsilon_{\Pi} - 1)/4(\epsilon_{\Pi} + 1)$ ,  $\epsilon_{\Pi}$  — диэлектрическая постоянная подложки. Разлагая (10) в ряд по малой величине  $z/d$  и отбрасывая не зависящий от  $z$  член, получим

$$\varphi(z) = -\frac{Qe^2}{z} + \frac{Q_{\Pi}e^2}{d}z. \quad (11)$$

Таким образом, наличие подложки приводит к появлению эффективного прижимающего поля  $E_{\text{эфф}} = Q_{\Pi}e^2/d$ . При характерной толщине пленки  $\sim 400$  Å  $E_{\text{эфф}}$  меняется в пределах от  $\sim 400$  В/см для подложки из твердого  $\text{H}_2$  до  $\sim 3$  кВ/см для металлической подложки ( $\epsilon_{\Pi} \rightarrow \infty$ ).

Экспериментальное свидетельство существования локализованных электронных состояний над пленкой гелия было получено в работе<sup>24</sup>, в которой наблюдался медленный, за времена порядка нескольких минут, возврат электронов на свободную поверхность жидкого гелия после кратковременного выключения прижимающего поля. В работе<sup>25</sup> было получено убедительное доказательство наличия электронов, локализованных над пленкой. Измерительное устройство, использовавшееся в<sup>25</sup>, схематически показано на рис. 5. Источником электронов служил электрический разряд в газе вблизи острого разрядника 1. Постоянное электрическое поле  $E_{\perp}$  прикладывалось между медным цилиндрическим стаканом 2 и плоской спиральной катушкой радиочастотного измерительного контура 5 (собственная частота контура  $\sim 3$  МГц), расположенного внутри перевернутого стеклянного цилиндрического стаканчика с плоским дном 4.

Измерительное устройство помещалось в стеклянном сосуде 6, располагавшемся в криостате выше уровня жидкого гелия. Гелий подавался в сосуд при помощи термомеханического эффекта, возникавшего при включении нагревателя 3, помещенного в капилляре, и его уровень регулировался изменением мощности, подводимой к нагревателю.

После кратковременного ( $\sim 0,1$  с) включения разряда, добротность контура  $Q_k$  (начальная добротность  $Q_0 \approx 300$ ) падает из-за поглощения энергии электронами, локализованными над гелием (рис. 6, А). Уменьшение добротности  $\Delta Q = Q_0 - Q_k$  в первом приближении пропорционально

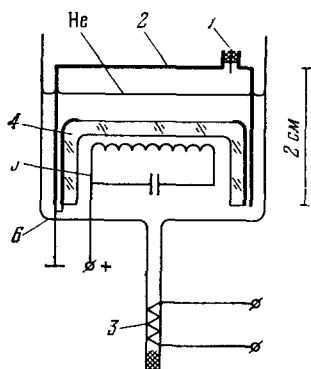


Рис. 5. Схема прибора для наблюдения электронов над пленкой жидкого  $^4\text{He}$  (обозначения разъяснены в тексте) <sup>25</sup>.

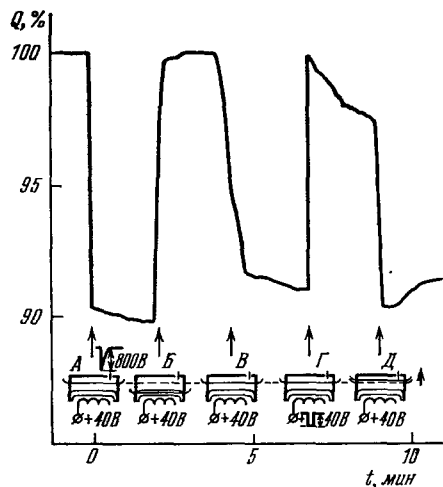


Рис. 6. Изменение добротности контура в устройстве, показанном на рис. 5, при манипуляциях, описанных в тексте <sup>25</sup>.

поверхностной плотности  $n$  электронов и, таким образом, может служить мерой поверхностного заряда, максимальная плотность которого определяется величиной  $E_{\perp}$  и равна

$$n_{\max} = \frac{E_{\perp}}{2\pi e}. \quad (12)$$

При опускании уровня жидкости ниже дна стаканчика 4 добротность контура восстанавливалась до значения  $Q_0$  (рис. 6, Б); подъем уровня гелия в камере до прежней высоты вновь приводил к падению  $Q_k$ , что свидетельствовало о наличии электронов над свободной поверхностью жидкости (см. рис. 6, В). Если в промежутке времени между опытами Б и В повышением температуры уничтожить пленку сверхтекучего гелия, то после восстановления уровня в приборе добротность остается высокой, а диэлектрик оказывается заряженным. Эти опыты свидетельствуют о существовании поверхностных электронных состояний над пленкой гелия, смачивающей поверхность стекла. Подвижность электронов над пленкой по крайней мере в  $10^3$  раз ниже, чем над поверхностью жидкого гелия.

Следующий опыт свидетельствует о существовании электронных состояний над пленкой сверхтекучего гелия, смачивающей поверхность металла. Выключение на короткое время прижимающего поля приводило к быстрому уходу электронов с поверхности и последующему медленному заряду поверхности за время порядка нескольких минут (см. рис. 6, Г). Подъем в этом опыте уровня гелия на небольшую высоту  $\sim 0,01$  см полностью восстанавливает заряд (рис. 6, Д). Заряд поверхности в опытах Г и Д

можно объяснить перетеканием поверхностных электронов, находившихся над пленкой гелия, смачивающего внутреннюю поверхность металлического стакана 2, на поверхность жидкости. Перетекание происходит под действием компоненты электрического поля  $E_{\parallel}$  вдоль пленки и их быстрым «смыыванием» при подъеме уровня. По площади боковой поверхности стакана и величине «смытого» заряда в опытах, подобных  $D$ , в <sup>25</sup> получена оценка плотности зарядов над пленкой гелия на поверхности металла,  $n \approx (1 - 2) \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ . Это значение хорошо согласуется с проведенным нами расчетом максимальной плотности электронов, соответствующей балансу отрицательной энергии взаимодействия электрона со своим изображением и изображением соседей, и положительной энергии его взаимодействия с соседними электронами. Если предположить, что электроны образуют квадратную решетку на поверхности пленки (очевидно, это предположение слабо влияет на конечный результат), то можно получить  $n \approx (0,4/d)^2 \approx 10^{10} \text{ см}^{-2}$ . Аналогичные явления перетекания электронов с пленки на свободную поверхность гелия наблюдались также в <sup>26</sup>.

#### 4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЗАРЯЖЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Интересен вопрос о предельных возможных концентрациях электронов и максимальных прижимающих полях. Два явления ограничивают эти величины — потеря макроскопической устойчивости заряженной поверхности жидкости и туннелирование электронов через потенциальный барьер.

Оценить вероятность туннелирования можно, воспользовавшись квазиклассическим выражением <sup>27</sup>

$$w \propto \exp \left( -\frac{2}{\hbar} \int_0^{V_0/eE_{\perp}} \sqrt{2m(V_0 - eE_{\perp}z)} dz \right) = \exp \left( -\frac{4}{3\hbar} \frac{V_0}{eE_{\perp}} \sqrt{2mV_0} \right). \quad (13)$$

Подставив  $V_0 = 1 \text{ эВ}$ , получим, что при  $E_{\perp} \leq 10^4 \text{ CGSE}$  вероятность туннелирования мала <sup>28</sup>.

При значительно меньших значениях  $E_{\perp}$  проявляется макроскопическая неустойчивость заряженной поверхности. Она вызывается тем, что благодаря высокой подвижности электронов при деформации поверхности они под действием прижимающего поля собираются во впадинах, чем способствуют росту деформации.

Задачу об устойчивости рассматривали Горьков и Черникова <sup>29, 30</sup>. Полученные в <sup>30</sup> уравнения спектра колебаний поверхности для случая, когда глубина жидкости велика, можно записать в виде

$$\omega_q^2 = \frac{q}{\rho} \left[ \rho g + \sigma q^2 - \frac{q}{2\pi} (E_{\perp}^2 + 4\pi^2 n^2 e^2) \right]; \quad (14)$$

здесь  $\rho$  и  $\sigma$  — плотность и коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $\omega_q$  и  $q$  — угловая частота и волновой вектор колебаний,  $E_{\perp}$  и  $n$  — прижимающее поле и поверхностная плотность электронов. Выражение (14) справедливо, если длина волны колебаний  $\lambda = 2\pi/q \gg n^{-1/2}$ . При максимальном при заданном  $E_{\perp}$  заряде  $n_{\max} = E_{\perp}/2\pi e$ , отвечающем полной экранировке электростатического поля над жидкостью, из (14) легко получить, что возможна потеря устойчивости ( $\omega_q^2 < 0$ ) при  $q_0 = \sqrt{\rho g/\sigma}$ , если

$$n^2 > n_{\text{крит}}^2 = \frac{\sqrt{\rho g \sigma}}{2\pi e^2}, \quad (15)$$



или

$$E_{\perp}^2 > E_{\perp \text{ крит}}^2 = 2\pi \sqrt{\rho g \sigma}.$$

Численно для  $^4\text{He}$  при  $T \rightarrow 0$ ,  $n_{\text{крит}} = 2,25 \cdot 10^9 \text{ см}^{-2}$ ,  $E_{\perp \text{ крит}} = 2,03 \text{ кВ/см}$ . При  $n \ll n_{\text{max}}$  (однако,  $n \gg \rho g / 4\pi^2 \sigma \approx 10 \text{ см}^{-2}$ ), критическое значение поля оказывается в  $\sqrt{2}$  раз большим.

Для тонкого слоя жидкости, т. е. при  $q_0 d \ll 1$ , при полной экранировке поля над поверхностью спектр колебаний имеет вид <sup>30</sup>

$$\omega_q^2 = \frac{q^2 d}{\rho} \left( \rho g + \sigma q^2 - \frac{4\pi n^2 e^2}{d} \right). \quad (16)$$

Устойчивость в этом случае теряется по отношению к длинноволновым колебаниям ( $q \rightarrow 0$ ) при

$$n_{\text{крит}}^2 = \frac{\rho g d}{4\pi e^2}, \quad (17)$$

или

$$E_{\perp \text{ крит}}^2 = \pi \rho g d.$$

Естественно, соотношение (17) справедливо при достаточно больших  $d$ , когда силами Ван-дер-Ваальса можно пренебречь. Для тонких пленок в (16), (17)  $g$  надо заменить на  $f = 3gd_0^3/d^4$ , где  $d_0$  — равновесная толщина пленки на высоте 1 см над уровнем гелия <sup>31</sup>. Для  $n_{\text{крит}}$  получаем при этом

$$n_{\text{крит}}^2 = \frac{3\rho g}{4\pi e^2} \left( \frac{d_0}{d} \right)^3. \quad (18)$$

При  $d = d_0$ ,  $n_{\text{крит}}^2 = 1,4 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-2}$ . Выражение (18) дает лишь приближенное значение  $n_{\text{крит}}$  для тонких пленок, так как не учитывает того обстоятельства, что расстояние между электронами превышает толщину пленки.

Экспериментально критическая плотность измерялась в <sup>24</sup>. Были получены близкие к даваемым формулой (15) значения  $n_{\text{крит}}$ . Однако ее изменение с температурой оказалось более быстрым, чем изменение  $\sigma^{1/4}$ , чего можно было бы ожидать согласно теории. Поскольку постановка эксперимента в <sup>24</sup> описана недостаточно подробно, трудно указать причину этого различия. Возможно, при нагреве измерительной ячейки понижался уровень гелия из-за перехода жидкости в пар, плотность которого сильно возрастает.

Детально механизм потери устойчивости в электрическом поле изучен в <sup>32</sup>. Эксперименты проводились при  $T \approx 1,3 \text{ К}$  в приборе, схематически показанном на рис. 7. Источник электронов — вольфрамовая нить накала 1. Напряжение, создававшее поле  $E_{\perp}$ , которое удерживало электроны на поверхности 2 гелия, прикладывалось к пластинам конденсатора. Нижняя положительно заряженная пластина 3 окружена экранирующим кольцом 4. Верхняя заземленная пластина 5 подвешена на пружинах и под

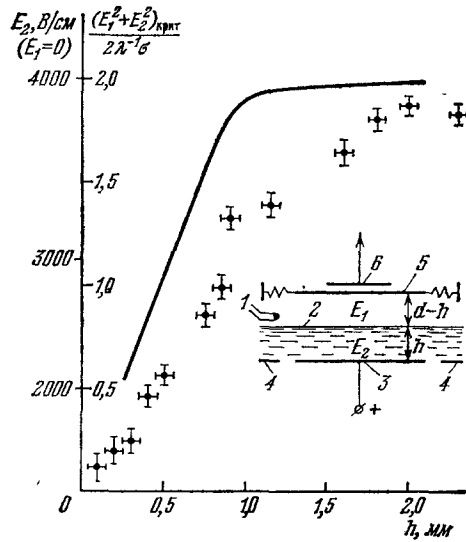


Рис. 7. Схема устройства для наблюдения неустойчивости заряженной поверхности гелия (внизу справа) и зависимость критического параметра от глубины слоя жидкости  $d$  <sup>32</sup>.

действием поля  $E_1$  в зазоре между нею и заряженной поверхностью гелия может перемещаться в вертикальном направлении. Ее положение измеряется емкостным датчиком 6 и служит мерой поля. Уровень сверхтекучего гелия в конденсаторе регулировался посредством термомеханического эффекта. Расстояние  $h$  между пластинами задавалось в пределах 1—5 мм. Прибор помещен в оптический криостат. Для исследования динамики явления применялась скоростная (до 4000 кадров/с) киносъемка.

При некотором начальном положении уровня гелия  $d_0$  и приложенном к конденсатору напряжении  $U_0$ , из включаемого на время  $\sim 0,1$  с катода 1 эмиттировались электроны. Появление поверхностного заряда выражалось в полной экранировке поля над поверхностью гелия, т. е.  $E_1 = 0$ .

Затем критические условия для заряженной гелиевой поверхности достигались либо медленным понижением уровня гелия  $d$  в приборе, либо повышением напряжения  $U$ . Величина поля  $E_1$  регистрировалась как функция изменяемого параметра. Одновременно производилась скоростная микрокиносъемка поверхности и объема жидкого гелия.

Эксперименты показали, что при достижении критических условий на поверхности гелия возбуждаются капиллярно-гравитационные волны амплитуды  $\sim 0,5$  мм, и в течение короткого времени  $\sim 0,1$ — $0,3$  с поверхностный заряд исчезает. Это свидетельствует о «жестком» режиме неустойчивости<sup>29, 30</sup>.

Измеренная зависимость критической величины  $(E_1^2 + E_2^2)_{\text{крит}}$  от высоты уровня гелия  $d$  приведена на графике рис. 7. Экспериментальная зависимость удовлетворительно согласуется с расчетом Черниковой<sup>30</sup> (жирная кривая). Изменение характера зависимости при  $d \approx 1$ — $1,5$  мм отвечает переходу от неустойчивости по отношению к длинноволновым возмущениям к неустойчивости с характерным параметром, равным капиллярной постоянной. Это подтвердил анализ снятых кинокадров: при  $h \leq 0,6$ — $0,7$  мм достижение критических условий сопровождалось возбуждением колебаний поверхности гелия с длинами волн порядка размеров пластин конденсатора, тогда как при  $d \geq 1,5$  мм — с длинами порядка капиллярной длины  $\sim 0,5$  мм. Киносъемка позволила проследить процесс ухода электронов с поверхности гелия. На рис. 8 показаны четыре кадра кинофильма. На 1-м сверху кадре видна однородная устойчивая поверхность.

Рис. 8. Последовательные кадры кинофильма, показывающие возбуждение колебаний на плоской поверхности  $^4\text{He}$  (кадр 1), при потере устойчивости (кадр 2) и рождение заряженных пузырьков — баблоннов (кадр 3), тонущих в гелии (кадр 4)<sup>32</sup>.

Плоская равновесная заряженная поверхность гелия в конденсаторе действием электростатических сил опущена на 0,2 мм ниже уровня гелия вне конденсатора; на кадре видны оба уровня. При неустойчивости в процессе раскачки поверхностных волн во впадинах появляются острые углубления (рис. 8, кадр 2). На остриях рождаются пузырьки (кадр 3) размером от 0,05 до 0,3 мм, которые затем тонут в гелии (нижний кадр). При достижении дна — положительной пластины конденсатора —

пузырек либо схлопывается, либо всплывает. Поведение пузырька определяется его размерами: пузырьки диаметром 0,05 мм схлопываются за время  $10^{-4}$  с, а большие — за  $10^{-3}$  с, успев при этом всплыть.

Наблюдаемое явление объясняется тем, что каждый пузырек представляет собой многозарядный ( $10^7 - 10^8$  электронов) отрицательный

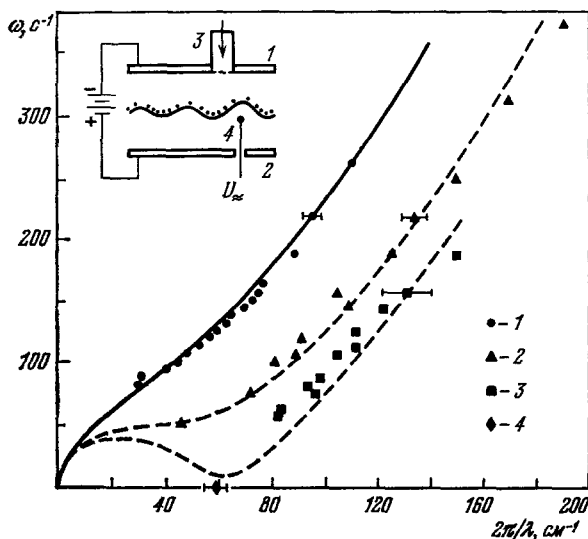


Рис. 9. Схема устройства для измерения спектра электро-капиллярно-гравитационных волн на границе раздела фаз в растворе  ${}^3\text{He} - {}^4\text{He}$  (вверху слева) <sup>34</sup>.

1, 2 — пластины конденсатора, 3 — источник электронов, 4 — электрод, возбуждающий колебания границы раздела (сплошная линия), наблюдаемые по рассеянию света. Приведена зависимость частоты электро-капиллярных волн от волнового вектора при  $E_{\perp}$  (В/см) = 111 (1), 1000 (2), 1119 (3) и 1145 (4). Сплошная линия — спектр колебаний незаряженной поверхности, штриховая — вычисленный при соответствующей плотности зарядов;  $T = 0,567$  К.

ион — баблон — в сверхтекучем гелии. Баблон движется к аноду и, коснувшись его, разряжается, а оставшийся пузырек с газом схлопывается. Из условия равенства электростатического давления изнутри баблона капиллярному давлению получаем оценку для его радиуса:

$$r = \left( \frac{N^2 e^2}{16 \pi \sigma} \right)^{1/3} \approx 10^{-2} \text{ см},$$

где  $N$  — число электронов в баблоне, определяемое по полному заряду поверхности и количеству разряжающих поверхность баблов (20–100). Вследствие электростатического взаимодействия электроны в баблоне образуют двумерный слой вблизи поверхности жидкости. Плотность электронов составляет  $10^{11} - 10^{12} \text{ см}^{-2}$ .

Баблоны малого диаметра 0,05 мм движутся в жидком гелии в поле  $E = 1 \text{ CGSE}$  со скоростью  $10^4 \text{ см/с}$ , соответствующей стоковому вязкому движению. Длительность движения до дна  $10^{-3}$  с, что много больше времен релаксации электрических и упругих неоднородностей на их размерах.

Устойчивость многоэлектронных пузырьков в гелии рассмотрел Шикин <sup>33</sup>. Им было показано, что сферические баблоны с полученными выше параметрами устойчивы по отношению к туннельному эффекту, гравитационной и деформационной неустойчивости.

Потерю устойчивости и спектр электро-капиллярных волн исследовали также Ваннер и Лайдерер <sup>34</sup>, изучавшие локализацию электронов на границе раздела фаз раствора  ${}^4\text{He} - {}^3\text{He}$ . Хотя свойства самих электро-

нов в этом случае сильно отличаются от таковых для электронов над свободной поверхностью гелия, с точки зрения задачи об устойчивости это не играет существенной роли. В эксперименте<sup>34</sup> вблизи поверхности

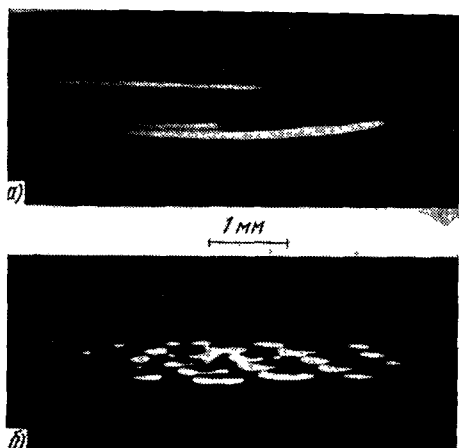


Рис. 10. а) Деформация границы раздела при  $E_{\perp} = 1120$  В/см, наблюдаемая снизу под углом  $\sim 6^\circ$  (яркая линия эллиптической формы вызвана отражением от кольцевого края продавленной вниз заряженной области); б) появление периодической стационарной структуры при увеличении  $E_{\perp}$  до 1160 В/см ( $T = 0,567$  К)<sup>34</sup>.

раздела фаз помещался электрод (рис. 9), подачей переменного электрического напряжения на который возбуждались электро-капиллярные волны, наблюдавшиеся оптически. Спектр волн при различных плотностях поверхностного заряда, приведенный на рис. 9, демонстрирует прекрасное согласие с теорией.

Значительная вязкость  $^3\text{He}$ , приводящая к затуханию волн, позволила авторам<sup>34</sup> наблюдать предсказанное в<sup>31</sup> образование пространственно-неоднородного состояния при  $E_{\perp} > E_{\perp \text{ крит.}}$ . При этом на поверхности раздела фаз появлялась стационарная гексагональная структура, период которой равен капиллярной постоянной (рис. 10). В дальнейших экспериментах эти авторы наблюдали аналогичную гексагональную структуру и для электронов над жидким  $^4\text{He}$  при 4,2 К, когда вязкость гелия достаточно высока<sup>35</sup>.

Специальных исследований устойчивости заряженной поверхности жидких  $^3\text{He}$  и  $\text{H}_2$  не производилось, однако в<sup>20, 21</sup> отмечено, что критиче-

ские значения прижимающего поля и плотности зарядов в этих случаях близки к ожидаемым по теории значениям.

Устойчивость заряженной поверхности твердого диэлектрика, например,  $\text{H}_2$ , не изучалась. Исходя из того, что обычно пробойные напряжения для твердых диэлектриков составляют меговольты на сантиметр, можно ожидать, что в этом случае предельные значения  $E_{\perp}$  и  $n$  для идеальных кристаллов будут ограничиваться туннельным эффектом, и, в соответствии с оценкой (13), достигать  $n \approx 10^{13}$  см $^{-2}$ .

## 5. КОЛЛЕКТИВНЫЕ ЯВЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОНОВ. ВИГНЕРОВСКАЯ КРИСТАЛЛИЗАЦИЯ

Из-за ограниченной сверху плотности электронов над жидким гелием ( $\sim 2 \cdot 10^9$  см $^{-2}$ ) температура фермиевского вырождения для них всегда мала и составляет

$$kT_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\pi \hbar^2 n}{m} \lesssim 0,01 \text{ К.} \quad (19)$$

С другой стороны, кулоновское межэлектронное взаимодействие имеет значительную величину,

$$V = \frac{e^2}{r} = e^2 \sqrt{\pi n} \lesssim 100 \text{ К.} \quad (20)$$

Исходя из этого, Крэндели<sup>36</sup> предположил, что поверхностные электроны должны упорядочиваться в двумерную решетку, образуя тем самым вигне-

ровский кристалл. Фазовый переход происходит, когда отношение потенциальной и кинетической энергии, приходящейся на один электрон, составляет <sup>37</sup>

$$\frac{V}{kT} = \Gamma, \quad (21)$$

где  $\Gamma$  — константа, значение которой согласно расчету в работе <sup>38</sup> равно  $\Gamma = 77$ . Близкое значение  $\Gamma = 95$  было получено при имитации на э. в. м. перехода в системе из  $10^4$  частиц, взаимодействующих по закону Кулона <sup>39</sup>.

В кинетическую энергию электронов дают вклад и нулевые колебания, энергия которых имеет тот же порядок величины, что и фермиевская. Так как согласно (19), (20) она возрастает пропорционально  $n$ , а потенциальная — только как  $\sqrt{n}$ , то при росте концентрации можно добиться, в принципе, выполнения соотношения (21) и при  $T = 0$ , т. е. «холодного» плавления кристалла <sup>37</sup>. Однако численные оценки выражений (19), (20) показывают, что в рассматриваемом случае достичь этого невозможно. Даже плотности  $n \approx 10^{11} \text{ см}^{-2}$ , существующей в баблонах, далеко не достаточно для «холодного» плавления кристалла. Возможно, что такое явление может иметь место для электронов над поверхностью пленки сверхтекучего гелия на металлической подложке, где при большой их плотности кулоновское взаимодействие существенно ослаблено экранировкой за счет расположенного на близком расстоянии металла <sup>40</sup>.

Шикин и Монарха <sup>7,41</sup> показали, что деформация поверхности жидкости под электроном приводит к дополнительному выигрышу потенциальной энергии при кристаллизации. Однако при достижимых над жидким гелием значениях  $E_{\perp}$  эта дополнительная энергия много меньше (20), и, по-видимому, не может существенно повлиять на фазовое состояние электронов.

С вигнеровской кристаллизацией тесно связан вопрос о спектре коллективных колебаний электронной системы. Согласно <sup>38,37</sup>, в двумерной системе электронов могут распространяться волны двух типов. Продольные волны имеют при  $\lambda = 2\pi/q \gg h, d$  ( $d$  — глубина слоя жидкости,  $h$  — зазор между пластинами конденсатора) спектр

$$\omega_L^2 = \frac{2\pi e^2 n q}{m}. \quad (22)$$

Существование этих волн и их спектр не зависят от фазового состояния. Продольные колебания (22) являются аналогом хорошо известных в трехмерном случае плазменных колебаний, спектр которых начинается при  $q = 0$  с плазменной частоты  $4\pi N e^2 / m$ , где  $N$  — объемная концентрация электронов. Различие в свойствах продольных волн связано с тем, что в трехмерном случае кулоновское взаимодействие двух заряженных плоскостей не зависит от расстояния между ними, в то время как взаимодействие двух заряженных нитей уменьшается при увеличении расстояния. Поэтому при уменьшении  $q$  частота колебаний падает.

При переходе в кристаллическое состояние появляется возможность распространения поперечных колебаний с линейным спектром при малых  $q$  <sup>38</sup>

$$\omega_T = c_{\perp} q, \quad (23)$$

где для треугольной решетки  $c_{\perp}^2 = 0,269 e^2 / m r$  <sup>37</sup>.

Включение магнитного поля  $\mathbf{H} \parallel \mathbf{N}$  приводит к коллективным колебаниям со спектром <sup>42</sup>

$$\omega_{\pm} = \frac{1}{2} [\omega_T^2 + \omega_L^2 + \Omega^2 \pm \sqrt{(\omega_T^2 + \omega_L^2 + \Omega^2)^2 - 4\omega_T^2 \omega_L^2}], \quad (24)$$

где  $\Omega$  — циклотронная частота. Видно, что при  $H \rightarrow 0$  (24) переходит в (22), (23). При  $q \rightarrow 0$  из (24) получаем

$$\omega_+ = \Omega + \frac{\omega_L^2}{2\Omega} = \Omega + \frac{\pi e^2 n q}{m \Omega},$$

$$\omega_- = \frac{\omega_T \omega_L}{\Omega}.$$
(25)

По спектру колебаний вигнеровской двумерной решетки Крэнделл в<sup>36</sup> вычислил амплитуду среднеквадратичных смещений электрона  $\langle r^2 \rangle$ . Оказалось, что для неограниченного кристалла  $\langle r^2 \rangle \rightarrow \infty$ , т. е. дальний порядок в нем не может существовать даже при  $T \rightarrow 0$ . Согласно э. в. м.-эксперименту Хокни и Брауна<sup>39</sup>, вблизи температуры перехода в системе существует лишь ближний порядок, и «кристалл» разбит на мелкие домены.

Теории упорядоченного состояния двумерной системы электронов посвящено большое число работ, рассмотрение которых выходит за рамки

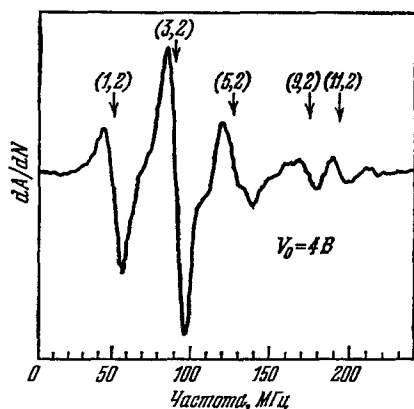


Рис. 11. Зависимость от частоты производной (по отношению к поверхностной плотности электронов) поглощения ВЧ сигнала, прошедшего через ячейку размерами  $19 \times 12$  мм<sup>2</sup>, высотой 1,8 мм, частично заполненную <sup>4</sup>He<sup>43</sup>.

В скобках указаны порядки интерференции плазменных волн;  $T \approx 0,5$  К.

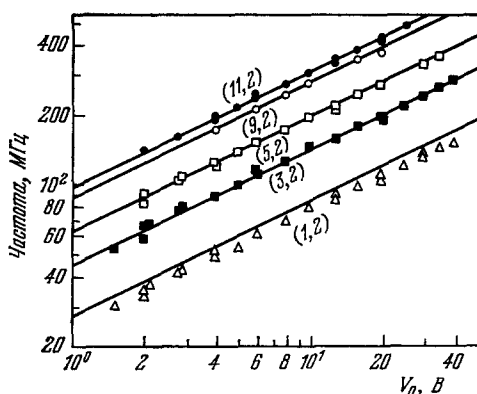


Рис. 12. Сравнение вычисленных (сплошные линии) и измеренных частот резонансов стоячих волн продольных плазменных колебаний при различных значениях удерживающего потенциала<sup>43</sup>.

Для представленного случая поверхностная плотность  $n = V \cdot 8,6 \cdot 10^{-6}$  см<sup>-2</sup>;  $T \approx 0,5$  К.

нашего обзора. Экспериментальных же работ, исследующих много-электронные взаимодействия, очень немного.

Граймс и Адамс наблюдали возбуждение стоячих продольных волн (22) в ячейках, имеющих прямоугольную форму с размерами  $a \times b = 19 \times 12$  мм<sup>2</sup> при  $q_x = \pi/a$ ,  $q_y = \pi/b$  (рис. 11)<sup>43</sup>. Спектр этих волн, вычисленный с учетом экранирующего действия электродов<sup>44</sup>, совпал с измеренным (рис. 12).

Ципфель, Браун и Граймс осуществили эксперимент, показавший наличие корреляции в системе электронов<sup>45</sup>. Они исследовали зависимость от магнитного поля, параллельного поверхности жидкого гелия, ширины линии перехода  $1 \rightarrow 2$  в спектре (5). Магнитное поле приводит к появлению направленной по нормали силы Лоренца, эквивалентной электрическому полю  $v_x H/c$ . Так как существует распределение по скоростям, описываемое для газа свободных электронов выражением  $\exp(-mv_x^2/2kT)$ , то поле сил Лоренца приводит к уширению резонансной

линии (рис. 13). Однако это уширение меньше того, что должно наблюдаться для газа электронов. По мере роста поверхностной плотности электронов влияние магнитного поля ослабевает.

Этот эффект можно объяснить следующим образом. Если характерное значение

$$\Delta\omega = 2\pi \frac{v_x H}{c} \frac{dF_{12}}{dE_{\perp}} \ll \frac{1}{\tau},$$

где  $\tau$  — время столкновений в системе электронов, то линия, аналогично хорошо известному явлению в ядерном магнитном резонансе, окажется суженной в  $\Delta\omega\tau$  раз из-за изменения состояния электрона. Согласно измерениям (см. рис. 13), при плотности электронов  $\sim 2 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$  характерное значение  $\tau = 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ с}$ , что хорошо коррелирует с периодом колебаний электрона возле положения равновесия<sup>45</sup>.

Экспериментальное наблюдение упорядоченного состояния встречает значительные трудности. Предлагавшееся в<sup>36</sup> наблюдение дифракции света осложняется малостью сечения рассеяния фотонов как электронами, так и ионами в жидком гелии, имеющими характерные размеры  $\sim 10^{-7} \text{ см} \ll \lambda$ . К тому же, как отметили Платцман и Фукуяма<sup>37</sup>, отсутствие дальнего порядка должно приводить к размытию брэгговского отражения.

Исследование вигнеровской кристаллизации по проводимости двумерной системы затрудняется тем обстоятельством, что в однородном электрическом и магнитном полях электрон-электронное взаимодействие само по себе не сказывается на проводимости. В неоднородном электромагнитном поле оказывается сравнительно простым возбуждать и наблюдать продольные волны с характерными скоростями  $\sim 10^9 \text{ см/с}$ <sup>43</sup>, однако наблюдение поперечных волн со скоростью  $\sim 10^6 \text{ см/с}$ , что явилось бы однозначным доказательством кристаллизации, является сложной и пока не решенной экспериментальной задачей.

Малость  $v_{\text{пл}}/c$  приводит и к тому, что поглощение в магнитном поле происходит вблизи циклотронной частоты, и электрон-электронное взаимодействие не сказывается на положении линии циклотронного резонанса (25)<sup>46</sup>, что подтверждено экспериментом<sup>20</sup>.

Монарха и Шикин в<sup>41</sup> предложили наблюдать кристаллизацию по особенностям поглощения энергии электромагнитной волны, поляризованной перпендикулярно к поверхности жидкости, обусловленного

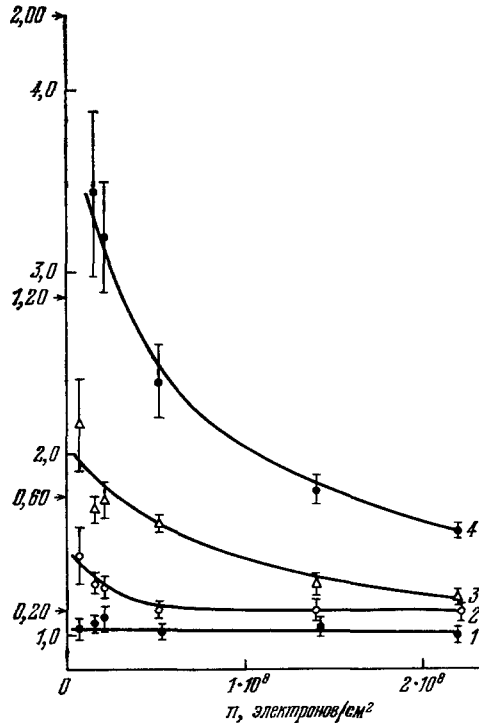


Рис. 13. Зависимость от плотности электронов ширины линии  $\Delta F_{12}$  резонансного перехода  $1 \rightarrow 2$  при магнитном поле  $H$ , нормированной к  $\Delta F_{12}(0) \approx 1,5 \text{ ГГц}$ <sup>45</sup>.

Результаты (1—4) соответствуют полям  $H$ , равным 0,20; 0,60, 1,2 и 2,0 кГс соответственно. Стрелками возле вертикальной оси показано значение  $\Delta F_{12}(H)/\Delta F_{12}(0)$ , вычисленное для газа электронов, не взаимодействующих друг с другом. <sup>45</sup>He, 1,2 К,  $F = 225 \text{ ГГц}$ .

возбуждением капиллярных волн решеткой электронов. Согласно их расчету коэффициент поглощения  $\alpha$  равен

$$\alpha = \frac{8\pi}{c} \eta \frac{e^2}{\rho^2} \omega^2 \sum_q q^3 \frac{n_q^2}{|\omega^2 - \omega_q^2 + 2i\omega\chi_q|^2}, \quad (26)$$

где  $n_q$  — фурье-компонента электронной плотности,  $\omega_q^2 = (\sigma/\rho) q^3$ ,  $q$  — один из векторов обратной решетки. Для треугольной решетки  $|q|^2 = l \cdot 8\pi^2 n / \sqrt{3} = l q_0^2$ ,  $l = 1, 3, 4, 7, 9, \dots$  для квадратной  $|q|^2 = l \cdot 4\pi^2 n$ ,  $l = 1, 2, 4, 5, 8, \dots$ .  $\chi = (\eta/\rho) q^2$ ,  $\eta$  — коэффициент первой вязкости гелия. Выражение (26) приводит к резонансному росту  $\alpha$  при  $\omega \rightarrow \omega_q$ . Полагая  $n_q \approx n$ , для поглощения в резонансе получим оценку

$$\alpha \approx \frac{2\pi}{c} \frac{e^2 n^2}{4\eta q}. \quad (27)$$

Подставляя  $n = 10^9 \text{ см}^{-2}$  и  $\eta \approx 30 \text{ мкПа}$  для  $^4\text{He}$  при 1 K), получим  $\alpha \approx 10^{-12}$ . Эта величина слишком мала, чтобы сделать возможным наблюдение эффекта.

Однако и для электромагнитных волн, поляризованных вдоль поверхности, должно появляться резонансное поглощение при интерференции риплонов<sup>47</sup>. Именно таким образом Граймсу и Адамсу удалось наблюдать вигнеровскую кристаллизацию<sup>48</sup>.

Рис. 14. Экспериментальная запись, демонстрирующая появление при понижении температуры плазменно-рипловых резонансов из-за кристаллизации электронов в треугольной решетке<sup>48</sup>.

В эксперименте изучалась зависимость от температуры поглощения ВЧ мощности системой электронов с плотностью  $n$ , локализованных над жидким гелием. Было обнаружено, что в узком интервале температур на монотонной зависимости появляются отчетливо выраженные резонансные особенности (рис. 14). Частоты, соответствующие резонансам Y и Z, с точностью  $\sim 2\%$  совпадают с частотами риплонов, отвечающим векторам треугольной обратной решетки с  $l = 3$  и 4. Поведение особенности W, X более сложное: во-первых, резонансов два, их частоты (при  $n = 4,4 \cdot 10^8 \text{ см}^{-2}$ ) 10,2 и 12,3 МГц существенно ниже частоты риплонов с  $q = q_0$ , равной 15,1 МГц; и, наконец, положение резонансов зависит и от прижимающего поля, и от температуры.

Объяснение этим особенностям было дано в<sup>47</sup>, где рассчитано изменение спектра риплонов из-за их взаимодействия с электронами. Электрон, прижимаемый к поверхности электрическим полем, образует под собой ямку (см. гл. 8). При медленных движениях электрона он «тащит» ямку за собой, что обуславливает эффективный механизм передачи энергии от электронов колебаниям поверхности и обратно. Так как скорость распространения возбуждений по системе электронов намного превышает скорость поверхностной волны, то это взаимодействие приводит к перенормировке спектра риплонов, которая оказывается существенной при волновых векторах  $q \approx q_0$ , и мала при  $q^2 = 3q_0^2$ ,  $q^2 \approx 4q_0^2$ .

Согласно этой теории появление двух резонансов — W и X — вместо одного обусловлено тем, что с внешним ВЧ полем в условиях эксперимента могут быть связаны продольные плазменные волны разной длины,



что определяется размерами и конфигурацией измерительной ячейки. Так как изменение спектра риплонов зависит от волнового вектора плазменных колебаний, то и появляется возможность наблюдать несколько резонансов. Зависимость частоты резонансов от  $E_{\perp}$  вполне понятна: чем меньше прижимающее поле, тем слабее связь электронов с поверхностью, и в пределе  $E_{\perp} \rightarrow 0$  частота резонансов должна стремиться к частоте, определяемой из спектра «свободных» риплонов, что находится в согласии с экспериментом <sup>48</sup>.

Таким образом, можно считать установленным наличие в системе электронов фазового перехода в упорядоченное состояние, отвечающее треугольной решетке (в квадратной решетке частоты резонансов были бы совсем другими). Согласно <sup>48</sup> переход в диапазоне температур 0,4—0,7 К происходит при  $\Gamma = 137 \pm 7$ , что довольно близко к расчетному значению  $\Gamma = 95$ , полученному в <sup>39</sup>.

В <sup>49</sup> Рыбалко и др. сообщили о наблюдении излома на зависимости подвижности электронов  $\mu(E_{\perp})$  при  $T \lesssim 0,3$  К, положение которого отвечает условию  $\Gamma \approx 140$ . Авторы связывают эту аномалию с вигнеровской кристаллизацией. Расчет подвижности в этом случае проделан Монархой <sup>50</sup>.

## 6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРОНОВ С АТОМАМИ ПАРА

Поверхностные электроны могут взаимодействовать с атомами пара и с тепловыми колебаниями поверхности диэлектрика. Относительная величина вызываемых этими взаимодействиями эффектов существенно зависит от температуры и прижимающего поля. Так, для  $^4\text{He}$  при  $T \gtrsim 1$  К, а для  $^3\text{He}$  при  $T \gtrsim 0,4$  К плотность пара сравнительно велика, и в процессах рассеяния доминируют столкновения с атомами пара. При меньших температурах плотность пара экспоненциально убывает и перестает влиять на динамику электронов.

В области не слишком высокой плотности пара его присутствие сказывается только на длине свободного пробега электронов. Если температура достаточно низка, а прижимающее поле достаточно велико, так что все электроны находятся в основном состоянии <sup>7</sup>, то их подвижность  $\mu$  равна <sup>14, 17, 51</sup>

$$\mu_{2D} = \frac{e\tau}{m} = \frac{e}{\pi\hbar\sigma_p N} \left( \int_0^{\infty} \Phi_1^4 dz \right)^{-1} = \frac{8e}{3\pi\hbar\sigma_p N\gamma}. \quad (28)$$

В (28)  $\sigma_p$  сечение рассеяния медленных электронов на атоме, для  $\text{He}$   $\sigma_p = 4,9 \cdot 10^{-16}$  см<sup>2</sup> <sup>52</sup>,  $N$  — число атомов пара в см<sup>3</sup>; при вычислении интеграла использована волновая функция (6). Двумерная подвижность оказывается ниже подвижности электронов в трехмерном случае, определяемой классической формулой

$$\mu_{3D} = 4e(3N\sigma_p \sqrt{2\pi mkT})^{-1} \quad (29)$$

Их отношение равно

$$\frac{\mu_{2D}}{\mu_{3D}} = \frac{\sqrt{2kT/m}}{\sqrt{\pi} \hbar\gamma/2m}, \quad (30)$$

т. е. отношению тепловой скорости к величине, имеющей смысл характерной скорости движения электрона в потенциальной яме вблизи поверхности диэлектрика. Для  $^4\text{He}$  при  $T \approx 1$  К  $\mu_{2D}/\mu_{3D} \approx 0,15$ .

Подвижность электронов над жидким гелием при  $T \gtrsim 1$  К измерялась различными способами: по квазистатической проводимости <sup>53,54</sup>,

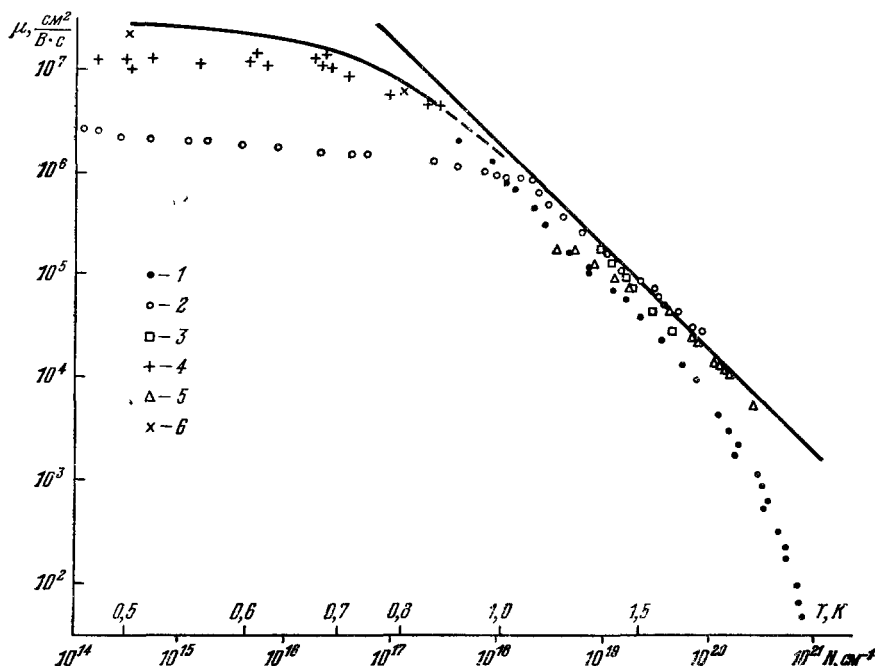


Рис. 15. Зависимость подвижности электронов, локализованных над жидким  $^4\text{He}$ , от температуры  $T$  и плотности пара  $N$ ,

1—5 — измерено соответственно в работах: <sup>53</sup> — по влиянию электронов на взаимную емкость электродов в звуковом диапазоне частот, <sup>54</sup> — по потерям, вносимым в ВЧ контур МГц-диапазона, <sup>57</sup> — по ширине линии циклотронного резонанса на частоте 23,5 ГГц, <sup>43</sup> — по ширине линии резонанса стоячих плазменных волн в диапазоне частот 20—400 МГц, <sup>55</sup> — времяпролетным методом. Прямая — расчет для рассеяния на атомах пара, сплошная линия при  $T \leq 0,8$  К — расчет <sup>61</sup>, 6 — расчет <sup>60</sup>

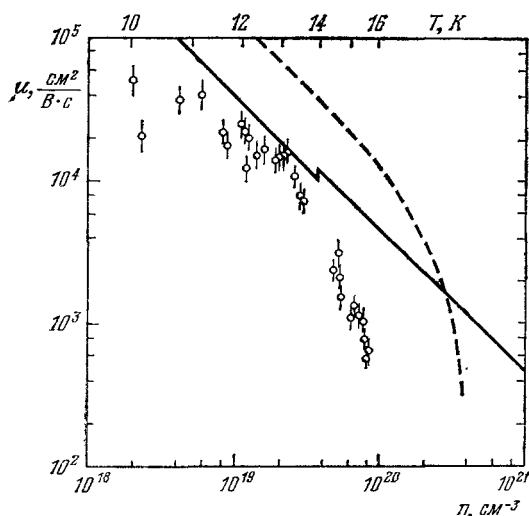


Рис. 16. Зависимость подвижности электронов, локализованных над конденсированным водородом, от температуры и плотности пара <sup>22</sup>.

Линия с изломом при температуре плавления — расчет для рассеяния на атомах пара. Штриховая линия  $\mu(N)$  для электронов над  $^4\text{He}$  (ср. с рис. 15).

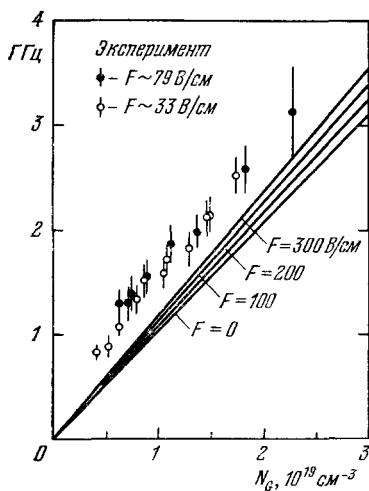


Рис. 17. Зависимость от плотности пара  $^4\text{He}$  расстояния между экстремумами производной для резонанса при переходе 1 → 2, измеренная в <sup>10</sup>.

Линии — расчет <sup>57</sup> при разных значениях прижимающего поля.

время-пролетным методом <sup>55</sup>, по ширине резонансов стоячих плазменных волн <sup>43</sup>, по ширине линии циклотронного резонанса <sup>17</sup>. Полученные значения  $\mu(N)$  приведены на рис. 15. При  $10^{18} \text{ см}^{-3} \leq N \leq 10^{20} \text{ см}^{-3}$  зависимость  $\mu(N)$  линейна, а абсолютные значения  $\mu$ , сильно зависящие при использовании нерезонансных методов от калибровки прибора, отличаются от теории (формула (28)) не более, чем они различаются между собой.

При  $N \gtrsim 10^{20} \text{ см}^{-3}$  подвижность начинает падать быстрее, чем растет  $N$ , что связано с появлением связанных состояний электронов с атомами пара <sup>56</sup>. Их рассмотрение выходит за рамки нашего обзора.

Прижимающее поле  $E_{\perp}$  на газовую подвижность влияет сравнительно слабо. В <sup>20</sup> наблюдалось уменьшение  $\tau$  в два раза при возрастании  $E_{\perp}$  до критического. Это связано с тем, что для электронов в основном состоянии средняя напряженность поля изображения для  $^4\text{He}$ , равная  $\sim 3,3 \text{ кВ/см}$ , превышает критическое поле  $\sim 2 \text{ кВ/см}$  (см. гл. 2, 4). Поэтому волновая функция электронов в основном состоянии изменяется незначительно.

Рассеянием на атомах пара определяется подвижность электронов над твердым водородом (рис. 16) <sup>22</sup>. Падение подвижности электронов над жидким  $\text{H}_2$ , по-видимому, как и в случае гелия, связано с локализацией электронов при росте плотности пара.

Столкновения с газом определяют и ширину линии переходов в водородоподобном спектре при  $T \gtrsim 1 \text{ К}$  <sup>10,57</sup> (рис. 17). Согласно <sup>10</sup> ширина линии изменяется пропорционально плотности пара, а экстраполяция к  $N = 0$  приводит к конечному значению  $\Delta_0\nu \approx 500 \text{ МГц}$ . Авторы <sup>10</sup> объясняли остаточную ширину неоднородностью электрического поля  $\Delta E_{\perp}/E_{\perp} \approx 1\%$  в пределах измерительной ячейки. Однако изменение  $E_{\perp}$  в пять раз не приводит к изменению  $\Delta_0\nu$ , которое должно было бы проявиться. Проведенное в <sup>10,57</sup> сравнение с теорией продемонстрировало удовлетворительное согласие. Однако одно обстоятельство остается неясным; в то время как в <sup>10</sup> для полной ширины линии (точнее, для расстояния между экстремумами производной, которое в  $\sqrt{3}$  раза меньше ширины на полувысоте) при  $T \approx 1,2 \text{ К}$  получено значение  $\sim 1 \text{ ГГц}$ , те же авторы в более поздней работе <sup>45</sup> приводят существенно большее значение  $1,4\text{--}1,7 \text{ ГГц}$ , которое вдвое больше вычисленного. Интересно отметить, что при основном механизме рассеяния, определяемом столкновением с атомами пара, ширина линии для перехода  $1 \rightarrow 2$  практически совпадает с шириной линии циклотронного резонанса <sup>10,17</sup>.

## 7. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ НА ТЕПЛОВЫХ КОЛЕБАНИЯХ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

По мере понижения температуры и экспоненциального падения плотности пара становится существенным взаимодействие электронов с поверхностью жидкости. При этом проявляются два эффекта; рассеяние на тепловых колебаниях поверхности и деформация жидкости под электроном благодаря действию силы  $eE_{\perp}$ , приводящая к изменению его динамики.

Элементарные возбуждения поверхности жидкости, риплоны, были введены Аткинсом <sup>58</sup>. Их спектр совпадает со спектром капиллярных волн, т. е. имеет вид (сравни с (14))

$$\omega_q^2 = \frac{\sigma}{\rho} q^3. \quad (31)$$

Рассеяние электронов на риплонах теоретически было исследовано Коулом <sup>14</sup>, а затем его результат был скорректирован Шикиным и Монар-

хой<sup>59</sup>. Согласно этой работе частота столкновений равна<sup>60</sup>

$$\nu(p) = \frac{m}{2\pi\hbar^3} \int_0^{2\pi} d\varphi |\langle V_q \rangle|^2 (2N_q + 1) (1 - \cos \varphi), \quad (32)$$

где для риплонов, играющих существенную роль,

$$N_q = \left( \exp \frac{\hbar\omega_q}{kT} - 1 \right)^{-1} \approx \frac{kT}{\hbar\omega_q}; \quad (33)$$

$q = (2p/\hbar) \sin(\varphi/2)$ ,  $p$  — импульс электрона. Взаимодействие описывается функцией

$$V_q = \sqrt{\frac{\hbar q}{\epsilon \rho \omega_q}} \left\{ Qe^2 \frac{q}{z} \left[ \frac{1}{qz} - K_1(qz) \right] + eE_{\perp} \right\}. \quad (34)$$

В (34)  $K_1(x)$  — модифицированная функция Бесселя. Как отметили Платцман и Бени<sup>61</sup>, при  $T \lesssim 1$  К значение  $qz$  достаточно мало, чтобы можно было разложить (34) в ряд по  $qz$  и, ограничившись членами степени более низкой, чем  $(qz)^2$ , получить точность вычислений лучше  $\sim 10\%$ . (С этой точностью полученный в<sup>61</sup> результат для  $\mu$  при  $E_{\perp} = 0$  совпадает со значением, вычисленным на э. в. м. в работе<sup>60</sup>. Близкие результаты получены также в<sup>57</sup>.) После этого оказывается нетрудно провести интегрирование формулы (33) и получить<sup>61</sup>

$$\nu(p) = \frac{mkTe^2}{2\hbar\sigma p^2} \left\{ E_{\perp}^2 - E_{\perp} \frac{p^2 Qe}{\hbar^2} \left[ 2 \ln \left( \frac{p}{4\gamma\hbar} \right) + 3 \right] + \left( \frac{p^2 Qe^2}{\hbar^2} \right)^2 A(p) \right\}, \quad (35)$$

с  $A(p) \approx 1,22 + 2,67 \ln(p/2\hbar\gamma) + 1,5 [\ln(p/2\hbar\gamma)]^2$ .

Знание  $\nu(p)$  позволяет вычислить подвижность электронов. В достаточно сильных полях ( $E_{\perp} \gtrsim 1$  кВ/см) при  $T \approx 0,5$  К и при  $\omega\tau = (\omega m/e) \mu \ll 1$ <sup>59</sup>

$$\mu_{\text{НЧ}} = \frac{8\sigma\hbar}{meE_{\perp}^2}. \quad (36)$$

В обратном предельном случае  $\omega\tau \gg 1$ , как показано в<sup>61</sup>,

$$\mu_{\text{ВЧ}} = \frac{4\sigma\hbar}{meE_{\perp}^2} = \frac{\mu_{\text{НЧ}}}{2}. \quad (37)$$

Зависимости  $\mu(T)$ , вычисленные в<sup>61,60</sup> при  $E_{\perp} = 0$ , приведены на рис. 15. Там же даны результаты измерений  $\mu_{\text{НЧ}}$ <sup>54</sup> и  $\mu_{\text{ВЧ}}$  при  $E_{\perp} \rightarrow 0$ <sup>43</sup>. Если для высокочастотной подвижности согласие теории с экспериментом можно считать вполне удовлетворительным, то для  $\mu_{\text{НЧ}}$  расчет дает значение на порядок больше измеренного. Еще более значительным становится расхождение при  $T \lesssim 0,2$  К (рис. 18)<sup>62</sup>.

Одной из причин расхождения эксперимента с теорией может являться то, что в работах<sup>54,62</sup> не учитывалась специфика измерения подвижности по поглощению энергии электромагнитных колебаний для электронов, локализованных над гелием. В отличие от трехмерных проводников, где по поверхности могут течь замкнутые токи, благодаря чему электрическое поле практически не приводит к локальным изменениям плотности электронов, последнее должно иметь место для электронов, локализованных над диэлектриком. Если вариации плотности происходят достаточно быст-

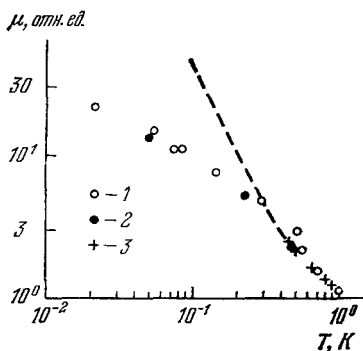


Рис. 18. Зависимость от температуры подвижности электронов над  $^4\text{He}$ , измеренной по потерям ВЧ контура<sup>62</sup>.

1, 2 — измерено на разных частотах (12 и 25 МГц), 3 — результаты, полученные в<sup>54</sup>. Приближающие поля в пределах  $10-50$  В/см, концентрация —  $10^7-10^8$  см $^{-2}$ .

ро, что имеет место при  $\psi = ne\mu/\omega R \gg 1$  ( $R$  — характерный размер системы), то кулоновское поле электронов будет в значительной степени

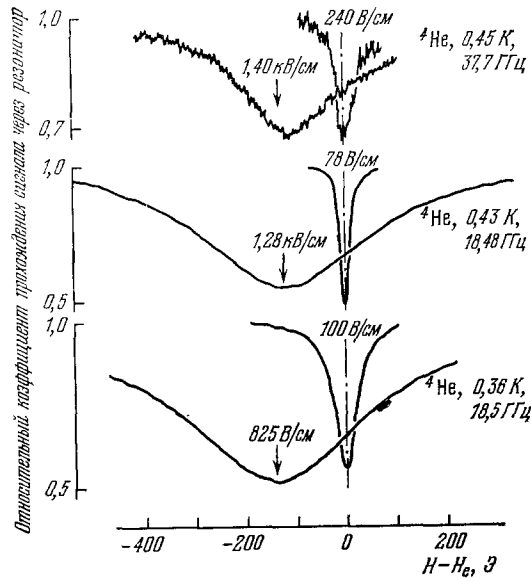


Рис. 19. Запись сигнала циклотронного резонанса в различных условиях проведения опытов, демонстрирующая уширение резонанса и его смещение при увеличении прижимающего поля <sup>20</sup>.

$H_e$  — поле циклотронного резонанса для свободных электронов <sup>20</sup>.

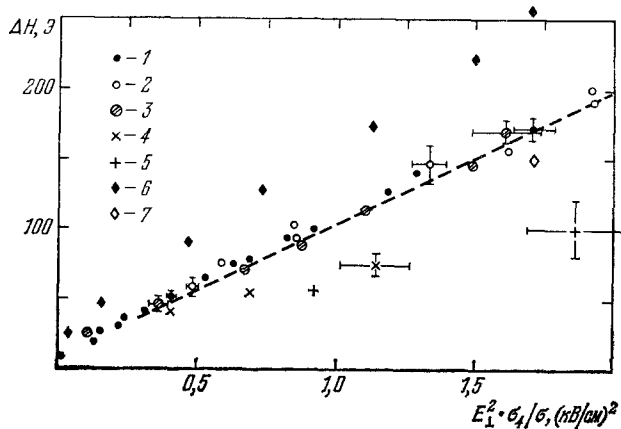


Рис. 20. Зависимости полуширины линии циклотронного резонанса  $\Delta H$  от квадрата прижимающего поля (нормированного на коэффициент поверхностного натяжения <sup>20</sup>).

1, 2, 4—7 — электроны над  $^4\text{He}$ , 3 — над  $^3\text{He}$ , 2 —  $f = 37,7$  ГГц, остальное —  $f = 18,5$  ГГц, 1—3, 6 —  $n = n_{\text{max}}$ ; 4, 5 —  $n \approx (0,2-0,3) n_{\text{max}}$ ; 1—5 —  $T = 0,4$  К, 6 —  $T = 0,74$  К; 7 — значение  $\Delta H \times 0,4$  К/0,74 К для случая 6. Штриховая линия — расчет по формуле (35)  $c_1 p^2 = e\hbar H/c$ .

компенсировать внешнее переменное поле, что приведет к уменьшению высокочастотных потерь.

В условиях эксперимента <sup>62</sup> значение  $\psi \approx 2-20$ , и учет изменения плотности электронов необходим. К сожалению, постановка опыта в <sup>62</sup>

описана весьма кратко, и трудно судить, насколько отмеченное обстоятельство сказалось на результатах, которые в значительной степени зависят от геометрии опыта. Так, например, при строго круговых токах перераспределения зарядов не происходит, и никаких поправок вносить вовсе не надо.

Зависимость  $\mu_{\text{вч}}$  от  $E_{\perp}$  измерялась в <sup>43</sup> в диапазоне полей  $E_{\perp} \leq 200$  В/см. Было получено, что с точностью эксперимента  $\sim 5\%$   $\mu_{\text{вч}} = 9,3 \cdot 10^{11} (230 + E_{\perp})^{-2}$  см<sup>2</sup>/В · с, что практически совпадает с расчетом <sup>61</sup>.

Экстраполяция в сильные поля  $E_{\perp} \gg 230$  В/см приводит с точностью  $\sim 10\%$  к значению, следующему из (37).

При исследовании циклотронного резонанса <sup>20</sup> были обнаружены качественные расхождения между выводами теории <sup>60,61</sup> и экспериментом. В то время как в сильных полях  $E_{\perp}$  согласно (36), (37)  $\tau$  не зависит ни от  $T$ , ни от  $\omega$ , в <sup>20</sup> получено, что определяемое по полуширине линии циклотронного резонанса  $\Delta H$  значение  $\tau = mc/e\Delta H \propto \omega/T$  (рис. 19, 20). Качественно это обстоятельство можно понять, если учесть, что в условиях эксперимента  $\hbar\omega > kT$ . Поэтому заселен всего один нижний уровень Ландау, и все электроны имеют одинаковое характерное значение импульса  $p^2 = e\hbar H/2c$ . Поэтому частота столкновений и обратное ей время релаксации определяется непосредственно из формулы (35) с подстановкой этого значения  $p^2$ . Полученное на основе таких качественных соображений значение  $\Delta H \propto T/\omega$  при больших  $E_{\perp}$  согласуется с экспериментом (рис. 20). Однако это согласие, по-видимому, является случайным, так как изменение концентрации электронов, никак не учитываемое теорией,

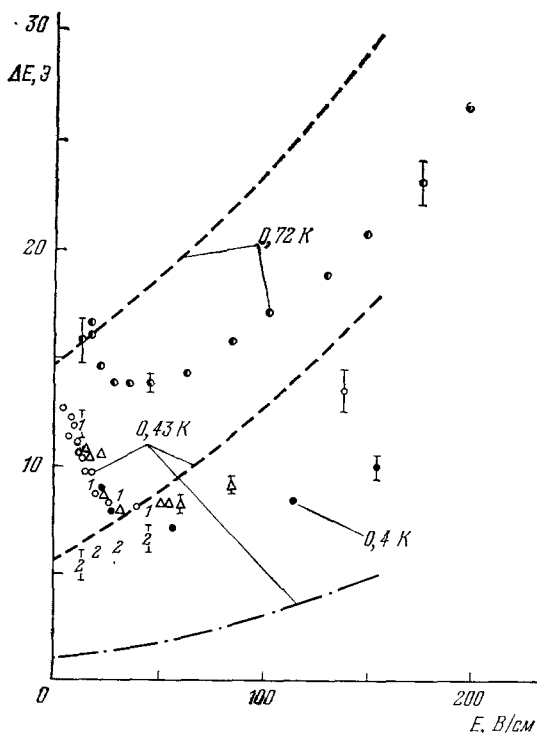


Рис. 21. Зависимость полуширины линии циклотронного резонанса  $\Delta H(E_{\perp})$  для электронов над <sup>4</sup>He при температурах, указанных возле точек <sup>20</sup>.

Различные точки при  $T = 0,43$  К означают результаты опытов, проведенных в разные дни. Цифрами 1 и 2 обозначены значения  $\Delta_1 H$  и  $\Delta_2 H$ , полученные в одном опыте. Штриховая линия — удвоенное значение  $\Delta H$ , рассчитанного по формуле для подвижности из <sup>61</sup>, штрих-пунктирная — по формуле (35) с  $p^2 = e\hbar H/c$ .

приводит к заметному изменению  $\Delta H$ . При этом, судя по отношению  $\Delta H(^3\text{He})/\Delta H(^4\text{He}) = \sigma_4/\sigma_3$ , выполняющемуся при максимальном значении  $n$ , зависимость  $\Delta H(n)$  не может быть описана простым учетом электрон-электронного взаимодействия, рассматривавшегося в гл. 5. Теория циклотронного резонанса, учитывающая электрон-электронное взаимодействие, построена в <sup>63</sup>. Однако полученный в этой работе результат дает более слабую зависимость ширины линии от  $E_{\perp}$  ( $E_{\perp}^{5/4}$ ) и от  $H$  ( $H^{1/2}$ ), чем обнаружено в <sup>20</sup>.

При уменьшении  $E_{\perp}$  измеренные значения  $\Delta H$  оказываются на порядок больше тех, что следуют из формулы (35). Более того, на зависи-

мости  $\Delta H(E_{\perp}, n = E_{\perp}/2\pi e)$  имеется «падающий» участок (рис. 21), в то время как  $\nu(p)$  есть монотонная функция  $E_{\perp}$ . Это обстоятельство качественно можно объяснить тем, что по мере роста  $n$  становятся возможными не все акты рассеяния, допустимые законом сохранения импульса, а только такие, при которых изменение энергии электрона в поле других из-за изменения положения центра орбиты на величину  $\sim \sqrt{\hbar e H}$  меньше энергии риплона. Вытекающее из этого условия значение  $E_{\perp}$  отвечает  $\sim 15$  В/см.

Электрон-риплонное взаимодействие при низких температурах должно определять и ширину линии для переходов в водородоподобном спектре (5). Проведенный в <sup>57</sup> расчет дает для перехода  $1 \rightarrow l$  электронов над <sup>4</sup>He при  $T \approx 0,4$  К величину  $\Delta F_{1l} \approx 3$  МГц, т. е. на порядок меньшую полуширины линии циклотронного резонанса  $\sim 30$  МГц. В противоположность этому, в <sup>20</sup> получено значение  $\Delta F_{1l} = 450 \pm 120$  МГц. Интересно отметить, что это значение того же порядка, что и получаемое экстраполяцией к нулевой плотности пара на рис. 17.

Для электронов над <sup>3</sup>He при  $T \approx 0,36$  К измеренное значение  $\Delta F_{1l} \approx 1,6$  ГГц <sup>20</sup>, что также много больше полуширины линии циклотронного резонанса, определяемой в этом случае рассеянием на газе и равной  $\sim 60$  МГц. В соответствии с результатами <sup>10</sup> (рис. 17), для  $\Delta F_{1l}$  при рассеянии на паре надо ожидать  $\Delta F_{1l} \approx 60$  МГц.

Измерения в <sup>20</sup> проводились в присутствии магнитного поля напряженностью  $\sim 6$  кЭ, направленном по нормали к поверхности жидкости. Однако это поле, по-видимому, не должно сказываться на  $\Delta F_{1l}$  <sup>9</sup>. Независимость ширины линии от концентрации электронов говорит о том, что уширение не связано с электрон-электронным взаимодействием.

Таким образом, как следует из изложенного, теория электрон-риплонного рассеяния нуждается в дальнейшем уточнении, особенно в области малых прижимающих полей.

## 8. ДЕФОРМАЦИОННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ

При наложении прижимающего поля электроны давят на поверхность жидкости, что приводит к ее деформации. В результате динамика электронов претерпевает изменение. Этот вопрос изучался теоретически в работах <sup>64, 65</sup> (см. также <sup>7</sup>), где было показано, что деформация поверхности может приводить к локализации электрона в плоскости с характерным размером области локализации

$$L_{\xi}^2 = \frac{2\pi\sigma\hbar^2}{me^2 E_{\perp}^2}; \quad (38)$$

$L_{\xi} \approx 2 \cdot 10^{-5}$  см при  $E_{\perp} = E_{\perp \text{ крит}} \approx 2$  кВ/см. Выигрыш энергии в связанном состоянии происходит из-за уменьшения энергии электрона в электрическом поле при его опускании вниз вместе с жидкостью. Согласно <sup>7</sup> он равен

$$\delta E = -\frac{e^2 E_{\perp}^2}{4\pi\sigma} \left( \ln \frac{\alpha}{L_{\xi} \sqrt{0.89}} - 1 \right) \quad (39)$$

( $\alpha = \sqrt{\sigma/\rho g}$  — капиллярная постоянная),  $\delta E \sim 0,1$  К при  $E_{\perp} = E_{\perp \text{ крит}}$ . Таким образом, образование «поверхностного аниона» должно наблюдаться лишь при температурах  $T \ll 0,1$  К, при которых эксперименты пока не производились.

Как отмечено в <sup>7</sup>, возникновению поверхностных анионов должно способствовать внешнее магнитное поле, автоматически приводящее при

$\hbar\Omega > kT$  к локализации электронов в области

$$L_H^2 = \frac{2\hbar c}{eH}, \quad (40)$$

или вигнеровская кристаллизация (см. гл. 5).

Поверхностные анионы должны обладать большим своеобразием. В низкочастотном переменном поле они ведут себя как частицы с большой массой и соответственно низкой подвижностью. Возможно, именно этим объясняется очень низкая подвижность  $\sim 10^{-1}$  см<sup>2</sup>/В · с электронов, локализованных над пленкой сверхтекучего гелия<sup>25</sup>. В этом случае образование поверхностных анионов под действием эффективного прижимающего поля подложки (см. гл. 3) весьма вероятно<sup>7</sup>.

В высокочастотных полях, например, при исследовании циклотронного резонанса, движение электрона в сформированной им ямке на поверхности происходит адиабатически, и резонансная частота оказывается выше циклотронной, т. е. эффективная масса электрона меньше  $m$ <sup>46</sup>. Экспериментально этот эффект впервые наблюдался в<sup>15</sup>. Расчет сдвига частоты был выполнен Ченгом и Платцманом<sup>66</sup> и Шикиным<sup>67</sup>. Электрон, находящийся в основном состоянии Ландау с волновой функцией

$$\psi_0 = \frac{1}{L_H \sqrt{\pi}} e^{-r^2/2L_H^2} \quad (41)$$

оказывает на жидкость давление  $eE_{\perp} |\psi_0|^2$ , что приводит к деформации, определяемой уравнением

$$\nabla_{||}^2 \xi = \frac{eE_{\perp} |\psi_0|^2}{\sigma}, \quad (42)$$

где  $\xi$  — изменение нормальной координаты поверхности жидкости. При переходе в состояние  $n=1$  медленно изменяющаяся деформация поверхности остается неизменной, что позволяет вычислить по теории возмущений связанную с ней добавку к циклотронной частоте

$$\hbar\Delta\Omega = \int (|\psi_1|^2 - |\psi_0|^2) eE_{\perp} \xi(r) \cdot 2\pi r dr. \quad (43)$$

Вычисления<sup>66,67</sup> дают

$$\Delta\Omega = \frac{e^2 E_{\perp}^2}{8\pi\sigma\hbar}, \quad (44)$$

или сдвиг резонансной линии по полю

$$\delta H = - \frac{mecE_{\perp}^2}{8\pi\sigma\hbar}. \quad (45)$$

Эта же задача рассматривалась в<sup>63</sup>, где для сдвига частоты получен результат, отличающийся от (44) множителем  $kT/\hbar\Omega < 1$ .

Проведенные в<sup>20</sup> измерения подтвердили качественные закономерности, следующие из (45): независимость  $\delta H$  от  $\Omega$  и квадратичную зависимость от  $E_{\perp}$  (рис. 19, 22). Отношение  $\delta H$  (<sup>3</sup>He)/ $\delta H$  (<sup>4</sup>He)  $\approx \sigma_4/\sigma_3$ , как и следует из теории. Однако численно величина  $\delta H$  оказывается  $\sim$  в пять раз больше даваемой формулой (45) и, в отличие от предсказаний теории<sup>66</sup>, зависит от концентрации электронов. Возможно, последнее обстоятельство дает ключ к проблеме. Действительно, электрон-электронное взаимодействие приводит к дополнительной локализации электронов. В расчете сдвига линии циклотронного резонанса, проведенном в<sup>67,68</sup> для случая  $T=0$ , показано, что электрон-электронное взаимодействие может приводить к значению  $\delta H$ , близкому к полученному экспериментально. Однако



согласно теории появляется зависимость  $\delta H$  ( $\Omega$ ) и более сложная, чем  $E_{\perp}^2$ , зависимость от прижимающего поля.

Стоит отметить еще одну особенность, наблюдаемую в эксперименте — более сложную зависимость  $\delta H$  ( $E_{\perp}$ ) для электронов над  $^4\text{He}$ , чем должно быть по теории  $^{66}$  (рис. 22). Возможно, что это связано с малым затуханием

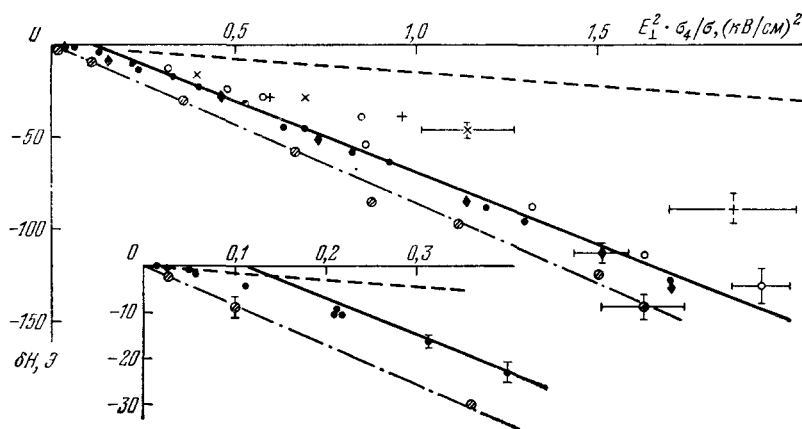


Рис. 22. Зависимость сдвига циклотронного резонанса  $\delta H$  от  $E_{\perp}^2$   $^{20)}$

Обозначения те же, что на рис. 20. Штриховая линия — расчет по формуле (45), сплошная и штрихпунктирная линии проведены через экспериментальные точки для  $^4\text{He}$  и  $^3\text{He}$  соответственно.

риплонов в сверхтекучем  $^4\text{He}$ , так что за времена релаксации электронов равновесное состояние поверхности не успевает установиться. Для электронов над  $^3\text{He}$ , вязкость которого высока, с точностью измерений  $\delta H \propto E_{\perp}^2$ .

## 9. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Так как электроны, локализованные над поверхностью гелия, обладают довольно большими временами релаксации, а число их сравнительно невелико, то уже при малых уровнях поглощаемой ими мощности возможно наблюдение различных нелинейных эффектов  $^7$ . Их исследование представляет в первую очередь самостоятельный интерес. Оно необходимо также для выяснения механизма релаксации энергии и для того, чтобы решить вопрос, относятся ли получаемые результаты в опытах, описанных в гл. 6—8, к равновесным или к перегретым относительно гелия электронам.

Сообщения о наблюдении нелинейных явлений появились еще в  $^{17,43,55}$ . Их изучение в области температур, в которой преобладает электрон-риплонное взаимодействие, было начато в  $^{16}$  и продолжено в  $^{20}$ , при проведении экспериментов по исследованию циклотронного резонанса. Как сообщалось в  $^{17}$ , нагрев электронов измерительным сигналом мощностью  $\sim 10^{-8}$  Вт при  $T \approx 1$  К, т. е. в условиях, когда доминирует рассеяние на газе, приводит к уширению линии циклотронного резонанса. Заметное уменьшение подвижности при  $T \approx 1,5$  К наблюдалось в  $^{55}$  в полях, параллельных поверхности, порядка 0,1—1 В/см, что соответствует рассеиваемой мощности  $\sim 10^{-7} - 10^{-8}$  эрг/с·электрон. Причина этого явления связана с увеличением при нагреве скорости электронов и, тем самым, частоты столкновений. Исходя из формулы (30), легко видеть, что нагрев электронов станет заметным при  $\sqrt{2kT_e/m} \approx \sqrt{\pi\hbar\gamma/2m}$ , т. е. при  $T_e \approx 5$  К. Конкурирую-

щий механизм — переход электронов на возбужденные уровни, на которых частота рассеяния меньше, чем в основном состоянии, оказывается менее эффективным<sup>51</sup>.

Иная картина наблюдается при низких температурах. Как видно из формулы (35), увеличение  $p^2 \propto T_e$  в присутствии прижимающего поля приводит к уменьшению  $\gamma(p)$  и, тем самым, к сужению линии циклотронного резонанса<sup>20</sup> (рис. 23). Одновременно также наблюдается уменьшение

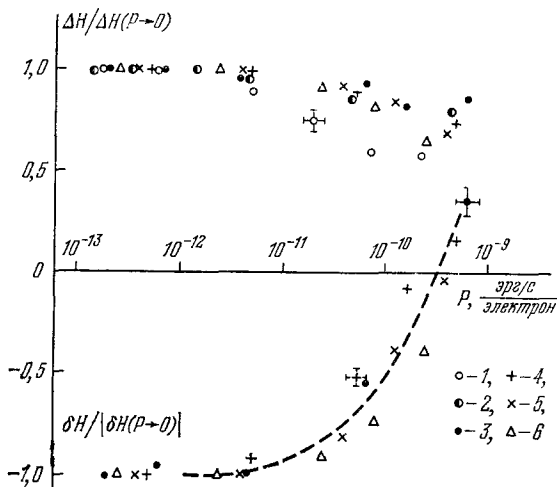


Рис. 23. Зависимость ширины линии  $\Delta H$  и сдвига циклотронного резонанса  $\delta H$  от мощности, поглощаемой в резонансе одним электроном<sup>20</sup>.

$E_{\perp}$  (В/см) = 22 (1), 56 (2), 460 (3), 590 (4), 780 (5) и 1100 (6).

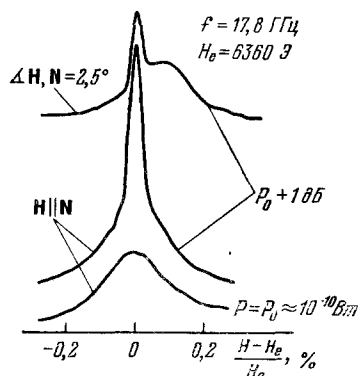


Рис. 24. Зависимость от магнитного поля амплитуды волны частотой 17,8 ГГц, отраженной от резонатора<sup>16</sup>.

Поверхностная плотность электронов  $2,2 \cdot 10^7$  см<sup>-2</sup>,  $E_{\perp} = 20$  В/см. Более узкий пик, появляющийся при увеличении мощности СВЧ сигнала и не изменяющий своего положения при наклоне магнитного поля относительно нормали, связан с циклотронным резонансом на свободных электронах.

сдвига резонансной кривой  $\delta H$ , что можно ожидать в рамках механизма, предложенного в<sup>66,67</sup>: увеличение квантового номера уровня Ландау электронов, участвующих в резонансе, приводит как к уменьшению деформации поверхности, так и к меньшему относительному изменению размеров орбиты при переходе от  $n$  к  $n+1$ . Однако то, что  $\delta H$  при увеличении  $T_e$  не стремится к 0, а меняет знак, остается пока непонятным. Заметим также, что во всех случаях, представленных на рис. 23,  $\Delta H$  при росте  $P$  уменьшается, в том числе при малых  $E_{\perp}$ , когда ширина линии должна согласно (35) определяться членами, возрастающими с температурой<sup>69</sup>.

При малых прижимающих полях уже при уровнях мощности  $\sim 10^{-10}$  эрг/с электрон нагрев электронов может стать столь значительным, что они с уровня  $l = 1$  переходят в непрерывный спектр<sup>16</sup> (рис. 24). При этом их время релаксации резко возрастает, что проявляется в появлении очень узкой резонансной линии, положение которой не зависит от угла между  $\mathbf{H}$  и  $\mathbf{N}$ . Для поверхностных электронов резонансная линия при этом смещается в более сильные поля (рис. 24). Очевидно, что «свободные» электроны должны быть сильно перегреты относительно ванны. Экспериментально наблюдалось изменение ширины линии циклотронного резонанса «свободных» электронов, пропорциональное корню квадратному из

мощности, подводимой к резонатору. Минимальная ширина составила  $\sim 0,15$  Э, что соответствует  $\tau \approx 10^{-6}$  с (сравни с  $\sim 8$  Э для поверхностных электронов). Расчет по формуле (29) показывает, что даже при  $T_e \approx 10^4$  К и  $T = 0,4$  К для рассеяния на атомах пара должно быть  $\tau \approx 5$  мкс и  $\Delta H \approx \approx 0,015$  Э.  $T_e$  не может превышать  $10^4$  К, так как при большей энергии

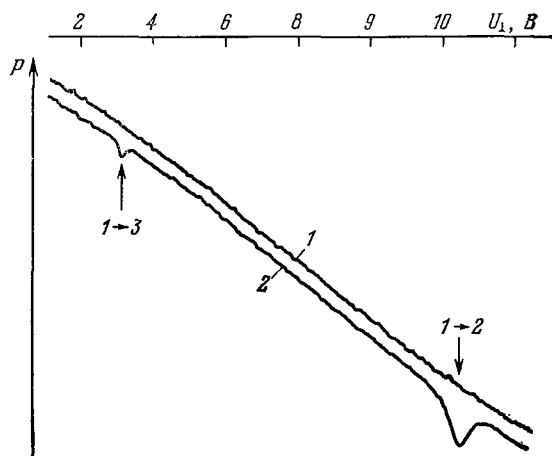


Рис. 25. Зависимость от удерживающего потенциала сигнала частоты 18,5 ГГц, проходящего через резонатор, при циклотронном резонансе электронов над  $^3\text{He}$ .

1 — без сигнала СВЧ накачки, 2 — при подаче в резонатор СВЧ мощности на частоте 108 ГГц. Стрелки 1  $\rightarrow$  2 и 1  $\rightarrow$  3 показывают резонансы, связанные с переходом электронов из основного в соответствующее возбужденное состояние.

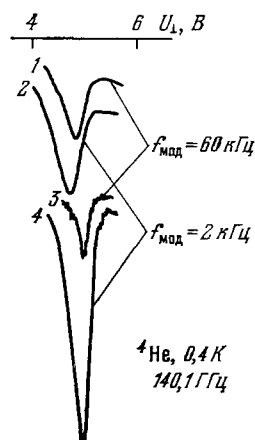


Рис. 26. Зависимость от удерживающего потенциала постоянной (1, 2) и переменной составляющей (3, 4) сигнала фотрезонанса при различных частотах модуляции  $^{20}$ .

При записи кривой 4 усиление было в три раза меньше, чем при записи кривой 3.

электроны преодолевают энергетический барьер на границе и уйдут из прибора, чего в опытах <sup>16</sup> не наблюдалось. Поэтому можно предположить, что горячие электроны рассеиваются в основном друг на друге и на колебаниях поверхности гелия. Для выяснения этого вопроса требуются дополнительные исследования.

Аналогичное явление — разогрев электронов и уход их с поверхностных уровней наблюдался в <sup>9</sup> при изучении поверхностных плазмонов (22). Теория горячих электронов предложена в <sup>70-72</sup>.

Сделать количественные выводы из результатов исследования нагрева электронов измерительным сигналом трудно, так как неизвестна температура нагретых электронов. Более информативны эксперименты, в которых измерительный сигнал имеет низкий уровень, гарантирующий отсутствие заметного нагрева, а неравновесность в системе электронов создается наложением высокочастотного поля, вызывающего резонансные переходы между уровнями в водородоподобном спектре (5). Нелинейный фотрезонанс такого типа изучен в <sup>20</sup>. Схема опыта такова: на частоте 18,5 ГГц велось наблюдение циклотронного резонанса, причем магнитное поле замораживалось при значениях, соответствующем максимуму поглощения. Дополнительно в резонатор подавался сигнал частоты  $F$  в диапазоне 130—170 ГГц. При изменении прижимающего поля наблюдалось возрастание циклотронного поглощения при  $F = F_{1l}$  (рис. 25). Использование модуляции по амплитуде сигнала на частоте  $F$  и выделение в измеряемом сигнале переменной составляющей на частоте модуляции  $f_{\text{мод}}$  позволило измерить время релаксации неравновесного состояния  $\tau_E$ . Так как отклик на частоте

$f_{\text{мод}}$  при  $(2\pi f_{\text{мод}} \tau_E)^{-1} \ll 1$  пропорционален этой величине, то по записям типа представленной на рис. 26, установлено, что  $\tau_E = 13 \pm 6$  мкс.

Если зафиксировать  $E_{\perp}$  таким, чтобы амплитуда переменного сигнала фоторезонанса была максимальной, то тогда ее зависимость от магнитного поля, как нетрудно видеть, описывается формулой

$$A(H) \propto \frac{1}{\Delta_1 H (1 + \mu_i^2)} - \frac{1}{\Delta_1 H (1 + \mu_1^2)}, \quad (46)$$

$$(\mu_i = e\tau_i (H - H_{\text{рез}})/mc),$$

т. е. представляет собой разность двух резонансных линий с шириной  $\Delta_1 H$  для возбужденных электронов и  $\Delta_1 H$  — для электронов на основном уровне. Измеряя  $\Delta_1 H$  в независимом опыте по ширине линии циклотронного резонанса, по записям типа представленных на рис. 27, можно определить  $\Delta_2 H$ . Полученные значения  $\Delta_2 H$  приведены на рис. 21. Согласно

рис. 27  $\Delta_3 H \approx \Delta_2 H$ . Для электронов над  ${}^3\text{He}$  при  $E_{\perp} \approx 45$  В/см получено  $\Delta_3 H \approx (0,9 \pm 0,1) \Delta_1 H$ .

Таким образом, ширина линии циклотронного резонанса при возбуждении перехода  $1 \rightarrow 2$  совпадает с шириной линии при возбуждении перехода  $1 \rightarrow 3$ . В то же время, учитывая, что электроны в состоянии с  $l = 3$  находятся от поверхности значительно дальше, чем в состоянии с  $l = 2$  (см. гл. 2), можно было бы ожидать, что их взаимодействие с рипплонами будет значительно ослаблено.

То, что сужения линии циклотронного резонанса не наблюдается, по-видимому, свидетельствует о релаксации электрона в основное состояние по  $z$ , на уровень Ландау  $n \approx \approx 2\pi F_{11}/\Omega$ , закороткое время, определяемое столкновениями с потерей импульса. (Напомним, что для

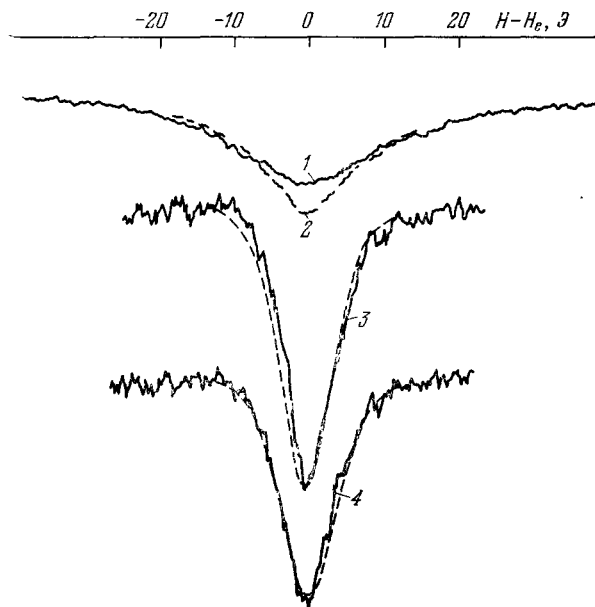


Рис. 27. Зависимость от магнитного поля сигнала, прошедшего через резонатор ( $I$ )<sup>20</sup>.

2 — то же, при подаче сигнала на качки на частоте 135 ГГц, вызывающей переходы  $1 \rightarrow 2$ ; 3, 4 — зависимость от  $H$  переменной составляющей сигнала фоторезонанса при  $F = 135$  ГГц (переход  $1 \rightarrow 2$ ) и 169,2 ГГц (переход  $1 \rightarrow 3$ ). Штриховая линия — расчет формы линии при  $\Delta_2 H / \Delta_1 H = 0,5$  и  $\Delta_3 H / \Delta_1 H = 0,5$ ,  $E_{\perp} = 12,8$  В/см. Температура  ${}^4\text{He}$  0,4 К.

электронов над  ${}^4\text{He}$ , в условиях опыта<sup>20</sup>,  $F_{12}$  близко к  $F_{13}$ .) С такой схемой релаксации коррелирует и результат, полученный для электронов над  ${}^3\text{He}$ : при рассеянии на газе расчетная ширина линии циклотронного резонанса в состоянии с  $l = 3$  в 5,6 раз уже, чем в состоянии с  $l = 1$ . В этом случае для ширины линии циклотронного резонанса следует ожидать примерно того же значения, как и для резонанса при нагреве электронов до температуры  $kT \approx n\hbar\Omega$ . Примем во внимание это обстоятельство, а также то, что при возбуждении фоторезонанса ширина линии циклотронного резонанса уменьшается  $\sim$  в два раза (см. рис. 26). Тогда из рис. 23 по зависимости  $\Delta H(P)$  при  $E_{\perp} = 22$  В/см получим, что электроны нагреваются на

$\sim 2\pi\hbar F_{12}/k \approx 6$  К при поглощении мощности  $\sim 10^{-10}$  эрг/с · электрон. Согласно теоретической оценке, сделанной в <sup>68</sup> исходя из изменения  $\delta H(P)$ , перегрев еще на порядок меньше. Считая перегрев пропорциональным мощности (т. е. время релаксации не зависящим от температуры), воспользовавшись уравнением баланса энергии, получим  $\tau_E \approx 10^{-5}$  с, что, учитывая грубость оценки, прекрасно совпадает с приведенным выше значением  $\tau_E$ .

В работах <sup>68,73</sup> было показано, что рассеяние на риплонах с  $q \approx \approx p_H/\hbar \approx 10^5$  см<sup>-1</sup>, имеющих частоты  $\omega \sim 3 \cdot 10^7$  с<sup>-1</sup>  $\ll \Omega \approx 10^{11}$  с<sup>-1</sup>, не может вызвать переходы между уровнями Ландау. Поэтому релаксация энергии связана с рождением двух риплонов с  $\omega_q = \Omega/2$  и противоположно направленными импульсами. Этот механизм приводит к независимому от прижимающего поля времени релаксации по энергии, что не противоречит эксперименту (см. рис. 23), если считать, что одинаковый нагрев приводит при различных  $E_\perp$  к одинаковому относительному изменению  $\delta H$  и  $\Delta H$ .

Численные оценки в <sup>73</sup> дают для двухриплонных процессов  $\tau_E \approx \approx 10^{-6}$  с, что, учитывая довольно большую погрешность измерений и зависимость расчета от модели, можно считать не противоречащим опыту.

Существует еще один круг работ, связанных с проблемой исследования процессов релаксации энергии поверхностных электронов. Это — исследование времени жизни электронов в связанном состоянии после выключения прижимающего поля. Надо отметить, что уже в идеальном случае бесконечной системы и строго однородного прижимающего поля установить связь между измеренным временем жизни  $\tau$  и процессами релаксации весьма не просто. При испарении электронов их температура должна значительно падать, что может привести к изменению наблюдаемых  $\tau$  на несколько порядков величины <sup>74</sup>.

В реальных условиях эксперимента при ограниченных размерах прибора в момент выключения  $E_\perp$  из-за кулоновского взаимодействия электронов возникают значительные касательные поля величины  $\sim E_\perp$ . Под действием этих полей, составляющих в реальных условиях вольты/см, благодаря высокой подвижности  $10^5 - 10^7$  см<sup>2</sup>/В · с за характерные времена  $\tau \approx 10^{-4} - 10^{-5}$  с, наблюдаемые в опытах подобного рода электроны должны успевать уходить на стенку. Если даже этого не произойдет, то весьма велика вероятность их разогрева касательным полем <sup>75</sup>. Эти паразитные явления зависят от многих факторов, в частности, от длительности фронта импульса напряжения при выключении  $E_\perp$ . Нам не известно ни одной публикации, в которой постановка опыта была бы описана достаточно подробно, чтобы можно было оценить, какие именно процессы отражают полученные в ней результаты. Поскольку даже в работах одних и тех же авторов (например, <sup>73,76</sup>) измеренные значения  $\tau$  отличаются на один-два порядка, то представляется преждевременным обсуждать выводы, делаемые на основании подобных опытов.

## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из содержания обзора, исследование двумерной системы электронов, локализованных над жидкими и твердыми криогенными диэлектриками, за десять лет, прошедших со дня открытия этого явления, продвинулось довольно далеко. Эксперименты, проведенные с использованием жидкого гелия, дают хорошую базу как для дальнейшего развития теории, так и для расширения количества исследуемых объектов. Эта работа уже началась, и можно ожидать в дальнейшем наблюдения интересных новых явлений.

Одна из задач, на которые хотелось бы обратить внимание, это исследование поведения спина электрона. Исходя из общих соображений, можно ожидать, что времена спиновой релаксации в этом случае будут чрезвычайно велики, и намагниченность электронов будет сохраняться долгое время. Основанием для такого предположения могут служить эксперименты по наблюдению парамагнитного резонанса отрицательных ионов в жидком гелии<sup>77</sup>. В этих опытах для времени поперечной спиновой релаксации получено  $\sim 1$  и  $> 5$  мкс для  $^3\text{He}$  и  $^4\text{He}$ . Так как расстояние от поверхностных электронов до атомов на порядок больше, чем радиус ионов, то эти времена должны сильно возрасти. Однако этот вопрос до сих пор никем не рассматривался, и отсутствуют даже грубые оценки длительности времен установления равновесия спиновой системы.

Еще на одно явление, которое, возможно, связано с поверхностными электронами, обратил внимание М. С. Хайкин<sup>23</sup>. При радиоастрономическом исследовании туманностей наблюдается значительное по интенсивности излучение на частоте, близкой к ожидаемой для переходов в спектре электронов над водородом. Учитывая, что относительное содержание водорода в космическом пространстве весьма высоко, это совпадение заслуживает внимания.

Представляется перспективным дальнейшее исследование нелинейных эффектов. В частности, при фотовозбуждении электронов в непрерывный спектр можно ожидать сужения линии циклотронного резонанса до  $|\Delta H/H| \leq 10^{-7}$ , что позволит провести работу по уточнению значений мировых констант<sup>78</sup>.

Этот перечень возможных направлений исследования поверхностных электронов несколько не претендует на полноту. Не исключено, что в дальнейшем проявятся совершенно неожиданные их свойства. Надо надеяться, что изучение этого красивого явления природы будет продолжаться и обогащать наши знания.

Институт физических проблем  
АН СССР

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Cole M. W., Cohen M. H. — Phys. Rev. Lett., 1969, v. 23, p. 1238.
2. Шикин В. Б. — ЖЭТФ, 1970, т. 58, с. 1748.
3. Berthold J. E., Hanson H. N., Maris H. J., Seidel G. M. — Phys. Rev. Ser. B, 1976, v. 14, p. 1902.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. — М.: Физматгиз, 1959. — с. 60.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. — Механика. — М.: Наука, 1965. — с. 35.
6. Cole M. W. — Rev. Mod. Phys., 1974, v. 46, p. 451.
7. Шикин В. Б., Монарха Ю. П. — ФНТ, 1975, т. 1, с. 957.
8. Crandall R. S. — Surface Sci., 1976, v. 58, p. 266.
9. Grimes C. C. — Ibid., 1978, v. 73, p. 379.
10. Grimes C. C., Brown T. R., Burns M. L., Zipfel C. L., — Phys. Rev. Ser. B, 1976, v. 13, p. 140.
11. Woolf M. A., Rayfield G. W. — Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 235.
12. Kierstead H. A. — J. Low Temp. Phys., 1976, v. 24, p. 497.
13. Володин А. П., Эдельман В. С. — Письма ЖЭТФ, 1979, т. 30, с. 668.
14. Cole M. W., — Phys. Rev. Ser. B, 1970, v. 2, p. 4239.
15. Эдельман В. С. — Письма ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 510.
16. Эдельман В. С. — Ibid, 1977, т. 25, с. 422.
17. Brown T. R., Grimes C. C. — Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, p. 1233.
18. Sommer W. T. — Ibid., 1964, v. 12, p. 271.
19. Эдельман В. С. — Письма ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 647.
20. Эдельман В. С. — ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 673.
21. Трояновский А. М., Володин А. П., Хайкин М. С. — Письма ЖЭТФ, 1979, т. 29, с. 65.

22. Трояновский А. М., Володнн А. П., Хайкин М. С.— Ibid., с. 421.
23. Хайкин М. С.— Ibid., 1978, т. 27, с. 706.
24. Рыбалко А. С., Ковдря Ю. З.— ФНТ, 1975, т. 1, с. 1037.
25. Володнн А. П., Хайкин М. С., Эдельман В. С.— Письма ЖЭТФ, 1976, т. 23, с. 524.
26. Говорков С. А., Тулин В. А.— ФНТ, 1977, т. 3, с. 1093.
27. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика — М.: Физматгиз, 1963.—с. 209.
28. Шикин В. Б. Автореферат докторской диссертации.—М.: ИФП АН СССР, 1973.
29. Горьков Л. П., Черникова Д. М.— Письма ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 119; ДАН СССР, 1976, т. 228, с. 829.
30. Черникова Д. М.— ФНТ, 1976, т. 2, с. 1374.
31. Everitt C. W., Atkins K. R., Denenstien A.— Phys. Rev. Ser. A, 1964, v. 136, p. 1494.
32. Володнн А. П., Хайкин М. С., Эдельман В. С.— Письма ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 707.
33. Шикин В. Б.— Ibid., 1978, т. 27, с. 44.
34. Wanner M., Leiderer P.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 315.
35. Leiderer P., Wanner M.— Phys. Lett. Ser. A, 1979, v. 73, p. 189.
36. Crandall R. S.— Phys. Rev. Ser. A, 1973, v. 8, p. 2136.
37. Platzman P. M., Fukuyama H.— Ibid. Ser. B, 1974, v. 10, p. 3150.
38. Nagai T., Onuki A.— J. Phys. Ser. C, 1978, v. 11, p. L681.
39. Hockney R. W., Brawn T. R.— Ibid., 1975, v. 8, p. 1813.
40. Huang W., Rudnick J., Lahm A. J.— J. Low Temp. Phys., 1977, v. 28, p. 21.
41. Монарха Ю. П., Шикин В. Б.— ЖЭТФ, 1975, т. 68, с. 1423.]
42. Fukuyama H.— Sol. State Comm., 1975, v. 17, p. 1323.
43. Grimes C. C., Adams G.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 145.
44. Grimes C. C., Adams G.— Surface Sci., 1976, v. 58, p. 292.
45. Zipfel C. L., Brown T. R., Grimes C. C.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 1750.
46. Шикин В. Б.— Письма ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 328.
47. Fisher D. S., Halperin B. I., Platzman P. M.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 798.
48. Grimes C. C., Adams G.— Ibid., p. 795— Yamada Conference II on Electronic Properties of Two-dimensional Systems: 3rd International Conference, Japan, 1979 (материалы конференции будут также опубликованы в журнале «Surface Science»).
49. Рыбалко А. С., Есельсон Б. Н., Ковдря Ю. З.— ФНТ, 1979, т. 5, с. 947.
50. Монарха Ю. П.— Ibid., с. 950.
51. Crandall R. S.— Phys. Rev. Ser. A, 1972, v. 6, p. 790; Ser. B, 1975, v. 12, p. 119.
52. Bederson B., Kieffer L. J.— Rev. Mod. Phys., 1971, v. 43, p. 601.
53. Sommer W. T., Tanner D. J.— Phys. Rev. Lett., 1971, v. 27, p. 1345.
54. Рыбалко А. С., Ковдря Ю. З., Есельсон Б. Н.— Письма ЖЭТФ, 1975, т. 22, с. 569.
55. Bridges F., McGill J. F.— Phys. Rev. Ser. B, 1977, v. 15, p. 1324.
56. Eggarter T. P., Cohen M. H.— Phys. Rev. Lett., 1971, v. 27, p. 129.
57. Ando T.— J. Phys. Soc. Japan, 1978, v. 44, p. 765.
58. Atkins K. R.— Can J. Phys., 1953, v. 31, p. 1165.
59. Shikin V. B., Monarkha Yu. P.— J. Low Temp. Phys., 1974, v. 16, p. 193.
60. Монарха Ю. П.— ФНТ, 1976, т. 2, с. 1232.
61. Platzman P. M., Beni G.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 626.
62. Есельсон Б. Н., Рыбалко А. С., Ковдря Ю. З., Голуб А. А., Соколов С. С.— В кн. Материалы 20-го Всесоюзного совещания по физике низких температур.— М., Черногловка, 1978.— Ч. II., с. 280.
63. Дыкман М. И., Хазан Л. С.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 1504.
64. Шикин В. Б.— Ibid., 1971, т. 60, с. 713.
65. Шикин В. Б., Монарха Ю. П.— Ibid., 1973, т. 65, с. 751.
66. Cheng A., Platzman P. M.— Sol. State Comm., 1978, v. 25, p. 813.
67. Шикин В. Б.— ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 717.
68. Monarkha Yu. P., Shikin V. B.— Цит. в <sup>48</sup>, сб. Р. 555.
69. Монарха Ю. П., Соколов С. С.— ФНТ, 1978, т. 4, 685.
70. Шикин В. Б.— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, 425.
71. Aoki T., Saitoh M.— J. Phys. Soc. Japan, 1979, v. 46, p. 423.

72. Saitoh M., Aoki T.— Цит. в <sup>48</sup> сб.
73. Монарха Ю. П.— ФНТ, 1978, т. 4, с. 1093.
74. Crandall R. S.— Phys. Rev. Ser. A, 1974, v. 9, p. 1297.
75. Iye Y., Kōno K., Kajita K., Sasaki W.— J. Low Temp. Phys., 1979, v. 34, p. 539.
76. Kōno K., Iye Y., Kajita K., Kobayashi S., Sasaki W.— Цит. в <sup>48</sup> сб.
77. Reichert J. F., Jarosik N., Herrick R., Andersen J.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 1359.
78. Эдельман В. С.— УФН, 1978, т. 126, с. 694.