1980 г. Март *Том 130, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

ЦВЕТОВАЯ СИММЕТРИЯ, РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА И СТАБИЛЬНОСТЬ ПРОТОНА В ЕДИНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЯХ*)

М. Гелл-Манн, П. Рамон, Р. Сланский

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Квантовая теория поля с локальной калибровочной инвариантностью, по-видимому, является аппаратом, пригодным для описания динамики всех взаимодействий элементарных частиц. Хорошо известно, что впервые этот подход применялся для описания электромагнитных взаимодействий: локальная фазовая инвариантность лагранжиана позволяет построить перенормируемую квантовую теорию поля, которая поразительно хорошо согласуется с опытом. Локальная фазовая инвариантность была обобщена на неабелевы калибровочные группы в работах Янга и Миллса [1] и Шоу [2] (см. также работы Утиямы [3], Гелл-Манна и Глэшоу [4] и Киббла [5]). Хотя сразу стало ясно, что теории Янга-Миллса математически красивы и физически поучительны, было непонятно, как построить разумную модель, в которой векторные бозоны (кроме фотона) приобрели бы массы, не разрушая однако ее (в то время предполагаемой) перенормируемости. Затем в работах Хиггса [6,7] и других авторов было открыто, что спонтанное нарушение локальной симметрии не требует голдстоуновского безмассового бозона, как в обычных теориях **). Когда квадратичная часть лагранжиана вновь диагонализируется калибровочным преобразованием, степень свободы, которая, как предполагалось, должна была бы быть голдстоуновским бозоном, становится частью поля массив-

*) Gell-Mann M., Ramond P., Slansky R. Color Embeddings, Charge Assignments, and Proton Stability in Unified Gauge Theories.—Rev. Mod. Phys., 1978, v. 50, No. 4, pp. 721—744.—Перевод М. С. Маринова.

**) Теорема Голдстоуна обсуждалась в работах Голдстоуна [8], Намбу и Иона-Ласинио [9], Голдстоуна, Салама и Вейнберга [10]. О механизме Хиггса см. работы Хиггса [6,7], Энглерта и Брута [11], Гуральника, Хагена и Киббла [12].

ного векторного бозона, связанной с продольной поляризацией его спина. Позднее 'т Хоофт [13] дал принципиально важное доказательство того, что спонтанно нарушенные теории Янга — Миллса действительно перенормируемы.

Выводя локальную калибровочную инвариантность за рамки присущей электродинамике группы U_1, можно построить разумные модели слабых и электромагнитных взаимодействий, в которых бозоны, переносящие слабые взаимодействия, приобретают большие массы (порядка 100 ГэВ) с помощью механизма Хиггса (Вейнберг [14], Салам [15]). Существование на опыте заряженных и нейтральных слабых токов наряду с электромагнитным током указывает, что локальная симметрия должна обладать по меньшей мере группой $SU_2 \times U_1$ (см. работу Глэшоу [16]). В общем, метод объединения электромагнитных и слабых взаимодействий, основанный на лагранжиане Янга — Миллса, весьма привлекателен. Однако теория, использующая группу $SU_2 \times U_1$, несколько неизящна. Помимо двух калибровочных взаимодействий, связанных с двумя простыми компонентами калибровочной группы, остается еще выбор связанных с частицами полей, их представлений, а также других произвольных параметров лагранжиана, инвариантного относительно группы $SU_2 \times U_1$. Эта теория к тому же игнорирует сильные взаимодействия. Тем не менее она позволила привести в порядок огромное количество экспериментальных данных.

Формулировка теории типа Янга — Миллса для сильных взаимодействий очень сильно упрощается, если признать фундаментальную роль кварков и глюонов. В этой статье мы придерживаемся точки зрения квантовой хромодинамики (КХД) *), калибровочная группа, связанная с сильными взаимодействиями, называется цветовой группой. Калибровочная цветовая симметрия должна обладать по меньшей мере группой SU_3. (Выбор SU_3 решает проблему со статистикой для основных состояний барионов, дает правильную вероятность распада с дробно-заряженными кварками для π^0-мезона и обеспечивает грубое согласие с наблюдаемым отношением R вероятностей рождения адронов и мюонов в e^+e^--аннигиляции.) В КХД симметрия SU_3^c не нарушена, теория — асимптотически свободна, а цвет, по предположению, всегда связан. (На самом деле связывание цвета может быть лишь приближенным, но нам сейчас проще всего полагать, что в природе наблюдаются лишь цветовые синглеты.)

В этой статье мы пренебрегаем эффектами гравитации, хотя в конце гл. 1 имеются некоторые краткие замечания о суперсимметрии и супергравитации.

Любая гипотетическая теория типа Янга — Миллса, описывающая электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия, должна обладать локальной симметрией относительно группы, непременно включающей прямое произведение $G^w \times SU_3^c$:

$$G \supseteq G^w \times SU_3^c, \tag{1.1}$$

где группа $G^w \supseteq SU_2 \times U_1$ связана с бозонами небольших масс, переносящими слабые взаимодействия, и фотоном. Мы считаем, что фотон связан

*) Первоначально КХД была введена в работе Намбу [17] в варианте, основанном на представлении о несвязанных кварках Хана и Намбу [18] с целыми зарядами. Дробно-заряженным кваркам обычно приписывали парастатистику, как описано в работе Гринберга [19]. Позднее в работах Фрицша и Гелл-Манна [20] и Бардина, Фрицша и Гелл-Манна [21] было показано, что понятие цвета, если изолированные частицы могут быть лишь цветовыми синглетами, приводит к тому же эффекту, что и парастатистика, если считать, что изолированные частицы — всегда бозоны или фермионы. Первые обсуждения КХД со связанным цветом см. в работах Фрицша и Гелл-Манна [22], Фрицша, Гелл-Манна и Лейтвилера [23], Вейнберга [24,25]. Асимптотическая свобода КХД была установлена в работах Полицера [26] и Гросса и Вильчека [27].

с одним из токов группы G^w и соответствующая группа U_1, разумеется, не нарушена. В минимальной схеме с группой $SU_2 \times U_1 \times SU_3$ имеются три независимые константы связи и большой произвол, связанный с включением фермионов и других частиц в представления группы G. С теоретической точки зрения эта неопределенность в формулировке теории может показаться неприемлемой ценой за экономию количества векторных бозонов. Это положение проще всего исправить, расширив группу G так, чтобы существовала единая константа связи (см. работы Джорджи и Глэшоу [28] и Фрицша и Минковского [29]) и так, чтобы все элементарные фермионы (кварки и лептоны) содержались в небольшом числе неприводимых представлений группы G. В последней работе [29] авторы исследовали многие из рассмотренных здесь случаев, но наше обсуждение несколько более систематично.

В настоящей статье предполагается, что G — группа Ли, (а не, например, градуированная группа Ли), что G содержит $SU_2 \times U_1 \times SU_3^c$ и что существует лишь одна независимая калибровочная константа взаимодействия. Таким образом, группа G должна быть простой или полупростой вида $G \times G$, где G — простая группа и имеется симметрия относительно некоторого глобального отражения, в силу которой (неперенормированные) калибровочные константы взаимодействия для двух простых фактор-групп должны быть равны. Требование, чтобы группа G была проста, фиксирует большое количество параметров и соотношений, которые подлежали экспериментальному определению в модели с группой $SU_2 \times U_1 \times SU_3^c$, но оно также подразумевает наличие новых взаимодействий в природе, которые до сих пор не наблюдались.

Примем вначале, что полная калибровочная группа G проста, оставив на будущее обобщение, связанное с теориями типа $G \times G$. Группа симметрии по ароматам (flavor), которая генерируется токами, связанными с бесцветными бозонами, должна включать в себя G^w: $G^{fl} \supseteq G^w$. Таким образом, максимальная подгруппа G имеет вид

$$G \supset G^{fl} \times SU_3^c. \tag{1.2}$$

Одна из целей настоящей статьи состоит в том, чтобы перечислить погружения SU_3^c в G и классифицировать структуры группы G^{fl}. Отметим, что если группа G^{fl} больше, чем $SU_2 \times U_1$, то новые генераторы связаны с бозонами, переносящими еще не наблюдавшиеся взаимодействия. Бозоны, связанные с дополнительными ароматами, либо очень тяжелы, либо не имеют заметной связи с легкими, известными в настоящее время, частицами. Среди прочих новых бозонов, присущих подобным унификациям, могут присутствовать «диотоны», цветовые октеты, переносящие также аромат, лептокварки, переводящие кварки в лептоны, и дикварки, переводящие кварки в антикварки. Очевидно, что единые теории такого типа часто предсказывают нестабильность протона. Большая часть нашей статьи посвящена этой проблеме.

Поля, входящие в лагранжиан, сопоставлены представлениям группы G. Представление для фермионов со спином 1/2 должно включать лептоны (1^c), кварки (3^c) и антикварки ($\bar{3}^c$); современные экспериментальные данные не указывают на существование новых фермионов, преобразующихся по более высоким представлениям группы SU_3^c. Теоретических возражений против введения фермионов с более сложными цветовыми свойствами нет, и такие фермионы обычно присутствуют в суперсимметричных теориях. Тем не менее обычно полагают, что некоторый набор фермионов (которые могут, например, иметь спин 1/2) принадлежит к представлению, включающему лишь 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$. В этой статье мы, как правило, придерживаемся более ограниченного предположения, что цвета фермионов со спином 1/2 связаны лишь с представлениями 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$. Задача определения всех включений группы SU_3^c в любую простую группу G, объемлющую прямое произведение $SU_2 \times U_1 \times SU_3^c$ при условии, что существует по меньшей мере одно нетривиальное представление, содержащее лишь 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$, решена в гл. 2. Мы обсуждаем также структуру G^{fl} и находим все прочие представления G, удовлетворяющие тем же ограничениям на цветовой состав. Ниже приводится детальный обзор этих результатов, а гл. 2 можно рассматривать как математическое приложение.

Процедура погружения существенно упрощается теоремой, которая доказана в приложении: если для данного погружения SU_3^c в G цветовой состав любого нетривиального представления f ограничен 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$, то «фундаментальное» представление группы G должно также содержать лишь 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$. Под фундаментальным представлением мы понимаем определяющие представления классических групп и нетривиальные представления исключительных групп с наименьшей размерностью. Разумеется, ограничение на цвета, входящие в представление f и в фундаментальное представление, может быть ослаблено введением, при желании, мультиплетов 6^c, $\bar{6}^c$, 8^c и т. п., но здесь это не сделано. При этом погружение определяется построением присоединенного представления, которое всегда легко получить из фундаментального. Так как погружение имеет вид $G \supset G^{\mathrm{fl}} \times SU_3^c$, то бесцветная часть присоединенного представления определяет группу ароматов, а остальные бозоны также перечисляются. Мы строим все прочие представления группы G с указанным ограничением по цветам и помещаем фермионы в эти представления или их прямые суммы.

Структура группы G^{fl} подпадает под одну из четырех категорий. Мы суммируем результаты гл. 2 в терминах этих категорий.

Класс I: $G^{\mathrm{fl}} = G_l \times G_q \times U_1$, где G_l — нетривиальная простая фактор-группа, преобразующая между собой цветовые синглеты, а G_q — другая нетривиальная простая фактор-группа, которая преобразует цветовые триплеты (или антитриплеты) в фундаментальном представлении *). Группа U_1 отличает 1^c от 3^c и (или) $\bar{3}^c$. Это погружение осуществляется, только если G — классическая группа, т. е. если G — унитарная SU_n, ортогональная SO_n или симплектическая Sp_{2n} группа. Лишь фундаментальное представление группы G удовлетворяет ограничению на цветовой состав: это представление n в случае SU_n, n в случае SO_n (называемое также векторным представлением) и $2n$ в случае Sp_{2n}. Таким образом цветовые синглеты в фундаментальном представлении можно считать лептонами, а цветовые триплеты — кварками (см. случаи 1, 4 и 6 в гл. 2). Так как преобразования кварков и лептонов коммутируют, то наблюдаемая универсальность электромагнитных и слабых зарядов кварков и лептонов должна возникать как следствие механизма нарушения симметрии. Представления n группы SO_n и $2n$ группы Sp_{2n} являются самосопряженными и потому содержат одинаковые количества триплетов 3^c и антитриплетов $\bar{3}^c$. Для погружения этого класса представление n группы SU_n комплексно и содержит 1^c и только 3^c.

Класс II. $G^{\mathrm{fl}} = G_l \times G_q \times G_{\bar{r}} \times U_1 \times U_1$. Это возможно лишь для $G = SU_n$, причем фермионы содержатся в представлении n: триплеты 3^c кварков типа q и $\bar{3}^c$ антикварков типа $\bar{r}$. Две группы U_1 различают 1^c,

*) Часто мы обсуждаем группу $SO_4 \sim SU_2 \times SU_2$, как если бы это была простая (под)группа.

3^c и $\bar{3}^c$. Это погружение весьма похоже на случай класса I, но представляет некоторый дополнительный интерес, так как возникает искушение расширить цветовую группу до $SU_3 \times SU_3$ (см. случай 3 в гл. 2).

Класс III. $G^{fl} = G_{q+l} \times U_1$, где G_{q+l} преобразует бесцветную часть фундаментального представления, но фермионы входят в другое представление, так что одна и та же простая фактор-группа G_{q+l} преобразует и кварки, и лептоны. Здесь имеется два случая.

Если $G = SU_n$, то фермионы могут входить в неприводимые представления, построенные из $(n \times n \times \ldots \times n)_A$, где $(\ldots)_A$ означает антисимметризацию кронекеровского произведения. За исключением случая $(n^{n/2})_A$ при четном n все эти представления комплексны (см. случай 2 в гл. 2).

Если $G = SO_m$, то f может быть спинорным представлением. Для SO_{2n+1} имеется единственный самосопряженный спинор размерности 2^n. Группа SO_{4n} имеет два неэквивалентных самосопряженных спинора, каждый — размерности 2^{1-2n}, а два спинора группы SO_{4n+2} комплексны и сопряжены друг другу. Размерность каждого из них равна 2^{2n} (см. случай 5).

В этом классе универсальность слабых зарядов естественна, так как в G^{fl} имеется лишь одна неабелева подгруппа. Однако связь между электрическими зарядами кварков и лептонов должна возникать от нарушения симметрии.

Класс IV. $G^{fl} = G_{q+l}$. Это погружение, не содержащее фактора U_1, который различал бы 1^c и 3^c, возможно только для исключительных групп. Три из пяти исключительных групп удовлетворяют нашим требованиям, и в каждом случае лишь фундаментальное представление удовлетворяет цветовому ограничению. Мы приводим эти результаты (см. случаи 7—9). Для группы F_4, где $G^{fl} = SU_3$, фундаментальное представление 26-мерно и самосопряжено. Для группы E_6 имеем $G^{fl} = SU_3 \times SU_3$, и фермионы образуют комплексное 27-мерное представление. Наконец для E_7 имеем $G^{fl} = SU_6$ и фермионы принадлежат представлению 56, которое самосопряжено.

Ограничительность исключительных групп, как по количеству, так и по внутренней структуре, делает их особенно привлекательными для построения моделей. Универсальность слабых и электромагнитных зарядов кварков и лептонов следует из групповой структуры, как и заряд 1/3 для кварков при условии, что лептоны имеют заряды ± 1 и 0. Группа SU_3^c вкладывается в эти группы естественным образом (см. работы Гюнайдина и Гюрши [30] и Гюрши [31]).

Результаты нашей классификации собраны в табл. I. Не существует других погружений SU_3^c в какую-либо простую группу G, при котором хотя бы одно представление содержало лишь синглеты и триплеты по цвету.

Классификация фермионных представлений не будет полной до тех пор. пока мы не проанализируем их структуры с точки зрения спиральности. Группа G, которую мы по-прежнему считаем простой, преобразует между собой фермионы с заданной спиральностью.

Рассмотрим прежде всего случай, когда определено скалярное фермионное число, так что фермионы и антифермионы с самого начала различаются. Предположим, что левые фермионы включены в представление $\mathfrak{f}_L$, а правые фермионы — в представление $\mathfrak{f}_R$ группы G. Тогда левые состояния содержатся в представлении $\mathfrak{f}_L + \bar{\mathfrak{f}}_R$, а правые состояния — в $\mathfrak{f}_R + \bar{\mathfrak{f}}_L$. Если взаимодействие кварков с глюонами сохраняет четность, то должна быть дискретная симметрия, которая связывает кварки в f_L с кварками в f_R, а также антикварки, которые могут быть в f_L, с антикварками в f_R. Та же самая дискретная симметрия свяжет лептоны в f_L и f_R, если мы пренебрегаем возможностью добавить к f_L или f_R синглеты группы G. Следовательно, представления f_L и f_R либо эквивалентны, либо связаны групповым сопряжением. Теории, в которых f_R и f_L эквивалентны, называются вектороподобными (см. работу Джорджи и Глэшоу [32]). Если представление f_R эквивалентно $\bar{f}_L$, то мы называем теорию «спиральной по аромату» (flavor chiral) *).

Рассмотрим теперь случай, когда нельзя определить скалярное фермионное число; представление f_L содержит все левые фермионы и антифермионы теории, а f_R содержит все правые частицы. Тогда сохранение

Таблица I

Погружение SU_3^c в группу G; представления, содержащие только простейшие цветовые состояния 1^c, 3^c, $\bar{3}^c$. Квадратные скобки в случае 5 означают целую часть числа.

Случай	G	G^{fl}	f	Размерность
1	SU_n	$SU_{n_1}\times SU_{n_3}\times U_1$	n	$n=n_1+3n_3$
2	SU_n	$SU_{n-3}\times U_1$	$(n^k)_A$	$\binom{n}{k}$
3	SU_n	$SU_{n_1}\times SU_{n_3}\times SU_{n_{\bar{3}}}\times U_1\times U_1$	n	$n=n_1+3n_3+3n_{\bar{3}}$
4	SO_n	$SO_{n_1}\times SU_{n_3}\times U_1$	n	$n=n_1+6n_3$
5	SO_n	$SO_{n-6}\times U_1$	σ, σ'	$2^{\left[\frac{1}{2}(n-1)\right]}$
6	Sp_{2n}	$Sp_{2n_1}\times SU_{n_3}\times U_1$	2n	$n=n_1+3n_3$
7	F_4	SU_3	26	26
8	E_6	$SU_3\times SU_3$	27	27
9	E_7	SU_6	56	56

четности в кварк-глюонном взаимодействии требует наличия дискретной симметрии, связывающей кварки в f_L и f_R. Как и в вышеописанной ситуации, теория должна быть либо вектороподобной, либо спиральной по аромату. В последнем случае (f_R эквивалентно $\bar{f}_L$) существует псевдоскалярное квантовое число, различающее f_L и f_R.

Другие ограничения на f_R при заданном f_L следуют из перенормируемости теории. Теория не должна иметь расходимостей, возникающих из-за треугольных особенностей, типа указанных в работах Адлера [33] и Белла и Джэкива [34]. Фермионное представление попадает в одну из трех категорий [32].

1. Если f_L — самосопряженное представление, то никаких трудностей с треугольными аномалиями не возникает. Такие теории всегда вектороподобны.

2. Если f_L — комплексное представление, но группа G — не унитарная, то трудностей с аномалиями также нет. Эти теории основаны на

*) Это название вполне подходит для групп E_6 и SO_{10}, где группы по аромату $SU_3\times SU_3$ и $SU_2\times SU_2$ соответственно, и при простейшем расположении фермионов в мультиплетах фактор-группы действуют на спиральные кварки. Для групп SO_{14}, SO_{18} ... это название менее пригодно. Конечно, в случае, когда скалярное фермионное число не может быть определено, название «вектороподобная теория» также не применимо, так как даже в отсутствие фермионных масс такие теории нельзя сформулировать, используя дираковские спиноры с обычной векторной связью.

группах $G = E_6$ ($\mathfrak{f} = 27$) *) или SO_{4n+2} ($\mathfrak{f}$ — спинор), они могут быть векторомодобными или спиральными по аромату.

3. Комплексные представления групп SU_n ($n \geqslant 3$) не гарантированы от трудностей, но они могут быть использованы в вектороподобной теории, или в невектороподобной теории, если возникает случайное сокращение правых и левых аномалий по отдельности. (В последнем случае представление $\mathfrak{f}_R$ эквивалентно $\bar{\mathfrak{f}}_L$, причем $\mathfrak{f}_R$ — приводимое.) Если такое сокращение происходит, то $\mathfrak{f}_L$ часто оказывается ветвью свободного от аномалий представления более широкой группы. Например, аномалии от представлений $\bar{5}$ и 10 в группе SU_5 сокращаются, причем разложение спинора группы SO_{10} по представлениям SU_5 имеет вид $16 = 1 + \bar{5} + 10$ (см. работу Джорджи [36]). (Синглет не дает аномалии.) Подобное случайное сокращение несколько искусственно и мы не рассматриваем таких примеров.

Результаты классификации фермионных представлений по спиральной структуре приведены в табл. II. За исключением калибровочных

Таблица II

Классификация спиральных фермионных представлений

Тип представления	$\mathfrak{f}_R \sim \mathfrak{f}_L$ (вектороподобное)	$\mathfrak{f}_R \sim \bar{\mathfrak{f}}_L$ (спиральное по аромату)
Вещественное	Возможно	Совпадает с вектороподобным
Комплексное без аномалий	»	Возможно
Комплексное, возможны аномалии	»	Как правило, невозможно

групп, допускающих теорию, спиральную по аромату, наиболее естественно принять вектороподобную теорию.

В гл. 3, которую мы также рассматриваем как математическое приложение к настоящему введению, мы изучили возможные погружения группы U_1, генератором которой является оператор электрического заряда, в группу G^{fl}. Принято, что кварки имеют заряды из последовательности (. . . 5/3, 2/3, —1/3, —4/3, . . .), а лептоны имеют целые заряды. (Для погружений из класса IV это весьма слабое предположение.) Результаты систематизированы в соответствии с приведенной классификацией структур группы G^{fl}.

В погружениях класса I ($G^{fl} = G_l \times G_q \times U_1$) имеется большая свобода в определении оператора электрического заряда Q. Единственное ограничение возникает из требования равенства нулю следов всех генераторов группы G^{fl}: сумма зарядов всех фермионов должна быть нулем. Если фермионное представление самосопряжено относительно зарядового отражения, то никакого ограничения на Q не возникает. Аналогичная ситуация возникает для погружения из класса II.

В погружениях класса III ($G^{fl} = G_{q+l} \times U_1$) кварки и лептоны преобразуются одной и той же простой подгруппой G^{fl}, но добавочная группа U_1 различает 1^c и 3^c. Тем не менее заряды кварков, которые, по предположению, принадлежат последовательности (—1/3 + целое число), определяют заряды лептонов. Обычно сумма зарядов кварков отлична от нуля. Общая параметризация оператора заряда дана в гл. 3.

*) Доказательство того, что в теории с группой E_6 трудности отсутствуют, дано в работе Гюрши, Рамона и Сикиви [35].

В погружениях класса IV ($G^{fl} = G_{q+l}$) сумма зарядов кварков равна нулю, и заряды кварков определяют заряды лептонов. Возможные варианты распределения зарядов также легко перечислить.

Обратимся теперь к вопросу о распаде протона, который часто возникает в единых теориях, так как кварки и лептоны входят в одно и то же неприводимое представление группы G, а должны быть бозоны, а возможно, и другие поля, переносящие взаимные превращения кварков и лептонов. В некоторых моделях лептокварки также связывают кварки с антикварками, входящими в фермионный мультиплет, и в результате протон может распадаться на лептон и мезон во втором порядке даже при отсутствии нарушения симметрии. После же того, как локальная симметрия G разрушается и остается $U_1 \times SU_3^c$, протон обязательно будет распадаться, если только не останется какой-либо закон сохранения, который запретил бы это. Таким образом, если протон стабилен, должно существовать сохраняющееся квантовое число A (A — обобщенный атомный номер) в согласии с определением для обычной материи так, чтобы состояние с наименьшей массой при $A = 1$ и было протоном. Задача об определении A в теории типа Янга и Миллса с кварками и лептонами, основанной на простой группе G, подробно рассмотрена в гл. 4. Рассмотрение проводится там в терминах вектороподобной теории, но, как показано на примерах в конце этой главы, распространение на теории, спиральные по аромату, проводится тривиально. И в этом случае мы приводим здесь все результаты, так что гл. 4 является математическим приложением к данной здесь теории.

Экспериментальная граница для вероятности распада протона с образованием мюона равна $\tau^{-1} < 10^{-30}$ лет$^{-1}$ (результат Райнеса и Кроуча [37]), а период полураспада протона превышает $2 \cdot 10^{28}$ лет (согласно работе Гурра и др. [38]). Многие теоретики просто примирились с нестабильностью протона в низшем порядке и предположили, что ответственные за это бозоны имеют столь большие эффективные массы (порядка планковской массы $1{,}22 \cdot 10^{19}$ ГэВ), что амплитуда распада понижается до экспериментально приемлемого уровня *). В принципе, это может быть не так уж трудно, так как масштабы масс, связанные с универсальной для слабого и сильного взаимодействия силой, могут быть порядка 10^{15}—10^{20} ГэВ (см. работу Джорджи, Куинна и Вейнберга [39]), а это не слишком отличается от эффективных масс бозонов, которые необходимы для того, чтобы довести вероятность распада протона до нужного уровня, даже если этот распад происходит в низшем порядке. Конечно, может существовать механизм, который бы не позволил этим бозонным массам быть произвольно большими по сравнению с массами промежуточных бозонов, переносящих слабые взаимодействия, как показано Гильденером [40]. Мы обсудим вкратце предложения, которые были сделаны, чтобы уменьшить каждый из этих масштабов масс. Прежде всего мы обсудим механизм распада протона, и способы уменьшения вероятности этого распада. Затем мы обратимся к вопросу об унификации масштаба масс.

В теории с распадом протона нет точно сохраняющегося атомного массового числа (или барионного заряда) A. Вышеупомянутый случай, в котором распад протона происходит в низшем порядке по теории возмущений, а ответственные за этот процесс бозоны должны иметь огромные массы, как правило, характеризуется отсутствием калибровочного квантового числа X, которое менялось бы при распаде протона. Нет также и точно сохраняющегося фермионного числа. Лептокварки — это также

*) С. Мешков прозвал эти бозоны «промежуточными векторными бейсбольными мячами».

и анти-дикварки, и распад происходит прямо во втором порядке по g^2. Если фермионное число точно сохраняется, но по-прежнему отсутствует калибровочное квантовое число, меняющееся при распаде протона, то распад можно отодвинуть в область более высоких порядков теории возмущений, но большие массы бозонов все же необходимы. Типичный пример такой ситуации — теория с группой E_6, где фермионы входят в мультиплеты 27 и $\overline{27}$ и фермионное число сохраняется. В этом случае амплитуда распада порядка g^4, а не g^2.

Достаточно медленный распад протона без чересчур больших масс векторных бозонов несколько менее трудно получить, если имеется генератор X группы G, который должен быть нарушен (с помощью явного механизма Хиггса или какого-либо гипотетического механизма типа Хиггса), чтобы распад мог происходить. Рассмотрим вначале случай, в котором фермионное число сохраняется точно. В последующем обсуждении точной стабильности протона мы предполагаем, что хиггсовское нарушение, которое дает массу бозону со спином 1, связанному с зарядом X, не сохраняет также фермионное число, но сохраняет линейную комбинацию, которая в этом случае и есть A. Здесь же мы предполагаем, что хиггсовский механизм не нарушает фермионного числа. A можно определить так же, но это число больше не сохраняется. Если мы рассмотрим модели с явными хиггсовскими бозонами φ, которые осуществляют это нарушение, то мы сможем приписать их к различным приводимым представлениям группы G или же к большому неприводимому представлению, в котором некоторые компоненты обладают ненулевым средним по вакууму. Это дает массу бозону со спином 1, связанному с генератором X, и в то же время индуцирует через виртуальные векторные бозоны неперенормируемое эффективное взаимодействие с конечным и вычислимым коэффициентом, которое вызывает распад протона. Обычно параметры в хиггсовском потенциале для поля φ можно выбрать так, чтобы распад был очень медленным. (Если индуцируются перенормируемые эффективные взаимодействия, то коэффициенты, в принципе, произвольны, и их можно оценить, только если принять, что обрезание воспроизводит какой-то механизм, который устранит бесконечности в исправленной теории.)

Пати и Салам [41, 42] обсудили медленное несохранение A такого типа, однако их теория отличается от обсуждаемых нами тем, что группа G у них не проста, а кварки не связаны и не дробно заряжены. Однако мы можем, для примера, заменить их теорию с четырьмя ароматами кварков и четырьмя ароматами лептонов теорией, в которой калибровочная группа $G = SU_{16}$, фермионы со спином 1/2 помещены в представлении 16 и $\overline{16}$, а фермионное число сохраняется. Тогда необходимое хиггсовское нарушение, приводящее к медленному распаду протона, можно осуществить с помощью полей φ, принадлежащих неприводимому (299200-мерному!) представлению. При этом компонента поля φ с неисчезающим средним по вакууму может быть связана с тремя калибровочными бозонами, переводящими три кварка в три лептона, вызывая в конечном счете распад протона.

Мы видели, что рассмотрение медленного распада протона с сохраняющимся фермионным числом напоминает приведенное ниже обсуждение стабильности протона, в котором число A определяется как линейная комбинация фермионного числа и X. Теперь мы рассмотрим последний случай замедленного распада протона, когда нет фермионного числа, но существует генератор X, который запретил бы распад, если бы точно сохранялся (но не сохраняется). Этот случай похож на описанную ниже ситуацию со стабильным протоном, когда нет фермионного числа и X совпадает с A в секторе, содержащем частицы со спином 1/2. Вместо того, чтобы взять сохраняющуюся линейную комбинацию X и некоторой величины, отличной от нуля вне указанного сектора, мы просто положим, что X равно A и не сохраняется. И на этот раз динамические или затравочные хиггсовы бозоны φ могут быть помещены в надлежащие представления группы G, так что бозон со спином 1, связанный с генератором X, приобретает массу, и индуцируется распад протона.

Хотя константы связи зависят от массы логарифмически, масштаб масс в области, где отношения электромагнитных и сильных констант связи становятся почти равными единице (иными словами, происходит унификация), вовсе не должен доходить до таких больших значений, как планковская масса. Приведем краткий обзор зависимости унифицированной массы от теории. Предположим прежде всего, что нарушение симметрии происходит в два этапа, от G к $SU_2 \times U_1 \times SU_3^c$, а затем к $U_1 \times SU_3^c$. Унифицированную массу можно найти из уравнений ренормализационной группы. Джорджи, Куинн и Вейнберг [39] выяснили, что она чувствительна к электрическому заряду и распределению частиц по слабым изомультиплетам: в некоторых примерах эта масса может быть не более, чем порядка 10^9 ГэВ, но в других — намного превышать планковскую массу.

Особенно небольшие унифицированные массы могут быть получены, когда нарушение симметрии происходит в несколько стадий. Эту возможность рассмотрели Фрицш и Минковский [29], однако их примеры обладают тем недостатком, что универсальность кварков и лептонов нарушается уже на ранних стадиях нарушения симметрии. Мы преодолеваем это затруднение в нижеследующем примере. Предположим, что на первой стадии группа G сужается до $G_A \times G_B$, где индекс присоединенного представления группы G_A много больше, чем этот индекс для группы G_B. (Индексом называется оператор Казимира для данной группы, умноженный на размерность представления и деленный на число генераторов. Коэффициент, входящий в уравнения ренормализационной группы, равен, 11/3 (индекс присоединенного представления) — 4/3 (сумма индексов всех представлений, содержащих дираковские фермионы).) Группа G_B содержит по меньшей мере минимальную группу ароматов $SU_2 \times U_1$, а G_A содержит SU_3^c. Константы связи для фактор-групп G_A и G_B будут меняться с различной скоростью при дальнейшем уменьшении перенормировочной массы, причем рост константы для группы G_A происходит быстрее, чем для отдельно взятой группы SU_3^c. В надлежащий момент симметрия G_A нарушается, и остается лишь SU_3^c, но после того как константа для G_A намного превышает константу для G_B. Таким образом, в модели с $2n$ лептонами и $2n$ кварками, основанной на $G = SU_{8n}$, на первой стадии симметрия нарушается от SU_{8n} до $G_B = SU_n \times SU_2 \times U_1$ и $G_A = SU_{3n}$. При некоторой меньшей массе группа SU_{3n} нарушается до $SU_3^c \times SU_n$. При энергиях порядка гигаэлектрон-вольта обе группы SU_n могут стать незаметными, связывая легкие кварки с тяжелыми и легкие лептоны с тяжелыми, причем остается симметрия $SU_2 \times U_1 \times SU_3^c$.

Если в теорию входят масштабы масс порядка планковских, то процедура унификации, о которой здесь шла речь, пренебрегающая гравитационными процессами, становится неполной. Высказывалось мнение, что может быть необходимо рассматривать процессы, которые могли бы нарушать барионный заряд, такие, как гипотетическое излучение всей энергии малой черной дыры, происходящее путем эффекта Хокинга [43]. Если квантовая гравитация и на самом деле допускает такой процесс, то это привело бы к нестабильности протона особого рода, однако этот предмет еще плохо понят. Более прямое объединение теории Янга — Миллса с гравитацией Эйнштейна производится в рамках расширенной супергравитации, как будет указано ниже.

Хотя и нет ясной необходимости требовать, чтобы протон был абсолютно стабилен, можно попытаться наложить такое условие и рассмотреть его следствия, как приятные, так и неприятные. Сейчас мы рассмотрим этот вопрос, пренебрегая возможностью, что атомное число возникает из какого-то топологического квантового числа, не видного непосредственно из лагранжиана. Детально обсуждается случай динамического нарушения симметрии и кратко — случай затравочных полей Хиггса.

Как можно получить сохраняющуюся величину A в единой калибровочной теории? Предположим, что лагранжиан содержит лишь поля со спинами 1/2 и 1, а симметрия нарушается динамически. Тогда при единственном самосопряженном неприводимом представлении для фермионов нельзя сделать протон стабильным, так как сохраняющийся генератор группы X, уцелевший при динамическом нарушении симметрии, должен быть связан с безмассовым векторным бозоном и не может быть использован в качестве A. Электрического заряда и сохранения цвета недостаточно для стабильности протона, и мы уже предположили, что никаких случайных законов сохранения нет. При наличии пары сопряженных представлений можно ввести некалибровочное сохраняющееся квантовое число Z. (Для комплексных представлений это удвоение необходимо по СРТ-теореме.) Величина Z не может совпадать с A, так как кварки и лептоны имели бы в этом случае одинаковое A. Однако можно получить сохраняющееся A из Z и X (генератор локальной симметрии, связанный с некоторым векторным током), которые оба не сохраняются, но имеют сохраняющуюся линейную комбинацию. Тогда бозон приобретает массу, а кварки и лептоны становятся различными. Так как мы не вычисляем в нарушенной теории величину A явно, что наш выбор локального генератора X предполагает наличие подходящего механизма нарушения симметрии. Если бы мы рассматривали приводимое представление для фермионов с более сложным составом, то можно было бы иметь, например, точное сохранение лептонного числа. Мы не анализируем здесь эту возможность. Во всяком случае, мы предполагаем, что спектр собственных значений оператора A отвечает разумному выбору атомного числа.

Обычные кварки должны иметь $A = 1/3$, чтобы у известных барионов, состоящих из трех таких кварков, было $A = 1$. Соответственно известные лептоны должны иметь $A = 0$. Тогда число A будет обычным барионным зарядом для известной материи. Единые теории часто предсказывают также другие кварки и лептоны. Естественно потребовать, чтобы величина A для них строилась так, чтобы цветовые синглеты имели целые значения A. Иначе нам пришлось бы принять еще более радикальное предсказание о наблюдаемых дробных A, влекущее за собой существование новых стабильных частиц, отвечающих состояниям с наинизшей массой при заданном дробном значении заряда. Следовательно, значение A для любого нового кварка попадает в последовательность 1/3 + целое число, а новые лептоны имеют целые A. Мы называем кварки со значениями $A = \ldots, -5/3, -2/3, 4/3, 7/3, \ldots$ жуткими (weird) кварками, а лептоны с $A = \pm 1, \pm 2, \ldots$ — жуткими лептонами. Эти жуткие фермионы должны быть достаточно тяжелыми, чтобы их нельзя было наблюдать, но в остальном они не вызывают затруднений, если не считать неэкономности схемы. Жуткие барионы должны содержать по крайней мере один жуткий кварк и иметь целое A, не равное единице. Жуткие мезоны — состояния типа $q\bar{q}$ со значением A, равным отличному от нуля целому числу.

В механизме рождения одиночных жутких частиц потребовался бы обмен бозонами, переносящими цвет и аромат. И бесцветные бозоны, и октет глюонов переносят $A = 0$, но некоторые из бозонов несут значения A, равные 1/3 от целого числа. Два обыкновенных кварка могут обменяться таким бозоном, при этом один кварк превратится в лептон с $A = 0$, а другой кварк — в жуткий антикварк с $A = 2/3$, который, соединившись затем с обычным кварком, образует жуткий мезон с $A = 1$. Если массы этих бозонов достаточно велики, то такой процесс был бы подавлен. Однако при достаточно высоких энергиях могло бы происходить парное рождение жутких частиц.

Распад жуткой частицы происходит при обмене бозоном с $A = 1/3$; если его масса велика, то этот распад будет крайне замедлен. Например, жуткий мезон с $A = 1$, составленный из кварка с $A = 1/3$ и жуткого антикварка с $A = 2/3$, имел бы лептон-барионную моду распада, а жуткий барион с $A = 0$, составленный из двух кварков с $A = 1/3$ и жуткого кварка с $A = -2/3$, мог бы распасться на три обыкновенных лептона или на обыкновенный мезон и лептон. Более конкретное рассмотрение будет дано на примерах.

При динамическом нарушении симметрии есть лишь один случай, когда стабильность протона не связана с появлением жутких частиц: $G = \mathrm{SU}_n$ и фермионы в n-мерном представлении. Но сохранения A можно потребовать и в любой другой калибровочной теории, поскольку представление f достаточно обширно, чтобы вместить в себя жуткие фермионы. (С этой точки зрения группы F_4 и F_6 бедны ароматами, если включать

Таблица III

Некоторые примеры стабилизации протона при удвоении фермионного представления и с майорановским нарушением. Общие решения даны в гл. 4; эти простые примеры отвечают наиболее экономному спектру оператора A

G	Представление	Формула	U_1 для X	A
SU_n	n	(2.4)	Явная U_1	$\frac{1}{3}N_q$
SU_n	$(n^k)_A$	(2.11)	Явная U_1	$\frac{1}{3}N_q - \frac{2}{3}N_r + N_L$
SO_n	n	(2.17)	«Налет на аромат» $(\mathrm{SO}_{2n'} \supset \mathrm{SU}_{n'} \times \mathrm{U}_1)$ и явная U_1	$\frac{1}{3}N_q + \frac{4}{3}N_r + N_L$
SO_n	σ	(2.22), (2.24), (2.25)	Явная U_1	$\frac{1}{3}N_q - \frac{2}{3}N_r + N_L$
Sp_{2n}	$2n$	(2.26)	«Налет на аромат» $(\mathrm{Sp}_{2n_1} \supset \mathrm{SU}_{n_1} \times \mathrm{U}_1)$ и явная U_1	$\frac{1}{3}N_q + \frac{4}{3}N_r + N_L$
E_7	56	(2.36)	«Налет на аромат» $\mathrm{SU}_6 \supset \mathrm{SU}_5 \times \mathrm{U}_1$	$\frac{1}{3}N_q + \frac{1}{3}N_\sigma + \frac{4}{3}N_s - \frac{2}{3}N_r + N_L$

фермионы лишь в небольшое число неприводимых представлений.) В табл. III приводятся значения A, связанные с простым выбором локального генератора, как это показано в гл. 4.

В теориях с затравочными полями Хиггса, которые может быть и непривлекательны без суперсимметрии, имеются другие решения для спектра A. Предположим, что скалярные и псевдоскалярные поля обуславливают новые некалибровочные симметрии лагранжиана. Как и прежде, оператор A можно построить, взяв линейную комбинацию нарушенных локального и глобального генераторов, которая сохраняется. Ограничимся для простоты фермионами в единственном неприводимом самосопряженном представлении группы, так чтобы глобальный генератор Z был равен нулю на фермионах. Тогда в фермионном секторе A совпадает с выбранным локальным генератором.

Феноменология рождения и распада жутких частиц аналогична вышеописанной, кроме того, следует добавить еще обмен скалярными частицами, переносящими и цвет, и аромат. Можно полностью исключить жуткие частицы в представлениях n группы SO_n и 2n группы Sp_{2n}, но в других случаях и в этой схеме нарушения симметрии необходима некоторая «жуть». Подробности даны в гл. 4.

Погружение групп SU_3^c, электромагнитной U_1 и локальной U_1, необходимой для стабилизации протона, легко провести в теориях с симметрией относительно группы $G \times G$. По существу, цвет можно погрузить в $G \times G$ двумя способами.

Группа SU_3^c может явно содержаться лишь в одной из фактор-групп G, а обе фактор-группы G преобразуются друг в друга некоторым абстрактным отражением. Модель Пати и Салама [42] с группой $SU_4 \times SU_4$ — пример такой ситуации. Фермионные представления имеют вид (r_1, r_2). Если вторая фактор-группа содержит SU_3^c, то представление r_2 совпадает с одним из приведенных в табл. I, а на r_1 нет никаких ограничений. Подобные модели похожи по идее на те, что уже обсуждались, и мы не будем их далее рассматривать.

Другая возможность, которую мы обсудим более подробно, состоит в том, что группа SU_3^c генерируется суммой генераторов подгрупп SU_3 в каждой из фактор-групп G. Тогда цветовой состав представления (r_1, r_2) группы $G \times G$ определяется цветовыми представлениями в $r_1 \times r_2$. Требование, чтобы (r_1, r_2) содержало лишь 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$, может быть выполнено, если r_1 или r_2 — синглет по SU_3. В свою очередь это накладывает условие, чтобы представление r_1 было синглетом G, а r_2 — одним из представлений, данных в табл. I, или наоборот. Тогда фермионные представления могут быть только линейными комбинациями $(1, r_2)$ и $(r_1, 1)$.

Рассмотрим вначале спиральную структуру фермионного представления для случая, когда отражение, переставляющее фактор-группы G, не является четностью. Если f_L имеет вид (r_1, r_2), то f_R преобразуется как (r_1, r_2) или $(\bar{r}_1, \bar{r}_2)$. Соответственно мы получаем просто вектороподобную или спиральную по аромату теорию (см. табл. II). В этом случае имеется алгебра $SU_3 \times SU_3$ векторных токов, и возникает искушение расширить группу SU_3^c до $SU_3 \times SU_3$. Хотя этот способ расширения цветовой группы отличается от случая 3 в гл. 2, приведенная там аргументация все же справедлива. В других отношениях эти теории с $G \times G$ аналогичны теориям с простой группой G, которые уже обсуждались.

Наконец, мы можем предположить, что пространственное отражение связано с перестановкой фактор-групп G, хотя такая возможность поднимает несколько вопросов. Если представление f_L есть (r_1, r_2), то f_R должно быть (r_2, r_1) или $(\bar{r}_2, \bar{r}_1)$; в первом случае мы имеем спиральную теорию, во втором — сопряженно-спиральную. Оба представления, r_1 и r_2, должны быть свободны от треугольных аномалий, но, как и выше, эта свобода должна быть связана со случайным сокращением. Для простоты мы не будем рассматривать в этой связи теории класса II.

В этих теориях типа $G \times G$ сильная калибровочная группа — спиральная $SU_3 \times SU_3$. Против рассмотрения таких теорий имеется ряд возражений. Во-первых, спиральная теория кварков и глюонов сама по себе имеет аномальные расходимости, которые обрезаются единой теорией лишь при очень большой энергии. Как обычно, мы считаем, что ненарушенная симметрия SU_3^c порождается суммой соответствующих генераторов SU_3. Аксиальные симметрии, порождаемые их разностью, должны быть нарушены, а нарушение характеризуется своего рода эффективной массой m_A аксиальных глюонов внутри адронов. Параметр m_A^2 должен быть по меньшей мере порядка нескольких ГэВ^2, чтобы не возникали спин-спиновые силы между кварками с неверным знаком и другие неподходящие силы между кварками и антикварками. При включении радиационных поправок по аромату могут возникнуть также нарушающие четность амплитуды порядка $\alpha_{\text{strong}}\alpha_{\text{weak}}m_A^{-2}$, откуда следует, что параметр m_A^2 должен быть даже больше. По всем этим причинам мы не будем больше уделять внимания спиральным теориям с группой $G \times G$.

Перечисление всех возможных зарядовых вариантов для теории с $G \times G$ совпадает со случаем простой группы G, так как одно из представлений, r_1 или r_2, должно быть синглетом G. Оператор электрического заряда есть просто сумма генераторов U_1 двух соответствующих групп, входящих в подгруппы G^{fl} для каждой из фактор-групп G. Тот же довод применим для выбора генератора X в схеме со стабильным протоном. Таким образом, мы ограничиваем наше рассмотрение простыми калибровочными группами, учитывая, что результаты справедливы и для теорий типа $G \times G$.

Хотя некоторые из включенных в нашу классификацию теорий довольно привлекательны, ни одна из них не хороша настолько, чтобы мы могли закрыть глаза на возможность развития других линий, отброшенных в настоящем рассмотрении. Укажем два наиболее популярных направления исследований: а) расширение глобальной симметрии лагранжиана, б) расширение локальной симметрии. В обоих случаях симметрия лагранжиана относительно группы Ли обобщается до «градуированной» или «супер»-симметрии. Генераторы суперсимметрии, присоединенные к некоторой алгебре Ли, удовлетворяют антикоммутационным соотношениям между собой и коммутационным соотношениям с элементами этой алгебры Ли. Они преобразуют бозоны в фермионы, так что неприводимые супермультиплеты должны содержать частицы обоих типов.

Рассмотрим вначале обыкновенную глобальную суперсимметрию, предложенную в работах Гольфанда и Лихтмана [44], Весса и Зумино [45], скомбинированную как прямое произведение с внутренней симметрией типа Янга — Миллса (см. работы Салама и Стрэтди [46], Феррара и Зумино [47]). При этом помимо присоединенного представления, состоящего из калибровочных бозонов, имеется присоединенное представление, состоящее из майорановских фермионов со спином 1/2, которое должно включать мультиплет 8^c. Так как необходим цветной октет фермионов, то естественно потребовать, чтобы фундаментальное представление группы G содержало лишь 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$. Однако в любых новых погружениях синглетный по аромату набор генераторов должен содержать не только один или два октета, поэтому для цветовой группы имеется много новых возможностей, так что возникает множество новых фермионов в других цветовых представлениях. Таким образом, мы приходим к заключению, что теория с прямым произведением глобальной суперсимметрии на внутреннюю симметрию, вероятно, связана лишь с теми погружениями, которые рассмотрены в настоящей работе. Основное изменение состоит в добавлении набора майорановских фермионов со спином 1/2, принадлежащих к присоединенному представлению, которое полностью проанализировано здесь в связи с описанием бозонов со спином 1.

Если рассматривать лишь супермультиплет, состоящий из частиц со спинами 1 и 1/2, принадлежащих к присоединенному представлению G, то нарушение симметрии должно быть динамическим. Не так уж некрасиво, однако, введение супермультиплета материальных полей, состоящего из майорановских фермионов, скаляров и псевдоскаляров, преобразующихся по некоторому представлению группы G, которое могло бы быть как присоединенным, так и одним из тех представлений, которые обсуждались здесь для фермионов со спином 1/2. В подобном случае можно проанализировать лагранжиан, и в действительности трудно одновременно снять вырождения обоих типов, связанные как с суперсимметрией, так и с внутренней симметрией, таким образом, как это необходимо (Файе и Илиопулос [48]). Если все же придерживаться такой схемы, то необходимо ввести голдстоуновский фермион, который не может быть нейтрино, так как он отщепляется в пределе нулевой частоты, как показано Фридманом и де Витом [49] и Бардином [50].

Прямое произведение — не единственный способ скомбинировать «внутреннюю» симметрию с суперсимметрией. Можно рассмотреть N-кратно расширенную суперсимметрию (предложенную Саламом и Стрэтди [51]), в которой имеется N операторов симметрии, принадлежащих «внутренней» группе SO_N или SU_N. При этом супермультиплеты состоят из частиц с различными спинами, число которых возрастает с ростом N. Если группа достаточно обширна, чтобы ее можно было принять в качестве группы G единой теории типа Янга — Миллса, то приходится иметь дело со спинами 3/2 и выше, и в теории с чисто локальной расширенной суперсимметрией встречаются серьезные трудности.

Мы можем рассмотреть, однако, случай, в котором число N не слишком велико, и не пытаться считать симметрию относительно группы SO_N или SU_N в расширенной суперсимметрии калибровочной. Вместо этого мы рассмотрим прямое произведение расширенной суперсимметрии на группу симметрии G типа Янга — Миллса. Возьмем наибольшее значение N, которое позволило бы нам избежать частиц со спином 3/2 в супермультиплете, содержащем поля Янга — Миллса, а именно $N = 4$ (см. работы Файе [52], Бринка, Шварца и Шерка [53]). В этом случае имеется набор векторных частиц в присоединенном представлении группы G, а также четыре набора майорановских частиц со спином 1/2 и по три набора скалярных и псевдоскалярных частиц, также в присоединенном представлении. В подобном случае, как и для прямого произведения группы G на обыкновенную суперсимметрию, описанных нами погружений вполне может быть достаточно, и присоединенные представления, обсуждавшиеся для бозонов со спином 1, могут быть использованы также для фермионов со спином 1/2 и бозонов со спином 0, в надлежащем числе копий. Группа перенормировок для теории этого типа обладает тем поразительным свойством, что ведущий член порядка g^4 в функции Гелл-Манна — Лоу $\psi(g^2)$ обращается в нуль (см. работу Феррары [54]). В работах Эббота и др. [55] и Кэртрайта [56] было замечено также, что вследствие этого ведущий член в аномальной расходимости супертока (без учета супергравитации) также обращается в нуль. В последующих работах Джонса [57], Поджо и Пендлтона [58] вычисление функции $\psi(g^2)$ было проведено для членов порядка g^6 с помощью метода Джонса [59], и оказалось, что масштабно инвариантное условие $\psi(g^2) = 0$ выполняется и в этом порядке. Смысл этого удивительного результата пока не ясен.

Ниже мы еще вернемся к теориям этого типа. Заметим, однако, что они обладают глобальной симметрией с группой $SU_4 \approx SO_6$, и если использовать такие теории, то нужно выяснить, как можно спонтанно нарушить эту симметрию, не входя в противоречие с экспериментом.

Теперь обсудим место гравитации в суперсимметричных теориях. Гравитон должен принадлежать к супермультиплету, и отсюда непосредственно возникает локальная суперсимметрия или супергравитация

(Фридман, ван Ньювенхейзен и Феррара [60], Дезер и Зумино [61]), в которой гравитон, калибровочная частица для группы Пуанкаре, сопровождается одной или несколькими частицами со спином 3/2, которые являются калибровочными для суперсимметрии или расширенной суперсимметрии. (Эти безмассовые частицы со спином 3/2 могут поглотить голдстоуновские фермионы и стать массивными.) В простейшей супергравитации с $N = 1$ есть одна частица со спином 3/2, образующая супермультиплет вместе с гравитоном. Эта схема допускает прямое произведение на внутреннюю симметрию, как описано выше, и включает частицы со спином 1 и 1/2 в присоединенном представлении некоторой группы G, а также, возможно, частицы со спином 1/2, скалярные и псевдоскалярные, преобразующиеся по некоторому представлению группы G. Однако такая теория — неперенормируема. (В каждом случае наша работа применима так же, как при использовании глобальной суперсимметрии.)

Наиболее интересным из предложенных до сих пор типов теории представляется расширенная супергравитация (при $2 \leqslant N \leqslant 8$), особенно в варианте с $N = 8$, в котором единственный гравитон со спином 2 сопровождается октетом группы SO_8, состоящим из частиц со спином 3/2, мультиплетом частиц со спином 1, преобразующихся по 28-мерному присоединенному представлению группы SO_8, мультиплетом майорановских частиц со спином 1/2, преобразующихся по 56-мерному представлению, а также скалярного и псевдоскалярного мультиплетов, принадлежащих двум 35-мерным представлениям группы SO_8.

Помимо взаимодействия, содержащего гравитационную постоянную Ньютона, в теории присутствует еще безразмерная постоянная связи, отвечающая калибровочному характеру бозонов со спином 1 и локальности симметрии SO_8. Эта безразмерная постоянная индуцирует космологический член в гравитационном уравнении Эйнштейна, который оказывается слишком большим. Это — трудность теории, если только какое-то спонтанное нарушение симметрии не вызывает почти полного сокращения космологического члена. Но основная проблема в супергравитации с группой SO_8 — то, что эта группа недостаточно обширна, чтобы включить в себя цветовую группу SU_3, умноженную на группу ароматов необходимой величины.

Можно представить себе, что будущая полевая теория всех взаимодействий и всех элементарных частиц включит в себя супергравитацию с группой SO_8, причем будут принесены в жертву какие-то принципы, ныне считающиеся неприкосновенными, так что понятие расширенной супергравитации будет обобщено. В подобной гипотетической теории группа внутренней симметрии G, более обширная, чем SO_8, была бы связана с калибровочными бозонами со спином 1, а фермионы со спином 3/2 и 1/2 были бы включены в некоторые представления группы G. Тогда очень естественно предположить, что фермионы со спином 3/2 принадлежали бы к какому-то базисному представлению группы G и входили бы лишь в синглеты, триплеты и антитриплеты по цвету. В таком случае наше погружение группы SU_3^c в G было бы максимальным и представления, рассматриваемые в настоящей статье для фермионов со спином 1/2, вместили бы в себя фермионы со спином 3/2. (Частицы со спином 1/2, вероятно, вошли бы в более сложные представления.) Возможность, что наш обзор можно было бы использовать в этом направлении, довольно интересная, хотя и в большой мере спекулятивная, и побудила нас подготовить его к публикации после задержки на несколько лет.

Другая интересная возможность для построения единой теории связана с прямым произведением расширенной супергравитации с $N = 4$ на калибровочную группу внутренней симметрии G, как описывалось выше в глобальном случае. Мы вводим локальную суперсимметрию с $N = 4$, при этом гравитон принадлежит к супермультиплету вместе с четырьмя частицами со спином 3/2, шестью векторными частицами, четырьмя майорановскими частицами со спином 1/2, скаляром и псевдоскаляром. Самодействие этого супермультиплета определяется постоянной Ньютона. Вводится также обобщенное «поле материи» типа Янга — Миллса, как обсуждалось выше, содержащее одну векторную частицу, четыре майорановских частицы со спином 1/2, три скаляра и три псевдоскаляра, на каждую компоненту присоединенного представления группы G. Это «поле материи» связывается с гравитационным супермультиплетом постоянной Ньютона, а его самодействие определяется некоторым безразмерным зарядом. Получающаяся теория, несомненно, неперенормируема (как упомянутая ранее супергравитация с $N = 1$ с супермультиплетами полей материи). Однако теория, подобная обсуждаемой, по крайней мере для $G = \mathrm{SU}_n$ при любом n, может быть получена как приближение при энергиях, малых по сравнению с планковской массой, к интересной десятимерной теории струны Шерка и Шварца [62, 63], в которой шесть измерений «свернуты» в крошечный шарик, так что они несущественны при любой разумной энергии и эффективная теория является четырехмерной. (См. в связи с теорией в 10-мерном пространстве-времени работы Рамона [64], Неве и Шварца [65].) Все элементарные частицы лежат на траекториях Редже с наклоном α' порядка постоянной Ньютона для замкнутой струны (к этому типу относится гравитационный супермультиплет) и с наклоном $2\alpha'$ для открытых струн (частицы, входящие в поле материи). Было показано (Льоцци и др. [66]), что этот «струнный» вариант теории свободен от «призраков» и тахионов и вполне может быть перенормируемым. В нем нет трудности с появлением космологического члена в уравнении Эйнштейна и нет необходимости использовать чересчур узкую группу внутренней симметрии G. Если группа G задана, то, вероятно, можно использовать приведенные нами способы погружения, а присоединенные представления, описанные здесь для бозонов со спином 1, присутствуют также в виде майорановских фермионов со спином 1/2 (четырежды), скаляров и псевдоскаляров (каждый по три раза).

Мы закончим это введение некоторыми примерами единых моделей. Наша основная цель здесь — показать погружения цветовой группы, распределения зарядов и определение атомного номера; детальную феноменологию для многих моделей можно найти в литературе, и мы не описываем ее здесь. Приводятся пять примеров, отвечающих случаям 1, 4, 2, 5 и 9 соответственно (см. выше табл. I). Несколько более подробно мы рассматриваем в приводимых примерах следствия возможного требования абсолютной стабильности протона. Хотя мы предполагаем, что калибровочная симметрия нарушена до уровня $\mathrm{U}_1^{em} \times \mathrm{SU}_3^c$, рассматриваются лишь те детали нарушения симметрии, которые необходимы для стабилизации протона. Следует подчеркнуть, что гл. 2 и 3 применимы также и к теориям с нестабильным протоном, а модели, подобные основанной на группе E_6, не следует отбрасывать лишь по той причине, что вариант со стабильным протоном должен быть довольно сложным. Многое из того, что здесь сказано, приводится в табл. IV—VIII.

В качестве первого примера кратко обсудим известные модели с группами SU_n, где группа ароматов приводится в формуле (2.7), векторные бозоны даны в формуле (2.6), а n_1 лептонов и n_3 кварков входят в n-мерное представление, где $n = n_1 + 3n_3$ (см. (2.4)). Антифермионы входят в представление $\bar{n}$, и лагранжиан обладает дополнительной глобальной симметрией, связанной с фермионным числом. Так как n — комплексное представление группы SU_n, то эта теория должна быть векторо-подобной, чтобы можно было избежать треугольных аномалий (см., например, работы Фрицша, Гелл-Манна и Минковского [67], Кингсли, Треймана, Вильчека и Зи [68]. де Рухула, Джорджи и Глэшоу [69] и Пакваса, Симмонса и Туана [70]).

Обычно считают, что кварки и лептоны входят в дублеты SU_2 со стандартным распределением зарядов. Тогда для каждого лептонного дублета

Таблица IV

Бозон-фермионные связи в моделях с группами SU_n, содержащих фермионы в представлении n. В таблице указаны векторные бозоны в ненарушенной теории, дающие переходы $a \to b +$ бозон, где a и b — фермионы. См. формулы (2.4) и (2.6). Приводятся также значения A для нарушения симметрии, обеспечивающего стабильность протона, как обсуждается в тексте

$a \backslash b$	l $(n_1, 1, 1^c)$ $A=0$	q $(1, n_3, 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$
l $(n_1, 1, 1^c)$ $A=0$	$(n_1^2-1, 1, 1^c)+(1, 1, 1^c)$ $A=0$	$(n_1, \bar{n}_3, \bar{3}^c)$ $A=-\frac{1}{3}$
q $(1, n_3, 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(\bar{n}_1, n_3, 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(1, n_3^2-1, 1^c)+(1, 1, 1^c)+$ $+(1, 1, 8^c)+(1, n_3^2-1, 8^c)$ $A=0$

с зарядами 0 и —1 должен присутствовать дублет кварков с зарядами 2/3 и —1/3, чтобы сумма зарядов всех фермионов была равна нулю. Этот вариант теории с группой SU_n имеет чисто векторный нейтральный слабый ток. Разумеется, допустимы многие другие предписания для SU_2 (и даже для зарядов), которые могут лучше согласовываться с экспериментом.

Основное физическое содержание этой теории тесно связано с нарушением симметрии. В лагранжиане без нарушения симметрии нет даже универсальности слабого и электромагнитного взаимодействия кварков и лептонов, так как с этими частицами связаны разные семейства бозонов по аромату (см. табл. IV). В ненарушенной теории протон стабилен из-за сохранения явной симметрии U_1 в G^{fl} и фермионного числа. Но эту симметрию U_1 следует нарушить, чтобы устранить нежелательный безмассовый бозон. Если мы считаем, что в нарушенной теории сохраняются только электрический заряд, фермионное число и цвет, то разрешен процесс $qqq \to lll$.

Априорных причин, по которым нарушение симметрии не нарушало бы фермионного числа, не существует. Например, массовый член для майорановского нейтрального лептона нарушает и фермионное число, и явную подгруппу U_1 в G^{fl}, но не нарушает линейную комбинацию генераторов, $A = \frac{1}{3} N_q$, откуда следует, что A сохраняется. Тогда лептокварки, входящие в $(\bar{n}_1, n_3, 3^c)$ в формуле (2.6), имеют $A = 1/3$. В этом случае все нарушающие симметрию члены, дающие переход $qqq \to lll$, должны также выпадать, так как они имели бы ненулевое значение A. Этот частный случай теории с симметрией SU_n приводится в табл. IV.

Таблица V

Бозон-фермионные связи в моделях с группами SO_{2n}. Представления разложены в соответствии со вложением $SO_{2n} \supset SU_{n'} \times U_1 \times SU_{n_3} \times U_1 \times SU_3^c$, $n = n' + 3n_3$. Локальный генератор, использованный в определении A, является линейной комбинацией генераторов двух явных подгрупп U_1 в этом вложении

b / a	$\bar l$ $(\bar n', 1, 1^c)$ $A=0$	q $(1, n_3, 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$\bar r$ $(1, \bar n_3, \bar 3^c)$ $A=\frac{2}{3}$	L $(n', 1, 1^c)$ $A=1$
$\bar l$ $(\bar n', 1, 1^c)$ $A=0$	$(n'^2-1, 1, 1^c)+2(1, 1, 1^c)$ $A=0$	$(\bar n', \bar n, \bar 3^c)$ $A=-\frac{1}{3}$	$(\bar n', \bar n_3, 3^c)$ $A=-\frac{2}{3}$	$\overline{\left(\frac{1}{2}n'(n'-1), 1, 1^c\right)}$ $A=-1$
q $(1, n_3, 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(n', \bar n_3, 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(1, n_3^2-1, 1^c)+(1, 1, 1^c)+(1, 1, 8^c)$ $A=0$	$\left(1, \frac{1}{2}n_3(n_3+1), \bar 3^c\right)+\left(1, \frac{1}{2}n_3(n_3-1), 6^c\right)$ $A=-\frac{1}{3}$	$(\bar n', n_3, 3^c)$ $A=-\frac{2}{3}$
$\bar r$ $(1, \bar n_3, \bar 3^c)$ $A=\frac{2}{3}$	$(n', \bar n_3, \bar 3^c)$ $A=\frac{2}{3}$	$\overline{\left(1, \frac{1}{2}n_3(n_3+1), 3^c\right)}+\overline{\left(1, \frac{1}{2}n_3(n_3-1), 6^c\right)}$ $A=\frac{1}{3}$	$(1, n_3^2-1, 1^c)+(1, 1, 1^c)+(1, 1, 8^c)$ $A=0$	$(\bar n', \bar n_3, \bar 3^c)$ $A=-\frac{1}{3}$
L $(n', 1, 1^c)$ $A=1$	$\left(\frac{1}{2}n'(n'-1), 1, 1^c\right)$ $A=1$	$(n', \bar n_3, \bar 3^c)$ $A=\frac{2}{3}$	$(n', n_3, 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(n'^2-1, 1, 1^c)+2(1, 1, 1^c)$ $A=0$

Таблица VI

Бозон-фермионные связи в теориях класса III с группами SU_n. Значения A указаны в предположении, что оператор X — генератор явной подгруппы U_1 в формуле (2.10)

b / a	$\bar l$ $((n_1^k)_A, 1^c)$ $A=0$	q $((n_1^{k-1})_A, 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$\bar r$ $((n_1^{k-2})_A, \bar 3^c)$ $A=\frac{2}{3}$	L $((n_1^{k-3})_A, 1^c)$ $A=1$
$\bar l$ $((n_1^k)_A, 1^c)$ $A=0$	$(n_1^2-1, 1^c)+(1, 1^c)$ $A=0$	$(n_1, \bar 3^c)$ $A=-\frac{1}{3}$	Нет	Нет

Продолжение табл. VI

a \ b	$\bar{l}$ $((n_1^k)_A,\ 1^c)$ $A=0$	q $((n_1^{k-1})_A,\ 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$\bar{r}$ $((n_1^{k-2})_A,\ \bar{3}^c)$ $A=\frac{2}{3}$	L $((n_1^{k-3})_A,\ 1^c)$ $A=1$
q $((n_1^{k-1})_A,\ 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(\bar{n}_1,\ 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(n_1^2-1,\ 1^c)+$ $+(1,\ 1^c)+(1,\ 8^c)$ $A=0$	$(n_1,\ \bar{3}^c)$ $A=-\frac{1}{3}$	Нет
$\bar{r}$ $((n_1^{k-2})_A,\ 3^c)$ $A=\frac{2}{3}$	Нет	$(\bar{n}_1,\ 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(n_1^2-1,\ 1^c)+$ $+(1,\ 1^c)+$ $+(1,\ 8^c)$ $A=0$	$(n_1,\ \bar{3}^c)$ $A=-\frac{1}{3}$
L $((n_1^{k-3})_A,\ 1^c)$ $A=1$	Нет	Нет	$(\bar{n}_1,\ 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(1,\ 1^c)$ $A=0$

Таблица VII

Бозон-фермионные связи в моделях с группами SO_n, где фермионы входят в спинорное представление. Локальный генератор, используемый при определении A, порождает явную подгруппу U_1 в формулах (2.20) или (2.23). А — присоединенное представление группы SO_{n-6}, размерности $(n-6)\ (n-7)/2$.

a \ b	$\bar{l}$ $(\xi',\ 1^c)$ $A=0$	q $(\xi,\ 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$\bar{r}$ $(\xi',\ \bar{3}^c)$ $A=\frac{2}{3}$	L $(\xi,\ 1^c)$ $A=1$
$\bar{l}$ $(\xi',\ 1^c)$ $A=0$	$(A,\ 1^c)+(1,\ 1^c)$ $A=0$	$(n-6,\ \bar{3}^c)$ $A=-\frac{1}{3}$	$(1,\ 3^c)$ $A=-\frac{2}{3}$	Нет
q $(\xi,\ 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(n-6,\ 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(A,\ 1^c)+(1,\ 1^c)+$ $+(1,\ 8^c)$ $A=0$	$(n-6,\ \bar{3}^c)$ $A=-\frac{1}{3}$	$(1,\ 3^c)$ $A=-\frac{2}{3}$
$\bar{r}$ $(\xi',\ \bar{3}^c)$ $A=\frac{2}{3}$	$(1,\ \bar{3}^c)$ $A=\frac{2}{3}$	$(n-6,\ 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(A,\ 1^c)+(1,\ 1^c)+$ $+(1,\ 8^c)$ $A=0$	$(n-6,\ \bar{3}^c)$ $A=-\frac{1}{3}$
L $(\xi,\ 1^c)$ $A=1$	Нет	$(1,\ \bar{3}^c)$ $A=\frac{2}{3}$	$(n-6,\ 3^c)$ $A=\frac{1}{3}$	$(A,\ 1^c)+(1,\ 1^c)$ $A=0$

Таблица VIII

Бозон-фермионные связи в модели с группой E_7, фермионы в представлении 56. В рамках указано представление фермионов в группе $SU_6 \times SU_3^c$. Мы предполагаем, что используемый для стабилизации протона оператор X порождает подгруппу U_1 в сужении $SU_6 S \supset U_5 \times U_1$. Таким образом, разбиение собственных состояний оператора A отвечает разложению представлений 56 и 133 по подгруппе $SU_5 \times SU_3^c$.

a \ b		$\boxed{(20,1^c)}$		$\boxed{(6,3^c)}$		$\boxed{(\bar 6,\bar 3^c)}$	
		$\bar l$ $(\overline{10},1^c)$ $A=0$	L $(10,1^c)$ $A=1$	q $(5,3^c)$ $A=1/3$	s $(1,3^c)$ $A=4/3$	$\bar r$ $(\bar 5,\bar 3^c)$ $A=2/3$	$\bar\sigma$ $(1,\bar 3^c)$ $A=-2/3$
$\boxed{(20,1^c)}$	$\bar l$ $(\overline{10},1^c)$ $A=0$	$(24,1^c)+(1,1^c)$ $A=0$	$(5,1^c)$ $A=-1$	$(10,\bar 3^c)$ $A=-1/3$	Нет $A=-4/3$	$(5,\bar 3^c)$ $A=-2/3$	$(\overline{10},3^c)$ $A=1/3$
		$\boxed{(35,1^c)}$		$\boxed{(15,1)}$		$\boxed{(\overline{15},3^c)}$	
	L $(10,1^c)$ $A=1$	$(\bar 5,1^c)$ $A=1$	$(24,1^c)+(1,1^c)$ $A=0$	$(\bar 5,3^c)$ $A=2/3$	$(10,\bar 3^c)$ $A=-1/3$	$(\overline{10},3^c)$ $A=1/3$	Нет
$\boxed{(6,3^c)}$	q $(5,3^c)$ $A=1/3$	$(\overline{10},3^c)$ $A=1/3$	$(\bar 5,3^c)$ $A=-2/3$	$(24,1^c)+(1,1^c)+(1,8^c)$ $A=0$	$(5,1^c)$ $A=-1$	$(10,\bar 3^c)$ $A=-1/3$	$(5,\bar 3^c)$ $A=2/3$
		$\boxed{(\overline{15},3^c)}$		$\boxed{(35,1^c)+(1,8^c)}$		$\boxed{(15,\bar 3^c)}$	
	s $(1,3^c)$ $A=4/3$	Нет	$(\overline{10},3^c)$ $A=1/3$	$(\bar 5,1^c)$ $A=1$	$(1,1^c)+(1,8^c)$ $A=0$	$(5,\bar 3^c)$ $A=2/3$	Нет
$\boxed{(\bar 6,\bar 3^c)}$	$\bar r$ $(\bar 5,\bar 3^c)$ $A=2/3$	$(5,3^c)$ $A-2/3$	$(10,\bar 3^c)$ $A=-1/3$	$(\overline{10},3^c)$ $A=1/3$	$(\bar 5,3^c)$ $A=22/3$	$(24,1^c)+(1,1^c)+(1,8^c)$ $A=0$	$(\bar 5,1^c)$ $A=1$
		$\boxed{(15,\bar 3^c)}$		$\boxed{(\overline{15},3^c)}$		$\boxed{(35,1^c)+(1,8^c)}$	
	$\bar\sigma$ $(1,\bar 3^c)$ $A=-1/3$	$(10,\bar 3^c)$ $A=-1/3$	Нет	$(\bar 5,3^c)$ $A=-2/3$	Нет	$(5,1^c)$ $A=-1$	$(1,1^c)+(1,8^c)$ $A=0$

Второй из рассмотренных нами примеров допускает разные варианты. Мы считаем, что фермионы образуют самосопряженное n-мерное представление группы SO_n и теория векторо-подобна. Предположим, что все фермионы входят в единственное представление n (формула (2.17)), что нет дополнительной глобальной симметрии U_1 и что явная локальная группа U_1 нарушена. Поскольку электрический заряд и цвет — единственные сохраняющиеся величины, собственные состояния оператора массы для триплетных по цвету бозонов будут смесями бозонных представлений $(n_1, n_3, 3^c)$ и $\left(1, \frac{1}{2} n_3 (n_3+1), 3^c\right)$ в формуле (2.18). Тогда лептокварк является также и антидикварком, и обмен этой частицей может, вообще говоря, вызвать переход $qqq \to \bar{q}\bar{q}l$, так что протон будет нестабильным во втором порядке.

Если мы хотим сделать протон стабильным, мы должны решить, получить ли глобальную симметрию U_1 из какого-то другого сектора теории или удвоить фермионное представление, вводя таким образом оператор фермионного числа. В первом случае можно построить теорию без жутких частиц (см. обсуждение к формуле (4.28)). Во втором случае генератор соответствующей локальной симметрии U_1 должен иметь ненулевое значение для лептонов, а это требует выхода за рамки явной подгруппы U_1. Ограничимся для простоты в этом примере четными n, и извлечем вторую подгруппу U_1 из группы $SO_{n_1} \supset SU_{n'} \times U_1$, где $n' = \frac{1}{2} n_1$. Процедуру извлечения части U_1 из неабелевой фактор-группы в G^{fl} мы называем «налетом на аромат». Локальная U_1, генерируемая суммой генераторов этой U_1 и явной U_1, будет нарушена вместе с фермионным числом (см. формулу (4.12) и последующее обсуждение). *В наиболее экономной, что касается жуткости, схеме лептоны имеют $A = 0$ и 1, а кварки $A = 1/3$ и $-2/3$.* Значения A для векторных бозонов нетрудно получить из формул (2.17) и (2.18), так же как и феноменологию жутких распадов. (Последнее аналогично некоторым рассмотренным ниже примерам.) Эта схема описана в табл. V.

В качестве третьего примера рассмотрим модель класса III с симметрией SU_n (случай 2). Для этого примера мы даем простое обсуждение феноменологии жутких фермионов. Относящиеся к этой модели результаты при произвольном n суммированы в табл. VI, но для простоты мы проанализируем вектороподобную модель с группой SU_8, где фермионы входят в комплексное представление $56 = (8^3)_A$. Группой ароматов является $SU_5 \times U_1$ (формула (2.10)), и лагранжиан обладает глобальной симметрией U_1, которая генерируется оператором фермионного числа. Разложение по подгруппе $SU_5 \times SU_3^c$ (формула (2.11)), фермионного представления 56 имеет вид

$$56 = (\overline{10}, 1^c) + (10, 3^c) + (5, \bar{3}^c) + (1, 1^c);$$

а векторные бозоны входят в 63-мерное присоединенное представление, и согласно (2.9)

$$63 = (24, 1^c) + (1, 1^c) + (1, 8^c) + (\bar{5}, 3^c) + (5, \bar{3}^c);$$

здесь 25 «ароматных» бозонов, включая фотон и три известных слабых бозона. Остальные бозоны, преобразующиеся как $(\bar{5}, 3^c)$ и $(5, \bar{3}^c)$, дают переходы между $\bar{l}$ в $(\overline{10}, 1^c)$ и q в $(10, 3^c)$, между q и $\bar{r}$ в $(5, \bar{3}^c)$ и между $\bar{r}$ и синглетным L-лептоном (см. табл. VI).

Распределения электрического заряда легко классифицировать с помощью формул (3.3) и (3.4). Довольно естественно выбрать заряды стандартным образом, так как это единственный выбор, в котором заряды лептонов и кварков варьируются менее, чем на четыре единицы, заряды лептонов меньше трех, и имеется более одного нейтрального лептона. При этом шесть лептонов l имеют $Q = -1$, а остальные четыре — $Q = 0$, четыре из q-кварков имеют $Q = 2/3$; и шесть — $Q = -1/3$; четыре r-кварка имеют $Q = 2/3$, а пятый — $Q = -1/3$; наконец, L-лептон имеет $Q = -1$. Заметим, что L и $\bar{l}$-лептоны не могут быть перемешаны нарушением симметрии, так как не имеют одинаковых зарядов.

Если существует $(\bar{r}q)$-мезон, более легкий, чем протон, то протон может распадаться во втором порядке на этот мезон и лептон. Если L-лептон достаточно легок, то протон может распадаться на три лептона, $\bar{l}\bar{l}L$. Однако если все легкие кварки — q-типа, а легкие лептоны — $\bar{l}$-типа, то кажется более естественным предположить, что $(\bar{r}q)$-мезоны, а также L-лептоны,— тяжелее, чем протон. В этом случае протон будет стабильным до тех пор, пока не нарушится явная группа U_1 в (2.10). Кроме того, если в конечном счете сохраняется фермионное число, распад протона на три легкие лептона не нарушает оставшихся законов сохранения, хотя этот процесс мог бы идти очень медленно.

Конечно, протон можно сделать стабильным, нарушая закон сохранения фермионного числа вместе с симметрией U_1 в G^{fl}. Простейшее решение использует явную группу U_1; общее решение дано в формулах (4.11) и (4.12). В этом примере мы не устраиваем «налета на аромат», так что $\bar{l}$-лептоны имеют $A = 0$, q-кварки имеют $A = 1/3$, r-кварки имеют $A = -2/3$, а L-лептон имеет $A = 1$ (см. формулы (4.7) — (4.10)). Эта модель, распределение A и связи с бозонами даны в табл. VI.

Чтобы осуществить переходы между обычными и жуткими фермионами, нужен бозон, переносящий A. Бозоны в представлении $(\bar{5}, 3^c)$ имеют $A = 1/3$, в представлении $(5, \bar{1}^c)$ имеют $A = -1/3$, у остальных бозонов $A = 0$. Бозоны из $(\bar{5}, 3^c)$ во втором порядке вызывают переход $r \to \bar{l}\bar{q}\bar{q}$. Таким образом жуткий барион с $A = 0$, состоящий из rqq, мог бы распадаться на лептон и два мезона. Аналогично, жуткий мезон $\bar{r}q$ с $A = 1$ распадался бы на барион и лептон. Во втором порядке единственные переходы L-лептона в другие фермионы — это $L \to \overline{rrq}$ и $L \to \overline{rq}l$, так что распад L-лептона мог бы быть двухступенчатым процессом. L-лептоны, рожденные парами в e^+e^--аннигиляции, могли бы быть почти стабильны.

Наш четвертый пример — это вновь модель с погружением класса III, но теория может быть либо вектороподобной, либо спиральной по аромату. Мы включаем фермионы в спинорное представление группы SO_{14}, схема погружения цвета $SO_{14} \supset SO_8 \times U_1 \times SU_3^c$. Подобные модели изучались Фрицшем и Минковским [29]. Спинор группы SO_{14} имеет 64 комплексные компоненты, и в вектороподобной модели содержание кварков и лептонов дается формулой (2.24)

$$64 = (8, 1^c) + (8, 3^c) + (8', 1^c) + (8', \bar{3}^c),$$

где 8 и 8′ — два неэквивалентных вещественных спинорных представления группы SO_8. Разумеется, антифермионы входят в представление $\overline{64}$. Таким образом, все левые состояния со спином 1/2 классифицируются с помощью представлений $64 + \overline{64}$, так же как и правые состояния в вектороподобной модели.

Среди решений для распределений электрического заряда, даваемых формулами (3.5) — (3.8), особенно интересны два случая. Стандартное распределение зарядов получается при $n_1 = 1$ и $n_2 = n_3 = n_4 = 0$.

Половина лептонов имеет $Q = -1$, другая половина $Q = 0$; половина кварков имеет $Q = \frac{2}{3}$, другая половина $Q = -\frac{1}{3}$. Для решения с $n_1 = n_2 = n_3 = 1$ и $n_4 = 0$ лептоны в представлении $(8', 1^c)$ имеют заряды $\{2, 1, 1, 1, 0, 0, 0, -1\}$, противоположный знак имеют лептоны в представлении $(8, 1^c)$. Заряды кварков в $(8,3^c)$ равны $\{5/3, 2/3, 2/3, 2/3, -1/3, -1/3, -1/3, -4/3\}$, заряды антикварков в представлении $(8', \overline{3}^c)$ противоположны. При $n_3 = 1$ и $n_1 = 8$ бозонный состав определяется формулой (2.18):

$$91 = (28, 1^c) + (1, 1^c) + (1, 8^c) + (8_v, 3^c) + (8_v, \overline{3}^c) + (1, 3^c) + (1, \overline{3}^c),$$

где 8_v — векторное представление группы SO_8. Из формул (2.15) и (2.16) видно, что бозоны из мультиплетов $(8_v, 3^c)$ и $(8_v, \overline{3}^c)$ дают переходы $\overline{l} \leftrightarrow q$, $q \leftrightarrow r$ и $r \leftrightarrow L$, где L-лептоны входят в $(8, 1^c)$, q-кварки — в $(8, 3^c)$, $\overline{l}$—в$(8', 1^c)$ и $\overline{r}$ — в $(8', \overline{3}^c)$. Эти бозоны действуют так же, как бозоны из представлений $(5, 3^c)$ и $(5, \overline{3}^c)$ в примере с группой SU_8. Имеется, однако, отличие, состоящее в том, что в случае SO_{14} есть еще бозоны $(1, 3^c)$ и $(1, \overline{3}^c)$, дающие переходы $L \leftrightarrow q$ и $\overline{l} \leftrightarrow \overline{r}$.

Довольно естественно, что в этой схеме протон нестабилен, потому что в мультиплетах L и $\overline{l}$-лептонов могут быть нейтральные члены, и например, нарушающий симметрию вариант $(8_v, 1^c)$ перемешивал бы нейтральные l и L-лептоны, так что распад на три «легких» лептона был бы открыт.

В наиболее экономной с точки зрения жуткости конструкции оператора A (см. случай 5 в гл. 4) нарушенный локальный генератор связан с явной подгруппой U_1. При этом жуткие L-лептоны имеют $A = 1$, а у жутких r-кварков $A = -2/3$. Этот вариант исключает $L - \overline{l}$-смешивание, и нарушение типа $(8_v, 1^c)$ запрещено. И в этом случае цветовой триплет бозонов переносит дробные значения A ($A = \pm 1/3, \pm 2/3$), но процессы распадов жутких частиц аналогичны модели с группой SU_8. Результаты, относящиеся к этому примеру, даны в табл. VII.

В спиральной по аромату теории левые фермионы входят в представление 64, а правые фермионы — в представление $\overline{64}$, причем фермионное число для обоих мультиплетов равно $+1$. Таким образом, все левые состояния со спином 1/2 входят в $64 + 64$, а все правые состояния со спином 1/2 входят в $\overline{64} + \overline{64}$. (Симметрия U_1, связывающая 64 и $\overline{64}$, генерируется псевдоскалярным зарядом и не может быть использована для построения оператора A.) Если кварки q_L принадлежат $(8, 3^c)$, то кварки q_R должны входить в $(8', 3^c)$ в мультиплете $\overline{64}$, чтобы q_L и q_R имели одинаковый заряд, цвет и барионное число. В этом пункте анализ стабильности протона совпадает со случаем вектороподобной теории, где и q_L, и q_R преобразуются как $(8, 3^c)$. Однако естественно ожидать, что анализ полного нарушения симметрии для вектороподобных и спиральных по аромату теорий различается во многих деталях.

В качестве последнего примера рассмотрим модель с группой E_7. Модели с исключительными группами без фермионного числа предсказывают распад протона во втором порядке еще до того, как симметрия нарушается переходом $(qqq) \to (\overline{qql})$. Для модели с группой E_7 и стабильным протоном фермионное представление удваивается. Естественной локальной группы U_1 в этом случае нет. Вместо этого U_1 добывается путем «налета» на $G^{fl} = SU_6$. Конечно, такой «налет» можно сделать и в моделях с неисключительными группами, но здесь без него не обойтись. Как обсуждается в гл. 4, мы извлекаем U_1 из $SU_6 \supset SU_5 \times U_1$, получая богатый спектр жутких частиц (см. формулу (4.20)). В этой схеме шесть кварков с $A = 1/3$, среди которых один кварк с $Q = -1/3$ отщепляется от трех других с тем же зарядом (см. табл. VIII). Следует ожидать, что феноменология сходна с той, которая найдена для теории с нестабильным протоном в работах Гюрши и Сикиви [71, 72] и Рамона [73, 74], в которой фермионы входят в единственное 56-мерное представление. Отметим сходство этой модели с моделью, использующей группу SU_8, где фермионы входят в 28-мерное представление, а погружение имеет вид $SU_8 \supset SU_5 \times U_1 \times \times SU_3^c$. Представление 56 группы E_7 расщепляется на представление $28 + \overline{28}$ группы SU_8. Результаты приводятся в табл. VIII.

2. ПОГРУЖЕНИЕ SU_3^c В ПРОСТЫЕ ГРУППЫ ЛИ

Предметом настоящей главы является решение математической задачи, поставленной во введении: найти все погружения группы SU_3 (которая с точки зрения физики есть цветовая группа SU_3^c в сильных взаимодействиях) в заданную простую группу G, содержащую SU_3 в качестве подгруппы, для которых по крайней мере одно представление G содержит лишь синглеты, триплеты и антитриплеты по цвету. Далее, для каждого погружения нужно найти все представления (если таковые существуют), удовлетворяющие тому же условию на цветовой состав. В настоящей работе фермионы включаются в такие представления, однако, мы полагаем, что рассматриваемые погружения могут быть полезны и в теориях, в которых фермионы включаются в другие представления.

Для всех погружений SU_3^c в G цветовой состав генераторов G точно определен, поэтому можно указать подгруппу по ароматам G^{fl}, которая генерируется синглетными по цвету генераторами G. Разложение на подгруппы имеет вид

$$G \supset G^{fl} \times SU_3^c. \tag{2.1}$$

Генераторы G^{fl} включают, разумеется, слабые заряды и точно сохраняющийся электрический заряд Q. Мы считаем также, что цветовые заряды, генераторы SU_3^c точно сохраняются. (При случае мы отвлечемся на идею расширить точно сохраняющуюся группу в теории сильных взаимодействий типа Янга — Миллса до прямого произведения SU_3 на другую группу, так что все в целом есть подгруппа G.)

Ограничение на цветовой состав фермионного представления приводит к очень простой процедуре погружения. Приложение содержит доказательство ключевой теоремы: если какое-либо представление f группы G, разложенной согласно (2.1), содержит лишь 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$, то и фундаментальное представление содержит лишь 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$. (Фундаментальные представления простых групп Ли: n для SU_n, n для SO_n, $2n$ для Sp_{2n}, 7 для G_2, 26 для F_4, 27 для E_6, 56 для E_7, 248 для E_8.) Таким образом, мы можем исследовать погружение на фундаментальном представлении n, которое не обязательно является фермионным, причем разложение по подгруппе $G^{fl} \times SU_3^c$ имеет вид

$$n = (n_1, 1^c) + (n_3, 3^c) + (n_{\bar{3}}, \bar{3}^c), \tag{2.2}$$

где n_1, n_3 и $n_{\bar{3}}$ — представления группы G^{fl}.

Генераторы группы G принадлежат к присоединенному представлению $\mathrm{Adj}\,(G)$, и его цветовой состав легко найти, зная цветовой состав фундаментального представления. Для погружения $G^{fl} \times SU_3^c$ представление $\mathrm{Adj}\,(G)$ имеет вид

$$\mathrm{Adj}\,(G) = (\mathrm{Adj}\,(G^{fl}), 1^c) + (1, 8^c) + \text{перекрестные члены}, \tag{2.3}$$

где перекрестные члены соответствуют генераторам группы G, перемешивающим аромат и цвет, за исключением случая SU_n. Если n_3 и $n_{\bar{3}}$ отличны от нуля, Adj (G) включает два представления $(1,8^c)$, которые генерируют подгруппу $SU_3 \times SU_3$ группы SU_n. Сумма соответствующих генераторов порождает группу SU_3^c. В этом случае возникает соблазн расширить цветовую группу до $SU_3 \times SU_3$, однако делать это не обязательно. Ниже подобная ситуация обсуждается в случае 3. Мы находим G^{fl} путем явного рассмотрения. Другие представления группы G, удовлетворяющие нашему ограничению на цветовой состав, находятся непосредственно.

Можно обобщить весь метод, рассматривая погружения $G \supset G^{fl} \times \times SU_3^c$, последовательно ослабляя ограничение на цветовой состав фундаментального представления и других представлений, которые можно использовать для фермионов.

В настоящей главе эта процедура применяется ко всем простым группам. Результаты приведены в табл. I, где указана группа погружения и представления. Вывод этих результатов занимает последующую часть этой главы. Мы включили также краткий обзор всех алгебр Ли. Более подробный обзор можно найти, например, в работах Дынкина [75], Уайберна [76] и Джилмора [77]; таблицы Патеры и Санкова [78] содержат полезные результаты из теории групп.

а) Унитарные группы

Специальная унитарная группа SU_n генерируется алгеброй Ли (которая в математической литературе называется A_{n-1}), ранга $n-1$ и порядка n^2-1. Геометрическая интерпретация группы SU_n состоит в том, что она оставляет инвариантными скалярные произведения векторов в n-мерном комплексном векторном пространстве. Представления этой группы, вообще говоря, комплексны. Все $n-1$ представлений, получаемых путем полной антисимметризации k-кратных произведений $(n^k)_A$, неприводимы, их размерность равна биномиальному коэффициенту $\binom{n}{k}$. Сопряженное представление $(n^k)_A$ эквивалентно $(n^{n-k})_A$. Все остальные представления получаются путем частичной симметризации произведений n само на себя. Присоединенное представление размерности n^2-1 содержится в произведении $n \times \bar{n} = (n^2-1)+1$.

Случай 1. Так как представление комплексно, то простейший вид формулы (2.2) следующий:

$$n = (n_1,\ 1,\ 1^c) + (1,\ n_3,\ 3^c), \tag{2.4}$$

где $n = n_1 + 3n_3$, и n_1 и n_3 — целые числа, большие 1. Обозначение в (2.4) отражает тот факт, что в этом случае мы имеем погружение класса I,

$$G^{fl} = G_l \times G_q \times U_1, \tag{2.5}$$

как определено во введении. Так как мы имеем здесь частный случай формулы (2.2) при $n_{\bar{3}} = 0$, то это не единственное погружение. Однако, как будет показано, общий случай обладает новыми чертами, которые требуют отдельного обсуждения. Присоединенное представление группы SU_n дает набор генераторов, определяющий погружение:

$$n^2-1 = (n_1^2-1,\ 1,\ 1^c) + (1,\ n_3^2-1,\ 1^c) + (1,\ 1,\ 1^c) + (1,\ 1,\ 8^c) + \\ + (n_1,\ \bar{n}_3,\ \bar{3}^c) + (\bar{n}_1,\ n_3,\ 3^c) + (1,\ n_3^2-1,\ 8^c). \tag{2.6}$$

Заметим, что здесь нет перекрестных по аромату членов, которые были бы цветовыми синглетами, так что G^{fl} в (2.1) в действительности имеет вид

$$G^{fl} = SU_{n_1} \times SU_{n_3} \times U_1. \qquad (2.7)$$

Группа U_1 различает 1^c и 3^c в фундаментальном представлении.

При $n_3 > 1$ только представление n группы SU_n не содержит других цветовых мультиплетов, кроме 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$, в фермионном представлении. Лептоны входят в $(n_1, 1, 1^c)$, а кварки — в $(1, n_3, 3^c)$ в разложении (2.4). Теория должна быть векторо-подобной, чтобы исключить треугольные аномалии.

Случай 2. Мы можем пренебречь тривиальным случаем $n_1 = 1$ в формуле (2.4), когда все лептоны имеют одинаковый электрический заряд, но при $n_3 = 1$ и $n_1 > 1$ возникает интересный частный случай. Тогда

$$n = (n_1, 1^c) + (1, 3^c), \qquad (2.8)$$

где $n_1 = n - 3$. Присоединенное представление

$$n^2 - 1 = (n_1^2 - 1, 1^c) + (1, 1^c) + (1, 8^c) + (\bar{n}_1, 3^c) + (n_1, \bar{3}^c), \qquad (2.9)$$

и погружение относится к классу III

$$G^{fl} = SU_{n_1} \times U_1. \qquad (2.10)$$

Само по себе представление (2.8) не представляет интереса для фермионов. Однако наложенное нами ограничение на цветовой состав выполняется для представлений размерности $\binom{n}{k}$, получаемых при антисимметризации k-й степени представления n,

$$(n^k)_A = ((n_1^k)_A, 1^c) + ((n_1^{k-1})_A, 3^c) + ((n_1^{k-2})_A, \bar{3}^c) + ((n_1^{k-3})_A, 1^c). \qquad (2.11)$$

При $k = 2$ последний член отсутствует. Если число n — четно и $k = n/2$, то представление $(n^k)_A$ самосопряженное. (Например, 20-мерное представление группы SU_6 имеет вид $(6^3)_A$ и эквивалентно $(\overline{6^3})_A$) В остальных случаях все эти представления комплексны и не застрахованы от аномальных треугольных расходимостей. Других представлений группы SU_n, которые удовлетворяли бы поставленному нами ограничению на цветовой состав, не существует.

Случай 3. Если в формуле (2.2) и n_3, и $n_{\bar{3}}$ отличны от нуля, то присоединенное представление содержит два цветовых октета и наиболее естественное погружение в действительности не имеет вида (2.1), так как оба октета порождают различные подгруппы SU_3. Первоначальное погружение следует писать в виде

$$SU_n \supset (SU_{n_1} \times SU_{n_3} \times SU_{n_{\bar{3}}} \times U_1 \times U_1) \times SU_3^{c'} \times SU_3^{c''}, \qquad (2.12)$$

где группа по ароматам имеет структуру погружения класса II,

$$G^{fl} = G_l \times G_q \times G_{\bar{r}} \times U_1 \times U_1. \qquad (2.13)$$

Ограничению на цветовой состав удовлетворяет лишь фундаментальное представление. В n содержится n_1 лептонов, n_3 q-кварков и $n_{\bar{3}}$ $\bar{r}$-кварков, где $n = n_1 + 3n_3 + 3n_{\bar{3}}$. Так как n в SU_n не застраховано от треугольных аномалий, то фермионы вкладываются вектороподобным образом. Обе группы $SU_3^{c'}$ и $SU_3^{c''}$ порождаются векторными токами. Отсюда возникает желание расширить цветовую группу.

Для того чтобы и q и r-кварки были связаны, нужно положить, что обычные цветовые генераторы равны суммам соответствующих генераторов $SU_3^{c'}$ и $SU_3^{c''}$. Восемь генераторов SU_3^c сохраняются, но имеются две различные возможности для других восьми генераторов группы $SU_3^{c'} \times \times SU_3^{c''}$: они могут быть нарушены, а могут и все сохраняться. Если сохраняется только SU_3^c, то мы получаем обыкновенную калибровочную группу сильных взаимодействий: q и r-кварки связываются одними и теми же глюонами, а спектр адронов включает состояния типа qqr и $q\bar{r}$. Если же ненарушенная калибровочная группа сильных взаимодействий включает целиком $SU_3 \times SU_3$, то q и r-кварки связываются различными мультиплетами глюонов. Следовательно, состояния $q\bar{r}$, преобразующиеся как $(3, \bar{3})$ по цвету, не могут быть свободными; то же относится и к состояниям qqr. Адроны типа qqq и $q\bar{q}$ были бы совершенно отличны от адронов типа rrr и $r\bar{r}$. Бозоны в единой теории, преобразующиеся как $(3, 3)$ и $(\bar{3}, \bar{3})$ по цвету, переносили бы взаимодействие между q и r-кварками.

б) Ортогональные группы

Специальная ортогональная группа SO_m — это группа преобразований, оставляющих инвариантными скалярные произведения векторов в m-мерном вещественном векторном пространстве. Определяющее или векторное представление обозначается v или m и является самосопряженным. Присоединенное представление получается как $(m \times m)_A$, которое является неприводимым и имеет размерность $\frac{1}{2}\, m\,(m-1)$. Спинорные пространства связаны с алгебрами, которые различны для четных m и нечетных m.

Для нечетно-мерного определяющего пространства алгебра Ли группы SO_{2n+1} (называемая B_n) имеет ранг n и порядок $n\,(2n+1)$. Существует единственное вещественное спинорное представление σ размерности 2^n, и его нельзя получить, перемножая векторное представление само на себя. Однако с точностью до фаз представление σ определяется векторным, как можно видеть из разложения прямого произведения

$$\sigma \times \sigma = \sum_{k=0}^{n} (v^k)_A, \tag{2.14}$$

где все $(v^k)_A$ — неприводимые представления группы SO_{2n+1}. Заметим, что в $\sigma \times \sigma$ присутствуют и векторное, и присоединенное представления. Включение фермионов в σ удовлетворяет нашему ограничению на цвет лишь при $n_3 = 1$, так что случаи $n_3 = 1$ и $n_3 > 1$ следует рассматривать раздельно.

При четном числе измерений алгебра Ли группы SO_{2n} (называемая D_n) имеет ранг n и порядок $n\,(2n-1)$. Существуют два неэквивалентных спинора, σ и σ', размерность каждого 2^{n-1}. Кронекеровские (прямые) произведения спиноров имеют вид

$$\sigma \times \sigma' = (v^{n-1})_A + (v^{n-3})_A + \ldots, \tag{2.15}$$

$$\sigma \times \sigma = \tilde{\sigma} + (v^{n-2})_A + (v^{n-4})_A + \ldots, \tag{2.16}$$

где $\tilde{\sigma}$ — некоторое представление размерности $\frac{1}{2}\binom{2n}{n}$, и для $\sigma' \times \sigma'$ справедлива формула, аналогичная (2.16). При четных n σ и σ' — самосопряженные представления, векторное представление входит в $\sigma \times \sigma'$, а присоединенное — в $\sigma \times \sigma$ (и $\sigma' \times \sigma'$). При нечетных n сопряжение переводит σ и σ' друг в друга, $\sigma' = \bar{\sigma}$, оба они комплексны, и $\sigma \times \bar{\sigma}$ содержит присоединенное представление.

Уместно упомянуть эквивалентность алгебр Ли групп SO_6 и SU_4, SO_5 и Sp_4, а также SU_2, SO_3 и Sp_2.

Случай 4. Для группы SO_n фундаментальным является векторное представление n, где n может быть четным или нечетным. Так как n — самосопряженное, то 3^c и $\bar{3}^c$ должны входить симметрично, и формула (2.2) принимает вид

$$n = (n_1,\ 1,\ 1^c) + (1,\ n_3,\ 3^c) + (1,\ \bar{n}_3,\ \bar{3}^c), \tag{2.17}$$

где $n = n_1 + 6n_3$ и $(n_1, 1)$ — самосопряженное представление группы G^{fl}. В соответствии с принятыми обозначениями, мы считаем здесь, что числа n_1 и n_3 — больше 1 и это погружение относится к классу I. Группа G^{fl} находится из присоединенного представления

$$\begin{aligned}(n\times n)_A = \left(\frac{1}{2}n_1(n_1-1),\ 1,\ 1^c\right) + (1,\ n_3^2-1,\ 1^c) + (1,\ 1,\ 1^c) + \\ + (1,\ n_3^2-1,\ 8^c) + (1,\ 1,\ 8^c) + (n_1,\ n_3,\ 3^c) + (n_1,\ \bar{n}_3,\ \bar{3}^c) + \\ + \left(1,\ \frac{1}{2}n_3(n_3+1),\ \bar{3}^c\right) + \left(1,\ \overline{\frac{1}{2}n_3(n_3+1)},\ 3^c\right) + \\ + \left(1,\ \frac{1}{2}n_3(n_3-1),\ 6^c\right) + \left(1,\ \overline{\frac{1}{2}n_3(n_3-1)},\ \bar{6}^c\right),\end{aligned} \tag{2.18}$$

она имеет вид

$$G^{fl} = SO_{n_1} \times SU_{n_3} \times U_1. \tag{2.19}$$

Явная группа U_1 в (2.19) генерируется оператором, который равен числу 3^c минус число $\bar{3}^c$ в разложении (2.17) и который имеет нулевые собственные значения для синглетной по цвету части представления n. Других представлений группы SO_n (при $n_3 > 1$), удовлетворяющих нашему требованию, нет.

Случай 5. Хотя структура спинорных представлений группы SO_m различна при четных и нечетных m, характер их цветового состава достаточно сходен, так что их можно рассматривать вместе. Напомним, что мы погружаем SU_3^c на фундаментальном представлении (формула (2.17)). Как доказано в приложении, требование, чтобы спинорное представление содержало лишь 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$ приводит к справедливости этого требования также для m. Мы покажем, что в (2.17) $n_3 = 1$, так что $G^{fl} = SO_{m-6} \times U_1$; затем мы дадим разложение спиноров по подгруппе $SO_{m-6} \times SU_3^c$.

Начнем с группы SO_{2n+1}. Так как спинор содержит лишь 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$, то цветовой состав $\sigma \times \sigma$ определяется лишь мультиплетами 1^c, 3^c, $\bar{3}^c$, 6^c, $\bar{6}^c$ 8^c. С другой стороны, этот цветовой состав можно найти и непосредственно из формул (2.14) и (2.17). В частности, если $n_3 > 1$, то $(v^3)_A$ содержит представление 15^c, так что спинор удовлетворяет нашему ограничению лишь при $n_3 = 1$. Так как множитель SU_{n_3} при $n_3 = 1$ исчезает, то

$$G^{fl} = SO_{2n-5} \times U_1. \tag{2.20}$$

Разложение спинора группы SO_{2n+1} по представлениям $SO_{2n+1-2j} \times SO_{2j}$ выглядит особенно просто,

$$\sigma = (\xi,\ \rho) + (\xi,\ \rho'), \tag{2.21}$$

где ξ — спинор группы $SO_{2n+1-2j}$, а ρ и ρ' — два спинора группы SO_{2j}. Положим $j = 3$, так что ρ и ρ' — спиноры 4 и $\bar{4}$ группы $SO_6 \approx SU_4$. При сужении SU_4 до $U_1 \times SU_3^c$ спинор 4 распадается на $1^c + 3^c$, и разложение σ имеет вид

$$\sigma = (\xi,\ 1^c) + (\xi,\ 3^c) + (\xi,\ 1^c) + (\xi,\ \bar{3}^c). \tag{2.22}$$

Доказательство того, что ограничение на цветовой состав требует $n_3 = 1$, справедливо также для спиноров группы SO_{2n}. При нечетных n σ — комплексно и $\sigma' = \bar{\sigma}$, так что ни $\sigma \times \bar{\sigma}$, ни $\sigma \times \sigma$ не может содержать цветовых представлений размерностей, превышающих 8. При этом из формул (2.15) и (2.16) следует, что в (2.17) $n_3 = 1$. Тот же аргумент применим и для четных n, хотя в этом случае σ и σ' — самосопряженные спиноры, и нужно проверить лишь, что ограничение на цвет выполняется для $\sigma \times \sigma$. В этом случае группа по ароматам

$$G^{fl} = SO_{2n-6} \times U_1, \tag{2.23}$$

так что мы имеем дело с погружением класса III.

Разложения спиноров группы SO_{2n} по подгруппе $SO_{2n-6} \times SO_6$ имеют вид

$$\sigma = (\xi,\ 4) + (\xi',\ \bar{4}),\quad \sigma' = (\xi',\ 4) + (\xi,\ \bar{4}),$$

и разложения по подгруппе $G^{fl} \times SU_3^c$

$$\sigma = (\xi,\ 1^c) + (\xi,\ 3^c) + (\xi',\ 1^c) + (\xi',\ \bar{3}^c), \tag{2.24}$$

$$\sigma' = (\xi,\ 1^c) + (\xi',\ 3^c) + (\xi,\ 1^c) + (\xi,\ \bar{3}^c), \tag{2.25}$$

где ξ и ξ' — спиноры группы SO_{2n-6}. Как и прежде, подгруппа U_1 в (2.23) возникает из разложения $SU_4 \supset SU_3^c \times U_1$.

Других представлений, которые удовлетворяли бы ограничению на цвет, в группе $\underline{S}O_m$ нет, так как каждое из представлений σ, σ' и ν содержит и 3^c и $\bar{3}^c$.

в) Симплектические группы

Симплектическая алгебра Ли (называемая C_n) порождает группу Sp_{2n} преобразований, которые оставляют инвариантными антисимметричные билинейные формы в вещественном $2n$-мерном векторном пространстве. Она имеет ранг n и порядок $n\,(2n + 1)$. Все ее представления — самосопряженные и могут быть получены из кронекеровских произведений $2n$-мерного определяющего представления само на себя. Присоединенное представление — симметризованный квадрат $2n$-мерного. Произведения вида $(2n^k)_S$ — неприводимы, а $(2n^k)_A$ является суммой двух неприводимых представлений, одно из которых — размерности $\binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-2}$, а другое — размерности $\binom{2n}{k-2}$. Так как представление $2n$ — вещественно, то 3^c и $\bar{3}^c$ должны входить симметрично.

Случай 6. Наиболее общее разложение $2n$, совместимое с формулой (2.2), имеет вид

$$2n = (2n_1,\ 1,\ 1^c) + (1,\ n_3,\ 3^c) + (1,\ n_3,\ \bar{3}^c), \tag{2.26}$$

где $n = n_1 + 3n_3$. Так как в $2n$ входит и 3^c, и $\bar{3}^c$, то все высшие представления содержат 8^c и потому, в соответствии с нашим условием, не подходят для фермионов. Присоединенное представление разлагается следующим образом:

$$n(2n+1)=(n_1(2n_1+1),\ 1,\ 1^c)+(1,\ n_3^2-1,\ 1^c)+(1,\ 1,\ 1^c)+(1,\ 1,\ 8^c)+$$
$$+(2n_1,\ n_3,\ 3^c)+(2n_1,\ \bar{n}_3,\ \bar{3}^c)+$$
$$+\left(1,\ \frac{1}{2}n_3(n_3+1),\ 6^c\right)+\left(1,\ \overline{\frac{1}{2}n_3(n_3+1)},\ \bar{6}^c\right)+$$
$$+\left(1,\ \frac{1}{2}n_3(n_3-1),\ \bar{3}^c\right)+\left(1,\ \overline{\frac{1}{2}n_3(n_3-1)},\ 3^c\right)+(1,\ n_3^2-1,\ 8^c), \qquad (2.27)$$

так что погружение относится к классу I,

$$G^{\mathrm{fl}}=\mathrm{Sp}_{2n_1}\times\mathrm{SU}_{n_3}\times\mathrm{U}_1. \qquad (2.28)$$

При $n_3 = 1$ погружение формально относится к классу III, но оно физически тривиально, так как только $2n$ удовлетворяет ограничению на цветовой состав.

г) Исключительные группы

Помимо четырех бесконечных серий простых классических групп Ли, существуют еще пять исключительных групп, которые не имеют простой геометрической интерпретации, подобной описанной выше. Вместо этого каждую из исключительных групп можно описать как группу инвариантности закона умножения в некоторой системе матриц с элементами, принадлежащими неассоциативной алгебре октонионов. Строить алгебры Ли на основе неассоциативных систем трудно, поэтому число таких алгебр ограничено. Эти группы обладают некоторыми очевидными преимуществами с точки зрения физики частиц. Универсальность кварков и лептонов обеспечивается тем, что группа ароматов, принадлежащая классу IV, не содержит фактора U_1, который различал бы цветовые триплеты и синглеты. К тому же имеется естественная подгруппа SU_3^c, состоящая из преобразований, входящих в группу автоморфизмов алгебры октонионов G_2, которые не меняют одной из компонент октонионов. (Разумеется, в качестве SU_3^c можно взять и другую подгруппу G; эта возможность также рассмотрена.)

Две исключительные группы не удовлетворяют нашим условиям. Группа G_2 имеет ранг 2, ее единственная максимальная подгруппа SU_3, так что G^{fl} тривиальна, в ней нет места даже для связанной с электромагнетизмом группы U_1. Группа E_8 имеет ранг 8 и 248 генераторов. Это единственная группа Ли, для которой присоединенное представление — самое простое. Здесь нет представлений, которые удовлетворяли бы нашему ограничению на цветовой состав.

В табл. IX для справок приводятся кронекеровские произведения фундаментальных и присоединенных представлений исключительных групп.

Случай 7 Группа F_4 имеет ранг 4 и 52 генератора. Подгруппа SU_3^c вкладывается так:

$$F_4\supset\mathrm{SU}_3\times\mathrm{SU}_3^c, \qquad (2.29)$$

поэтому $G^{\mathrm{fl}} = \mathrm{SU}_3$. Только наименьшее нетривиальное представление удовлетворяет цветовому ограничению. Как и все представления группы F_4, оно самосопряженное,

$$26=(8,\ 1^c)+(3,\ 3^c)+(\bar{3},\ \bar{3}^c). \qquad (2.30)$$

Если взять в качестве цветовой группы другую SU_3, то среди представлений F_4 не нашлось бы такого, которое удовлетворяло бы цветовому ограничению. (Это доказано в Приложении.) Разложение по подгруппе $SU_3 \times$ $\times$ SU_3^c для присоединенного представления имеет вид

$$52 = (8, 1^c) + (1, 8^c) + (\bar{6}, 3^c) + (6, \bar{3}^c). \qquad (2.31)$$

Случай 8. Группа E_6 имеет ранг 6 и 78 генераторов. Ее фундаментальное представление комплексно и разлагается следующим образом:

$$27 = (3, \bar{3}, 1^c) + (1, 3, 3^c) + (\bar{3}, 1, \bar{3}^c) \qquad (2.32)$$

при суже́нии на максимальную подгруппу

$$E_6 \supset (SU_3 \times SU_3) \times SU_3^c. \qquad (2.33)$$

Любая другая подгруппа SU_3 может быть взята в качестве цветовой, и ре-

Таблица IX

Разложения произведений фундаментальных и присоединенных представлений для групп G_2, F_4, E_6, E_7 и E_8

G_2:	$7 \times 7 = 7_A + 14_A + 1_S + 27_S$
	$7 \times 14 = 7 + 27 + 64$
	$14 \times 14 = 14_A + 77'_A + 1_S + 27_S + 77_S$
F_4:	$26 \times 26 = 1_A + 52_A + 273_A + 26_S + 324_S$
	$26 \times 52 = 26 + 273 + 1053'$
	$52 \times 52 = 52_A + 1274_A + 1_S + 324_S + 1053_S$
E_6:	$27 \times 27 = \overline{351'_A} + \overline{27}_S + \overline{351}_S$
	$27 \times \overline{27} = 1 + 78 + 650$
	$27 \times 78 = 27 + 351' + 1728$
	$78 \times 78 = 78_A + 2925_A + 1_S + 650_S + 2430_S$
E_7:	$56 \times 56 = 1_A + 1539_A + 133_S + 1463_S$
	$56 \times 133 = 56 + 912 + 6480$
	$133 \times 133 = 133_A + 8645_A + 1_S + 1539_S + 7371_S$
E_8:	$248 \times 248 = 248_A + 30\,380_A + 1_S + 3875_S + 27\,000_S$

зультаты настоящей статьи не изменятся. Присоединенное представление разлагается так:

$$78 = (8, 1, 1^c) + (1, 8, 1^c) + (1, 1, 8^c) + (3, 3, \bar{3}^c) + (\bar{3}, \bar{3}, 3^c). \qquad (2.34)$$

Единственными представлениями, содержащими только 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$, являются 27 и $\overline{27}$.

Случай 9. Группа E_7 имеет ранг 7 и 133 генератора. Цвет можно вложить так:

$$E_7 \supset SU_6 \times SU_3^c. \qquad (2.35)$$

Только 56-мерное представление удовлетворяет нашему ограничению; его разложение по подгруппе $SU_6 \times SU_3^c$ имеет вид

$$56 = (20, 1^c) + (6, 3^c) + (\bar{6}, \bar{3}^c). \qquad (2.36)$$

Разложение присоединенного представления

$$133 = (35, 1^c) + (1, 8^c) + (\overline{15}, 3^c) + (15, \bar{3}^c). \qquad (2.37)$$

Цветовую SU_3 можно вложить также в подгруппу SU_6 группы E_7. Это можно сделать двумя способами: а) Если $SU_6 \supset SU_3^c \times SU_3 \times U_1$, то 56 распадается на представления группы E_6: $27 + \overline{27} + 1 + 1$. Только это представление удовлетворяет цветовому ограничению. б) Если $SU_6 \supset \supset SU_3 \times SU_2$, то, как доказано в Приложении, ни одно представление E_7 не удовлетворяет ограничению.

3. ОПЕРАТОР ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ЗАРЯДА

Векторные бозоны, переносящие электромагнитные (и слабые) взаимодействия, связаны с генераторами группы ароматов G^{fl}, причем электрический заряд Q порождает подгруппу U_1 в G^{fl}. У кварков — дробные электрические заряды, принадлежащие последовательности (. . . 5/3, 2/3, —1/3, —4/3, . . .), а лептоны имеют целые заряды (. . ., 1, 0, —1, . . .). В этой главе мы строим все возможные операторы заряда, допустимые нашими условиями. Всегда возможно «стандартное распределение зарядов», когда заряды кварков ограничены значениями 2/3 и —1/3, а у лептонов заряды 0 и —1, хотя число фермионов с данным зарядом зависит от G^{fl}. Конечно, возможны и другие распределения зарядов. Построим оператор заряда для каждого из четырех классов групп G^{fl}, описанных во введении. Для оператора заряда в теориях классов I и II почти нет ограничений, в этих случаях мало что можно сказать. В теориях с исключительными группами имеются столь жесткие ограничения, что можно перечислить все допустимые распределения заряда. Лишь теории класса III требуют некоторых усилий.

Класс I. $G^{fl} = G_l \times G_q \times U_1$ (случаи 1, 4 и 6 в табл. I и в гл. 2)

Так как кварки и лептоны преобразуются различными фактор-группами группы G^{fl}, то наблюдаемая универсальность их слабых и электромагнитных зарядов должна возникать из-за механизма, нарушающего симметрию G до уровня $SU_3^c \times U_1$. Это отражается в свободе выбора Q, который можно записать в общем виде:

$$Q = \alpha I_l + \beta I_q + \gamma I_0, \tag{3.1}$$

где I_l — генератор U_1 в G_l, I_q — генератор U_1 в G_q, а I_0 — генератор явной подгруппы U_1. Перечислим все ограничения на собственные значения Q.

Случай 1. Имеется лишь одно ограничение на заряды фермионов в представлении n группы SU_n: сумма зарядов всех кварков (всех цветов) отличается только знаком от суммы зарядов лептонов, которая пропорциональна γ в формуле (3.1). При стандартном распределении зарядов это соотношение принимает вид: число лептонов с $Q = -1$ равно числу кварков с $Q = 2/3$ минус число кварков с $Q = -1/3$. В этом частном случае число кварковых ароматов равно числу лептонных ароматов.

Случаи 4 и 6. Векторные представления n группы SO_n и $2n$ группы Sp_{2n} — самосопряженные. Если все фермионы и их античастицы содержатся в одном представлении, например, n группы SO_n, то на определение зарядов фермионов нет никаких ограничений. Возможно также, что представление n содержит кварки q и антикварки $\bar{r}$ такие, что кварки q и r — не эквивалентны. Тогда из CPT-инвариантности следует существование другого представления $\bar{n}$, содержащего $\bar{q}$ и r. Собственное значение I_0 равно числу q минус число $\bar{r}$. Ограничения на заряды таковы: сумма зарядов в мультиплете $(n_1, 1, 1^c)$, входящем в n, равна нулю; сумма зарядов q-кварков пропорциональна γ и равна сумме зарядов r-кварков.

Класс II. $G^{fl} = G_l \times G_q \times G_{\bar{r}} \times \mathrm{U}_1 \times \mathrm{U}_1$ (случай 3)

Единственное ограничение на электрические заряды: сумма зарядов всех фермионов, входящих в n, должна быть равна нулю, как в случае 1 класса I.

Класс III. $G^{fl} = G_{l+q} \times U_1$ (случаи 2 и 5)

Генераторы группы G_{l+q} действуют и на кварки, и на лептоны, а группа U_1 различает 1^c и 3^c. Таким образом, заряды кварков определяют заряды лептонов, хотя кварки и лептоны иногда принадлежат к различным представлениям группы G_{l+q}, так что эти связи не всегда одинаковы. Наиболее общий вид оператора заряда

$$Q = \alpha I + \beta I_0, \tag{3.2}$$

где αI порождает подгруппу U_1 в G_{l+q}, а I_0 порождает явную фактор-группу U_1. Значение β определяется в основном дробным строением зарядов кварков, а параметр α регулирует целочисленный интервал в спектре зарядов.

Случай 2. Оператор заряда для теорий с SU_n симметрией, относящихся к классу III, является линейной комбинацией генератора группы SU_{n_1} ($n_1 = n - 3$) и генератора I_0 группы U_1. При действии на представление n в формуле (2.8) оператор I_0 имеет собственные значения $1/n_1$ для (n_1, 1^c) и $-1/3$ для (1, 3^c). Собственные значения генератора SU_{n_1} можно параметризовать набором n_1 целых чисел $\{\mathfrak{M}^1_\alpha\} = \{m_\alpha\} = \{m_1, m_2, \ldots, m_{n_1}\}$, так как электрические заряды в мультиплете различаются на целые числа. Мы определяем $M = \sum_{\alpha=1}^{n_1} m_\alpha$, и собственные значения этого генератора равны $m_\alpha - M/n_1$ при действии на (n_1, 1^c) и равны 0 для (1, 3^c). Без ограничения общности можно считать, что $0 \leqslant M < n_1$.

Фермионы входят в представление $(n^k)_A$ (см. формулу (2.11)). Поэтому полезно определить $\{\mathfrak{M}^k_\alpha\}$ как набор $\binom{n_1}{k}$ целых чисел, полученных суммированием k различных чисел m всеми возможными способами. Обозначая заряды в $((n_1^k)_A, 1^c)$ символом $Q_\alpha((n_1^k)_A, 1^c)$ и т. д., электрические заряды фермионов можно параметризовать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned}
&Q_\alpha((n_1^k)_A, 1^c) = \mathfrak{M}^k_\alpha + r, && \alpha = 1, \ldots, \binom{n_1}{k},\\
&Q_\alpha((n_1^{k-1})_A, 3^c) = \mathfrak{M}^{k-1}_\alpha + s - \frac{1}{3}, && \alpha = 1, \ldots, \binom{n_1}{k-1},\\
&Q_\alpha((n_1^{k-2})_A, \bar{3}^c) = \mathfrak{M}^{k-2}_\alpha + 2s - r - \frac{2}{3}, && \alpha = 1, \ldots, \binom{n_1}{k-2},\\
&Q_\alpha((n_1^{k-3})_A, 1^c) = \mathfrak{M}^{k-3}_\alpha + 3s - 2r - 1, && \alpha = 1, \ldots, \binom{n_1}{k-3},
\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

где r и s должны быть целыми и удовлетворять соотношению

$$(3k - n)\, r = (M + 3s - 1)\, k. \tag{3.4}$$

(Параметр β в формуле (3.2) определяется числами r и s, откуда следует (3.4).)

Применим формулы (3.3) и (3.4) к некоторым примерам. Если мы требуем, чтобы набор $\{\mathfrak{M}^k_\alpha\}$ содержал только две величины, то для $\{m_\alpha\}$ существуют две возможности.

а) $\{m_\alpha\} = \{1, 0, \ldots, 0\}$. Если Q_α $((n_1^k)_A, 1^c)$ содержит заряды $Q = 0$ и $Q = 1$ (антилептоны), то $r = s = 0$, и вновь получается стандартное распределение зарядов. Состав частиц таков:

$((n_1^k)_A, 1^c)$ — антилептоны: $\binom{n-4}{k-1}$ с $Q=1$ и $\binom{n-4}{k}$ с $Q=0$,

$((n_1^{k-1})_A, 3^c)$ — кварки: $\binom{n-4}{k-2}$ с $Q=\frac{2}{3}$ и $\binom{n-4}{k-1}$ с $Q=-\frac{1}{3}$,

$((n_1^{k-2})_A, \bar{3}^c)$ — антикварки: $\binom{n-4}{k-3}$ с $Q=\frac{1}{3}$ и $\binom{n-4}{k-2}$ с $Q=-\frac{2}{3}$,

$((n_1^{k-3})_A, 1^c)$ — лептоны: $\binom{n-4}{k-4}$ с $Q=0$ и $\binom{n-4}{k-3}$ с $Q=-1$.

б) Можно получить стандартное распределение зарядов также другим способом из $\{m_\alpha\} = \{0, 1, \ldots, 1\}$, но только при четных n и $k = n/2$.

Всегда возможны и более обширные спектры электрических зарядов, хотя формула (3.4) позволяет ограничить число случаев. В качестве одного из интересных примеров рассмотрим набор $\{m_\alpha\} = \{1, 1, 0, 0, \ldots, 0\}$ при требовании, чтобы заряды Q_α $((n_1^k)_A, 1^c)$ имели значения 1, 0, —1. Тогда $r = -1$ и $s = 1/3$ $(n/k - 4)$, откуда следует $n = 4k$, $7k$, $10k$, и т. д. Для случая $n = 8$ и $k = 2$ имеется кварковый синглет с $Q = -1/3$. Это распределение зарядов для 28-плета группы SU_8 связано со стандартным случаем для 56-плета группы E_7 (см. ниже случай 9); разложение этого 56-плета по представлениям группы SO_8 имеет вид $28 + \overline{28}$.

С л у ч а й 5. Оператор заряда для теорий с SO_n-симметрией, относящихся к классу III, является линейной комбинацией генератора группы SO_{n-6} и генератора явной подгруппы U_1 в формуле (2.20) или (2.23). (Мы рассматриваем случай четных и нечетных n единым образом.) Собственные значения генератора группы SO_{n-6} зависят от $m = (n-6)/2$ параметров, которые могут быть выбраны целыми вследствие целочисленности интервалов в спектре электрических зарядов. Собственные значения этого генератора, действующего на представления $(n-6, 1^c)$, равны $\pm n_1, \pm n_2, \ldots, \pm n_m$, (0), где $n_1, \ldots, n_m$ — неотрицательные целые числа, и дополнительное нулевое собственное значение присутствует, если n — нечетное. Собственные значения этого генератора при действии на спинорное представление определяется набором $\mathfrak{M}$, где

$$\mathfrak{M} = \left\{\frac{1}{2}(\pm n_1 \pm n_2 \pm \ldots \pm n_m)\right\}. \tag{3.5}$$

Формула (3.5) — решение уравнений (2.14) или (2.15) и (2.16). Его легче всего найти из структуры спиноров группы SO_{n-6}, выраженной на языке алгебры Клиффорда, но можно также использовать разложение спиноров группы SO_{n-6} по представлениям подгруппы $SU_m \times U_1$. При нечетных n имеется только один спинор размерности 2^m, и собственные значения даются как раз набором $\mathfrak{M}$. При четных n имеются два спинора, размерности 2^{m-1} каждый; для одного из них собственные значения даются подмножеством $\mathfrak{M}_+$ с четным числом отрицательных чисел, для другого — подмножеством с нечетным числом отрицательных чисел, $\mathfrak{M}_-$. Определим также

$$N = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} n_i. \tag{3.6}$$

Все элементы множества $\mathfrak{M}$ — целые или полуцелые, в зависимости от N. Сумма всех элементов $\mathfrak{M}_\pm$ равна нулю, так как след оператора αI равен нулю в любом представлении. Если m и n — четные, то множество $\mathfrak{M}_\pm$

совпадает с множеством $-\mathfrak{M}_{\pm}$, а при четных n и нечетных m множество $\mathfrak{M}_{\pm}$ совпадает с $-\mathfrak{M}_{\mp}$.

Явная подгруппа U_1 получается из разложения $SO_6 \approx SU_4 \supset U_1 \times \times SU_3^c$. Определение собственных значений генератора U_1 — простое применение только что полученных нами результатов для SU_{n-6}. Представление 6 группы SO_6 разлагается на $3^c + \bar{3}^c$ группы SU_3^c, а собственные значения генератора U_1 равны $\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$. Собственные значения 4-мерного спинора SO_6, вычисленные по формуле (3.5), равны при этом $\frac{1}{2}\{3, -1, -1, -1\}$. Мы подбираем параметр β в формуле (3.2) так, чтобы кварки и лептоны оказались в соответствующих последовательностях по заряду. В случае, когда N в формуле (3.6) — целое, электрические заряды фермионов в спинорном представлении группы SO_n, формулы (2.22) и (2.24) и (2.25), равны:

$$\left.\begin{aligned} Q_\alpha(\xi, 1^c) &= \mathfrak{M}_{+\alpha} + 3k + 1, \\ Q_\alpha(\xi, 3^c) &= \mathfrak{M}_{+\alpha} - k - \frac{1}{3}, \\ Q_\alpha(\xi', 1^c) &= \mathfrak{M}_{-\alpha} - 3k - 1, \\ Q_\alpha(\xi', \bar{3}^c) &= \mathfrak{M}_{-\alpha} + k + \frac{1}{3}, \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

где $3k + 1$ — средний заряд лептонов в представлении $(\xi, 1^c)$ и т. д., и k — целое. Для нечетных n в формуле (3.7) $\mathfrak{M}_+ = \mathfrak{M}_- = \mathfrak{M}$. Случай полуцелого N получается заменой k на $k - \frac{1}{2}$ в формуле (3.7), так что

$$\left.\begin{aligned} Q_\alpha(\xi, 1^c) &= \mathfrak{M}_{+\alpha} + 3k - \frac{1}{2}, \\ Q_\alpha(\xi, 3^c) &= \mathfrak{M}_{+\alpha} - k + \frac{1}{6}, \\ Q_\alpha(\xi', 1^c) &= \mathfrak{M}_{-\alpha} - 3k + \frac{1}{2}, \\ Q_\alpha(\xi', 3^c) &= \mathfrak{M}_{-\alpha} + k - \frac{1}{6}. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

В обоих случаях средний заряд лептонов в $(\xi, 1^c)$ (или $(\xi', 1^c)$) равен утроенному среднему заряду кварков (со знаком минус) в представлении $(\xi, 3^c)$ (или $(\xi', \bar{3}^c)$), и заряды расположены на интервале длиной $2N$.

Стандартное распределение зарядов получается при $k = 0$ в формуле (3.8), и $\{n_\alpha\} = \{n_1, \ldots, n_m\} = \{1, 0, \ldots, 0\}$. При этом половина лептонов имеет $Q = 0$, а другая половина $Q = -1$; половина кварков имеет $Q = \frac{2}{3}$, а другая половина $Q = -\frac{1}{3}$. Во всех этих четырех случаях распределения заряда и цвета мы имеем одно и то же четное число частиц. Это соответствует тому, что оператор αI является генератором фактор-группы U_1 в погружении $SO_{n-6} \supset SO_{n-8} \times SO_2 = SO_{n-8} \times U_1$. Не существует моделей, в которых средний заряд лептонов равнялся бы $-1/2$, а все заряды располагались бы на интервале длиной 2. Есть три случая, когда при среднем заряде лептонов $-1/2$ этот интервал равен 3. Эти три случая: а) $\{n_\alpha\} = \{3, 0, \ldots, 0\}$, когда существуют лишь заряженные токи с $Q = 3$; б) $\{n_\alpha\} = \{2, 2, 0, \ldots, 0\}$; в) $\{n_\alpha\} = \{1, 1, 1, 0, \ldots, 0\}$. И последний пример: средний заряд лептонов равен 1, интервал зарядов 2. Единственный интересный случай $\{n_\alpha\} = \{1, 1, 0, \ldots, 0\}$. При этом, как легко видеть из формулы (3.7), заряды лептонов 0, 1 и 2; заряды кварков 2/3, $-1/3$ и 4/3.

Класс IV. $G^{fl} = G_{l+q}$ (случаи 7, 8 и 9)

В случае исключительных групп G^{fl} действует и на кварки, и на лептоны, как простая группа ароматов. Фактор U_1, который различал бы цвет, отсутствует. Сумма зарядов кварков равна нулю. Универсальность кварков и лептонов накладывается на уровне калибровочной группы. И кварки, и лептоны преобразуются по различным представлениям группы G^{fl}, которые связаны таким образом, что при кратных 1/3 зарядах кварков лептоны имеют целые заряды.

Случай 7. Группа ароматов для F_4 — это SU_3, фермионы входят в представление 26, формула (2.30). Собственные значения оператора электрического заряда при действии на триплет могут быть параметризованы числами $\left(n_1 - \frac{1}{3}, n_2 - \frac{1}{3}, -n_1 - n_2 + \frac{2}{3}\right)$, где n_1 и n_2 — целые. Заряды лептонов в представлении $(8, 1^c)$ равны $\{\pm(n_1 - n_2), \pm(2n_1 + n_2 - 1), \pm(2n_2 + n_1 - 1), 0, 0\}$. Стандартное распределение зарядов, для которого в данном случае лептоны имеют заряды $Q = \pm 1$, получается при $n_1 = n_2 = 0$.

Случай 8. Генератор подгруппы $U_1 \subset SU_3 \times SU_3$ (это G^{fl} для случая E_6) должен иметь собственные значения $\left(n_1 - \frac{1}{3}, n_2 - \frac{1}{3}, -n_1 - n_2 + \frac{2}{3}\right)$ в представлении (1,3) и $\left(m_1 - \frac{1}{3}, m_2 - \frac{1}{3}, -m_1 - m_2 + \frac{2}{3}\right)$ в представлении (3,1). При этом собственные значения Q для $(3, \bar{3}, 1^c)$ в формуле (2.32) равны $\{m_1 - n_1, m_1 - n_2, m_2 - n_1, m_2 - n_2, m_1 + n_1 + n_2 - 1, -m_1 - m_2 - n_1 + 1, m_2 + n_1 + n_2 - 1, -m_1 - m_2 - n_2 + 1, n_1 + n_2 - m_1 - m_2\}$. Стандартное распределение зарядов, которое кажется единственным интересным, получается при $n_1 = n_2 = m_1 = m_2 = 0$.

Случай 9. Генератор произвольной подгруппы $U_1 \subset SU_6$ задается пятью параметрами. Кварки входят в представление 6 группы SU_6 и собственные значения оператора заряда равны $n_i - \frac{1}{3}$, $i = 1, \ldots, 6$ при $N = \sum_{i=1}^{6} n_i = 2$. При этом заряды в представлении $(20, 1^c)$ входят в набор $\mathfrak{M}_{3-1}$, где $\mathfrak{M}_3$ — все различные тройные суммы чисел n_i. Только при $\{n_\alpha\} = \{1, 1, 0, 0, 0, 0\}$ получается стандартное распределение зарядов. Кварк с зарядом $-4/3$ появляется в модели с $n_\alpha = \{1, 1, 1, 0, 0, -1\}$.

4. СОХРАНЕНИЕ БАРИОННОГО ЧИСЛА

В единых теориях, где кварки (3^c) и лептоны входят вместе в одно неприводимое представление группы G, существуют векторные бозоны (лептокварки), переводящие лептоны в кварки. При этом открывается возможность распада протона, если только не существует некоторого сохраняющегося квантового числа A, для которого протон является наинизшим состоянием с $A = 1$. Как отмечалось во введении, точной стабильности протона не требуется, так как существует много способов увеличить время жизни протона до уровня, превышающего экспериментальный предел. Однако стабильность протона не противоречит эксперимнетальным данным, и интересно исследовать, к чему приводит это условие в обсуждаемых здесь единых теориях.

Из опыта известно, что сохранение A не связано с наличием какой-либо дальнодействующей силы. Поэтому даже если A — аддитивное квантовое число, подобное Q, оно не может быть генератором локальной группы U_1. Необходимо, чтобы лагранжиан обладал некоторой симметрией, помимо локальной калибровочной группы G. Однако введение дополнительной глобальной симметрии U_1 не решило бы проблемы, так как ее генератор относился бы к представлениям группы G в целом, не различая кварки и лептоны, содержащиеся в одном представлении. Это помогло бы перенести распад протона в высшие порядки, но не сделало бы протона абсолютно стабильным. Если однако эта глобальная группа U_1, а также некоторая локальная группа U_1 нарушаются таким образом, что сохраняется какая-либо линейная комбинация их генераторов, то векторный бозон приобретает массу (физического голдстоуновского бозона не остается), а ненарушенная линейная комбинация приводит к точному закону сохранения. Выделение групп U_1 отражает тот факт, что A является аддитивным квантовым числом. Лагранжиан такой теории, помимо группы G, должен обладать по крайней мере еще дополнительной глобальной U_1-симметрией. (Возможное исключение из этого правила связано с возникновением сохраняющихся топологических квантовых чисел, но для трехмерного пространства пока не было найдено примеров такой теории с короткодействующими силами.) Обозначим через X генератор локальной группы U_1, а через Z — генератор глобальной U_1. При проведении этого анализа мы пренебрегли возможным нарушением U_1, вызванным эффектами туннелирования вакуума (инстантоны). Даже в теориях, где есть такое нарушение, распад протона, обусловленный этим механизмом, происходит очень медленно (см. работу 'т Хоофта [79]).

Обсудим теперь способы получения U_1. Если лагранжиан содержит только присоединенное представление векторных бозонов и одно самосопряженное неприводимое представление фермионов, то глобальных симметрий нет. Для того чтобы лагранжиан приобрел дополнительную глобальную симметрию U_1, следует ввести добавочные мультиплеты. Существуют две возможности:

1) Лагранжиан приобретает дополнительную фазовую инвариантность, если фермионное представление удвоено; эта глобальная симметрия порождается фермионным числом. Фермионы ($Z_f = +1$) входят в представление f (некоторые из фермионов могут быть антикварками или антилептонами), а их античастицы ($Z_f = -1$) входят в $\overline{\text{f}}$. Разумеется, удвоение f необходимо, если это комплексное представление групп SU_n, SO_{2n} или E_6. В первом наборе решений для A, который выводится далее в этой главе, предполагается, что Z — фермионное число. Простейший прототип такой теории — динамически нарушенная симметрия в модели, содержащей лишь поля со спинами 1 и 1/2. Бозоны имеют $Z = 0$, а фермионы принадлежат к неприводимому представлению f с $Z = 1$, антифермионы — к представлению $\overline{\text{f}}$ с $Z = -1$. Фермионное число и X нарушаются массовым членом для майорановских лептонов, который имеет вид $ll + \overline{l}\overline{l}$. Для простоты мы не рассматриваем лагранжианы с дополнительной глобальной симметрией, возникающей, например, от дополнительных полей в лагранжиане или от того, что представление f приводимо. Это непосредственное обобщение при желании может дать сохранение как барионного, так и лептонного заряда. Мы ищем затем такой оператор X, чтобы

$$A = Z + X \tag{4.1}$$

было подходящим атомным числом. Оказывается, что только для случаев 1 и 3 (см. выше табл. I) можно сделать так, чтобы все лептоны имели $A = 0$, а все кварки $A = 1/3$; все другие случаи предсказывают жуткие частицы. Простые примеры даны в табл. III (стр. 470).

2) Глобальная группа U_1 связана с симметрией, лежащей вне фермионного сектора, так что Z для фермионов равно нулю. Прототип такой теории — модель, в которой все фермионы входят в единственное неприводимое самосопряженное представление f, а затравочные хиггсовские поля имеют ненулевые значения Z. Если Z и X нарушены, но их сумма сохраняется, некоторые из полей с нулевым спином получают ненулевое значение A (среднее по вакууму для этих полей должно быть равно нулю), безмассовый бозон делается тяжелым, а атомное число в фермионном секторе равно просто

$$A = X. \tag{4.2}$$

Для простоты мы вновь допускаем лишь одну глобальную симметрию U_1, так что фермионы включаются в самосопряженное представление. (Случаи 1, 3 и 8 отсутствуют.) Можно сформулировать SO_n- и Sp_{2n}-симметричные теории класса I со стабильным протоном, но без жутких фермионов; в остальных случаях требуются жуткие фермионы.

Происходит ли нарушение симметрии в физической теории описанным образом, зависит от конкретного вида лагранжиана. Некоторые модели не обладают подходящим атомным числом, хотя эта возможность и появляется в нашей классификации. Однако часто выбор удовлетворительных операторов X достаточно широк.

Так как X не сохраняется, то этот оператор должен быть одним из генераторов G^{fl}. В теориях, основанных на классических группах, G^{fl} содержит явную подгруппу U_1, и ее генератор обычно подходит в качестве X. (Единственное исключение — представление $f = n$ группы SO_n с удвоением фермионов.) Можно также извлечь часть оператора X из неабелевых подгрупп G^{fl}, мы назвали эту процедуру «налетом на аромат». Пока такой метод для классических групп представляется несколько академическим, но мы покажем, как можно систематически исследовать этот вопрос. Для исключительных групп X должен обязательно добываться налетом на аромат, так как явной подгруппы U_1 в этом случае нет. Как и в гл. 3, мы должны построить собственные значения генератора группы $U_1 \subset G^{\text{fl}}$ и можем использовать многие из применявшихся там приемов.

а) Удвоение f, майорановское нарушение

Случай 1. Прежде всего условимся об обозначениях. Пусть фермионы входят в представление n группы SU_n, так что

$$\mathrm{f} = (l,\ 1^c) + (q,\ 3^c). \tag{4.3}$$

Сравнивая это разложение с формулой (2.4), мы видим, что $l = (n_1,\ 1)$ и $q = (1,\ n_3)$ — представления группы G^{fl}. Глобальная группа U_1 порождается оператором фермионного числа

$$Z = N_l + N_q, \tag{4.4}$$

где N_q — число q минус число $\bar{q}$. В прямом произведении $SU_{n_1} \times SU_{n_3} \times U_1$ имеется $(n_1 + n_3 - 1)$ локальных подгрупп U_1, и единственное ограничение состоит в том, чтобы оператор X отличался от электрического заряда. Однако единственным выбором, при котором не появляются жуткие частицы, является генератор явной подгруппы U_1 в формуле (2.7)

$$X = N_l - \frac{n_1}{3n_3} N_q. \tag{4.5}$$

Майорановский массовый член, нарушающий и X, и Z, имеет вид $ll + \bar{l}\bar{l}$, так что A не может содержать N_l. Поэтому оператор A пропорционален

$Z - X$, и при подходящей нормировке

$$A = \frac{1}{3} N_q, \tag{4.6}$$

что, очевидно, совпадает с барионным числом, так как все лептоны имеют $A = 0$, а протон, наинизшее трехкварковое состояние, имеет $A = 1$. Лептонное число не сохраняется из-за майорановского массового члена, но этого можно избежать в более сложных примерах. Любой другой оператор X, который можно было бы извлечь из группы ароматов, обязательно различал бы типы кварков и (или) лептонов, что привело бы к появлению жутких частиц. Исследование этих случаев проводится непосредственно, но оно не очень поучительно.

Случай 2. Антисимметризованное k-кратное произведение представлений n группы SU_n в формуле (2.11) можно записать в виде

$$f = (\bar{l}, 1^c) + (q, 3^c) + (\bar{r}, \bar{3}^c) + (L, 1^c). \tag{4.7}$$

В простейшей модели оператор X — генератор явной подгруппы U_1 в формуле (2.10), и его можно выбрать так:

$$X = Z - \frac{n}{k}\left(\frac{1}{2} N_q - \frac{2}{3} N_r + N_L\right), \tag{4.8}$$

где Z — оператор фермионного числа,

$$Z = -N_l + N_q - N_r + N_L. \tag{4.9}$$

При майорановской массе, помещая известные лептоны в представление $(l, 1^c)$, получаем

$$A = \frac{1}{3} N_q - \frac{1}{3} N_r + N_L. \tag{4.10}$$

Формула (4.10) указывает, например, на существование тяжелых L-лептонов, которые распадаются на обычные барионы, и состоящих из трех жутких кварков ($3r$) частиц с $A = -2$, которые могли бы распадаться на антидейтрон и легкий лептон. Чтобы не было противоречия с опытом, эти жуткие частицы должны быть достаточно тяжелыми.

Наиболее общий вид оператора A получается при «налете» на группу SU_{n-3}. Вычисление и получающийся спектр A почти совпадают с соответствующими результатами для оператора электрического заряда в случае 2 гл. 3. Следуя введенным там обозначениям, получаем решение

$$\left.\begin{aligned} &A_\alpha((n_1^k)_A, 1^c) = \mathfrak{M}_\alpha^k + r, \\ &A_\alpha((n_1^{k-1})_A, 3^c) = \mathfrak{M}_\alpha^{k-1} + s + \frac{1}{3}, \\ &A_\alpha((n_1^{k-2})_A, \bar{3}^c) = \mathfrak{M}_\alpha^{k-2} + 2s - r + \frac{2}{3}, \\ &A_\alpha((n_1^{k-3})_A, 1^c) = \mathfrak{M}_\alpha^{k-3} + 3s - 2r + 1, \end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

где r и q — целые числа, удовлетворяющие условию

$$(3k - n)\, r = (M + 3s + 1)\, k - nZ, \tag{4.12}$$

а Z — фермионное число, которое должно быть отлично от нуля. Систематика различных возможностей для A аналогична систематике распределений электрического заряда; она легко проводится в частных случаях.

Случай 3. Запишем фермионное представление для группы SU_n в виде

$$f=(l,\ 1^c)+(q,\ 3^c)+(\bar{r},\ \bar{3}^c), \tag{4.13}$$

где генераторы ненарушенной группы SU_3^c равны суммам соответствующих групп SU_3 в формуле (2.12). Тогда при $Z = N_l + N_q - N_r$ и $X = -(n_3 - n_1) N_l + (2n_3 + n_1) N_q + (n_1 + 2n_3) N_r$ получаем

$$A=\frac{1}{3}(N_q+N_r). \tag{4.14}$$

Здесь оператор X выбирается в виде линейной комбинации генераторов двух явных групп U_1 таким образом, чтобы исключить жуткие частицы. Майорановский массовый член может вызвать несохранение X только при $n_3 \neq n_{\bar{3}}$. Аналогичная ситуация возникает, если обе SU_3 не нарушаются и приводят к невылетанию каждая (т. е. цветовая группа расширяется до $SU_3^{c'} \times SU_3^{c''}$).

Случай 4. Запишем векторное представление группы SO_n в формуле (2.17),

$$f=(l,\ 1^c)+(q,\ 3^c)+(\bar{r},\ \bar{3}^c), \tag{4.15}$$

где r и q принадлежат к представлению n_3 группы SU_{n_3}. Явная подгруппа U_1 в формуле (2.19) не связана с числом лептонов и потому не может быть нарушена майорановским массовым членом. Если нарушение этой группы U_1 возникнет где-то в теории, то можно будет получить $A = \frac{1}{3}(N_q + N_r)$, но в таких моделях часть оператора X должна получаться налетом на группу ароматов в SO_n; например, из разложения $SO_{n_1} \supset SU_{n'} \times U_1$ при $n_1 = 2n'$. Тогда представление n_1 группы SO_{n_1} распадается на $n' + \bar{n}'$ для группы $SU_{n'}$, и генератор U_1 различают два типа лептонов, которые мы называем l и L. При этом существует линейная комбинация этого генератора и генератора явной U_1, такая что

$$A=N_L+\frac{1}{3}N_q+\frac{4}{3}N_r. \tag{4.16}$$

Для случая $n_1 = 2n' + 1$ имеются жуткие лептоны двух типов. Возможны, конечно, и более сложные налеты на группу ароматов, но их перечисление, вероятно, представляет лишь академический интерес.

Случай 5. Согласно формулам (2.22) или (2.24) и (2.25), спинорное представление группы SO_n имеет вид

$$f=(L,\ 1^c)+(q,\ 3^c)+(\bar{r},\ \bar{3}^c)+(\bar{l},\ 1^c), \tag{4.17}$$

где $\bar{l}$ и $\bar{r}$ преобразуются как ξ-спиноры группы SO_{n-6}, а q и L — как ξ'-спиноры. (Напомним, что спиноры ξ и ξ' эквивалентны при нечетных n и сопряжены друг другу, если n равно удвоенному четному числу.) Явные подгруппы U_1 в формулах (2.20) и (2.23) порождаются генератором

$$X=N_L-\frac{1}{3}N_q+N_l-\frac{1}{3}N_r. \tag{4.18}$$

Используя эту формулу и $Z = N_L + N_q - N_r - N_l$, получаем

$$A=N_L+\frac{1}{3}N_q-\frac{2}{3}N_r. \tag{4.19}$$

При налетах на аромат приходится вычислять спектр собственных значений для произвольной подгруппы U_1 в SO_{n-6}, как это уже делалось в случае 5 гл. 3. Следуя введенным там обозначениям, запишем при целом N решение

$$\left.\begin{aligned} A_\alpha(\xi,\ 1^c) &= \mathfrak{M}_{+\alpha}+r+1,\\ A_\alpha(\xi,\ 3^c) &= \mathfrak{M}_{+\alpha}+s+\frac{1}{3},\\ A_\alpha(\xi',\ 1^c) &= \mathfrak{M}_{-\alpha}+\frac{1}{2}(3s-r),\\ A_\alpha(\xi',\ \bar{3}^c) &= \mathfrak{M}_{-\alpha}+\frac{2}{3}+\frac{1}{2}(r+s), \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

где r и s должны быть четными или нечетными одновременно, а фермионное число

$$Z=\frac{1}{4}(r+3s)+\frac{1}{2} \tag{4.21}$$

отлично от нуля. Решение при полуцелом N получается заменой r на $r-\frac{1}{2}$ и s на $s-\frac{1}{2}$ повсюду в формулах (4.20) и (4.21).

С л у ч а й 6. *Анализ векторного представления группы* Sp_{2n} *совпадает со случаем* 4, *за исключением того, что* n_1 *не может быть нечетным*.

С л у ч а й 7. *Для исключительных групп* оператор X должен порождать подгруппу U_1 в G_{q+l}. При любом выборе этой U_1 F_4-симметричная теория со стабильным протоном, удовлетворяющая поставленным нами условием, будет иметь недостаточно обширную группу ароматов. Генератор X подгруппы U_1 в группе ароматов SU_3 может быть легко параметризован в общем виде, не противоречащем ограничениям на A. Представление 26, которое удваивается, обладает целым фермионным числом, так что все лептоны в $(8,1^c)$ имеют целые A. Хотя в этой модели шесть кварков и восемь лептонов, можно прямо доказать, что если один (или больше) лептонов имеет $A=0$, то по крайней мере пять или шесть кварков — жуткие. Таким образом эта модель с группой F_4 может содержать только один кварковый аромат.

С л у ч а й 8. Представление 27 группы E_6 — комплексно. Общая параметризация:

$$\left.\begin{aligned} A_\alpha(1,\ 3,\ 3^c) &= n_\alpha-k+\frac{1}{3}(M-2N),\\ A_\alpha(\bar{3},\ 1,\ \bar{3}^c) &= -m_\alpha-k-\frac{1}{3}(N-2M),\\ A_\alpha(3,\ \bar{3},\ 1^c) &= m_i-n_j-k, \qquad i,\ j=1,\ 2,\ 3, \end{aligned}\right\} \tag{4.22}$$

где n_α, m_α и k — целые, $N=n_1+n_2+n_3$, $M=m_1+m_2+m_3$, а фермионное число

$$Z=\frac{1}{3}(M-N)-k. \tag{4.23}$$

Суммы M и N удовлетворяют следующим ограничениям: а) $M=0$, $N=1$ или $M=1$, $N=0$; б) $M=N=2$ и $k\neq 0$. При наиболее богатой расстановке имеется шесть лептонов с $A=0$ и четыре кварка с $A=1/3$ (три — из одного триплета). Это решение с $n_1=n_2=n_3=0$, так что оператор X порождает подгруппу U_1 как раз в одной из фактор-групп SU_3. В других решениях, содержащих не менее одного нежуткого лептона, имеется не более трех кварков с $A = 1/3$.

Случай 9. В удвоенном представлении 56 группы E_7 имеется 12 кварков; оператор X должен порождать подгруппу $U_1 \subset SU_6$. Как и в случае 9 гл. 3, мы параметризуем подгруппу U_1 с помощью шести целых чисел. Тогда имеется два решения. Первое:

$$\left.\begin{aligned} A_\alpha(6,\ 3^c) &= n_\alpha + k + \frac{1}{3}, \\ A_\alpha(\bar{6},\ \bar{3}^c) &= -n_\alpha + k + \frac{2}{3}, \\ A_\alpha(20,\ 1^c) &= \mathfrak{M}_{3\alpha} + k, \end{aligned}\right\} \tag{4.24}$$

где k — любое целое число, $N = \sum n_\alpha = 1$ и $\mathfrak{M}_\alpha$ — набор, состоящий из 20 трехчленных сумм чисел n_α. Второе решение

$$\left.\begin{aligned} A_\alpha(6,\ 3^c) &= n_\alpha + k - \frac{2}{3}, \\ A_\alpha(\bar{6},\ \bar{3}^c) &= -n_\alpha + k + \frac{2}{3}, \\ A_\alpha(20,\ 1^c) &= \mathfrak{M}_{3\alpha} + k - 2, \end{aligned}\right\} \tag{4.25}$$

где k — фермионное число, отличное от нуля целое число, и $N = 4$. Таким образом, мы видим, что оператор X не может порождать подгруппу U_1 в погружении $SU_6 \supset SU_3 \times SU_3 \times U_1$ и что теория с погружением $SU_6 \supset \supset SU_4 \times SU_2 \times U_1$ имеет только два нежутких кварка. Решение с наименьшим числом жутких фермионов дается формулой (4.24) при $\{n_\alpha\} = \{1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\}$ и $k = 0$. Это соответствует генератору X группы U_1 в погружении $SU_6 \supset SU_5 \times U_1$. При этом имеется пять нежутких q-кварков и один жуткий s-кварк в представлении $(6,\ 3^c)$ и пять жутких r-кварков и один нежуткий σ-кварк в представлении $(\bar{6},\ \bar{3}^c)$. Половина лептонов — жуткие. Оператор A имеет собственные значения

$$A = N_L + \frac{1}{3} N_q + \frac{1}{3} N_\sigma + \frac{4}{3} N_s - \frac{2}{3} N_r. \tag{4.26}$$

Это единственный пример (без введения других фермионных представлений) основанной на исключительной группе теории со стабильным протоном, имеющей достаточное количество ароматов для удовлетворительной феноменологии.

б) Единственное f, удвоение и нарушение в других местах теории

В этих решениях мы предполагаем, что все фермионы входят в единственное неприводимое самосопряженное представление группы G, подобное указанным в случаях 2, 4, 5, 6, 7 и 9 в табл. I. (Мы и здесь следуем нумерации гл. 2.) Оператор глобальной симметрии Z имеет нулевые собственные значения в фермионном представлении, операторы Z и X нарушаются в каком-то другом секторе теории, например, в секторе, содержащем скалярные и псевдоскалярные частицы, так что для фермионов $A = X$. Задача сводится к исследованию локальных групп U_1, которые не порождаются электрическим зарядом.

Случай 2. Самосопряженное представление $(2k^k)_A$ группы SU_n (см. формулу (2.11)) при $n = 2k$ не нуждается в дублировании, но для того, чтобы иметь лептоны с $A = 0$, необходим налет на аромат. Формула (4.11) дает общее решение для A и для этого случая формула (4.12) приводится к виду

$$r = M + 3s + 1. \tag{4.27}$$

Никаких других ограничений из-за зарядового сопряжения в f не возникает. Простой пример получается при $\{n_\alpha\} = \{1, 0, \ldots, 0\}$, $M = 1$. Существование лептонов с $A = 0$ накладывает условие $r = s = -1$. Здесь X — генератор U_1 в погружении $SU_{n-3} \supset SU_{n-4} \times U_1$.

Случаи 4 и 6. Рассуждения для самосопряженных векторных представлений групп SO_n и Sp_{2n} совпадают. Генератор явной группы U_1 (формулы (2.19) и (2.28)) определяется разностью числа триплетных, 3^c, частиц и числа антитриплетных частиц. Поэтому

$$A = \frac{1}{3} N_q. \tag{4.28}$$

Если нет возможности нарушить эту группу U_1 в другом секторе теории, то необходим налет на аромат и появляются жуткие частицы.

Случай 5. Генератор естественной подгруппы U_1 отвечает общему числу частиц 1^c и 3^c, входящих в спинорное представление группы SO_n, поэтому его надо скомбинировать с генератором группы SO_{n-6}, чтобы получить лептоны с $A = 0$. (Самосопряженные спиноры существуют только для групп SO_{2n+1} при любых n и SO_{2n} при четных n.) Фермионное число равно нулю, поэтому в формуле (4.21) $r = -2 - 3s$ и соотношения, связанные с зарядовым сопряжением, удовлетворяются автоматически. Простой пример этого общего решения, отвечающий $\{n_\alpha\} = \{1, 0, \ldots, 0\}$, связан с оператором X, порождающим подгруппу U_1 в погружении $SO_{n-6} \supset \supset SO_{n-8} \times U_1$. Имеется одинаковое число лептонов с $A = 0$ и $A = 1$, а также кварков с $A = 1/3$ и $A = -2/3$.

Случай 7. В самосопряженном представлении 26 группы F_4, содержащем частицы и античастицы, имеются только три кварковых аромата, и оператор X должен порождать подгруппу U_1 в группе ароматов SU_3. Следовательно, возможно существование не более, чем двух нежутких кварков.

Случай 9. В представлении 56 группы E_7 имеется шесть кварков и десять лептонов. Существует единственное решение с более, чем тремя, нежуткими лептонами и тремя нежуткими кварками: оператор X порождает подгруппу U_1 в погружении $SU_6 \supset SU_4 \times SU_2 \times U_1$. При этом имеются четыре кварка с $A = 1/3$ и шесть лептонов с $A = 0$.

Благодарности

Мы хотим поблагодарить многих друзей и коллег в Лос-Аламосских Научных лабораториях, Физическом центре в Аспене и Калифорнийском Технологическом институте за стимулирующие обсуждения; в особенности Дж. Стефенсона, Т. Гольдмана и Р. Роскиса. Мы признательны за гостеприимство Физическому Центру в Аспене, где была выполнена часть этой работы. Перепечатка нескольких вариантов этой статьи была великолепно сделана Марианной Мартинес. Мы хотим также поблагодарить Секретариат Теоротдела ЦЕРН за любезную помощь в оформлении окончательного текста статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Здесь мы формулируем и доказываем теорему, которая оправдывает процедуру погружения, используемую нами в гл. 2. Рассмотрим любое погружение группы SU_3^c в простую группу Ли G, при котором имеется по крайней мере одно представление f, цветовой состав которого ограничен мультиплетами 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$. Тогда цветовой состав фундаментального представления группы G также ограничен 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$. Иными словами, из условия, что фермионное представление содержит цветовые синглеты, триплеты и, возможно, антитриплеты, *следует* формула (2.2) для фундаментального представления. Простые группы Ли имеют следующие фундаментальные представления: n для SU_n, n для SO_n, $2n$ для Sp_{2n}, 7 для G_2, 26 для F_4, 27 для E_6, 56 для E_7 и 248 для E_8.

Для доказательства в случае классических групп требуется просто найти цветовой состав генераторов группы, который в явном виде дается присоединенным представлением. Пусть c — набор генераторов, образующий неприводимое представление группы SU_3^c. Так как каждый генератор группы должен оставлять компоненты f внутри этого представления, то необходимо, чтобы при действии c на любое представление SU_3^c, содержащееся в f, возникало по крайней мере одно из цветовых представлений, имеющихся в f. Если f содержит только цветовые синглеты, триплеты и антитриплеты, то прямое произведение с 1^c, с 3^c *или* с $\bar{3}^c$ должно содержать одно из представлений 1^c, 3^c *или* $\bar{3}^c$. Это справедливо, *только если* $c = 1^c, 3^c, \bar{3}^c, 6^c, \bar{6}^c$ или 8^c. таким образом, f может удовлетворять ограничению на цветовой состав, только если каждое из цветовых представлений в присоединенном представлении группы G имеет размерность, не превышающую 8. Доказательство завершается построением присоединенного представления, которое должно удовлетворять этому условию, по фундаментальному представлению.

Предположим, что представление n группы SU_n нарушает наше цветовое ограничение, так что оно содержит набор операторов d, преобразующийся по некоторому высшему представлению (с размерностью, большей 3) группы SU_3^c. Присоединенное представление группы SU_n имеет вид $n \times \bar{n} - 1$, и потому включает генераторы, преобразующиеся под действием SU_3^c как $d \times \bar{d}$, которое всегда содержит 27^c. Так получается наша теорема для SU_n. Доказательство для ортогональных и симплектических групп аналогично. Если n (векторное представление) группы SO_n содержит определенный выше набор d, то присоединенное представление, построенное из $(n \times n)_A$, должно включать наборы генераторов, преобразующиеся по содержащимся в $(d \times d)_A$ представлениям группы SU_3^c. Теорема справедлива, так как $(d \times d)_A$ всегда содержит по крайней мере одно представление размерности, бо́льшей 8. Присоединенное представление группы Sp_{2n} строится как $(2n \times 2n)_s$ и включает цветовые операторы, содержащиеся в $(d \times d)_s$. Как и прежде, набор d должен быть пуст, если в $(2n \times 2n)_s$ не должно быть генераторов, преобразующихся по представлениям SU_3^c, размерности, бо́льшей 8.

Существуют погружения SU_3^c в исключительные группы, для которых фундаментальное представление не ограничено мультиплетами 1^c, 3^c и $\bar{3}^c$, но присоединенное не содержит цветовых представлений размерности, бо́льшей 8. При этом предыдущее доказательство следует дополнить некоторой информацией о коммутационных соотношениях для генераторов группы. Рассмотрим каждую из исключительных групп по отдельности.

Три случая тривиальны. Так как представление 7 группы G_2 самосопряженное, то оно должно разлагаться как $1^c + 3^c + \bar{3}^c$. Разложение группы E_6, по существу, симметрично, $SU_3 \times SU_3 \times SU_3$, и каждая из SU_3 может быть цветовой, как ясно из формул (2.32) и (2.34). Группа E_8 не представляет интереса, так как ее фундаментальное представление является присоединенным и потому должно содержать 8^c.

Мы могли бы использовать в качестве цветовой другие подгруппы SU_3 в формуле (2.29) для группы F_4. Тогда присоединенное представление имеет вид

$$52 = (1, 8^c) + (8, 1^c) + (3, \bar{6}^c) + (\bar{3}, 6^c),$$

как можно видеть из формулы (2.31). Для этого погружения цветовой октет появляется в фундаментальном представлении (см. формулу (2.30)), поэтому мы должны доказать, что высшие представления не удовлетворяют нашему цветовому ограничению. Рассмотрим действие генераторов, преобразующихся как $(3, \bar{6}^c)$, на предполагаемое высшее представление вида $(y, 1^c) + (x, 3^c) + (\bar{x}, \bar{3}^c)$, где x и y — любые представления группы ароматов SU_3. Так как эти генераторы уничтожают члены, преобразующиеся как $(y, 1^c)$ и $(\bar{x}, \bar{3}^c)$, то они не должны уничтожать $(x, 3^c)$. Докажем, что это не выполняется. Генераторы вида $(\bar{3}, 6^c)$ должны уничтожать $(x, 3^c)$. Все коммутационные соотношения среди этих генераторов дают генераторы вида $(3, \bar{6}^c)$. Поэтому генераторы вида $(3, \overline{6})^c$ должны также уничтожать $(x, 3^c)$, и это представление не может иметь предполагаемого вида. Этим завершается доказательство теоремы для группы F_4.

Предположим, что SU_3^c погружается в подгруппу SU_6 группы E_7, формула (2.35). Если цвет совпадает с одной из подгрупп в сужении $SU_6 \supset SU_3 \times SU_3 \times U_1$, то разбиение фундаментального представления 56 группы E_7 при сужении $E_7 \supset E_6 \times U_1$ имеет вид $56 = 27 + \overline{27} + 1 + 1$. Здесь нет высших представлений цветовой группы. Другая возможность — получить SU_3^c из сужения $SU_6 \supset SU_2 \times SU_3^c$. Здесь в 56 входят высшие представления цветовой группы, так как 20-плет группы SU_6 разлагается на $(2, 8^c) + (4, 1^c)$. Мы снова должны доказать, что другие представления E_7 не удовлетворяют цветовым ограничениям. При сужении $SU_6 \supset SU_2 \times SU_3^c$ единственные представления SU_6, содержащие лишь 1^c, 3^c и $\overline{3}^c$, это 1, 6 и $\overline{6}$, а разложение предполагаемого высшего представления по подгруппе $SU_3 \times SU_6$ должно иметь вид $(y, 1) + (x, 6) + (\overline{x}, \overline{6})$. Генераторы группы E_7 включают набор (3.15), который уничтожает $(y, 1)$ и $(x, 6)$, так как разложение 15×6 не содержит 1, 6 или $\overline{6}$. Кроме того, коммутационные соотношения для генераторов из $(3, \overline{15})$ вновь относятся к типу $(\overline{3}, 15)$, поэтому $(\overline{3}, 15)$ также уничтожает $(\overline{x}, \overline{6})$. Таким образом, представления предполагаемого типа не существует.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Yang C. N., Mills R. L.— Phys. Rev., 1954, v. 96, p. 191.
2. Shaw R. The problem of Particle Types and Other Contributions to the Theory of Elementary Particles: Ph. D. Thesis.— Cambridge, 1955.
3. Utiyama R.— Phys. Rev., 1956, v. 101, p. 1597.
4. Gell-Mann M., Glashow S. L.— Ann. Phys. (N. Y.), 1961, v. 15, p. 437.
5. Kibble T. W. B.— J. Math. Phys., 1961, v. 2, p. 212.
6. Higgs P. W.— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 12, p. 132.
7. Higgs P. W.— Ibid., 1964, v. 13, p. 508.
8. Goldstone J.— Nuovo Cimento, 1961, v. 19, p. 154.
9. Nambu Y., Jona-Lasinio G.— Phys. Rev., 1961, v. 122, p. 345; v. 124, p. 246.
10. Goldstone J., Salam A., Weinberg S.— Ibid., 1962, v. 127, p. 965.
11. Englert F., Brout R.— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 321.
12. Guralnik G. S., Hagen C. R., Kibble T. W. B.— Ibid., p. 585.
13. 't Hooft G.— Nucl. Phys. Ser. B, 1971, v. 35, p. 167.
14. Weinberg S.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 19, p. 1264.
15. Salam A.— In: Elementary Particle Theory/Ed. N. Svartholm.— Socken, 1968.
16. Glashow S.— Ph. D. Thesis.— Harvard University, 1959.
17. Nambu Y.— In: Preludes in Theoretical Physics/Ed. A. de Shalit.— Amsterdam: North Holland, 1966.
18. Han M., Nambu Y.— Phys. Rev. Ser. B, 1965, v. 139, p. 1006.
19. Greenberg O. W.— Phys. Rev. Lett., 1964, v. 13, p. 598.
20. Fritzsch H., Gell-Mann M.— In: Proc. of the International Conference on Duality and Symmetry in High Energy Physics/Ed. E. Gotsman.— H. Weizmann Inst.: Jerusalem, 1971.
21. Bardeen W. A., Fritzsch H., Gell-Mann M.— In: Scale and Conformal Symmetry in Hadron Physics/Ed. R. Gatto — New York: J. Wiley, 1972.
22. Fritzsch H., Gell-Mann M.— In: Proc. of the XVI Intern. Conference on High-Energy Physics. v. 2 — Batavia: National Accelerator Laboratory, 1972.
23. Fritzsch H., Gell-Mann M., Leutwyler H.— Phys. Lett. Ser. B, 1973, v. 74, p. 365.
24. Weinberg S.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 494.
25. Weinberg S.— Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 8, p. 4482.
26. Politzer H. D.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 1346.
27. Gross D., Wilczek F.— Ibid., p. 1343.
28. Georgi H., Glashow S. L.— Ibid., 1974, v. 32, p. 438.
29. Fritzsch H., Minkowski P.— Ann. Phys. (N.Y.), 1975, v. 93, p. 193.
30. Günaydin M., Gürsey F.— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 1651.
31. Gürsey F.— In: New Pathways in High-Energy Physics. II: Proc. of Orbis Scientiae at Coral Gables/Ed. A. Perlmutter.— New York: Plenum Press, 1976.
32. Georgi H., Glashow S. L.— Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 6, p. 429.
33. Adler S. L.— Phys. Rev., 1969, v. 177, p. 2426.
34. Bell J. S., Jackiw R.— Nuovo Cimento Ser. A, 1969, v. 60, p. 47.
35. Gürsey F., Ramond P., Sikivie P.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 60, p. 177.

36. Georgi H.— In: Particles and Fields-1974.— AIP Conference Proceedings No. 23: Particles and Fields Subseries No. 10. Wiliamsburg, Virginia/Ed. C. E. Calson — New York: AIP, 1975.
37. Reines F., Crouch M. F.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 32, p. 493.
38. Gurr H. S., Kropp W. R., Reines F., Meyer B.— Phys. Rev., 1967, v. 158, p. 1321.
39. Georgi H., Quinn H., Weinberg S.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 451.
40. Gildener E.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 14, p. 1667.
41. Pati J. C., Salam A.— Ibid., 1973, v. 8, p. 1240.
42. Pati J. C., Salam A.— Ibid., 1974, v. 10, p. 275.
43. Hawking S.— Comm. Math. Phys., 1975, v. 43, p. 199.
44. Гольфанд Ю. А., Лихтман Е. П.— Письма ЖЭТФ, 1971, т. 13, с. 452.
45. Wess J., Zumino B.— Phys. Lett. Ser. B, 1974, v. 49, p. 54.
46. Salam A., Strathdee J.— Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 11, p. 1521.
47. Ferrara S., Zumino B.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 79, p. 413.
48. Fayet P., Iliopoulos J.— Phys. Lett. Ser. B, 1974, v. 51, p. 461.
49. De Wit B., Freedman D. Z.— Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 12, p. 2286.
50. Bardeen W. A.— 1975 (unpublished).
51. Salam A., Strathdee J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 80, p. 499.
52. Fayet P.— 1976 (unpublished).
53. Brink L., Schwarz J. H., Scherk J.— Nucl. Phys. Ser. B, 1977, v. 121, p. 77.
54. Ferrara S.— Riv. Nuovo Cimento, 1976, v. 6, p. 105.
55. Abbot L. F., Grisaru M., Schnitzer H.— 1977 (to be published)
56. Curtright T. L.— Phys. Lett. Ser. B, 1977, v. 71, p. 185.
57. Jones D. R. T.— Ibid., 1977, v. 72, p. 199.
58. Poggio E., Pendleton H.— Ibid., p. 200.
59. Jones D. R. T.— Nucl. Phys. Ser. B, 1975, v. 87, p. 127.
60. Freedman D., van Nieuwenhuizen P., Ferrara S.— Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 3214.
61. Deser S., Zumino B.— Phys. Lett. Ser. B, 1976, v. 62, p. 335.
62. Scherk J., Schwarz J. H.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 81, p. 118.
63. Scherk J., Schwarz J. H.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 57, p. 463.
64. Ramond P.— Phys. Rev. Ser. D, 1971, v. 3, p. 2415.
65. Neveu A., Schwarz J. H.— Nucl. Phys. Ser. B, 1971, v. 31, p. 86.
66. Gliozzi F., Scherk J., Olive D.— Ibid., 1977, v. 122, p. 253.
67. Fritzsch H., Gell-Mann M., Minkowski P.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 59, p. 256.
68. Kingsley R., Treiman S., Wilczek F., Zee A.— Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 12, p. 2768.
69. De Rujula A., Georgi H., Glashow S.— Ibid., p. 3589.
70. Pakvasa S., Simmons W. A., Tuan S. F.— Phys. Rev. Lett., 1975, v. 35, p. 702.
71. Gürsey F., Sikivie P.— Ibid., 1976, v. 36, p. 775.
72. Gürsey F., Sikivie P.— Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 816.
73. Ramond P.— Nucl. Phys. Ser. B, 1976, v. 110, p. 214.
74. Ramond P.— Ibid., 1977, v. 126, p. 509.
75. Дынкин Е. Б.— Тр. Моск. матем. о-ва, 1952, т. 1, с. 349.
76. Wybourne B. G. Classical Groups for Physicists.— New York: J. Wiley-Interscience, 1974.
77. Gilmore R. Lie Groups, Lie Algebras and Some of Their Applications — New York: J. Wiley, 1974.
78. Patera J., Sankoff D. Tables of Branching Rules for Representations of Simple Lie Algebras.— Montreal: Université Montreal, 1973.
79. 't Hooft G.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 8.