

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

534,0

СОЛИТОНЫ*)

К. Ребби

Солитоны — волны, которые не затухают и не поглощаются, а сохраняют свои размеры и форму как угодно долго. Последние исследования показывают, что они могут проявляться как массивные элементарные частицы.

Понятия волн и частиц тесно переплелись в физике с тех пор, как в 20-х годах нашего столетия были сформулированы основные принципы квантовой механики. Новая сторона взаимосвязи волн и частиц выявилась в последние годы. Источником этой удивительной связи послужил анализ волновых уравнений, характерных не для квантовой механики, а выводимых в классической физике. Решением этих уравнений оказались волны, которые не затухают и не разбегаются подобно всем известным волнам, а сохраняют свои размеры и форму как угодно долго. Такая волна подобна сгустку энергии, который постоянно находится в определенной области пространства. Его можно заставить двигаться, но рассеяться в пространстве он не может. При столкновении две такие волны проходят друг через друга и выходят из области столкновения не изменившись. Если волна встречается с «антиволной», то они аннигилируют. Такое поведение очень необычно для привычных нам волн, но известно в физике в другой связи. Если бы физику предложили определить объект с названными выше свойствами, то он, без сомнения, признал бы в нем частицу.

Волны, распространяющиеся без рассеяния, были давно известны в гидродинамике, и называются они уединенными волнами, или солитонами. Недавним открытием является то, что недиссипативные волны появляются при решении некоторых уравнений, предложенных для описания элементарных частиц. За этими объектами закрепилось название солитонов. Солитоны, которые будут изучаться в этой статье в дальнейшем — это те, которые характеризуются определенным механизмом «удержания», механизмом, благодаря которому расплыться и затухнуть солитон не может по топологическим причинам, т. е. по тем же самым, по которым узел, завязанный на бесконечной веревке, не может быть развязан без разрезания веревки.

До настоящего времени солитоны в физике частиц остаются целиком созданием теоретиков, и вполне может оказаться, что в природе их

*) R e b b i Claudio. Solitons.— Scientific American, February 1979, v. 240, № 2, pp. 76—91.— Перевод В. Н. Зайкина.

К. Ребби — физик-теоретик Брукхейвенской Национальной лаборатории, США.

© Scientific American, Inc., 1979.

© Перевод на русский язык,
издательство «Наука»,
Главная редакция физико-математической
литературы, «Успехи физических наук»,
1980.

не существует. С другой стороны, если бы уравнения, описывающие элементарные частицы, оказались в классе тех, что обладают солитонными решениями, то солитоны возникали бы как новые частицы. Они были

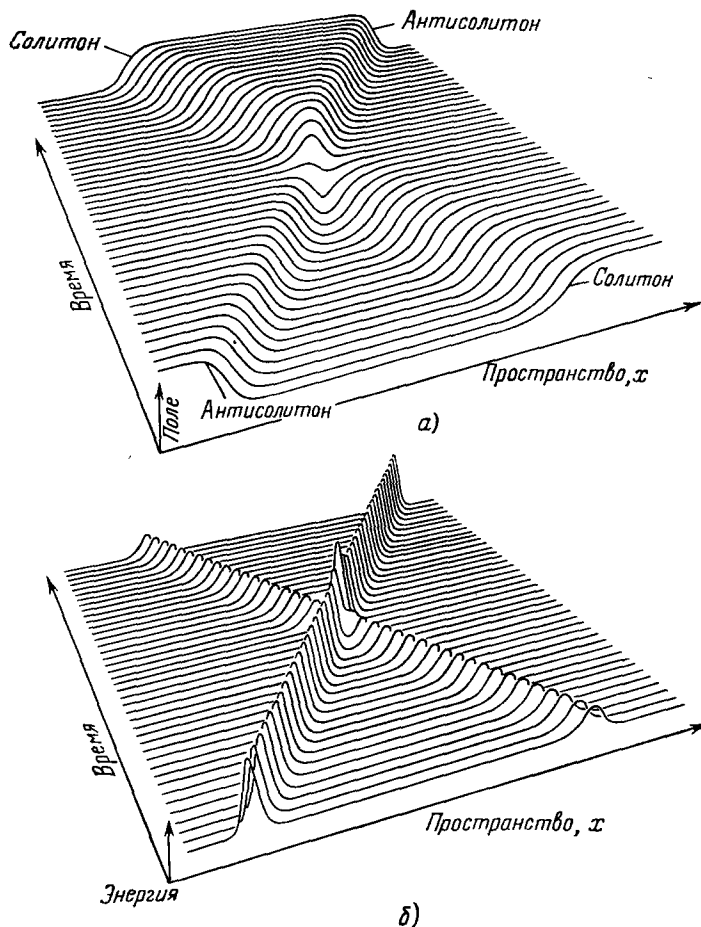


Рис. 1. Солитон и антисолитон похожи на направленные в противоположные стороны складки в структуре поля.

На рис. а) представлено развитие поля во времени. Набор линий изображает конфигурации поля в последовательные промежутки времени. На рис. б) изображено распределение энергии, соответствующее данной конфигурации поля. В начальный момент времени солитон и антисолитон движутся навстречу друг другу, причем антисолитон движется быстрее и, следовательно, имеет большую энергию. Столкновение двух волн приводит к их аннигиляции, а энергия их немедленно идет на рождение новой солитон-антисолитонной пары. Такое одномерное поле называется полем синус-Гордона. Всюду вне области, занятой солитоном и антисолитоном, поле принимает значение, соответствующее нулевой энергии.

бы очень массивны, возможно, в тысячи раз тяжелее протона. Солитонная частица должна была бы обладать рядом необычных свойств: например, одна из теорий предсказывает, что каждый солитон должен быть магнитным монополем, т. е. изолированным северным или южным магнитным полюсом.

Даже если частиц с описанными выше свойствами реально не существует, то солитоны могут проявиться в физике элементарных частиц в другом качестве, а именно, как объекты, ограниченные не только определенной областью пространства, но и определенным отрезком времени. Такие быстро исчезающие солитоны были названы инстантонами. Подобно

солитону инстантон есть классический объект, имеющий квантовомеханическое истолкование. Он уже рассматривается не как частица, а как процесс перехода между двумя состояниями системы, процесс, называемый туннелированием. Переходы, происходящие с помощью инстантонов, уже были привлечены к объяснению спектра масс частиц — задаче, давно стоящей перед теоретиками.

□

Для того чтобы понять, чем замечательна волна, распространяющаяся без рассеяния, рассмотрим обычную рассеивающуюся волну, возникающую, например, при попадании мелких камешков на спокойную поверхность пруда. Такая волна бежит по поверхности воды как расширяющаяся

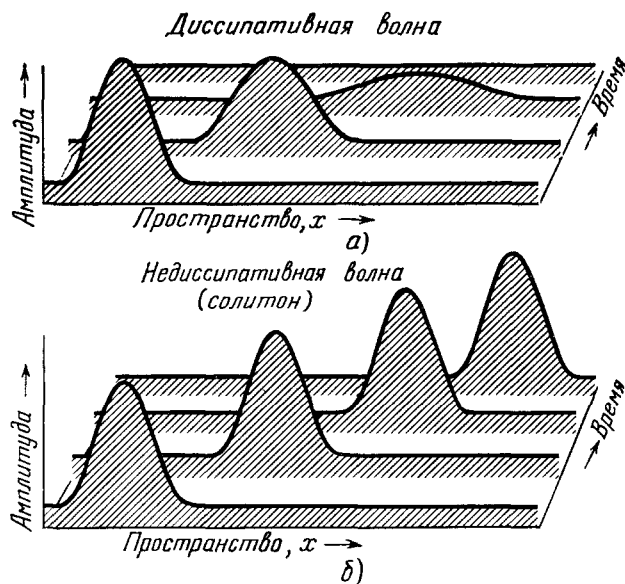


Рис. 2. Неизменность волны ограничена главным образом дисперсией, процессом, благодаря которому гармоники, имеющие различные длины волн, распространяются с различными скоростями.

Из-за дисперсии амплитуда обычной волны при движении уменьшается и расплывается, и в конце концов волна полностью исчезает. Солитон (б) — это волна, которая не диссипирует, поскольку дисперсия подавлена другими эффектами волнового движения. Солитон представляет собой сгусток энергии, который может двигаться от точки к точке, но не может распределиться по всему пространству.

кольцо. Внимательное наблюдение обнаруживает, что возмущение поверхности воды становится менее выраженным при движении от источника возмущения и в конце концов полностью затухает.

Важным фактором затухания волн на поверхности воды является вязкость, причиной которой служит трение. Однако в некоторых средах волны хотя и могут распространяться без трения, но, тем не менее, затухают, и даже волны в бассейне, наполненном идеальной жидкостью, будут постепенно затухать. Причина в том, что первоначально возникшая волна состоит из гармоник, каждая из которых распространяется со своей скоростью, разнося энергию волны по большой площади. Если проследить за поперечным сечением волны, то можно заметить, что оно непрерывно расширяется, а амплитуда его уменьшается. При неограниченном распространении энергия волны распределится по бесконечной области, и волна тем самым исчезнет.

Солитоны, строго говоря, не избавлены от дисперсии, скорее они являются волнами, в которых эффекты дисперсии точно компенсируются некоторыми другими эффектами. Компенсация возможна только для определенного класса волн, которые являются решениями так называемых нелинейных уравнений движения. На распространение такой волны влияет не только форма первоначального возмущения, но и его величина.

Первое документированное наблюдение солитона было сделано почти 150 лет назад корабельным инженером Расселом. Он доложил Британской Ассоциации Развития Науки: «Я наблюдал движение баржи, которую быстро двигала вдоль узкого канала пара лошадей. Вдруг баржа остановилась — баржа, но не масса воды в канале, увлеченная ее движением. Она собралась у носа судна в состоянии сильного волнения, затем внезапно оторвалась от него, покотившись вперед с большой скоростью и принимая форму одиночного, ярко выраженного возвышения, плавного и округлого, которое продолжало двигаться вдоль канала, как казалось, не изменяя своей формы и не уменьшая скорости. Я последовал за ним на лошади и, догнав, обнаружил его движущимся со скоростью восемь или девять миль в час и сохранившим свою первоначальную форму: 30 футов *) в длину, фут в ширину и полфута в высоту. Его высота постепенно уменьшалась, так что, проскакав милю или две, я потерял его из виду в волнах канала».

Скотт Рассел предположил, что стабильность наблюдавшейся им волны есть результат ее собственных свойств, присущих волновому движению, а не условий образования волны. Эта точка зрения не была немедленно признана. Однако в 1895 г. Д. Дж. Кортевег и Генрих де Фриз дали полное аналитическое описание решений нелинейного уравнения гидродинамики и показали, что локализованные, нерассеивающиеся волны могут существовать. С тех пор солитоны стали хорошо распознаваемыми объектами в различных инженерных науках и в прикладной математике.

□

Солитоны, интересные с точки зрения физики частиц, возникают в уравнениях, описывающих поля, или физические системы, распространяющиеся в пространстве. Поле ставит в соответствие каждой точке пространства значение некоторой специфической величины, такой, например, как электрический потенциал. Часто в одной точке определено несколько величин. Эти величины могут изменяться от точки к точке и от одного момента времени к другому, но изменения эти должны быть плавными и непрерывными.

Наиболее известное поле — электромагнитное, описываемое уравнениями Джеймса Клерка Максвелла. В максвелловской теории в каждой точке пространства определены шесть величин, представляющих собой компоненты электрического и магнитного поля вдоль трех ортогональных осей. Гравитация также описывается полевыми уравнениями, уравнениями эйнштейновской общей теории относительности. Поверхность воды в бассейне можно рассматривать как модель двумерного поля. Величиной, ставящейся в соответствие каждой точке поверхности, является высота поверхности воды над некоторым фиксированным уровнем. Волна, бегущая по воде, становится в этом случае возмущением поля.

Существенным свойством поля является то, что так же, как и частица, оно может переносить энергию. Энергия поля в единице объема является суммой трех величин. Одна из них пропорциональна квадрату скорости,

*) 1 фут = 30,48 см. (Прим. перев.)

с которой поле изменяется во времени. Другая имеет подобный же вид, но пропорциональна квадрату скорости изменения поля в пространстве.

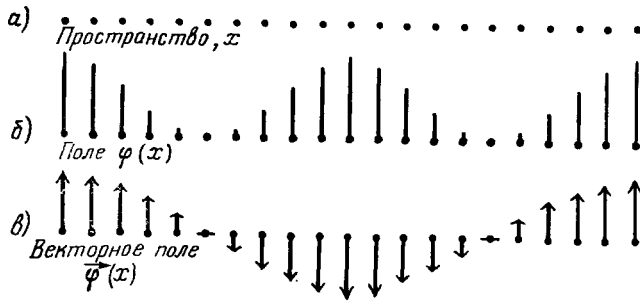


Рис. 3. Поле в пространстве является средой, в которой распространяются солитоны. Поле ставит в соответствие каждой точке пространства определенное значение некоторой специальной величины. В рассматриваемом случае пространство одномерно (а), а точки на рисунке представляют собой просто ряд точек, выбранных из континуума. В простейшем случае (б) поле в каждой точке определяется только своей величиной, изображенной здесь в виде отрезка определенной длины. Более сложное поле — векторное поле (в) — определяется как величиной, так и направлением, показанным на рисунке стрелкой. Для того чтобы поле имело физический смысл, оно должно быть определено всюду (хотя значения его могут обращаться в нуль в некоторых точках). Если поле меняется от точки к точке, то изменение должно быть плавным и непрерывным.

Третья величина определяется не скоростью изменения, а величиной поля в данной точке. Первую величину обычно называют кинетической

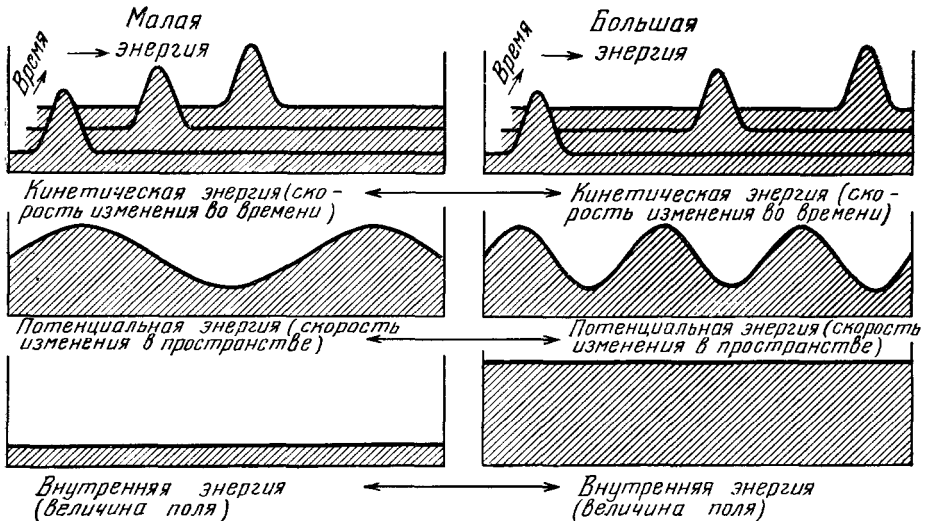


Рис. 4. Энергия поля есть сумма трех слагаемых.

На рисунке на примере водной поверхности, которую можно рассматривать как модель поля, представлено в отдельности каждое слагаемое. Кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости изменения поля во времени. Чем быстрее движется волна, тем больше ее энергия. Потенциальная энергия пропорциональна квадрату скорости пространственного изменения поля; при этом поля, возмущения которых имеют меньшую длину волны, обладают большей энергией. Внутренняя энергия поля определяется величиной поля, однако закон соответствия может быть выбран множеством различных способов. В примере водной поверхности более высокий уровень воды соответствует большей внутренней энергии. Суммарная энергия поля принимается равной нулю в том случае, если поле статическое и однородное, и конфигурация его отвечает минимуму внутренней энергии.

энергией, а сумму двух оставшихся — потенциальной. В дальнейшем, однако, мне будет удобно иметь собственное название для каждой из трех величин, поэтому я назову внутренней энергией величину, зависящую

от значения поля, оставляя название потенциальной энергии за слагаемым, пропорциональным квадрату скорости пространственного изменения поля.

Такой классификации энергии поля может быть дано интуитивное обоснование. Слагаемое, отвечающее кинетической энергии, устанавливает, что полная энергия поля возрастает, если поле (в каждой точке) начинает изменяться быстрее. Для водной поверхности, служащей моделью поля, это означает, что кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости изменения положения волны или просто квадрату скорости. Повседневный наш опыт говорит о том же: чем быстрее движется тело, тем больше оно несет энергии.

Потенциальная энергия, как она была определена выше, увеличивается, если уже заметное изменение состояния поля происходит в малой области пространства. Интуитивно это также ясно: энергия, необходимая для изгиба или деформации тела, возрастает, если изгиб делается резче. Интерпретация внутренней энергии еще более очевидна: едва ли покажется удивительным, что энергия поля зависит от его величины. В модели с бассейном внутренняя энергия относится к общему уровню поверхности воды. Чем выше уровень воды, тем больше энергия.

□

Поскольку и кинетическая, и потенциальная энергии пропорциональны квадратам некоторых величин, то они никогда не могут стать отрицательными. При рассмотрении внутренней энергии поля необходимо учитывать лишь разность уровней энергии, как, например, в случае различных уровней воды в бассейне. Наименьшая наблюдаемая внутренняя энергия может быть положена равной нулю, а следовательно, и внутреннюю энергию можно определить так, что она никогда не будет принимать отрицательных значений. Таким образом, минимальная суммарная энергия поля равна нулю.

Состояние поля с минимальной, или нулевой, энергией называется вакуумным состоянием. Очевидно, что в состоянии вакуума поле должно быть постоянным в пространстве и во времени, так как любое изменение приведет к появлению положительной величины потенциальной или кинетической энергии. Для нахождения вакуумного состояния достаточно минимизировать только внутреннюю энергию. Вакуум есть состояние постоянного во времени и пространстве поля, имеющего нулевую внутреннюю энергию.

□

Поскольку внутренняя энергия поля определяется величиной поля, то наиболее вероятной конфигурацией поля является такая, при которой минимум внутренней энергии достигается на всюду равном нулю поле. Вакуум тогда есть состояние вообще без поля, что соответствует интуитивному понятию вакуума, как пустого пространства. Удивительно, однако, что это не единственная возможность.

Существует ряд полевых уравнений, в которых внутренняя энергия исчезает при некотором ненулевом значении поля. Следовательно, состояние системы в отсутствие поля, которое на первый взгляд и представляет собой вакуум, в действительности может иметь более высокий уровень энергии, чем другое состояние с отличным от нуля полем. Это состояние и есть настоящий вакуум (точка нулевой энергии), несмотря на то, что он описывается однородным полем, заполняющим все пространство. Примером такого рода поля является магнитное поле ферромагнетика. Состояние минимума энергии ферромагнетика не есть ненамагниченное

состояние; напротив, ферромагнетик спонтанно генерирует и поддерживает магнитное поле, поскольку, делая это, он может уменьшить свою энергию.

Если внутренняя энергия может обратиться в нуль при некотором значении поля, отличном от нуля, то она может обратиться в нуль и при других значениях поля. Действительно, некоторые полевые уравнения ведут к возникновению множества вакуумных состояний, каждое из

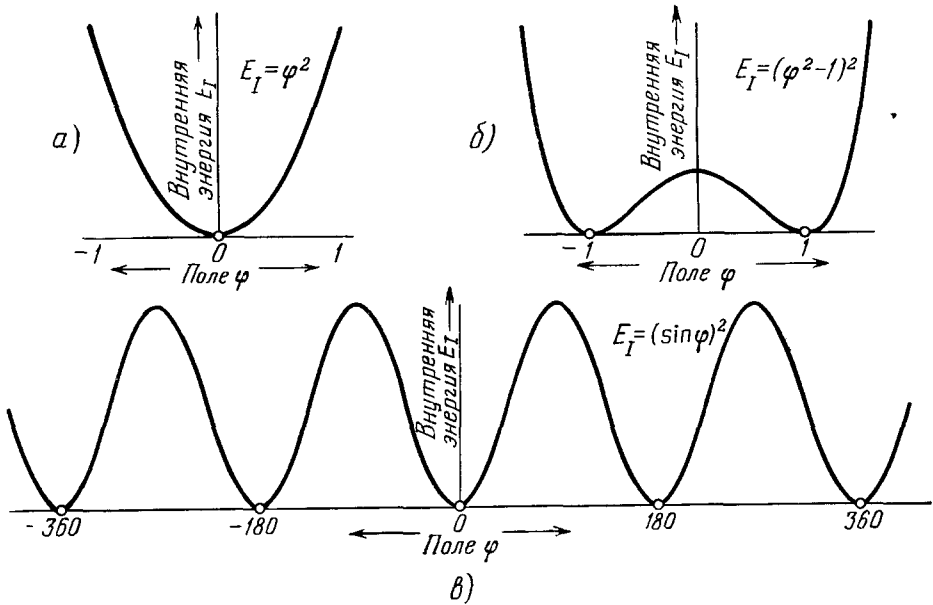


Рис. 5. Вакуумными состояниями поля называются состояния с равной нулю энергией. Поскольку кинетическая и потенциальная энергии всегда могут быть обращены в нуль путем выбора статического и однородного поля, то для определения вакуумного состояния достаточно рассмотреть только внутреннюю энергию. Здесь представлены графики внутренней энергии как функции величины поля в трех простейших случаях. Если энергия растет как квадрат величины поля (а), то существует только одно вакуумное состояние: энергия равна нулю, когда поле равно нулю. Во втором случае (б) у поля есть два вакуумных состояния. Энергия равна нулю, когда поле принимает значения $+1$ и -1 , и энергия больше нуля в том случае, когда поле исчезает. Энергия поля синус-Гордона (в) представляется периодической функцией поля и имеет бесконечное число вакуумных состояний. Если величину поля синус-Гордона измерять в градусах, то энергия обращается в нуль в точках $0, 180, 360^\circ$ и т. д. Топологически солитоны могут существовать только в полях, имеющих множество вакуумных состояний.

которых отвечает своему значению поля. Все вакуумные состояния эквивалентны (все они имеют одинаковую нулевую энергию), но различимы. Как будет разъяснено в дальнейшем, существование по крайней мере двух вакуумов есть необходимое условие для возникновения солитонов.

Предположим, что волна или возбуждение некоторого поля, занимает в данный момент конечный объем пространства. Вне этой области других возбуждений нет и значение поля таково, что энергия всюду равна нулю. Общее состояние такой системы не может быть вакуумом, так как волна обладает запасом энергии. Однако по мере распространения волны ее энергия будет распределяться по все большему объему и в пределе бесконечного объема, энергия, заключенная в единице объема, станет равной нулю. Волна в этом случае исчезнет и поле станет равным постоянному вакуумному значению во всем пространстве.

Если поле таково, что допускает множество вакуумных состояний, то возможна и другая ситуация. Различным областям, окружающим изолированную волну, могут соответствовать отличные друг от друга

значения поля, отвечающие вакуумному состоянию. Если топологическая структура вакуума такова, что нельзя непрерывным преобразованием перевести одно значение поля, отвечающее вакуумному состоянию, в другое — аналогичное, то волна окажется не способной равномерно распределиться по всему пространству. В результате возникает устойчивое возмущение поля — солитон.

□

Топологию солитонов можно пояснить, рассмотрев несколько примеров полевых уравнений. Простейшее из таких уравнений описывает поле в одномерном пространстве, т. е. на бесконечно длинной линии, точки которой обозначим через x — единственную координату на линии. Каждой точке на этой линии сопоставляется некоторое значение поля, которое будем обозначать греческой буквой ϕ . Более формально это можно записать с помощью математического символа $\phi(x)$, который читается как « ϕ есть функция точки x », или, короче, « ϕ от x », и означает, что каждой точке на линии сопоставлено единственное значение поля ϕ .

Так же как ϕ зависит от x , так в свою очередь и внутренняя энергия зависит от ϕ . Эта зависимость записывается как $E_I(\phi)$, что означает: внутренняя энергия есть функция от ϕ , а следовательно, всякому возможному значению поля ϕ поставлено в соответствие определенное значение внутренней энергии. Физическое содержание этих математических формул может быть легко расшифровано. Если задана любая точка x , точка в одномерном пространстве, то значение поля в этой точке находится однозначно. Задавшись полем в каждой точке пространства, можно вычислить внутреннюю энергию поля. Солитоны появляются тогда, когда минимуму внутренней энергии соответствуют несколько различных значений поля.

Рассмотрим один пример выражения для внутренней энергии, в котором появляется солитон: $E_I(\phi) = (\sin \phi)^2$. Это выражение показывает, что для нахождения значения величины внутренней энергии данной конфигурации поля ϕ нужно вычислить синус поля ϕ и полученный результат возвести в квадрат. Уравнение движения волны в поле с внутренней энергией такого вида называется уравнением синус-Гордона. Оно представляет собой модификацию другого уравнения, впервые рассмотренного в 1926 г. Оскаром Клейном и Вальтером Гордоном.

Свойства поля синус-Гордона могут быть исследованы, если в уравнение, определяющее внутреннюю энергию, подставить численные значения ϕ . При этом необязательно приписывать значениям ϕ какую-либо размерность. Из соображений простоты будем в дальнейшем предполагать, что единицы измерения выбраны так, что внутренняя энергия меняется от нуля до единицы, а ϕ измеряется в градусах.

Синус есть тригонометрическая функция, значения которой меняются от нуля до $+1$ и от нуля до -1 , так что значения квадрата этой функции лежат между нулем и $+1$. Если ϕ равно нулю, то и синус ϕ , и квадрат синуса ϕ обращаются в нуль, а следовательно, уравнение синус-Гордона принадлежит к тому типу уравнений, для которых состояние с равным нулю полем есть вакуум. При увеличении ϕ от 0 до 90° как синус, так и квадрат синуса плавно возрастают, достигая значения $+1$ при $\phi = 90^\circ$. Однако при дальнейшем увеличении ϕ квадрат синуса уменьшается и вновь обращается в нуль при $\phi = 180^\circ$. Это значение ϕ вновь есть вакуумное состояние системы. При дальнейшем увеличении ϕ синус становится отрицательной величиной, но квадрат синуса, конечно, остается положительным и вновь принимает значение $+1$, когда $\phi = 270^\circ$. При $\phi = 360^\circ$ квадрат синуса опять равен нулю и реализуется еще одно вакуум-

ное состояние. Дополнительными вакуумными состояниями оказываются также состояния, характеризуемые значениями φ , равными 540° , 720° , 900° , 1080° и т. д. Увеличивая φ , можно найти бесконечно много значений φ , отвечающих вакуумному состоянию системы. Любые два таких соседних значения отделены друг от друга горбом, на котором внутренняя энергия, плавно увеличиваясь, достигает своего максимального значения, равного единице.

□

Форма одномерного поля может быть представлена двумерным графиком, т. е. графиком на плоскости. Одна ось, помеченная на рис. 6 буквой x , есть одномерное пространство, на другой оси отложены все возможные значения поля φ . Для каждой точки x на плоскости делается отметка в том месте, которое соответствует значению поля в этой точке. Так как поле должно быть определено во всех точках x , и поскольку значения поля должны образовывать континуум, то отметки на плоскости всегда образуют некоторую кривую. Линия, параллельная оси x , представляет состояние, в котором поле постоянно во всех точках x .

Для того чтобы наглядно представить себе вид внутренней энергии поля, необходимо добавить третье измерение к рассматриваемой плоскости: значения внутренней энергии оказываются пропорциональными высоте над плоскостью. Для поля синус-Гордона точки, представляющие внутреннюю энергию при всех возможных значениях поля, образуют синусоидальную волнообразную поверхность. Гребни волн энергетической поверхности параллельны оси x , желоба нулевой энергии на этой поверхности расположены при значениях φ , равных 0° , 180° , 360° и т. д. (см. рис. 6).

В полученном трехмерном пространстве поле представляется линией, лежащей на волнообразной энергетической поверхности. Одной из возможных конфигураций является прямая линия, расположенная на дне желоба, скажем, желоба с $\varphi = 180^\circ$. Поле в этом случае не меняется в пространстве и, если его ничто не возмущает, то не может меняться и во времени. Более того, поскольку $\varphi = 180^\circ$ есть одно из значений поля, при котором его внутренняя энергия обращается в нуль, то и полная энергия такого поля равна нулю. Это поле реализует одно из множества вакуумных состояний. Поскольку поле всюду одинаково, то оно называется глобальным вакуумом.

Другой конфигурацией поля является такая, при которой линия, лежащая на дне желоба нулевой энергии, подверглась некоторому возмущению. Возмущенная конфигурация поля представляет собой линию, которая сначала поднимается на один склон долины, возвращается затем ко дну и вновь взбирается на другой склон. Эти синусоидальные участки повторяются до тех пор, пока амплитуда их колебаний не станет пренебрежимо малой. Этот график соответствует такому волнообразному возмущению поля, которое, в конце концов, затухнет. Там, где линия поля выше дна, поле имеет внутреннюю энергию, и из-за того, что оно изменяется в пространстве, у него есть и потенциальная энергия. Сам по себе процесс дисперсии привносит еще и кинетическую энергию. По мере распространения такой волны вдоль бесконечно длинной линии количество энергии на единицу длины стремится к нулю и поле возвращается к устойчивому состоянию глобального вакуума.

Солитонное синус-гордоновское поле появляется, когда линия, представляющая состояние системы, взбирается со дна одной долины энергетической поверхности, переваливает через хребет и спускается на дно соседней долины. По обе стороны от области перевала поле находится

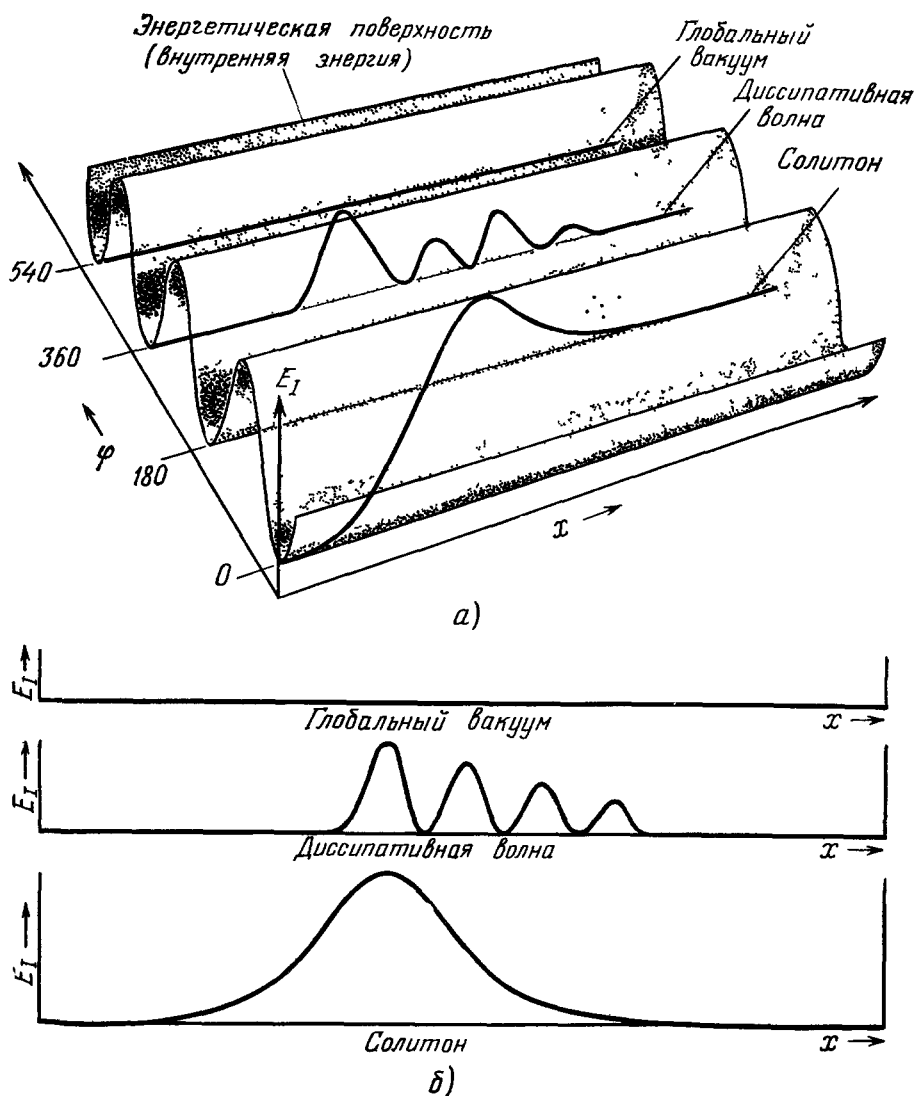


Рис 6. Энергетическая поверхность поля синус-Гордона, иллюстрирующая топологические ограничения, гарантирующие стабильность солитона.

Бесконечная ось x представляет собой одномерное пространство. По оси, отмеченной буквой ϕ , откладывается значение величины поля в данной точке x . Высота энергетической поверхности над плоскостью x, ϕ (вдоль оси, отмеченной как E_T) равна значению внутренней энергии в данной точке плоскости. Поле синус-Гордона имеет множество вакуумных состояний — впадины энергетической поверхности. Линия, лежащая на дне одной из впадин, изображает глобальное вакуумное состояние: поле всюду одинаково, а величина его соответствует нулевой внутренней энергии. Линия, осциллирующая у дна долины, представляет локальное возмущение поля — обычную волну. Поскольку линия время от времени поднимается над дном долины, то это поле обладает энергией, но в конце концов волна все же затухнет. Солитон образуется, когда поле выходит на различные вакуумные значения при движении вдоль оси x к бесконечности в противоположных направлениях. Для показанного здесь солитона слева на бесконечности вакуумное значение поля $\phi = 0$, а справа $\phi = 180^\circ$. Поскольку требуется, чтобы поле было непрерывным, то в некоторой точке на оси x линия, его изображающая, должна пересечь хребет энергетической поверхности, разделяющей два вакуумных состояния. Изогнутая часть линии в области перехода и есть солитон. Положение изгиба может перемещаться из стороны в сторону, но если поверхность бесконечна, сам изгиб никогда не может быть устранен и солитон никогда не диссипирует. На рис 6) представлены проекции трех линий, изображающих различные состояния поля, на плоскости E_T, x . Как диссипативная волна, так и солитон обладают также и потенциальной энергией, а если они движутся, то и кинетической. Эти величины на графике не изображены.

в устойчивых вакуумных состояниях, однако это не один и тот же вакуум. Например, значение поля во всех точках левее перевала может быть равно 180° , а правее перевала — 360° . В переходной области конфигурация поля не совпадает с вакуумной. Она имеет внутреннюю энергию, поскольку линия поля должна перевалить через хребет на энергетической поверхности, и потенциальную энергию, так как поле меняется в этой области от точки к точке.

Солитон представляет собой изгиб или излом линии, изображающей конфигурацию поля, и изгиб этот не может быть никаким образом ликвидирован, если координата x по обе его стороны неограничена. Один конец линии прочно закреплен в вакуумном состоянии с $\varphi = 180^\circ$, а другой конец с $\varphi = 360^\circ$. Поскольку линия должна быть непрерывна, то где-то она обязательно пересечет энергетический максимум, лежащий между этими двумя вакуумными состояниями. Солитон никогда не может затухнуть, а его энергия диссипировать.

□

Энергия солитона зависит от геометрии перехода между вакуумными состояниями. Потенциальная энергия минимальна, когда поле изменяется так медленно, как это только возможно, а следовательно, и линия поля пересекает хребет под очень острым углом, почти параллельно оси x . Однако при такой конфигурации линия поля поднята над дном долины на большую высоту на значительном расстоянии и ее внутренняя энергия велика. Внутренняя энергия становится минимальной, если линия поля пересекает хребет перпендикулярно к оси x , резко переходя от одного вакуумного состояния к другому, но в этом случае очень высока скорость пространственного изменения поля и потенциальная энергия достигает своего максимального значения. Минимум полной энергии солитона достигается при плавном пересечении хребта под некоторым промежуточным углом, таким, что при этом внутренняя и потенциальная энергии равны.

Хотя синус-гордоновское поле обладает исключительно простой структурой, тем не менее возникающие солитоны имеют ряд важных свойств, общих с реальными частицами. Стабильность покоящегося солитона уже обсуждалась. Солитон может быть приведен в состояние движения так, что форма его не изменится: область перехода между двумя вакуумными состояниями для этого должна скользить вдоль хребта с постоянной скоростью. Даже когда солитон находится в движении, ширина области перехода остается постоянной и единственное изменение в энергии сводится к добавлению слагаемого, отвечающего кинетической энергии.

Уравнение синус-Гордона не ограничивает возможное число солитонов и, в принципе, может существовать неограниченное число солитонов и антисолитонов. По определению солитоном называется излом, при котором значение поля увеличивается (от одного вакуумного значения до другого) при возрастании x , и антисолитоном — излом, при котором значение поля уменьшается при возрастании x . Очень легко создать солитон-антисолитонную пару из состояния глобального вакуума. Для этого необходимо просто «приподнять» линию, характеризующую вакуумное состояние, над дном долины и перебросить (не разрывая) приподнятую часть линии через хребет на дно соседней долины. Эта процедура соответствует рождению частицы и античастицы в квантовой теории поля.

Существует и обратный процесс: столкновение солитона и антисолитона. Уравнение синус-Гордона обладает специальным свойством, позволяющим солитону и антисолитону покинуть область столкновения не изме-

нившимися, однако легко так модифицировать уравнение, что при столкновении волны будут аннигилировать. Оба излома исчезнут, а их энергия

перейдет в энергию обычной волны и равномерно распределится по всему состоянию глобального вакуума. Подобный процесс аннигиляции наблюдается также и для обычных частиц и античастиц.

Поскольку любое количество солитон-антисолитонных пар может быть легко создано или взаимно уничтожено, то сохраняющейся величиной может быть только разность между полным числом солитонов и антисолитонов. Например, данное поле на бесконечности может принимать значение $\varphi = 180^\circ$ в одном направлении и $\varphi = 360^\circ$ в другом направлении, но в области перехода между этими значениями возможно существование семи солитонов и шести антисолитонов. Шесть солитонов и шесть антисолитонов могут аннигилировать друг с другом, но нет никаких путей уничтожить оставшийся солитон.

Легко сконструировать действующую модель энергетической поверхности поля синус-Гордона. Придадим куску плотной бумаги форму гармоники или, если удастся, форму плавной волнообразной поверхности, затем поместим на нее гибкую цепочку для часов. Если цепочка начинается на дне одной складки, а кончается на дне другой, то в области перехода цепочки из одного «вакуума» в другой должен существовать солитон. Абсолютное сохранение солитона в такой модели увидеть невозможно из-за конечных размеров цепочки и поверхности, но некоторые другие свойства наблюдать можно. Например,

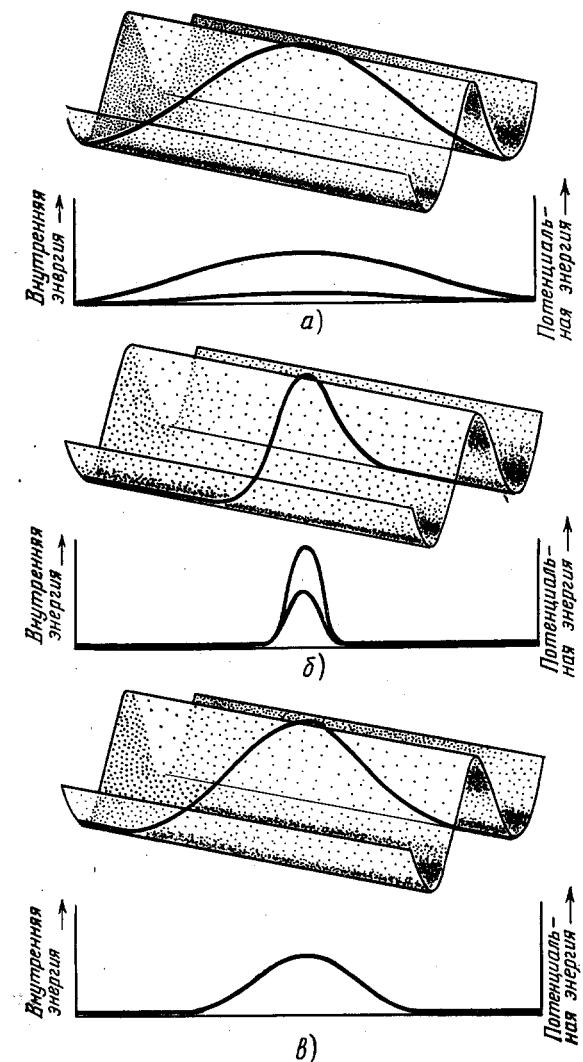


Рис. 7. Оптимальная форма солитона — форма, соответствующая минимуму суммы потенциальной и внутренней энергий.

Потенциальная энергия, определяемая пространственной неоднородностью поля, минимальна, когда переход осуществляется постепенно и линия пересекает хребет под малым углом (а). В этом случае, однако, большой отрезок линии находится в области с максимальной внутренней энергией. Внутренняя энергия минимальна, когда линия пересекает хребет почти перпендикулярно (б), но такой резкий характер перехода соответствует большой потенциальной энергии. Оптимум достигается при пересечении хребта линией под некоторым промежуточным углом (в), таким, что потенциальная и внутренняя энергии при этом равны.

наклонив поверхность, можно заставить солитон двигаться, а действуя очень осторожно, можно даже наблюдать рождение и аннигиляцию соли-

тон-антисолитонных пар. Впервые я увидел в действии такую модель у Хольгера Нильсона, датского физика, выполнившего пионерские работы в области солитонов.

Может показаться, что синус-гордоновское поле есть абстрактное построение, не имеющее точек соприкосновения с реальными системами. Поскольку поле одномерно, то его описательная сила по необходимости ограничена. Кроме того, множество вакуумных состояний, которое необходимо для существования солитона, введено, как может показаться,

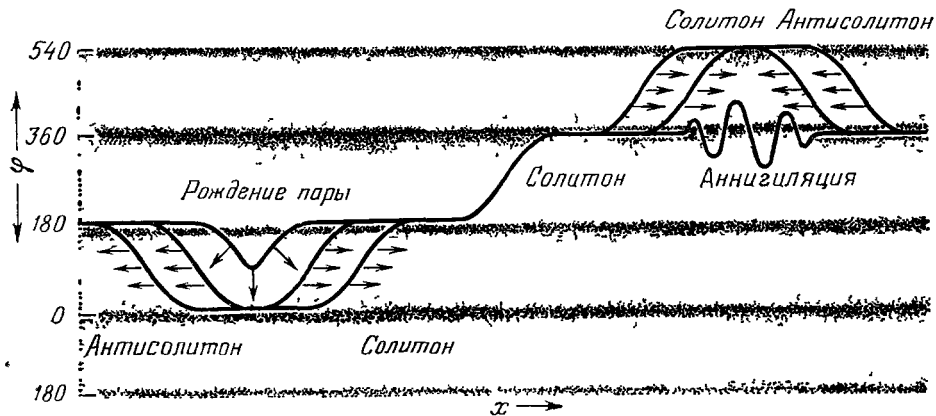


Рис. 8. Рождение и аннигиляция солитонов напоминают аналогичные процессы, характерные для квантовомеханических частиц.

В поле синус-Гордона отрезок линии может быть поднят со дна одной долины и переброшен через хребет на дно соседней долины. В результате одновременно рождаются солитон и антисолитон, которые могут двигаться от точки рождения в противоположные стороны. При обратном процессе солитон и антисолитон сталкиваются и аннигилируют друг на друге. Уравнение, определяющее поведение поля синус-Гордона, таково, что вслед за аннигиляцией немедленно рождается новая солитон-антисолитонная пара. Однако в других солитонных системах энергия волн может быть израсходована другими путями.

довольно искусственным образом: предположено, что внутренняя энергия есть периодическая функция поля. Однако, во-первых, в трехмерном пространстве существуют физические явления, которые, по существу, ограничены одним измерением. Примером может служить движение электронов вдоль вытянутой цепочки молекул. Уравнение синус-Гордона использовалось при анализе этой системы и ей подобных. Во-вторых, периодичность внутренней энергии также не есть предположение, слишком далекое от опыта. Рассмотрим внутреннюю энергию маятника как функцию угла отклонения его оси от вертикали. По мере того, как угол начинает меняться от нуля градусов, начинает увеличиваться и энергия, достигая максимума в момент максимального отклонения (угол при этом примет значение, соответствующее половине оборота), затем энергия маятника вновь уменьшается, принимая минимальное значение в момент, когда маятник завершит полный оборот, и т. д. Энергия периодически принимает максимальные и минимальные значения, в то время как значения угла, отсчет которого начался в момент первого отклонения, непрерывно увеличивается.

Качественное подобие между взаимодействующими солитонами модели синус-Гордона и взаимодействующими частицами специального вида было расширено до формальной эквивалентности. В 1958 г. Вальтер Тирринг из Венского университета сформулировал квантовомеханическую модель частиц и античастиц, движущихся в пространстве с одним измерением. Сидней Колеман из Гарвардского университета показал недавно, что модель Тирринга и солитоны уравнения синус-Гордона описывают

одни и те же явления. В модели Тирринга предполагается существование частиц, которые подчинены постулированной схеме взаимодействия; солитоны же не вводятся а priori, а естественно возникают из уравнений движения. Тем не менее и тот и другой объекты распространяются и взаимодействуют одинаково.

Все же значительные успехи теории синус-Гордона кажутся не относящимися к делу, так как нет сомнения в том, что реальный мир имеет три пространственных измерения, а не одно. Если солитоны существуют как настоящие частицы, то их необходимо найти в трехмерной теории. Двумерные волны со свойствами солитонов известны уже в течение ряда лет, открытие же трехмерных солитонов произошло не так давно. Последние могут существовать в природе в виде частиц; двумерные солитоны представляют интерес для ряда областей физики и являются полезной моделью, иллюстрирующей свойства трехмерных солитонов. Действительно, поскольку уже сделан шаг от линии к плоскости, то нет никаких принципиальных преград для понимания следующего шага: перехода к пространствам с большим числом измерений.

Стабильность солитонов в пространстве с большим числом измерений может быть доказана с помощью топологических аргументов подобно тому, как это было сделано для поля синус-Гордона, хотя наглядно представить себе геометрический образ полей значительно труднее. В случае двух измерений значение поля есть непрерывная функция положения точки на плоскости. Поле можно изобразить тогда следующим образом: нарисуем плоскость, величину поля в какой-либо точке плоскости изобразим точкой над плоскостью, так, что высота этой точки пропорциональна величине поля. Множество всех значений образует поверхность, возвышающуюся над плоскостью. Если эта поверхность параллельна исходной плоскости, то поле постоянное; для полей, меняющихся от точки к точке, поверхность имеет более сложный вид. В пространстве трех измерений поле должно быть определено в каждой точке обычного трехмерного пространства, однако, невозможно изобразить график трехмерного поля, кроме как в гипотетическом четырехмерном пространстве. С другой стороны, свойства дву- и трехмерных полей очень похожи, так что в большинстве случаев простейшее поле может служить иллюстрацией обоих.

Как уже было показано, в одномерном случае свойством, необходимым для существования солитонов, является наличие нескольких вакуумных состояний, внутренняя энергия которых равна нулю при различных значениях поля. Солитоны появляются в том случае, если в противоположных направлениях на линии поле на бесконечности стремится к различным вакуумным значениям.

На плоскости двигаться к бесконечности от выбранной точки можно в любом направлении; таким образом, число направлений, ведущих к бесконечности, само по себе бесконечно. Можно построить одно-однозначное соответствие между бесконечным числом возможных направлений и бесконечным числом точек на окружности. Та же самая ситуация возникает и в трехмерном пространстве, где различным направлениям на бесконечность соответствуют точки на сфере. Для того чтобы существовал солитон в любом из этих пространств, необходимо, чтобы поле стремилось к различным вакуумным состояниям в любом из возможных направлений.

Не для всех дву- и трехмерных полей и даже не для всех полей, имеющих множество вакуумных состояний, возможно существование такой топологической особенности, которая ведет к возникновению солитона. Одним из условий является требование, чтобы сами поля определялись в каждой точке более чем одной величиной. Поля, которые будут

рассматриваться, определяются двумя значениями в двумерном пространстве и тремя значениями в трехмерном. Они называются векторными полями, поскольку два (или три) значения, которыми они определены, могут рассматриваться как компоненты вектора вдоль двух (или трех) ортогональных осей. Векторный характер поля будем отмечать полужирной буквой, обозначающей поле: \mathbf{f} . Внутренняя энергия двухкомпонентного векторного поля может быть представлена поверхностью над некоторой плоскостью. Плоскость эта не есть само исходное двумерное пространство, в котором определяется поле \mathbf{f} , а составлена из всех возможных значений векторного поля или из всех возможных комбинаций величины и направления векторного поля \mathbf{f} .

Одним из правдоподобных выражений для внутренней энергии, как функции векторного поля, является $E_1 = (\mathbf{f})^2$. Энергетическая поверхность, описываемая этим уравнением, носит название параболоида, т. е. поверхности, образованной параболой при вращении вокруг своей оси. Внутренняя энергия имеет только один минимум, находящийся в вершине параболоида, расположенной в начале координат на плоскости. Таким образом, энергия обращается в нуль только, когда все компоненты поля зануляются. Поскольку это вакуумное состояние, соответствующее отсутствию поля, единственно, то возникновение топологических солитонов невозможно.

Пусть теперь внутренняя энергия дается другим выражением $E_1 = (\mathbf{f}^2 - 1)^2$. В этом случае внутренняя энергия не равна нулю в начале координат. Если $\mathbf{f} = 0$, то внутренняя энергия равна $(-1)^2$ или просто 1. Следовательно, состояние в отсутствии поля не есть вакуумное состояние. Настоящее вакуумное состояние реализуется, когда модуль векторного поля \mathbf{f} равен 1, поскольку в этом случае $\mathbf{f}^2 - 1$ равно нулю. Уравнение $\mathbf{f}^2 - 1 = 0$ есть уравнение окружности, оно удовлетворяется для всех точек окружности, расположенной в начале координат и имеющей единичный радиус. Таким образом, векторное поле, равное по модулю единице, является вакуумным состоянием независимо от направления вектора \mathbf{f} . Полная энергетическая поверхность имеет необычную структуру. На больших расстояниях от начала координат она имеет вид параболоида, только с более крутыми стенками. Вблизи начала координат поверхность достигает минимума во всех точках, лежащих на окружности, радиус которой (модуль поля \mathbf{f}) равен единице, затем внутри единичного круга поверхность вновь поднимается над плоскостью. Поверхность выглядит как гиперболоид с выдавленным внутрь по оси дном (рис. 9).

Что может сказать эта энергетическая поверхность о конфигурации двумерного векторного поля? Одно следствие, особенно важное для настоящего рассмотрения, состоит в том, что у поля может быть нулевая внутренняя энергия независимо от направления векторного поля, при условии, что последнее по модулю равно единице. Рассмотрим поле, величина и направление которого измерены во всех точках плоскости вне некоторой произвольной области D . Пусть величина этого векторного поля всюду оказалась равной единице, и все векторы направлены в разные стороны от некоторой точки, находящейся внутри области D . Следовательно, вне области D плоскость заполнена векторами, имеющими единичную длину и расходящимися от области D . Везде вне области D такое поле представляет вакуумное состояние, поскольку единичный вектор соответствует нулевой внутренней энергии. Возникает вопрос: возможно ли распространить вакуумное состояние внутрь области D так, чтобы поле имело нулевую внутреннюю энергию всюду? Ответ: нет! Доказательство проводится топологическими методами и показывает, что D должна содержать область конечной энергии — двумерный солитон.

Представим себе, что мы обходим область D , имея при себе стрелку, которая указывает направление, параллельное направлению поля. Вер-

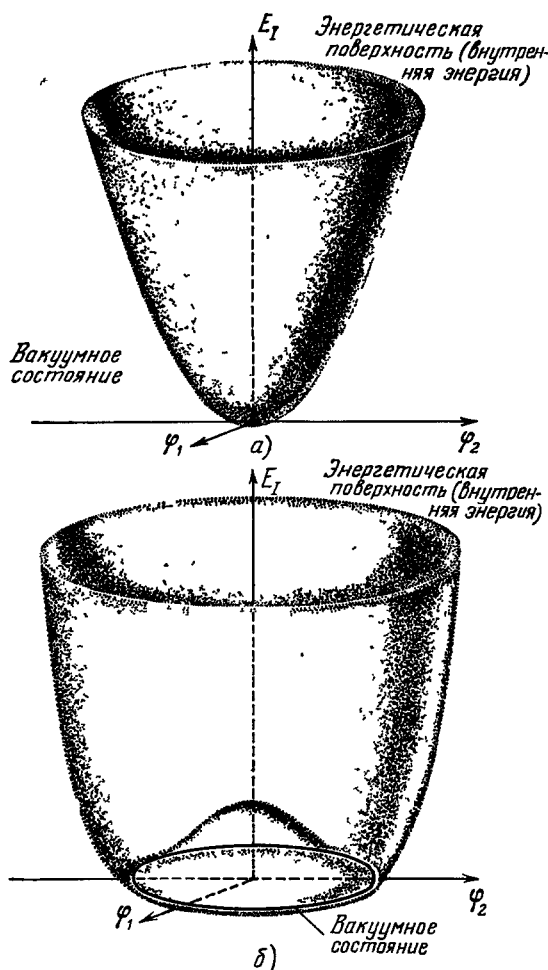


Рис. 9. Двумерные поля могут образовывать солитоны, если существует множество вакуумных состояний с подходящей топологией.

Такие поля в каждой точке пространства определяются двумя величинами, обозначаемыми φ_1 и φ_2 . Каждой паре φ_1 и φ_2 соответствует определенное значение внутренней энергии. Эти значения образуют энергетическую поверхность. Для одного из возможных вариантов теории поля (а) энергия равна нулю, только когда обе компоненты поля равны нулю. В таком поле существование солитонов невозможно. Солитоны могут появиться в том случае, когда энергетическая поверхность имеет более сложную структуру (б). В этом случае поле, обе компоненты которого равны нулю, обладает конечной, ненулевой энергией. Вакуумное состояние описывается полем, компоненты φ_1 и φ_2 , которого лежат на окружности единичного радиуса. Если φ_1 и φ_2 являются компонентами некоторого вектора, то равенство нулю энергии достигается на векторах единичной длины, независимо от их направ-

лений. Стрелка при обходе такой области не изменит своего первоначального направления: она совсем не будет вращаться (рис. 10, з).

Процедура с обходом стрелки в поле вокруг замкнутой петли иллюстрирует одну из теорем топологии. Теорема гласит, что если поле не имеет разрывов и не исчезает ни в одной точке, то стрелка долж-

жна повернуться на целое число раз при обходе любого контура. Стрелка может вообще не вращаться; тогда это целое число равно нулю, может совершить один, два, три и т. д. оборотов, но не может сделать пол оборота.

Здесь не будет дано доказательства этой теоремы, однако, справедливость ее подтверждается повседневным опытом, который показывает, что стрелка должна занять свое первоначальное положение после того как совершен полный обход петли.

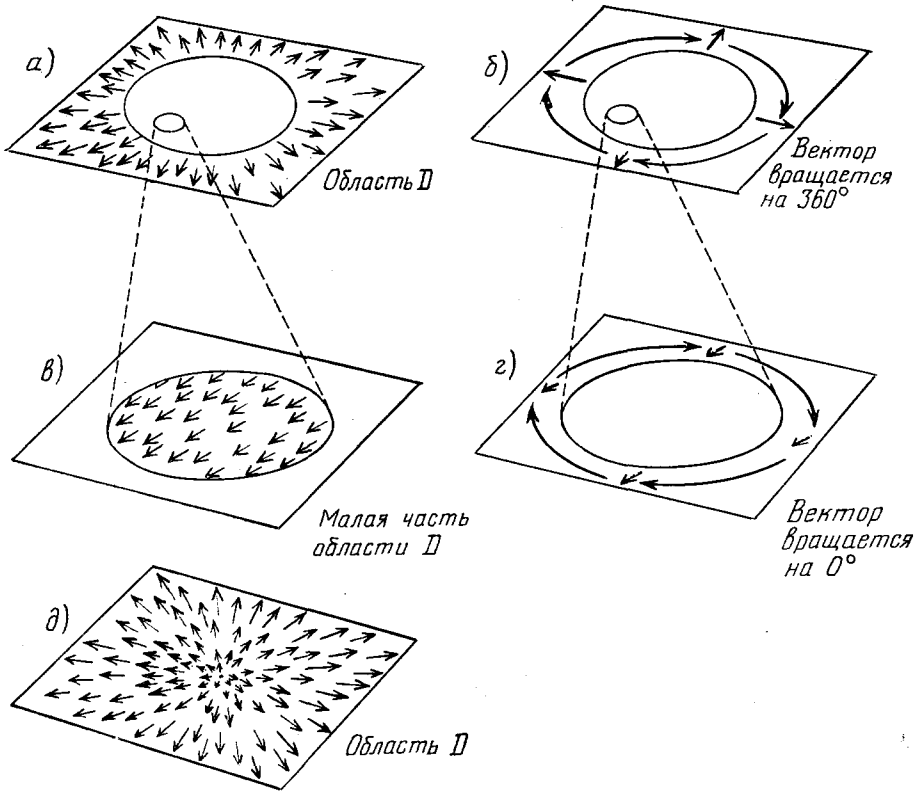


Рис. 10. Пояснить стабильность солитона в двумерном пространстве можно с помощью топологических рассуждений.

Пространство (плоскость) заполнено векторным полем. Поле в каждой точке определено своей величиной и направлением. Пусть всюду вне некоторой произвольной области D поле радиально расходится от D и величина его всюду равна единице (а). Предположим, что поле такой величины обладает нулевой внутренней энергией, а потому всюду вне D поле находится в вакуумном состоянии. На первый взгляд кажется возможным продолжить вакуумное состояние и внутрь области. То, что это не верно, доказывается следующим образом. Представим себе, что по периметру D движется стрелка, направление которой всегда совпадает с направлением поля (б). После завершения обхода стрелка займет свое первоначальное положение, но сама она в результате сделает один полный оборот. Исследуем теперь некоторую очень малую область внутри домена D . Если область выбрана достаточно малой, то поле внутри нее должно быть однородным, а все векторы параллельными (в). При обходе такой области стрелка совсем не будет поворачиваться. Можно представить себе множество замкнутых петель промежуточных размеров. При обходе больших петель стрелка все еще будет совершать один полный оборот, при обходе меньших она вовсе не будет вращаться. При некотором размере контура, однако, должен произойти переход от вращения векторного поля на 360° к вращению на 0° . Одна из теорем топологии утверждает, что такой переход возможен, если только в некоторой точке внутри домена D поле само исчезает, а потому направление стрелки неопределено. Отсюда следует, что где-то внутри D значение поля равно нулю; при этом наиболее вероятной конфигурацией является такая, при которой плавное обращение поля в нуль происходит в центре D . Однако равное нулю поле не есть вакуумное состояние, энергия его больше нуля. Это и есть энергия солитона, удерживаемого «кручением» структуры поля.

Теорема подтверждается для петель, охватывающих область D , где вектор вращается на 360° , и для малых петель внутри D , где угол вращения равен нулю. Что же произойдет, если петля имеет некоторый промежуточный размер? При некотором размере области вращение поля на 360° должно смениться вращением на 0° . Топологическая теорема

запрещает петли с нецелым числом оборотов, однако в ее формулировке содержатся два существенных предположения, отказавшись от которых, можно избежать противоречия. Во-первых, поле может иметь разрыв, при котором величина поля резко меняется от точки к точке. Однако, такое решение для поля исключается требованием того, чтобы все физические поля изменялись плавно и непрерывно. Единственная оставшаяся возможность состоит в том, что где-то внутри области D значение поля падает до нуля. Именно в этой точке полный угол вращения может измениться от 360° до нуля градусов, поскольку там, где поле обращается в нуль, направление вектора неопределено.

Такое подробное объяснение было сделано с единственной целью: доказать, что внутри области D должна быть точка, где величина поля не равна 1, а напротив, равна нулю. Отсюда следует, что в этой точке внутренняя энергия отлична от нуля. В действительности требование плавного изменения поля приводит к тому, что внутри D существует некоторая область, а не только точка, в которой внутренняя энергия положительна. Этот сгусток энергии не может рассеяться по всей плоскости, так как он удерживается районом «перекручивания» («twist»), где полное число оборотов меняется на единицу.

Трехмерный солитон имеет подобную же структуру, и устойчивость его может быть объяснена с помощью аналогичных аргументов. Точки минимума внутренней энергии лежат на поверхности сферы, а вне и внутри сферы внутренняя энергия возрастает. Вне некоторой области можно вновь выбрать конфигурацию поля, соответствующую вакуумным состояниям, но в данном случае область представляет собой сферический объем, а не площадку, заключенную внутри окружности. Те же самые топологические соображения показывают, что вакуумное состояние не может быть распространено внутрь всего объема, а поэтому должна найтись область, внутренняя энергия поля в которой больше нуля. Эта область и есть трехмерный солитон, и он имеет большое сходство с элементарной частицей в обычном пространстве.

В проведенном анализе дву- и трехмерных солитонов мы опустили один очень важный элемент. Конфигурация поля вне области была названа вакуумным состоянием, поскольку имела нулевую внутреннюю энергию, однако не проводилось никакого подсчета потенциальной энергии этой конфигурации. Поскольку вектор поля меняет свое направление в каждой точке, то потенциальная энергия не равна нулю. Можно даже доказать, что потенциальная энергия бесконечна, так что описанная конфигурация поля не только не в состоянии описать локализованную волну, но также кажется едва ли достижимой.

Есть способ выбраться из этого тупика, но способ не простой. Бесконечная потенциальная энергия вне области D может быть уменьшена до нуля, если постулировать существование нового поля, называемого калибровочным полем. В последние годы калибровочные поля стали предметом интенсивного изучения не только в физике, но и в математике, где они известны под другим названием: связности. Я не буду пояснять в деталях структуру калибровочных полей, а сконцентрирую внимание лишь на тех их свойствах, которые имеют непосредственное отношение к теории солитонов.

Для того чтобы обратить в нуль потенциальную энергию поля, не разрушив при этом солитон, необходимо ликвидировать изменение ориентации вектора от точки к точке и одновременно сохранить вращение поля как целого на 360 градусов. Хотя эти два требования кажутся противоречивыми, оба они могут быть удовлетворены, если ввести в рассмотрение калибровочное поле.

При описании двумерного поля подразумевалось, что направление вектора в каждой точке измеряется по отношению к некоторой фиксированной системе координатных осей абстрактной плоскости, на которой нанесены все возможные значения вектора φ . Система отсчета могла быть произвольной, но она оставалась единой во всем пространстве: это был глобальный базис. Введение калибровочного поля позволяет системе отсчета вращаться при перемещении от точки к точке. Потенциальная

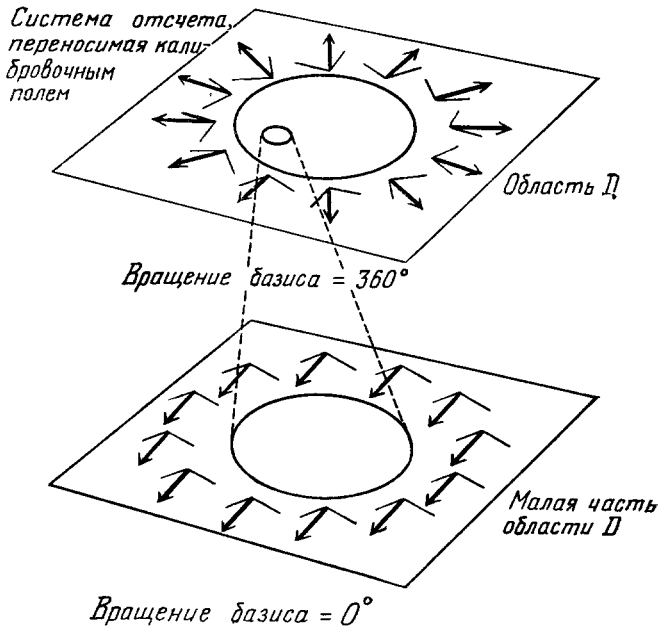


Рис. 11. Калибровочные поля меняют описание солитона в двух и трех измерениях. Для существования солитона необходимо, чтобы радиально расходящееся поле образовывало вакуумное состояние вне области D . Положив значения поля равными единице, мы обратили в нуль внутреннюю энергию, но необходимо также принять во внимание и потенциальную энергию. Поскольку векторы такого радиально расходящегося поля меняют свое направление от точки к точке, то потенциальная энергия оказывается отличной от нуля. Это противоречие снимается введением нового поля, калибровочного, которое определяет процедуру переноса системы отсчета из точки в точку. Вне области D базис вращается в точности на такой угол, чтобы направление векторного поля оставалось постоянным во всех точках (направление при этом измеряется по отношению к перемещенному базису). В малой части внутри области D ни поле, ни базис не вращаются. Введение калибровочного поля позволяет обратить в нуль потенциальную энергию, а топологическое удержание солитона при этом сохраняется. Теперь уже не исходное векторное поле, а калибровочное поле изменяет свой полный угол вращения от 360 до 0° .

энергия поля определяется тогда изменением направления вектора φ не относительно глобального базиса, а относительно локального базиса, который сам меняется от точки к точке.

Предположим, что в какой-то точке на границе области D вектор поля составляет угол 30° по отношению к выбранной системе отсчета. Если система отсчета глобальная, то подразумевается, что после поворота на 90° этот вектор составит угол 120° . Однако подходящим образом выбранное калибровочное поле позволяет системе координат вращаться вместе с вектором. Тогда, независимо от точки измерения, ориентация вектора остается неизменной, и потенциальная энергия исчезает. С другой стороны, понятие кручения поля сохранилось, но стало относиться не к полю φ , а к калибровочному полю. Теперь уже локальная система координат совершает полный оборот при движении по замкнутому пути вокруг области D .

Важно отметить, что калибровочное поле не просто определяет ориентацию многих независимых систем отсчета. Оно описывает изменение ориентации одной-единственной системы отсчета при смещениях этой системы. Если бы было необходимо измерить только изменение ориентации базиса в двумерном пространстве, то достаточно было бы в каждой точке определить одно число: угол вращения. Настоящее двумерное калибровочное поле определяется двумя числами в каждой точке. Одно число говорит нам о величине поворота базиса при смещении вдоль оси x , а второе — вдоль оси y .

Поскольку калибровочное поле представляет собой правило переноса базиса из одной соседней точки в другую, а не рецепт размещения различных базисов в каждой точке, то угол вращения базиса при смещении

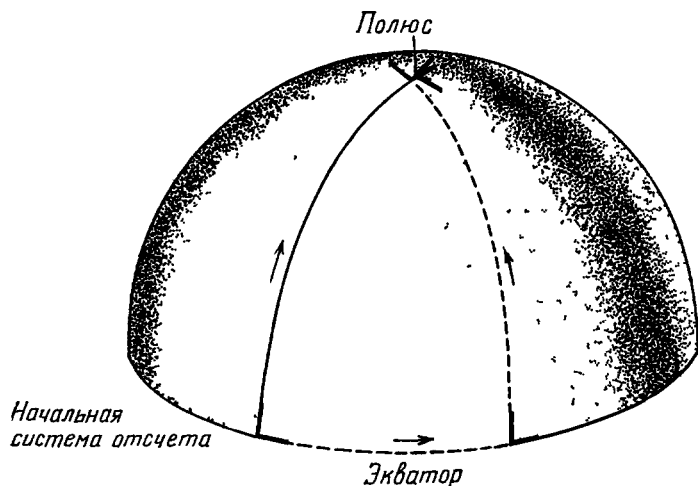


Рис. 12. Перенос системы отсчета, согласованный с калибровочным полем, аналогичен переносу базиса вдоль поверхности Земли.

Если базис перенесем из своего первоначального положения на экваторе прямо на полюс, то окончательная ориентация его будет одна (базис помеченный сплошной линией), если же базис сначала сдвинуть вдоль экватора, а лишь затем поместить на полюс, то конечная ориентация будет другой (штриховой базис). Следовательно, угол вращения при перемещении из точки в точку зависит от пути, соединяющего эти точки. Разница углов вращения обусловлена кривизной земной поверхности.

В абстрактном пространстве эффект калибровочного поля подобен эффекту кривизны.

из одной точки в другую зависит от выбранного пути. При переносе из Рима в Лондон через Берлин система отсчета, или базис, может повернуться на некоторый определенный угол. Если же перенос осуществляется из Рима в Лондон через Париж, то угол вращения будет, в общем случае, совершенно другой. Более того, при кольцевом маршруте, скажем, таком: Рим — Берлин — Лондон — Париж — Рим, ориентация базиса при окончании маршрута, вообще говоря, не совпадает с первоначальной.

Пример с переносом базиса вдоль земной поверхности не только образный. Представим себе, что система координат, состоящая из двух ортогональных осей, помещена в некоторую точку на экваторе. Переместим этот базис на Северный полюс, сдвигая его параллельно самому себе двумя различными способами. Первый способ состоит в том, что мы сразу движемся к северу по меридиану. второй — в том, что предварительно сдвигаем базис вдоль экватора, а затем движемся к полюсу вдоль меридиана. Когда два базиса вновь встретятся на полюсе, их ориентации будут различны. Это различие обязано кривизне земной поверхности.

Существуют калибровочные поля специального вида, для которых базис, перенесенный по замкнутому пути, возвращается к своей первоначальной ориентации. В полях такой конфигурации величина вращения базиса при перемещении из точки в точку не зависит от выбранного пути. Такие калибровочные поля называются чистыми калибровками. Они не несут энергии и находятся в вакуумном состоянии. Когда конечная ориентация базиса зависит от выбранного пути, то калибровочное поле обладает некоторой энергией, которая тем больше, чем определеннее выражена зависимость угла поворота от пути переноса.

Теперь можно вновь рассмотреть энергию двумерного поля, включающего солитон. Введение калибровочного поля обращает в нуль потенциальную энергию поля ϕ всюду вне области D . Кроме того, вне области D калибровочное поле представляет собой чистую калибровку и не обладает энергией, поскольку базис при переносе по любому контуру принимает свою первоначальную ориентацию. Однако калибровочное поле не может оставаться чистой калибровкой и всюду внутри области D . Базис вращается на 360° при переносе его вдоль замкнутого контура вне D , но внутри D должен найтись маленький контур, вдоль которого базис вообще не вращается. Следовательно, должны найтись контуры промежуточного размера, при обходе которых базис поворачивается на углы, лежащие в интервале от 0 до 360° . В этих случаях базис не возвращается к своей первоначальной ориентации после завершения обхода, а следовательно, калибровочное поле должно обладать энергией.

Кручение полевой конфигурации вне области D отнесено теперь к калибровочному полю. Оба поля — ϕ -поле и калибровочное поле — находятся в своем вакуумном состоянии вне области D , но непрерывность полевой конфигурации требует, чтобы поля обладали энергией внутри области. Возникающий солитон вновь становится стабильным, благодаря топологии полевой конфигурации.

Прототипом калибровочного поля является поле, возникающее в максвелловской теории электромагнетизма. Оно описывает относительную ориентацию систем отсчета в некотором абстрактном пространстве двух измерений. Компоненты векторного поля ϕ лежат в этом пространстве. Это поле не есть электромагнитное поле, а описывает заряженную материю, с которой взаимодействует электромагнитное поле. В реальных случаях поле ϕ и калибровочное поле определены во всех точках трехмерного пространства, хотя абстрактное пространство, которому принадлежит поле ϕ , остается двумерным. Два измерения соответствуют двум возможным знакам заряда.

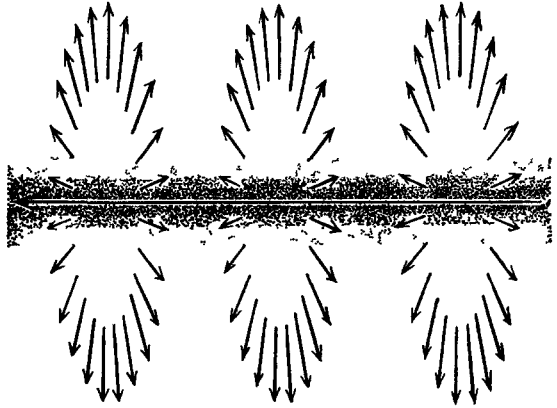


Рис. 13. Трубка магнитного потока в сверхпроводнике имеет малое поперечное сечение и удерживается в таком состоянии полем, включающем множество двумерных солитонов, образующих плотную цилиндрически-симметричную структуру.

Сверхпроводящие электронные пары описываются векторным полем, имеющим множество вакуумных состояний, причем внутренняя энергия поля минимальна, когда значение поля отлично от нуля. Магнитное поле описывается калибровочным полем. Кручение топологических конфигураций этих двух полей удерживает магнитный поток в ограниченной области и не позволяет ему расширяться во все пространство.

Для большинства конфигураций электромагнитного поля существование солитонов невозможно, поскольку минимуму внутренней энергии соответствует нулевое значение поля ϕ . Однако оказалось, что в сверхпроводниках минимум реализуется на отличном от нуля поле ϕ . Конфигурация поля в этом случае допускает существование двумерных солитонов, которые и появляются в сверхпроводящих материалах. Они проявляются как трубки магнитного потока, в которых поля имеют вихреобразную структуру, а энергия сосредоточена в узком канале, проходящем в центре вихря. Поперечное сечение этих вихрей напоминает описанный выше двумерный солитон.

□

Структура калибровочного поля, определенного в пространстве с числом измерений большим двух, существенно более сложная, чем структура электромагнитного поля. Дополнительная сложность возникает из-за большого числа осей, вокруг которых можно вращать базис, и в общем случае результат вращения вокруг различных осей зависит от порядка, в котором проводилось вращение. Калибровочные поля такого сорта называются полями Янга — Миллса, по имени физиков Ч. Н. Янга (Нью-Йоркский государственный университет, Стони Брук) и Роберта Миллса (Государственный университет, Огайо), впервые рассмотревших такие объекты в 1954 г. Прошло несколько лет, прежде чем удалось разработать математический аппарат, необходимый при обращении с этими полями.

Теперь поля Янга — Миллса играют решающую роль в физическом описании природы. Янг-миллсовское поле является важнейшим элементом теории, способным, как кажется, объединить два из четырех фундаментальных взаимодействий в природе, а именно слабые и электромагнитные взаимодействия. Другой вариант янг-миллсовской теории, значительно менее разработанный, может оказаться претендентом на объяснение третьего фундаментального взаимодействия — сильного, или ядерного.

Открытие солитонов в теории, описывающей взаимодействие полей материи с полем Янга — Миллса, было сделано одновременно Герхардом Хофтом (Утрехтский университет) и Александром Поляковым (Институт теоретической Физики им. Ландау, Москва). Обнаружив, что в теории может быть множество вакуумных состояний, они построили трехмерный солитон. Это как раз такой солитон, который может существовать как реальная элементарная частица. Такая солитонная частица была бы очень массивна и являлась бы магнитным монополюм, т. е. несла бы изолированный магнитный заряд.

Теоретические исследования свойств этих частиц начались совсем недавно, но уже удалось установить ряд их интересных свойств. Один из результатов относится к связи между двумя фундаментальными группами частиц — фермионами и бозонами. Эти частицы различаются, во-первых, своим внутренним угловым моментом, или спином, а, во-вторых, статистикой, т. е. поведением ансамбля частиц. Спин фермиона — полуцелый, спин бозона — целый.

Квантовая статистика говорит о том, что два фермиона не могут находиться в одном квантовомеханическом состоянии, тогда как число бозонов в данном состоянии неограничено. Два фермиона могут образовывать составную частицу со свойствами бозона, подобно тому как два полуцелых числа при сложении дают целое число. Оказывается, однако, что не существует способа образовать фермион из бозонов.

Если поле имеет только глобальное вакуумное состояние, то запрет на составление фермионов из бозонов абсолютный; по-другому обстоит

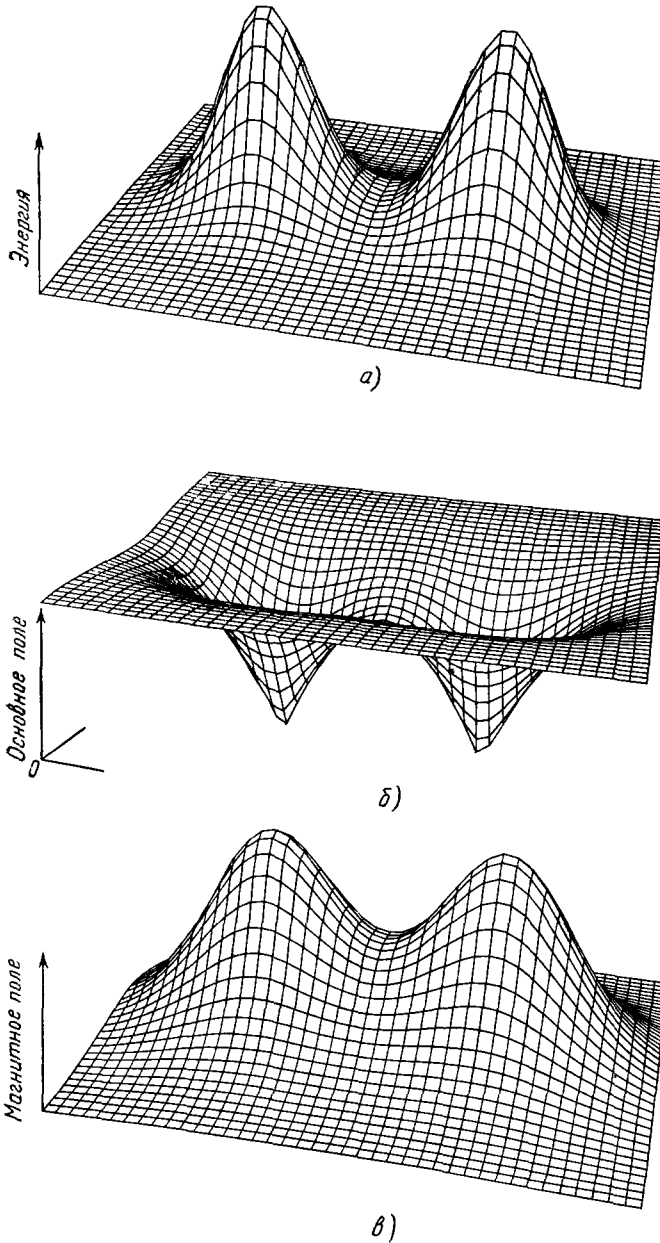


Рис. 14. Слияние двух трубок потока в сверхпроводнике иллюстрирует объединение солитонов.

Основное поле, величина которого определяется плотностью сверхпроводящих электронных пар, показано на рис. б). Это именно то поле, в котором возникают солитоны. В этом поле имеются две впадины, где плотность электронных пар падает до нуля. Во всей остальной области плотность принимает значение, равное единице. Энергия поля, показанная на рис. а), равна нулю в периферийных областях и принимает максимальное значение в тех точках, где плотность электронных пар равна нулю. Таким образом, две области, в которых поле уменьшается, представляют собой удерживаемые сгустки энергии. Магнитное поле, проходящее через солитоны, показано на рис. в). Оно также сосредоточено в областях с пониженной плотностью электронных пар. Представленные графики были получены с помощью компьютеров автором и Джоуэнсом Джейнкобом из Брукхайвенской Национальной лаборатории.

дело, если имеются солитоны. Механизм образования фермионов из бозонов был недавно открыт 'т Хоофтом и П. Хазенфранцем (Будапештский университет) и независимо Р. В. Джэкивом (Массачусетский технологический институт) и автором. При наличии солитона система с полуполым спином может возникнуть из поля, все компоненты которого являются бозонами. Альфред С. Гольдхабер (Стони Брук) показал, что эта система имеет не только полуделый спин, как у фермиона, но и обладает правильной статистикой.

Другой новый результат, полученный Джакивом и автором, показывает, что фермион может быть расщеплен на две части под влиянием солитона. Мы нашли такое взаимодействие между солитонами и фермионами, при котором структура солитона меняется под действием фермионного поля. Солитон существует в двух состояниях с одинаковой энергией. Одно состояние по своему характеру напоминает «полуфермион», а другое — «полуантифермион».

Перспективы обнаружения солитонных частиц в лабораторных условиях в настоящее время крайне надежны. Они в большой степени зависят от того, какая из теорий окажется наиболее приемлемой для описания взаимодействия элементарных частиц. Если таковой окажется теория, допускающая солитонные решения, то по общему признанию солитоны должны существовать в природе. Существует множество кандидатов на правильную теорию взаимодействия элементарных частиц. В некоторых из них имеются полевые уравнения с топологией, приемлемой для солитонов. в других — условий для возникновения солитонов нет. Не удивительно, что солитонные частицы до сих пор не наблюдались в экспериментах на ускорителях частиц. Полагают, что масса такой частицы, измеренная в энергетических единицах, составляет несколько триллионов электрон-вольт. Частица с массой в один триллион электрон-вольт приблизительно в 1000 раз массивнее протона и в четыре раза массивнее атома урана. Пройдет по крайней мере еще ряд лет, прежде чем в ускорителях смогут рождаться такие тяжелые частицы.

□

Все описанные выше солитоны локализованы в пространстве, вне зависимости от того, имеет ли пространство одно, два или три измерения. Они интересны тем, что постоянно сосредоточены в определенной области пространства. В последние годы был открыт другой вид солитонов, таких, которые ограничены малой областью как в пространстве, так и во времени. Они представляют собой образования, существующие только в определенном месте пространства и в определенный промежуток времени. Эти новые солитоны, названные инстантонами, интерпретируются не как реальные объекты, а как процессы, не как частицы, а как квантовомеханические переходы между различными состояниями частиц.

Природа инстантона может быть выяснена при изучении движения частицы под действием потенциала, который определяет силу, действующую на частицу. Для простоты потенциал можно взять одномерным. Для появления инстантона необходимо, чтобы потенциал был периодическим, т. е. должно быть несколько эквивалентных, но различных точек минимума энергии. В природе существует множество примеров таких потенциалов. Известным всем примером является американская горка. Потенциалом в данном случае является гравитационное поле Земли, точки минимума потенциальной энергии находятся на дне каждой ямы. Следует отметить, что речь идет не о потенциальной энергии поля, а об энергии частицы в этом поле. В примере с американской горкой потенциальная энергия пропорциональна высоте над наинизшей точкой спуска.

Простой периодический потенциал можно изобразить на графике, одна ось которого представляет пространство, в котором происходит движение частицы, а по оси, ортогональной первой, откладываются значения потенциала. Такой график будет представлять собой волнообразную кривую (например, синусоиду). Для того чтобы проследить эволюцию системы, необходимо добавить еще одну ось — ось времени. Волнообразная кривая превратится тогда в волнообразную поверхность. Движение поперек волн эквивалентно изменению положения, движение, параллельное волнам, не есть перемещение в пространстве, а представляет покоящуюся систему в последовательные моменты времени.

В состоянии с минимальной энергией частица расположена на дне впадины потенциальной кривой, и можно ожидать, что находиться в состоянии покоя она будет неограниченно долго. Траектория такой частицы во времени изобразится прямой линией, проходящей по дну впадины. Частица может также колебаться около положения равновесия, находящегося у дна впадины. В этом случае движение ее вдоль оси времени изобразится синусоидальной кривой, перескакивающей с одного склона долины на другой.

Наиболее интересен случай перехода частицы из устойчивого состояния на дне одной впадины в устойчивое состояние на дне соседней впадины через потенциальный барьер. Во времени такой переход изобразится линией, начинающейся в одной впадине потенциальной поверхности, затем поднимающейся на склон долины и пересекающей хребет и, наконец, спускающейся на дно соседней впадины. В некоторый момент времени частица находится в состоянии устойчивого равновесия в точке, соответствующей минимуму энергии, в следующий момент она вновь в равновесной точке, но уже в другом месте, также отвечающем минимуму энергии. Переход между двумя этими состояниями и есть инстантон.

В рамках классической физики, предшествовавшей развитию квантовой механики, такой переход был невозможен. Если поезд на американских горках покоится на дне впадины, то можно с уверенностью утверждать, что он сам по себе не окажется вдруг на дне соседнего понижения. Хотя энергия при этом сохранилась бы (по крайней мере в случае движения поезда без трения), поскольку расход энергии на подъем поезда на вершину горки компенсировался бы энергией, высвобождавшейся при спуске на дно соседней долины, но тем не менее такое событие запрещено, поскольку в классической физике энергия должна сохраняться во все моменты времени, а не просто в сумме.

Квантовая механика представляет некоторое подобие финансового кредита, который делает возможным инстантонный переход. Кажущееся нарушение закона становится возможным при условии, что оно длится не слишком долго и энергия конечного состояния совпадает с энергией начального. Благодаря этому механизму, называемому туннелированием, частица может пройти сквозь потенциальный барьер даже в том случае, когда у частицы недостаточно энергии, чтобы перевалить через барьер. Инстантон является некоторым образованием в классической теории поля, которое описывает это фундаментальное квантовомеханическое явление.

Графическое изображение инстантона геометрически тождественно с графическим изображением солитона синус-гордоновского поля; нужно только изменить названия координатных осей. Инстантоны и были впервые найдены как обычные солитоны в теории поля в четырех пространственных измерениях. Лишь затем А. А. Белавин, А. М. Поляков, А. С. Шварц и Ю. С. Тюпкин смогли дать правильную интерпретацию солитону не как четырехмерному объекту, а как эволюции полей в трех пространственных

измерениях и во времени. Они показали также, что инстантоны должны появляться в большом классе полевых теорий, включая те из них, которые чаще других рассматриваются как истинные теории взаимодействия элементарных частиц.

Вскоре после этого 'т Хоофтом, К. Г. Калланом, Д. Гроссом (Принстонский университет), Р. Ф. Дашеном (Институт Высших Исследований), а также Джакивом и мною была проанализирована роль инстантонов в формировании структуры квантовомеханического вакуума. (Именно

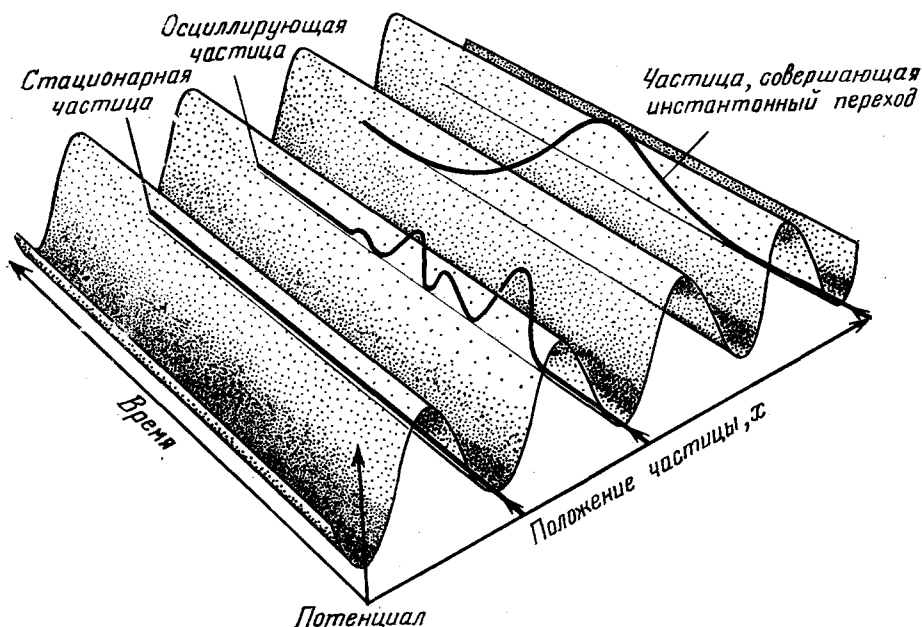


Рис. 15. Инстантон — это солитон, ограниченный не только определенной областью пространства, но и определенным моментом времени.

Он трактуется как квантовомеханический процесс перехода между двумя состояниями частицы. Частица движется в одномерном потенциале или поле сил, и процесс ее движения изображается на потенциальной поверхности, развернутой по оси времени. «История» частицы, остающейся в покое в некоторой точке, отвечающей минимуму потенциала, изображается прямой линией, лежащей на дне впадины поверхности. Частица, колеблющаяся вблизи положения равновесия, изображается волнообразной линией, проходящей у дна впадины. Траектория инстантона отвечает линия, взбирающаяся со дна одной долины на вершину хребта и спускающаяся затем на дно соседней долины, также соответствующей положению равновесия. Эта линия описывает движение частицы, исчезающей в одной точке положения равновесия и появляющейся в другой. Такой переход эквивалентен квантовомеханическому процессу туннелирования.

'т Хоофт предложил название «инстантоны»). Существование инстантонов предполагает, что вакуумное состояние в квантовой механике не единственно, а имеет периодическую структуру, подобную потенциальным ямам электромагнитного поля внутри атомной решетки в кристалле. Конечно, периодическое поле в кристалле возникает из-за упорядоченного расположения атомов, тогда как структура, порождаемая инстантонными решениями, характеризует собственную структуру пространства-времени. Открытие такой структуры было совершенно неожиданным.

Хотя инстантоны и являются одним из последних нововведений в теорию поля, они позволили разгадать волнующую загадку в физике субъядерных частиц. Загадка относится к массам частиц, называемых мезонами, которые, как полагают, являются составными частицами, состав-

ленными из более фундаментальных объектов, называемых кварками. Каждый мезон состоит из кварка и антикварка, связанных вместе калибровочным полем. Полагают, что два из возможных типов кварков (обозначаемых u и d) и соответствующие им антикварки (\bar{u} и \bar{d}) являются относительно легкими. Поскольку существует четыре способа составить кварк — антикварковую пару из этих объектов ($u\bar{u}$, $u\bar{d}$, $d\bar{u}$, $d\bar{d}$), то, казалось бы, должно существовать четыре мезона относительно малой массы. Три таких мезона известны были уже давно: это положительные, отрицательные и нейтральные пи-мезоны, или пионы, масса которых в энергетических единицах составляет 140 миллионов электрон-вольт. Четвертый мезон, который, казалось бы, с неизбежностью предсказывался теорией, никогда не наблюдался.

Существует, однако, другая частица, которая бы могла выполнить его роль, а именно эта-мезон, который имеет все подходящие характеристики, кроме одной, — его масса равна 550 миллионам электрон-вольт. Введение инстантонов объяснило аномальную массу эта-мезона. Инстантоны, локализованные в пространстве и во времени, возникают как возбуждения калибровочного поля, связывающего кварки. Они изменяют распределение масс мезонов, поскольку по-разному влияют на различные кварковые комбинации. Грубо говоря, инстантон прозрачен для пионов, но служит препятствием распространению эта-мезона, что ведет к увеличению его эффективной инертной массы.

Солитоны и инстантоны составляют раздел теории поля, раздел, который может показаться излишне сложным, несмотря на его богатую и изящную математическую структуру. Физики, изучающие солитоны, обнаружили, что математики уже в течение многих лет рассматривают аналогичные объекты, поскольку последние обладают чрезвычайно интересными геометрическими свойствами. Математический анализ и физическая интуиция являются мощными инструментами для выяснения природы и свойств солитонов.

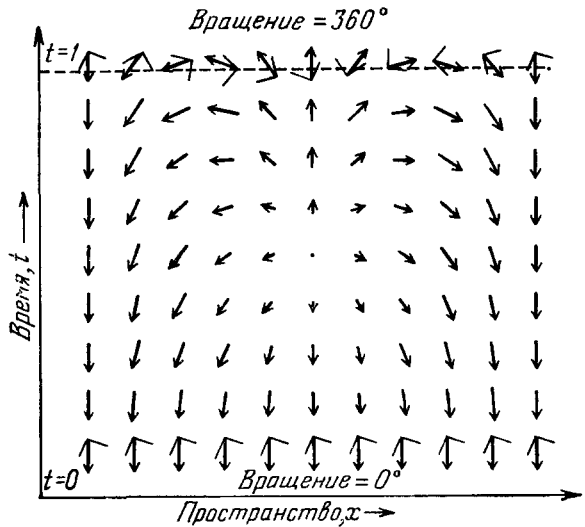


Рис. 16. Эволюция поля в процессе инстантонного перехода представляет собой топологическое кручение, во многом похожее на чисто пространственный солитон.

В начальный момент времени ($t = 0$) поле однородно: поле, все векторы которого параллельны и одинаковой единичной длины. По предположению, такая конфигурация описывает вакуумное состояние. В следующий момент ($t = 1$) векторы опять имеют единичную длину, но оказываются повернутыми друг относительно друга. Если система отсчета определена с помощью подходящего калибровочного поля, то конечная конфигурация поля (при $t = 1$) вновь отвечает вакуумному состоянию. Однако для того, чтобы поле перешло из начального состояния в конечное, полное его вращение должно измениться от 0 до 360° . Переход топологически возможен только в том случае, если векторное поле где-то уменьшается до нуля. В этой точке внутренняя энергия поля больше нуля, а следовательно, инстантон описывает переход из одного вакуумного состояния в другое через состояния с конечной энергией.

ЛИТЕРАТУРА

- 't Hooft G.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 79, p. 276; Phys. Rev. Lett., 1976, v. 37, p. 8.
Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S.—
Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 59, p. 85.
Hasenfratz P., 't Hooft G.— Phys. Rev. Lett., 1976, v. 36, p. 1119.
Jackiw R., Rebbi C.— Ibid., p. 1116; v. 37. p. 172; Phys. Rev. Ser. D, 1976, v. 13, p. 3398.
Jackiw R.— Rev. Mod. Phys., 1977, v. 49, p. 681.