

539.128.53/55

МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА КВАНТОВЫХ РАСТВОРОВ He^3 — He^4 *Е. П. Башкин, А. Э. Мейерович*

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	279
2. Термодинамика растворов	282
а) Ферми-жидкостное взаимодействие (282). б) Термодинамические свойства (287).	
3. Колебательные процессы в растворе	292
а) Гидродинамические колебания (292). б) Распространение высокочастотных колебаний (295). 1) Высокочастотные колебания в отсутствие магнитного поля (296). 2) Высокочастотные колебания в магнитном поле (298).	
4. Явления переноса	302
а) Кинетические явления в отсутствие магнитного поля (302). б) Магнито-кинетические эффекты (303).	
5. Сверхтекучесть He^3 в растворе	306
а) Температура перехода He^3 в сверхтекучее состояние (306). б) Уравнения трехскоростной гидродинамики (308).	
Цитированная литература	311

1. ВВЕДЕНИЕ

Значительная часть низкотемпературных явлений в физике конденсированного состояния хорошо объясняется в рамках теории ферми-жидкости. Сюда относятся электронные жидкости в металлах и полупроводниках, сверхпроводящие системы, нормальный и сверхтекучий He^3 и т. д. Однако описание этих явлений с помощью теории ферми-жидкости, как правило, носит феноменологический либо качественный характер, поскольку микроскопическое вычисление величин, определяющих ферми-жидкостное взаимодействие, в общем случае невозможно. Практически единственной системой, в которой такие вычисления удается провести строго и до конца, является слабонеидеальный ферми-газ. Вырожденный же ферми-газ в природе, вообще говоря, не встречается, так как все реальные ферми-системы конденсируются раньше, чем начинают проявляться эффекты, связанные с квантовым вырождением.

Уникальным исключением является вырожденный раствор He^3 в сверхтекучем He^4 . Изучение свойств сверхтекучих растворов He^3 — He^4 представляет как самостоятельный интерес, поскольку они обладают целым рядом новых и необычных свойств, так и позволяет выяснить происхождение большого числа закономерностей, общих для любых ферми-систем.

Сверхтекучий раствор He^3 — He^4 представляет собой квантовую жидкость, в которой, наряду с фононами и ротонами, свойственными и чистому He^4 , существуют также и возбуждения со спектром фермиевского типа, соответствующие примесным атомам He^3 . При понижении температуры число фононов и ротонов быстро убывает, и характеристики раствора определяются исключительно фермиевской компонентой (квазичастицами

He³). Хотя свойства растворов He³ — He⁴ уже неоднократно освещались в литературе (см., например, книги ¹⁻⁴ и обзоры ⁵⁻¹⁰), полное последовательное описание системы в низкотемпературной области до сих пор отсутствовало, поскольку закон взаимодействия квазичастиц He³ в настоящее время не установлен. Однако представленный ниже последовательный квантовомеханический подход позволяет осуществить подробный микроскопический анализ всех свойств без привлечения каких-либо модельных представлений и предсказать ряд интересных эффектов, не известных ранее ^{11-15, 75, 82}.

Интерес к низкотемпературным явлениям в сверхтекучих растворах значительно повысился после экспериментального обнаружения (Эдвардс и др. ¹⁶) конечной растворимости He³ в сверхтекучем He⁴ при нуле температур. При $T \rightarrow 0$ раствор не расслаивается вплоть до концентраций 6,5% (повышая давление, концентрацию расслаивания можно увеличить до 10%), и понижение температуры заведомо приводит к квантовому вырождению фермиевской компоненты. Экспериментальным подтверждением этого факта явилось обнаружение линейной зависимости теплоемкости раствора от температуры и температурных зависимостей коэффициентов спиновой диффузии и теплопроводности, характерных для вырожденных ферми-систем (Андерсон и др. ^{17, 18}, Абель и др. ¹⁹). Измерения теплоемкости обнаружили некоторую зависимость эффективной массы примесных частиц от концентрации раствора, что явилось указанием на необходимость учета ферми-жидкостного взаимодействия квазичастиц He³ даже в случае весьма малых концентраций раствора и на невозможность рассмотрения примесных атомов He³ как идеального газа фермионов.

Однако точный вид взаимодействия примесных атомов в среде восстановить не удается, поскольку взаимодействие связано с поляризацией сверхтекучего фона He⁴ и, вообще говоря, нелокально. В связи с этим, аналогично известной работе Бардина, Бейма и Пайнса ^{20, 21} ряд авторов использовал модельные потенциалы взаимодействия различного вида, параметры которых подбирались из сравнения с экспериментальными данными ²²⁻³⁴. Эти потенциалы не имеют непосредственного физического смысла и их выбор вряд ли можно оправдать, исходя из первых принципов. Поэтому с помощью модельного потенциала трудно одинаково хорошо интерпретировать сразу все экспериментальные данные, и для достаточно хорошего согласия с опытом приходится прибегать к теории, содержащей довольно большое число подгоночных параметров. Более подробное обсуждение этих работ и изложение результатов содержится в обзорах Радебо ⁹, Эбнера и Эдвардса ⁷, Есельсона и др. ², Бейма и Петика ¹⁰.

Феноменологическая теория раствора He³ — He II в духе теории ферми-жидкости Ландау ³⁷⁻³⁹ была построена Халатниковым ^{1, 35, 36}. Согласно этой теории все термодинамические свойства раствора определяются заданием ферми-жидкостной функции, явный вид которой из теории не следует, а должен быть установлен из сравнения с экспериментальными данными. Экспериментально же оказалось возможным выяснить значения только первых двух гармоник в разложении f -функции по полиномам Лежандра. Это обстоятельство затрудняет конкретное применение результатов теории к реальным слабым растворам.

Тем не менее, удастся провести полное и довольно точное микроскопическое исследование свойств слабых растворов, которое соответствует изучению эффектов неидеальности ферми-газа примесных квазичастиц для теории Ландау — Померанчука ^{40, 41}. При этом все эффекты взаимодействия вплоть до самых больших концентраций (порядка нескольких процентов) определяются всего одной микроскопической и имеющей наглядный физический смысл константой.

Рассмотрение основывается на том обстоятельстве, что при достаточно низких концентрациях и температурах примесные атомы He^3 , растворенные в сверхтекучем бозе-фоне, образуют разреженный неидеальный ферми-газ медленных квазичастиц. Как известно (см., например, ⁴²), если энергия взаимодействия двух частиц убывает достаточно быстро с ростом расстояния между ними, то взаимодействие медленных частиц сводится в основном к s -рассеянию. При этом амплитуда рассеяния не зависит от импульсов и является упомянутой выше точной микроскопической характеристикой двухчастичного взаимодействия, исчерпывающим образом задающей все свойства раствора. Малым параметром, по которому происходит разложение, оказывается величина $k|a| \ll 1$, где k — характерный волновой вектор примесного фермиона, a — длина s -рассеяния. В этой ситуации свойства раствора аналогичны ^{11,12} известному случаю системы ферми-частиц с малым (по сравнению со средней де-бройлевской длиной волны) радиусом взаимодействия, изучавшемуся прежде Хуангом и Янгом ⁴³, Ли и Янгом ⁴⁴, Абрикосовым и Халатниковым ⁴⁵. Вычисления по этой схеме в борновском приближении соответствовали бы обычной модели твердых шаров и, вообще говоря, должны приводить к тем же результатам, что и с использованием модельных потенциалов в пределе нулевых импульсов ⁴⁶. Принципиальным отличием используемого ниже метода являются отсутствие модельных представлений о структуре взаимодействия и объяснение всех наблюдаемых экспериментально концентрационных зависимостей различных величин с помощью только s -рассеяния. Для интерпретации тех же зависимостей посредством модельных потенциалов используется импульсная часть потенциала взаимодействия, т. е. фактически рассеяние с высшими моментами.

До настоящего времени свойства сверхтекучих растворов в магнитном поле практически не изучались. Существующая теория ферми-жидкости описывает поведение фермионов только в слабом магнитном поле ^{37,47}. Развита ниже теория допускает обобщение на случай произвольного внешнего магнитного поля, поскольку используемая процедура вычисления ферми-жидкостной функции может быть применена и в присутствии поля ¹³⁻¹⁵. Однородное магнитное поле не влияет на движение уединенного незаряженного фермиона и, в нерелятивистском приближении, на двухчастичное взаимодействие. Включение поля меняет функцию распределения частиц и, следовательно, их энергетический спектр, являющийся функционалом функции распределения. Таким образом, магнитное поле влияет не только на числа заполнения квазичастиц с различной спиновой ориентацией, но и на ферми-жидкостное взаимодействие. При этом числа заполнения и энергетический спектр в магнитном поле должны вычисляться самосогласованным способом. В магнитном поле ферми-жидкостное взаимодействие по-прежнему хорошо описывается s -рассеянием квазичастиц He^3 . Однако при s -рассеянии, из-за квантовомеханической тождественности фермионов существуют только столкновения частиц с противоположно направленными спинами. Поэтому в сильных магнитных полях, когда практически все спины одинаково ориентированы, ферми-жидкостное взаимодействие определяется уже p -рассеянием ¹³. Амплитуды p - и s -рассеяния медленных частиц отличаются малым множителем, пропорциональным квадрату импульса относительного движения. Это приводит к значительному ослаблению взаимодействия в сильных магнитных полях и существенному изменению концентрационной зависимости всех термодинамических величин. Наиболее ярко это проявляется в своеобразных магнитокинетических эффектах — огромном росте длины свободного пробега возбуждений и кинетических коэффициентов раствора в сильных магнитных полях ¹³⁻¹⁵.

До сих пор, обсуждая свойства слабого раствора $\text{He}^3 - \text{He}^4$, мы предполагали, что примесные атомы образуют изотропную нормальную ферми-жидкость низкой плотности. Понятно, однако, что при достаточно низкой температуре в растворе может произойти фазовый переход примесной компоненты в сверхтекучее состояние, связанный с куперовским спариванием ферми-частиц He^3 . Интерес к этой возможности в последнее время особенно повысился в связи с экспериментальным обнаружением перехода чистого He^3 в сверхтекучее состояние. Обсуждению этого вопроса посвящена последняя часть статьи. Оценки показывают, что температура перехода He^3 в растворе в сверхтекучее состояние может оказаться не столь низка, как это считалось ранее^{8,21}, и обнаружение этого явления, по-видимому, реально и представляет экспериментальный интерес уже в настоящее время.

2. ТЕРМОДИНАМИКА РАСТВОРОВ

а) Ферми-жидкостное взаимодействие

Состояние раствора полностью определяется заданием функции распределения примесных возбуждений $n_\sigma(\mathbf{p})$ (\mathbf{p} — импульс возбуждения, σ — спиновой индекс), плотности бозе-компоненты жидкости $m_4 N_4$ (m_4 — масса атома He^4 , N_4 — число атомов He^4 в единице объема раствора), скорости сверхтекучего движения \mathbf{v}_s и температуры T . Нас будет интересовать такая область температур и концентраций, в которой вкладом фононов и ротонов можно пренебречь (при $T \lesssim 0,7$ К даже при концентрации раствора порядка 0,5% вклад фононов в нормальную плотность оказывается меньше одного процента от примесного). Еще одной независимой переменной может являться напряженность магнитного поля \mathbf{H} .

Рассмотрим вначале раствор в отсутствие сверхтекучего движения, $\mathbf{v}_s = 0$. Согласно теории Ландау и Померанчука^{40,41} уединенный примесный атом He^3 в сверхтекучем He^4 представляет собой делокализованную квазичастицу с большой дебройлевской длиной волны. Состояния примеси классифицируются с помощью непрерывного энергетического спектра $\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ (α, β — спинорные индексы). Данные о плотности нормальной компоненты слабых растворов (Линтон, Фербенк⁴⁸, Пеллам⁴⁹; см. также книгу Есельсона и др.²) позволили сделать вывод о том, что минимум энергетического спектра $\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ достигается при нулевом импульсе. В изотропной жидкости спектр $\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ вблизи минимума может быть представлен в виде ряда по четным степеням импульса \mathbf{p} . Параметром разложения является отношение скорости квазичастицы к скорости звука в гелии. При низких температурах и концентрациях, когда характерные скорости затравочных квазичастиц малы, можно ограничиться первыми членами разложения $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$ по степеням p^2 :

$$\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \left\{ -\Delta + \frac{p^2}{2M} \left[1 - \gamma \left(\frac{p}{p_c} \right)^2 \right] \right\} \delta_{\alpha\beta} - \beta \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{H}; \quad (2.1)$$

здесь энергия связи Δ и эффективная масса M одиночного примесного атома равны $\Delta \approx 2,8$ К^{50,51}, $M \approx 2,3 m_3$, $p_c = m_4 s_0$ ($p_c/\hbar \approx 1,5 \text{ \AA}^{-1}$), m_3 — масса атома He^3 , s_0 — скорость звука в чистом He^4 при нулевом давлении, а безразмерный параметр γ весьма мал. Согласно экспериментальным результатам⁵² $\gamma = 0,14 \pm 0,05$. По данным работы⁵³ $\gamma = 0 \pm 0,01$. В отличие от^{40,41}, в законе дисперсии (2.1) приходится все же удерживать член с p^4 , поскольку его вклад, как выяснится ниже, имеет ту же концентрационную малость, что и интересующее нас ферми-жидкостное взаимодействие. Параметры Δ , M , γ в спектре одиночной затравочной квазичастицы

(2.1) являются функциями плотности атомов $\text{He}^4 N_4$. В (2.1) $\sigma_{\alpha\beta}$ — матрицы Паули, \mathbf{H} — магнитное поле, β — магнитный момент ядра He^3 .

По мере увеличения концентрации раствора существенную роль начинает играть взаимодействие примесных фермионов, и энергетический спектр возбуждений ферми-жидкости отличается от спектра затравочных квазичастиц (2.1).

В присутствии внешнего магнитного поля распределение квазичастиц ферми-жидкости описывается одночастичной матрицей плотности $n_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$. Равновесная одночастичная матрица плотности для поляризованной ферми-системы имеет вид

$$n_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} n(\mathbf{p}) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \rho(\mathbf{p}) \sigma_{\alpha\beta} \quad (2.2)$$

Значения $n(\mathbf{p}) \equiv n_{\alpha\alpha}^{(0)}$ и $\rho(\mathbf{p}) \equiv \sigma_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha}^{(0)}$ (здесь и далее по повторяющимся индексам ведется суммирование) определяются из условия, что в равновесии числа заполнения $n_0^\pm(\mathbf{p})$ частиц с проекцией спина $\pm 1/2$ на ось $\mathcal{M} = \mathbf{H}/H$ задаются функцией распределения Ферми:

$$n_0^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \left[1 - \tanh \frac{\varepsilon_\pm(\mathbf{p}) - \mu_3}{2T} \right], \quad (2.3)$$

$$n(\mathbf{p}) = n_0^+(\mathbf{p}) + n_0^-(\mathbf{p}), \quad \rho(\mathbf{p}) = [n_0^+(\mathbf{p}) - n_0^-(\mathbf{p})] \mathcal{M},$$

где ε_\pm — энергия фермионов с различной спиновой ориентацией, μ_3 — химический потенциал He^3 в растворе. Такая функция распределения максимизирует энтропию при дополнительном условии постоянства полной энергии и числа примесных атомов.

Энергия возбуждения существенно зависит от значения проекции спина на направление поля и в отсутствие сверхтекучего движения всегда может быть представлена в виде

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} = \varepsilon_0(\mathbf{p}) \delta_{\alpha\beta} - B(\mathbf{p}) \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{H}, \quad \varepsilon_\pm = \varepsilon_0 \mp B\mathcal{H}. \quad (2.4)$$

Функции $\varepsilon_0(\mathbf{p})$ и $B(\mathbf{p})$ в общем случае зависят от H^2 . Возможность записи выражений для матрицы плотности и гамильтониана в виде (2.2), (2.4) обусловлена тем, что любой одночастичный оператор для частиц со спином $1/2$ сводится к линейной функции матриц Паули $\sigma_{\alpha\beta}$.

Полные энергия E и импульс \mathbf{P} системы представляют собой функционалы от базисных переменных $n_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$, \mathbf{v}_s , N_4 , \mathbf{H} . Согласно теории ферми-жидкости^{1,36,37} одночастичный энергетический спектр $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ и импульс \mathbf{p} возбуждения в растворе определяются следующими вариационными соотношениями:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = \left[\frac{\delta E}{\delta n_{\beta\alpha}(\mathbf{p})} \right]_{\mathbf{v}_s, N_4, \mathbf{H}}, \quad \mathbf{P} = m_4 N_4 \mathbf{v}_s + \sum_{\mathbf{p}} \mathbf{p} n_{\alpha\alpha}(\mathbf{p}). \quad (2.5)$$

Энергия возбуждения $\varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ есть также функционал от $n_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$, \mathbf{v}_s , N_4 , \mathbf{H} , и ее первая вариационная производная определяет ферми-жидкостную функцию системы $f_{\alpha\beta, \mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) = -\beta (\sigma_{\alpha\beta} \delta \mathbf{H}) + \int f_{\alpha\beta, \mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta n_{\nu\mu}(\mathbf{p}') d\Gamma', \quad (2.6)$$

где $d\Gamma = d^3p/(2\pi\hbar)^3$, $\delta n_{\alpha\beta}$ — отклонение матрицы плотности от равновесной (2.3). Ферми-жидкостная функция $f_{\alpha\beta, \mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ в обменном приближении всегда может быть записана в виде

$$f_{\alpha\beta, \mu\nu}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \psi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} +$$

$$+ [\varphi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \sigma_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \varphi(\mathbf{p}', \mathbf{p}) \sigma_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta}] \mathcal{M} +$$

$$+ \xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') (\sigma_{\alpha\beta} \mathcal{M}) (\sigma_{\mu\nu} \mathcal{M}). \quad (2.7)$$

Аналогично ⁵⁴, с помощью формул (2.3)–(2.7) можно выразить функцию $B(\mathbf{p})$ (2.4) через компоненту ферми-жидкостной функции $\xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$:

$$B(\mathbf{p}) = \beta - \frac{1}{H} \int \xi(\mathbf{p}, \mathbf{p}') [n_0^+(\mathbf{p}') - n_0^-(\mathbf{p}')] d\Gamma'. \quad (2.8)$$

Для определения всех термодинамических характеристик раствора необходимо знать выражение для ферми-жидкостной функции. Вычисление f -функции будем проводить, следуя методу ^{12, 14, 43–45} (см. также книги ^{55, 56}). Полную энергию системы с точностью до членов третьего порядка теории возмущений можно записать в виде ($E_4^{(0)}$ — вклад чистого He^4)

$$E = E_4^{(0)} + \sum_{\mathbf{p}} \mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) n_{\beta\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}) + \frac{\pi a \hbar^2}{M} \sum_{\mathbf{p}, \mathbf{p}'} [n_{\alpha\alpha}^{(0)}(\mathbf{p}) n_{\beta\beta}^{(0)}(\mathbf{p}') - n_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{p}) n_{\mu\nu}^{(0)}(\mathbf{p}') \sigma_{\beta\alpha} \sigma_{\nu\mu}] - \frac{16\pi^2 a^2 \hbar^4}{M} \sum_{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, \mathbf{p}_4} \times \\ \times (\delta_{\beta\alpha} \delta_{\nu\mu} - \sigma_{\beta\alpha} \sigma_{\nu\mu}) \frac{n_{\alpha\beta}^{(0)}(\mathbf{p}_1) n_{\mu\nu}^{(0)}(\mathbf{p}_2) n_{\gamma\gamma}^{(0)}(\mathbf{p}_3)}{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2 - p_4^2} \quad (2.9)$$

В (2.9) содержится только одна величина, характеризующая взаимодействие — длина s -рассеяния a . В борновском приближении полная энергия системы (2.9) является билинейной формой одночастичных статистических операторов и f -функция в первом порядке по взаимодействию не зависит от импульсов и магнитного поля:

$$f_{\alpha\beta, \mu\nu}^{(1)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \left[\frac{\delta^2 E^{(1)}}{\delta n_{\beta\alpha}(\mathbf{p}) \delta n_{\nu\mu}(\mathbf{p}')} \right]_{\mathbf{v}_s, N_4, \mathbf{H}} = \frac{2\pi a \hbar^2}{M} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} - \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu}), \quad (2.10)$$

где $E^{(1)}$ задается первыми тремя слагаемыми в выражении (2.9). Первая вариационная производная $E^{(1)}$ определяет с той же точностью энергию возбуждения ферми-жидкости:

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(1)}(\mathbf{p}) = \mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{p}) + \frac{2\pi a \hbar^2}{M} \left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{N_+ - N_-}{N_3} \sigma_{\alpha\beta} \mathfrak{M} \right) N_3, \quad (2.11)$$

где

$$N_{\pm} = \int n^{\pm} d\Gamma = \frac{p_{\pm}^3}{6\pi^2 \hbar^3}, \quad N_+ + N_- = N_3.$$

N_{\pm} и p_{\pm} соответствуют числу частиц в единице объема и радиусу ферми-сферы для квазичастиц со спинами, направленными параллельно и антипараллельно полю. В формуле (2.11) в $\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ не следует учитывать член с γ (2.1), поскольку при s -рассеянии он существен только в более высоких порядках теории возмущений.

Поправка второго порядка теории возмущений к ферми-жидкостной функции (2.10) получается двукратным варьированием соответствующего члена в (2.9) ¹⁴. Окончательное выражение для f -функции весьма громоздко (см. ¹⁴), поэтому мы приведем только ее значение в отсутствие магнитного поля, которое совпадает с известным результатом ⁴⁵:

$$f_{\alpha\beta, \mu\nu}(\theta) = \frac{2\pi a \hbar^2}{M} \left[1 + 2\lambda \left(2 + \frac{1-2w^2}{w} \text{Arth } w \right) \delta_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} - \frac{2\pi a \hbar^2}{M} [1 + 2\lambda (1 - w \text{Arth } w)] \sigma_{\alpha\beta} \sigma_{\mu\nu} \right], \quad (2.12)$$

где θ — угол между векторами \mathbf{p} и \mathbf{p}' , $p = p' = p_0$, $p_0 = (3\pi^2 N_3)^{1/3} \hbar$ — граничный импульс Ферми в отсутствие поля, $\lambda = p_0 a / \pi \hbar \ll 1$ — малый параметр теории, $w = \sin(\theta/2)$. В слабых магнитных полях в линейном по \mathbf{H} приближении функции $\psi(\theta)$ и $\xi(\theta)$ в (2.12) не меняются. При этом

зависимость f -функции от магнитного поля содержится только в функции $\varphi(\theta)$ ¹²,

$$\varphi(\theta) = 16 \frac{a^2 \hbar}{p_0 w} \beta H \operatorname{Arth} w.$$

Хотя ферми-жидкостная функция (2.10) формально не зависит от поля, вклад s -рассеяния во все термодинамические величины будет стремиться к нулю с ростом поля вследствие уменьшения числа частиц со спинами, направленными против поля. Это связано с тем, что при s -рассеянии эффективно только взаимодействие частиц с противоположными спинами. При почти полной поляризации спиновой системы свойства ферми-жидкости низкой плотности определяются в основном p -рассеянием. При этом существенно только взаимодействие квазичастиц на поверхности Ферми радиуса

$$p_+ \approx (6\pi^2 N_3)^{1/3} \hbar = 2^{1/3} p_0 \equiv p_F.$$

Амплитуда рассеяния двух медленных затравочных частиц с импульсами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 ($p_1 = p_2 = p_F$) в системе центра инерции определяется углом поворота φ относительного импульса $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)/2$,

$$\operatorname{Re} f(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \frac{4\pi \hbar^2}{M} \left(-a + \frac{3bp^2}{\hbar^2} \cos \varphi \right), \quad (2.13)$$

где $\mathbf{p}' = (\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}'_2)/2$ — относительный импульс рассеянных частиц ($p'_1 = p'_2 = p_F$, $p' = p$). Постоянная b по порядку величины равна газокинетическому объему атома $b \sim a^3$.

С учетом тождественности фермионов вершинная часть в первом порядке равна

$$\Gamma(\mathbf{p}', \mathbf{p}) = \operatorname{Re} [f(\varphi) - f(\pi - \varphi)] = \frac{24\pi b p^2}{M} \cos^2 \varphi. \quad (2.14)$$

Ферми-жидкостная функция $f(\theta)$ (θ — угол между векторами \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2) определяется с той же точностью амплитудой рассеяния вперед $\Gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p})$ ¹³:

$$f(\theta) = \frac{24\pi b p_F^2}{M} \sin^2 \frac{\theta}{2}. \quad (2.15)$$

При наличии бозе-фона поправки следующих порядков по взаимодействию аналогичным способом получить не удастся вследствие эффектов запаздывания. Вклад в f -функцию (2.10), (2.12) из-за эффектов запаздывания $f_{\text{ret}}^{(s)} \propto (p_0/p_c)^2$ имеет тот же порядок малости, что и член третьего порядка теории возмущений при s -рассеянии и основной член, отвечающий p -рассеянию (2.15). По этой причине p -рассеяние для фермионов в среде можно учитывать только для систем с достаточно высокой степенью поляризации, когда s -рассеяние несущественно. Вклад запаздывания при p -рассеянии $f_{\text{ret}}^{(p)} \propto (p_F/p_c)^4$ уже значительно превосходит поправку второго порядка теории возмущений к (2.15) $f_2^{(p)} \propto (p_F/p_c)^5$.

В принципе основные результаты теории ферми-жидкости строго обоснованы только для вырожденных ферми-систем, когда все квазичастицы находятся вблизи поверхности Ферми. Однако раствор $\text{He}^3 - \text{He}^4$ представляет собой ферми-жидкость низкой плотности. Для разреженных ферми-систем затухание квазичастиц даже вдали от поверхности Ферми мало по характерному газовому параметру $p |a|/\hbar \ll 1$, а в борновском приближении квазичастицы вообще не затухают. Поэтому полученные выше выражения для f -функции в первом порядке теории возмущений можно использовать для определения свойств и невырожденных растворов, т. е. при произвольных температурах. Так, представляет интерес проследить переход к случаю полностью поляризованного вырожденно-

го раствора, происходящий через такое состояние системы, в котором подсистема частиц со спинами, параллельными полю, вырождена, а число частиц со спинами, ориентированными против поля, мало, и они являются бозе-мановскими. Тем не менее, та область концентраций и температур, в которой несущественно влияние фононов и ротонов, относится в основном к вырожденным растворам. Поэтому в дальнейшем, где это специально не оговорено, мы будем изучать свойства вырожденных растворов.

Движение сверхтекучего фона He II со скоростью v_s приводит к изменению энергетического спектра (2.1) затравочной квазичастицы He^3 . Зависимость гамильтониана затравочной квазичастицы от v_s в отсутствие магнитного поля была определена Бардином, Беймом, Пайнсом²¹ с помощью преобразований Галилея. Изменение затравочного спектра с возникновением сверхтекучего движения приводит к изменению функции распределения примесных возбуждений и, следовательно, к зависимости всех ферми-жидкостных характеристик от v_s . Так, с помощью результатов^{1,21,36} после громоздких вычислений¹⁴ удастся определить закон дисперсии и одночастичную матрицу плотности для квазичастиц ферми-жидкости (не затравочных!) в линейном по v_s приближении в произвольных магнитных полях:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_0 \delta_{\alpha\beta} - B \sigma_{\alpha\beta} \mathbf{H} + (\delta m)_{\alpha\gamma} \left(\frac{1}{m} \right)_{\gamma\beta} \mathbf{p} v_s, \\ n_{\alpha\beta} &= n_{\alpha\beta}^{(0)} + \left(\frac{(\delta m)_+}{m_+} \frac{\partial n_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial \varepsilon_+} + \frac{(\delta m)_-}{m_-} \frac{\partial n_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial \varepsilon_-} \right) \mathbf{p} v_s; \end{aligned} \quad (2.16)$$

здесь $n_{\alpha\beta}^{(0)}$ определяется формулами (2.2), (2.3), $(\delta m)_{\alpha\beta} = M_{\alpha\beta} - m_3 \delta_{\alpha\beta}$, $(\delta m)_{\pm} = M_{\pm} - m_3$, $M_{\alpha\beta}$ — спинор эффективной массы одиночной затравочной квазичастицы с энергетическим спектром $\mathcal{E}_{\alpha\beta}(\mathbf{p})$ в покоящемся сверхтекучем He^4 ,

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (M_+ + M_-) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (M_+ - M_-) \sigma_{\alpha\beta} \mathcal{M}, \\ \mathcal{E}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\mathcal{E}_+ + \mathcal{E}_-) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (\mathcal{E}_+ - \mathcal{E}_-) \sigma_{\alpha\beta} \mathcal{M}, \end{aligned}$$

причем собственные значения \mathcal{E}_{\pm} и M_{\pm} ,

$$M_{\pm}^{-1} = \frac{1}{p_{\pm}} \frac{\partial \mathcal{E}_{\pm}}{\partial p_{\pm}}, \quad (2.17)$$

имеют смысл энергии и эффективной массы затравочной квазичастицы с определенной проекцией спина на направление поля. Собственные значения спинора эффективной массы $(1/m)_{\alpha\beta}$ квазичастицы ферми-жидкости

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{m} \right)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_+} + \frac{1}{m_-} \right) \delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{m_+} - \frac{1}{m_-} \right) \sigma_{\alpha\beta} \mathcal{M}, \\ \frac{1}{m_{\pm}} &= \frac{1}{p_{\pm}} \frac{\partial \varepsilon_{\pm}}{\partial p_{\pm}} \end{aligned}$$

в первом порядке по v_s оказываются равными

$$m_{\pm} = \frac{M_{\pm}}{A_{\pm}}. \quad (2.18)$$

Формулы (2.18) являются точными для изотропных фермиевских жидкостей в отсутствие сверхтекучего фона с квадратичным законом дисперсии затравочных частиц. В этом случае под $M_{\pm} = M_-$ надо понимать истинную массу реальных частиц, образующих жидкость.

Спинор эффективной массы $m_{\alpha\beta}$ (т. е. фактически величины A_{\pm}) выражается, как обычно, через первые гармоники f -функции. Поскольку в борновском приближении ферми-жидкостная функция не зависит от импульсов (2.10), то в этом приближении $A_{\pm} = 1$, и полная эффективная масса m_{\pm} совпадает с эффективной массой затравочных квазичастиц. Точные выражения для величин A_{\pm} через ферми-жидкостную функцию и значение f -функции для раствора в магнитном поле во втором порядке теории возмущений, полученные в¹⁴, определяют зависимость эффективной массы от концентрации раствора и напряженности поля.

Эффективная масса затравочных квазичастиц M_{\pm} отличается от своего значения в отсутствие магнитного поля и обнаруживает слабую концентрационную зависимость благодаря члену с четвертой степенью импульса в гамильтониане (2.1)

$$M_{\pm} = \frac{M}{1 - (2\gamma p_{\pm}^2 / p_c^2)}.$$

Зависимость ферми-жидкостных свойств раствора от v_s и H в слабых магнитных полях, когда различие радиусов ферми-сфер p_+ и p_- несущественно, изучалась также в ¹².

б) Термодинамические свойства

В настоящее время имеется большое количество экспериментальных результатов по свойствам вырожденных растворов в отсутствие магнитного поля. Представляет интерес сравнить эти данные со значениями термодинамических функций раствора $\text{He}^3 - \text{He}^4$, вычисленными с помощью полученных выше соотношений. Это позволяет определить основную характеристику взаимодействия примесных атомов He^3 в растворе — длину s -рассеяния a .

Непосредственное вычисление свободной энергии в отсутствие магнитного поля в пренебрежении квадратичными по v_s и T/T_0 членами (T_0 — температура вырождения фермиевской компоненты раствора при $H = 0$) с помощью формулы (2.9) приводит к результату ¹²

$$F = F_4^{(0)} - N_3 \Delta + \frac{3}{10} \frac{p_0^2}{M} N_3 \left[1 + \frac{10}{9} \lambda + \frac{4}{21} \lambda^2 (11 - 2 \ln 2) - \frac{5}{7} \gamma \left(\frac{p_0}{p_c} \right)^2 \right]. \quad (2.19)$$

Дифференцируя (2.19), сразу же получаем химические потенциалы He^3 и He^4 в сверхтекучем растворе:

$$\mu_3 = -\Delta + \frac{p_0^2}{2M} \left[1 + \frac{4}{3} \lambda + \frac{4}{15} \lambda^2 (11 - 2 \ln 2) - \gamma \left(\frac{p_0}{p_c} \right)^2 \right], \quad (2.20)$$

$$\mu_4 = \mu_4^{(0)} + \alpha_1 m_4 s_0^2 c - \frac{3}{10} \beta_1 \frac{p_0^2}{M} c, \quad (2.21)$$

где $\mu_4^{(0)}$ — химический потенциал чистого He^4 , $c = N_3/N_4$ — атомная концентрация примесей,

$$\alpha_1 = \frac{N_4}{m_4 s_0^2} \frac{\partial (-\Delta)}{\partial N_4}, \quad \beta_1 = \frac{\partial \ln M}{\partial \ln N_4}.$$

Согласно ⁵⁷ $\alpha_1 = 1,28$, $\beta_1 = 1,25$. Подчеркнем, что приведенное значение α_1 получено не из непосредственных измерений Δ (N_4), а по данным о молярных объемах He^3 и He^4 . Отношение молярных объемов действительно характеризует энергию связи Δ , однако указанный способ вычисления α_1 вряд ли может быть полностью обоснован, что видно хотя бы из того, что он приводит к изменению знака Δ при давлении 6—8 атм ⁷, что физически неправдоподобно. Правильное значение α_1 можно определить, например, из данных о скорости второго звука в растворе.

Изменение химического потенциала He^3 при изменении числа частиц на δN_3 можно представить в следующем виде ³⁷:

$$\delta \mu_3 = \frac{p_0}{m^*} \delta p_0 + \frac{1}{2} \delta N_3 \int_{-1}^1 \psi(\theta) d(\cos \theta). \quad (2.22)$$

В (2.22) входит функция $\psi(\theta)$ из ферми-жидкостной функции в отсутствие поля (2.12).

Подставляя (2.20) в формулу (2.22), находим полную эффективную массу возбуждения в отсутствие поля:

$$\frac{m^*}{M} = 1 + \frac{8}{15} \lambda^2 (7 \ln 2 - 1) + 2\gamma \left(\frac{p_0}{p_c} \right)^2. \quad (2.23)$$

Осмотическое давление Π в системе с мелкопористой мембраной, через которую может протекать только сверхтекучая компонента (superleak), можно вычислить из условия равенства химических потенциалов растворителя по обе стороны мембраны ¹²:

$$\Pi = \frac{2}{5} \frac{p_0^2}{2M} N_3 \left[1 + \frac{5}{3} \lambda + \frac{8}{21} \lambda^2 (11 - 2 \ln 2) - \frac{10}{7} \gamma \left(\frac{p_0}{p_c} \right)^2 \right]. \quad (2.24)$$

Определим избыточную энтальпию системы W^E следующим соотношением:

$$W = W^E - l_{30} N_3 - l_{40} N_4;$$

здесь $-l_{30}$ и $-l_{40}$ — скрытые теплоты испарения чистых He^3 и He^4 при $T = 0$ в расчете на атом, W — энтальпия единицы объема раствора. С точностью до членов порядка $(T/T_0)^2$ $W = \mu_3 N_3 + \mu_4 N_4$ и

$$W^E = (\mu_3 + l_{30}) N_3 - \Pi. \quad (2.25)$$

Магнитная восприимчивость раствора χ с учетом обменного ферми-жидкостного взаимодействия в системе растворенных атомов He^3 ³⁷ равна

$$\frac{\chi_{\text{id}}}{\chi - \chi_4^{(0)}} = \frac{1 + Z_0}{1 + F_1/3} = 1 - 2\lambda - \frac{16}{15} \lambda^2 (\ln 2 + 2), \quad (2.26)$$

где χ_{id} — восприимчивость идеального ферми-газа с энергетическим спектром (2.1) с $\mathbf{H} = 0$, F_1 , Z_0 — определенные обычным образом ферми-жидкостные гармоники функций ψ и ζ (2.12), $\chi_4^{(0)}$ — диамагнитная восприимчивость чистого He^4 .

В сверхтекучем растворе полный импульс жидкости \mathbf{P} всегда можно представить в виде $\mathbf{P} = \rho^{(n)} \mathbf{v}_n + \rho^{(s)} \mathbf{v}_s$, где \mathbf{v}_n — скорость нормального движения, $\rho^{(n)}$ и $\rho^{(s)}$ — плотности соответственно нормальной и сверхтекучей компонент. Вычисление с помощью определений (2.5), (2.16) дает ¹²

$$\rho^{(n)} = m_4 N_4 + m_3 N_3 - \rho^{(s)} = M N_3 \left[1 + 2\gamma \left(\frac{p_0}{p_c} \right)^2 \right], \quad (2.27)$$

что согласуется с ¹ при учете выражения (2.23).

На рисунках 1—5 проводится сравнение теоретических кривых, рассчитанных по формулам (2.20)—(2.27), с экспериментальными данными ^{16, 18, 53—63}. Значение длины s -рассеяния a было определено из требования наилучшего согласия одновременно со всеми результатами измерений как термодинамических, так и кинетических свойств (см. ниже) раствора. Оказалось, что $a = -1,5 \text{ \AA}$. Знак длины рассеяния соответствует притяжению между примесными атомами He^3 .

Как видно из рис. 1—4, предложенный метод хорошо описывает взаимодействие в реальном растворе вплоть до концентрации порядка 3%. Для сравнения на рис. 1 штриховой линией представлена зависимость химического потенциала He^3 в растворе от концентрации (на всех рисунках x — молярная концентрация He^3 в процентах) в приближении невзаимодействующего вырожденного идеального ферми-газа. На рис. 5 приведены все известные нам экспериментальные данные по магнитной восприимчивости. Большой разброс точек на этом рисунке и плохое согласование экспериментальных результатов между собой вплоть до знака взаимодействия примесных квазичастиц He^3 оставляет сомнения в точности части данных. Кроме того, некоторое убывание восприимчивости с ростом концентрации свидетельствует, по-видимому, об ослаблении

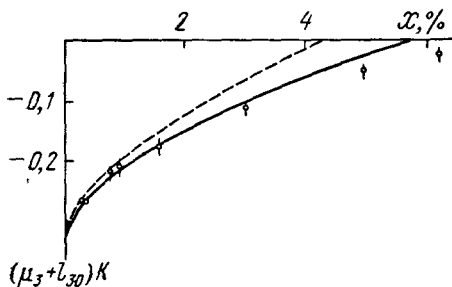


Рис. 1. Концентрационная зависимость химического потенциала He^3 .

Штриховая кривая соответствует идеальному газу. $x = N_3/(N_3 + N_4)$, кружки — экспериментальные результаты ⁵⁵.

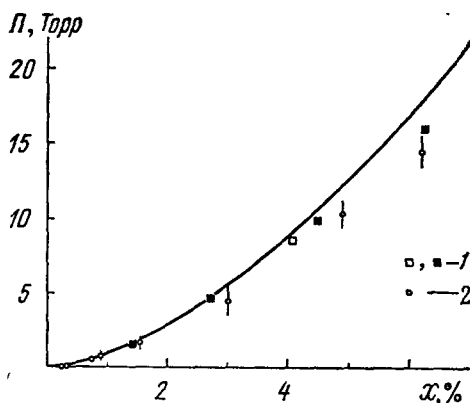


Рис. 2. Осмотическое давление в вырожденном растворе.

1 — данные работ ^{59, 60}, 2 — результаты ⁵⁸.

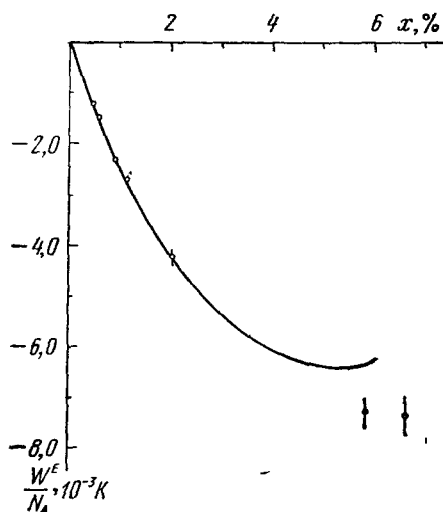


Рис. 3. Избыточная энтальпия вырожденного раствора.

N_A — число Авогадро; кружки — экспериментальные данные ⁵⁶.

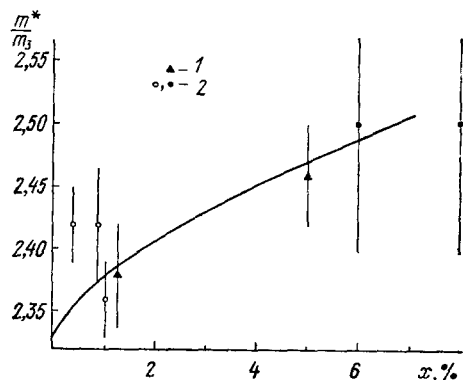


Рис. 4. Полная эффективная масса примесных квазичастиц.

1 — данные работы ¹⁸, 2 — экспериментальные результаты ⁵⁵ и ¹⁶ соответственно.

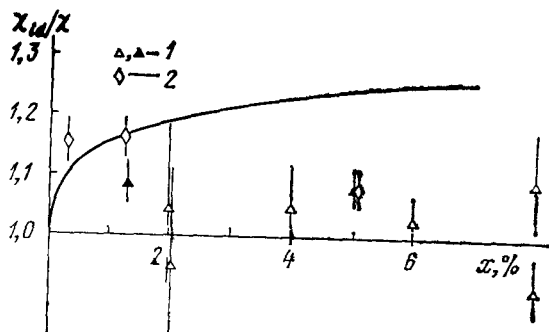


Рис. 5. Магнитная восприимчивость раствора.

1 — экспериментальные данные ⁵¹⁻⁵³ и ¹⁵, 2 — результаты относительных измерений магнитной восприимчивости ⁵⁴, нормированные на значение при $x = 1,3\%$, вычисленное по формуле (2.26).

эффективного притяжения при увеличении импульса фермионов, что качественно не согласуется с результатами остальных термодинамических измерений (см. рис. 1—3).

Вычисления по изложенной выше схеме для невырожденных растворов можно проводить только в первом порядке теории возмущений. Однако это несущественно уменьшает точность, поскольку области применимости статистики Больцмана к примесным квазичастицам соответствуют низкие концентрации раствора, для которых поправки на неидеальность малы.

В больцмановской области $T \gg T_0$ главная концентрационная поправка к свободной энергии δF_{int} , обусловленная взаимодействием примесных квазичастиц, для s -рассеяния имеет следующий вид⁵⁵:

$$\delta F_{\text{int}} = -2TN_3^2 \left(\frac{\pi \hbar^2}{MT} \right)^{3/2} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\delta_0}{dp} e^{-p^2/MT} dp.$$

Фаза амплитуды s -рассеяния медленных частиц равна $\delta_0 = -pa/\hbar$, и

$$\delta F_{\text{int}} = \frac{\pi a \hbar^2}{M} N_3^2. \quad (2.28)$$

Результат (2.28) совпадает с соответствующим членом в (2.19), что является отражением того факта, что в борновском приближении ферми-жидкостная функция (2.10) не зависит от импульсов. Свободная энергия раствора и химический потенциал He^3 в больцмановской области $T \gg T_0$ задаются тогда следующими формулами:

$$F = F_4^{(0)} - N_3 \Delta - N_3 T \ln \left[\frac{2e}{N_3} \left(\frac{MT}{2\pi \hbar^2} \right)^{3/2} \right] + \frac{\pi a \hbar^2}{M} N_3^2, \quad (2.29)$$

$$\mu_3 = -\Delta + T \ln \left[\frac{N_3}{2} \left(\frac{2\pi \hbar^2}{MT} \right)^{3/2} \right] + \frac{2\pi a \hbar^2}{M} N_3. \quad (2.30)$$

При этом температурная зависимость всех термодинамических величин определяется лишь теми членами в (2.29) — (2.30), которые соответствуют идеальному больцмановскому газу примесных возбуждений⁴¹. Отметим, что в выражениях (2.29) — (2.30) разложение происходит не по $c^{1/3}$ ($\lambda \propto p_0 \propto c^{1/3}$), как в случае вырожденного раствора $T \ll T_0$, а по концентрации c в первой степени.

Влияние магнитного поля на термодинамические функции раствора становится существенным, когда характерный параметр $\beta \hbar / T_0$ не слишком мал. В реально достижимых полях это соответствует растворам с низкой концентрацией He^3 , для которых взаимодействие примесей хорошо описывается уже в первом порядке теории возмущений. Это позволяет избежать громоздких вычислений с ферми-жидкостной функцией во втором приближении¹⁴. Отметим, что включение магнитного поля значительно влияет не только на ферми-жидкостное взаимодействие, но и на термодинамические функции идеального ферми-газа, что связано с существенной зависимостью радиусов ферми-сфер p_+ и p_- от напряженности поля.

Прямое вычисление энергии (2.9) в борновском приближении приводит к результату:

$$E = E_4^{(0)} - N_3 \Delta + \frac{3}{10M} (p_+^2 N_+ + p_-^2 N_-) - \beta \hbar (N_+ - N_-) + \frac{4\pi a \hbar^2}{M} N_+ N_-. \quad (2.31)$$

Величины N_\pm вычисляются с помощью уравнения $(\partial E / \partial N_\pm)_{N_3, \hbar} = 0$:

$$N_\pm = \tilde{N}_\pm \pm 2 \left(\frac{6}{\pi} \right)^{1/3} a (\tilde{N}_+ \tilde{N}_-)^{1/3} \frac{\tilde{N}_+ - \tilde{N}_-}{\tilde{N}_+^{1/3} + \tilde{N}_-^{1/3}},$$

а химический потенциал He^3 равен

$$\mu_3 = u_0 + \frac{4\pi a \hbar^2}{M} (\tilde{N}_+ \tilde{N}_-)^{1/3} \frac{\tilde{N}_+^{2/3} + \tilde{N}_-^{2/3}}{\tilde{N}_+^{1/3} + \tilde{N}_-^{1/3}}, \quad (2.32)$$

где $\tilde{N}_{\pm}(\mathbf{H})$ — числа частиц различной спиновой ориентации в единице объема идеального ферми-газа, $\mu_0(\mathbf{H})$ — химический потенциал фермионов в отсутствие взаимодействия. В дальнейшем вместо величин p_{\pm} , N_{\pm} , \tilde{N}_{\pm} , \mathbf{H} иногда будет удобно использовать безразмерные переменные

$$\chi_{\pm} = \frac{p_{\pm}}{p_0} = \left(\frac{2N_{\pm}}{N_3} \right)^{1/3}, \quad \tilde{\chi}_{\pm} = \left(\frac{2\tilde{N}_{\pm}}{N_3} \right)^{1/3},$$

$$\mathcal{H} = \frac{2\beta H}{T_F}, \quad T_F = 2^{2/3} T_0;$$

здесь T_F — температура вырождения полностью поляризованного раствора. В этих переменных уравнения, определяющие концентрации \tilde{N}_{\pm} для идеального ферми-газа, имеют следующий вид:

$$\tilde{\chi}_+^2 - \tilde{\chi}_-^2 = 2^{2/3} \mathcal{H}, \quad \tilde{\chi}_+^3 + \tilde{\chi}_-^3 = 2, \quad (2.33)$$

а химический потенциал $\mu_0(\mathbf{H})$ равен

$$\mu_0(\mathbf{H}) = \frac{p_0^3}{M} \frac{1}{\tilde{\chi}_+ + \tilde{\chi}_-} - \beta H \frac{\tilde{\chi}_+ - \tilde{\chi}_-}{\tilde{\chi}_+ + \tilde{\chi}_-}. \quad (2.34)$$

Легко получить также значение химического потенциала He^4 в растворе

$$\mu_4 = \mu_4^{(0)} + \alpha_1 m_4 s_0^2 c - \frac{3}{10} \frac{\beta_1}{MN_4} (p_+^2 N_+ + p_-^2 N_-), \quad (2.35)$$

и магнитной восприимчивости раствора

$$\chi = \beta \frac{\partial}{\partial H} (N_+ - N_-) + \chi_4^{(0)}.$$

Аналогично обычным путем можно определить значения остальных термодинамических величин в магнитных полях.

Для невырожденных растворов слагаемое в полной энергии, отвечающее взаимодействию, в первом порядке сохраняет прежний вид (2.31):

$$\delta E_{\text{int}} = \frac{4\pi a \hbar^2}{M} \tilde{N}_+ \tilde{N}_-. \quad (2.36)$$

Таким образом, в присутствии магнитного поля δE_{int} (2.36), в отличие от энергии (2.28) в отсутствие поля, зависит от температуры, поскольку входящие сюда числа частиц с определенной спиновой ориентацией в невырожденном идеальном ферми-газе \tilde{N}_{\pm} , протабулированные Стонером⁶⁴, являются функциями температуры.

В сильных магнитных полях, когда $N_-/N_3 \ll 1$, термодинамика раствора, как отмечалось выше, зависит от амплитуды p -рассеяния примесных возбуждений (2.14). При этом полюс одночастичной функции Грина $G(\mathbf{p})$

$$G^{-1}(\mathbf{p}) = \varepsilon(\mathbf{p}) + \Delta - \frac{p^2}{2M} \left[1 - \gamma \left(\frac{p}{p_c} \right)^2 \right] + \beta H - \Sigma,$$

с помощью соотношения Галицкого⁶⁵ для собственной энергетической части $\Sigma(\mathbf{p})$ фермионов в первом порядке теории возмущений и выражения (2.14) ($\mathbf{q} = (\mathbf{p} - \mathbf{p}')/2$)

$$\Sigma = \int d\Gamma' n_+(\mathbf{p}') \Gamma(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \frac{18\pi b N_3}{M} \left(\frac{p^2}{3} + \frac{p_F^2}{5} \right). \quad (2.37)$$

определяет спектр возбуждений $\varepsilon(\mathbf{p})$,

$$\varepsilon(\mathbf{p}) = -\Delta + \frac{p^2}{2M} \left[1 - \gamma \left(\frac{p}{p_c} \right)^2 + 12\pi b N_3 \right] + \frac{18}{5} \frac{p_F^2}{M} \pi b N_3 - \beta H,$$

химический потенциал

$$\mu_3 = \varepsilon(p_F) = -\Delta + \frac{p_F^2}{2M} \left[1 - \gamma \left(\frac{p_F}{p_c} \right)^2 + \frac{96\pi}{5} b N_3 \right] - \beta H \quad (2.38)$$

и эффективную массу возбуждений

$$\frac{1}{m_+} = \frac{1}{p_F} \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial p} \right)_{p=p_F}, \quad \frac{m_+}{M} = 1 + 2\gamma \left(\frac{p_F}{p_c} \right)^2 - 12\pi b N_3.$$

Те же соотношения легко получить и с помощью f -функции (2.15) по обычным формулам теории ферми-жидкости Ландау.

Выражения (2.37) и (2.15) определяют все термодинамические свойства поляризованных растворов. Так, для полной энергии имеем

$$E = E_4^{(0)} - N_3 \Delta + \frac{3}{10M} p_F^2 N_3 \left[1 - \frac{5}{7} \gamma \left(\frac{p_F}{p_c} \right)^2 + 12\pi b N_3 \right] - \beta H N_3. \quad (2.39)$$

Наличие магнитного поля приводит также к своеобразному магнито-осмотическому эффекту. Действительно, поскольку вследствие ориентирующего действия поля радиус ферми-сферы квазичастиц He^3 со спинами, направленными по полю при $\mathcal{H} \rightarrow 1$, увеличивается в $2^{1/3}$ раза, то и осмотическое давление в системе с непроницаемой для примесей мембраной возрастает по сравнению с (2.24) примерно в $2^{2/3}$ раза:

$$\Pi = \frac{2}{9} N_3 \frac{p_F^2}{2M} \left[1 - \frac{10}{7} \gamma \left(\frac{p_F}{p_c} \right)^2 + 30\pi b N_3 \right]. \quad (2.40)$$

Этот эффект при повышении температуры и переходе в больцмановскую область практически исчезает, а в пренебрежении взаимодействием для идеального больцмановского газа магнито-осмотический эффект вообще отсутствует.

3. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ В РАСТВОРЕ

а) Гидродинамические колебания

Распространение низкочастотных звуковых колебаний в растворе $\text{He}^3 - \text{He II}$ описывается системой уравнений гидродинамики¹, которые в линейном приближении имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} m_4 \frac{\partial N_4}{\partial t} + m_3 \frac{\partial N_3}{\partial t} + \rho^{(n)} \operatorname{div} \mathbf{v}_n + \rho^{(s)} \operatorname{div} \mathbf{v}_s &= 0, \\ \frac{\partial N_3}{\partial t} + N_3 \operatorname{div} \mathbf{v}_n &= 0, \quad \frac{\partial S}{\partial t} + S \operatorname{div} \mathbf{v}_n = 0, \\ \rho^{(n)} \frac{\partial \mathbf{v}_n}{\partial t} + \rho^{(s)} \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \nabla P &= 0, \quad \frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \frac{1}{m_4} \nabla \mu_4 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

где S — энтропия единицы объема раствора, P — давление.

Хотя уравнения (3.1) формально не меняются при включении внешнего магнитного поля, но входящие в них термодинамические величины являются функциями напряженности поля \mathbf{H} и определяются полученными выше соотношениями. Влияние слабого магнитного поля на гидродинамические свойства раствора изучалось Луильером и Франсуа⁶⁶. Далее мы будем рассматривать сразу случай произвольных магнитных полей¹³⁻¹⁵. Будем считать, что малые возмущения для всех равновесных величин изменяются в поле звуковой волны по закону $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Пренебрегая членами порядка T/T_0 , с помощью термодинамического тождества для P легко находим искомое дисперсионное уравнение для скорости распрост-

ранения колебаний $s = \omega/k$ ¹²:

$$m_4 \frac{\rho^{(n)}}{N_3} s^4 - s^2 \left[\rho^{(s)} \left(\frac{m_3}{m_4} \frac{\partial \mu_4}{\partial N_4} - \frac{\partial \mu_4}{\partial N_3} \right) + m_4 A_3 - \right. \\ \left. - \left(m_3 - \frac{\rho^{(n)}}{N_3} \right) A_4 \right] + \left[A_3 \frac{\partial \mu_4}{\partial N_4} - A_4 \frac{\partial \mu_4}{\partial N_3} \right] \frac{\rho^{(s)}}{m_4} = 0, \quad (3.2)$$

где $A_i = N_3 \frac{\partial \mu_3}{\partial N_i} + N_4 \frac{\partial \mu_4}{\partial N_i}$, $i = 3, 4$.

Скорость распространения первого звука в отсутствие магнитного поля определяется большим (порядка скорости звука в чистом He^4 s_0) корнем уравнения (3.2) с учетом выражений для термодинамических функций (2.20), (2.24), (2.27):

$$s_1^2 = s_0^2 \left\{ 1 + c \left[\frac{m_4}{M} \left(\alpha_1 + \frac{\delta m}{m_4} \right)^2 + \alpha_2 - \frac{\delta m}{m_4} \right] + \right. \\ \left. + \left(\frac{m_4}{M} \right)^2 \left(\frac{p_0}{p_c} \right)^2 c \left[\frac{1}{3} \frac{m_4}{M} \left(\alpha_1 + \frac{\delta m}{m_4} \right)^2 - \beta_1 \left(\alpha_1 + \frac{\delta m}{m_4} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - 2\gamma \frac{M}{m_4} \left(\alpha_1 - \frac{m_3}{m_4} \right)^2 + \frac{3}{10} \beta_2 \frac{M}{m_4} \right] \right\} \approx s_0^2 (1 - 0,30c - 0,29c^{5/3}), \quad (3.3)$$

где

$$\delta m = M - m_3, \quad \alpha_2 = -\frac{N_4^2}{m_4 s_0^2} \frac{\partial^2 \Delta}{\partial N_4^2}, \quad \beta_2 = M N_4^2 \frac{\partial^2 (1/M)}{\partial N_4^2}.$$

Последний член в выражении (3.3) описывает нелинейную концентрационную зависимость скорости звука в растворе, наблюдавшуюся Абрагамом и др. ⁶⁷. Формула (3.3) показывает, что параметры, характеризующие взаимодействие квазичастиц He^3 , вообще не входят в выражение для скорости первого звука, которая, таким образом, совпадает со скоростью звука в растворе идеального ферми-газа со спектром (2.1) в сверхтекучем He^4 .

На рис. 6 приведены экспериментальные данные ⁶⁷ и кривая, соответствующая выражению (3.3). Параметры α_2 и β_2 оказались равными $\alpha_2 = -2,26$, $\beta_2 = -1,38$ при $\gamma = 0,14$ ⁵² (если $\gamma = 0$ ⁵³, то $\beta_2 = -1,64$).

Так же, как и в чистом He^4 , в вырожденном растворе может распространяться четвертый звук ⁶⁸, когда раствор заполняет настолько узкие капилляры,

что их диаметр оказывается меньше глубины проникновения вязкой волны или длины свободного пробега возбуждений. При этом колебания будут распространяться лишь в сверхтекучей компоненте жидкости, нормальная же ее часть окажется неподвижной. Скорость четвертого звука

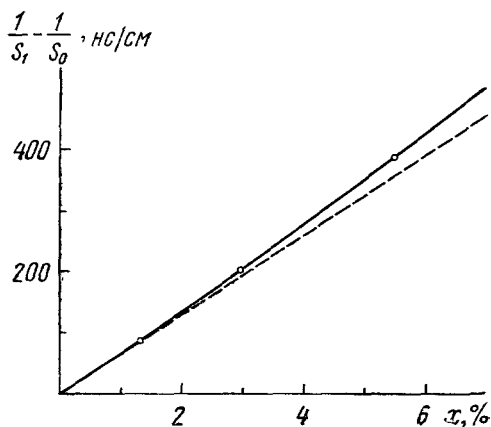


Рис. 6. Отклонение концентрационной зависимости скорости первого звука в растворе от линейной (обозначена штриховой линией).

Кружки — экспериментальные данные ⁶⁷.

определяется уравнениями (3.1), в которых следует положить $v_n = 0$:

$$s_4^2 = \frac{\rho^{(8)}}{m_4^2} \frac{\partial \mu_4}{\partial N_4} = s_0^2 \left\{ 1 + c \left(\alpha_2 - \frac{\delta m}{m_4} \right) + \left(\frac{p_0}{p_c} \right)^2 \frac{m_4}{M} c \left[\frac{3}{10} \beta_2 - 2\gamma \left(\frac{M}{m_4} \right)^2 \right] \right\} \approx s_0^2 (1 - 3,27c). \quad (3.4)$$

Включение внешнего магнитного поля лишь незначительно влияет на скорости распространения первого и четвертого звуков. При поляризации раствора меняются только малые нелинейные члены, пропорциональные $c^{5/3}$.

В отличие от скоростей первого и четвертого звуков, скорость вто-

рого звука в системе примесных возбуждений значительно изменяется при намагничивании раствора. Природа этого явления аналогична рассмотренному выше магнито-осмотическому эффекту. В линейном по концентрации приближении согласно дисперсионному уравнению (3.2) скорость второго звука в растворе определяется выражением

$$s_2^2 = \frac{N_3}{M} \frac{\partial \mu_3}{\partial N_3} - \alpha_1^2 \frac{m_4}{M} s_0^2 c. \quad (3.5)$$

Поскольку главный по концентрации член в (3.5) пропорционален квадрату фермиевской скорости, то при полной поляризации раствора скорость распространения второго звука в поляризованном растворе превосходит свое значение в отсутствие поля примерно в $2^{1/3}$ раза. В приближении идеального ферми-газа с помощью формулы для химическо-

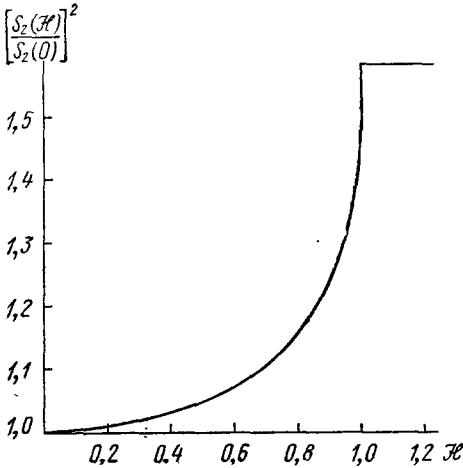


Рис. 7. Относительная зависимость квадрата скорости второго звука в вырожденном растворе He^3 — He^4 от величины магнитного поля.

$\mathcal{H} = 2\beta H/T_F$. Учет температурных эффектов T/T_F приводит к сглаживанию излома на кривой при $\mathcal{H} = 1$.

го потенциала (2.34) находим зависимость скорости второго звука от магнитного поля:

$$\frac{s_2^2(\mathcal{H})}{s_2^2(0)} = \frac{2}{\chi_+ + \chi_-}, \quad s_2(\mathcal{H} \geq 1) = 2^{1/3} s_2(0), \quad s_2(0) = \frac{p_0}{\sqrt{3} M}. \quad (3.6)$$

График функции (3.6) изображен на рис. 7. Учет температурных эффектов $\sim (T/T_F)^2$ приводит к сглаживанию излома на кривой при $\mathcal{H} = 1$.

Учет ферми-жидкостного взаимодействия для термодинамических функций в дисперсионном уравнении (3.2) приводит к более точным выражениям для скорости второго звука в растворе в отсутствие магнитного поля¹²:

$$s_2^2(0) = \frac{p_F^2}{3M^2} \left[1 + 2\lambda + \frac{8}{15} \lambda^2 (11 - 2 \ln 2) - 4\gamma \left(\frac{p_0}{p_c} \right)^2 \right] - \frac{m_4}{M} \alpha_1^2 s_0^2 c, \quad (3.7)$$

и в предельном случае полностью поляризованного раствора¹⁴

$$s_2^2(\mathcal{H} \geq 1) = \frac{p_F^2}{3M^2} \left[1 - 4\gamma \left(\frac{p_F}{p_c} \right)^2 + 3\alpha_1 \left(\alpha_2 + 2\alpha_1 \gamma \frac{M}{m_4} \right) c - \left(\alpha_1 + \frac{\delta m}{m_4} \right)^2 \frac{m_4}{M} c + 48\pi b N_3 \right] - \alpha_1^2 s_0^2 \frac{m_4}{M} c. \quad (3.8)$$

Отметим, что скорости первого и четвертого звуков (3.3), (3.4) определены с точностью до членов порядка c^2 , тогда как скорость второго звука в отсутствие магнитного поля (3.7) — лишь с точностью $c^{5/3}$. Это объясняется тем, что эффекты запаздывания, которыми мы пренебрегаем, дают вклад в скорость второго звука порядка $c^{5/3}$, в то время как соответствующие члены из выражений для скоростей первого и четвертого звука выпадают вовсе. В случае p -рассеяния (3.8) в скорости второго звука удастся учесть и члены порядка $c^{5/3}$.

б) Распространение высокочастотных колебаний

В предыдущем разделе были рассмотрены низкочастотные $\omega\tau \ll 1$ (ω — частота волны, τ — характерное время релаксации) гидродинамические колебания в растворе. В квантовой системе $\text{He}^3 - \text{He}^4$ могут также распространяться и различные высокочастотные моды $\omega\tau \gg 1$. Отметим, что при поляризации раствора магнитным полем характерное время релаксации τ резко возрастает (см. гл. 4). Это приводит к тому, что в поляризованном слабом растворе условие $\omega\tau \gg 1$ может выполняться даже для инфразвуковых частот. В ферми-бозе квантовой жидкости $\text{He}^3 - \text{He}^4$ в принципе могут распространяться высокочастотные колебания, свойственные как ферми-жидкости (нулевой звук, спиновые волны), так и бозе-системе (высокочастотный первый звук).

Согласно теории ферми-жидкости Ландау³⁸ осцилляции первого типа соответствуют неизотропным колебаниям ферми-поверхности квазичастиц He^3 . Высокочастотный первый звук в растворе аналогичен высокочастотным колебаниям в чистом He^4 (Андреев, Халатников⁶⁹) и представляет собой колебания He^4 , в которых вследствие взаимодействия атомов He^3 со сверхтекучим фоном участвуют и примесные квазичастицы.

Высокочастотные колебания раствора описываются бесстолкновительным кинетическим уравнением для одночастичной матрицы плотности

$$\frac{\partial n_{\alpha\beta}}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [\hat{\epsilon}, \hat{n}]_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \epsilon_{\alpha\gamma}}{\partial \mathbf{p}} \nabla n_{\gamma\beta} + \nabla n_{\alpha\gamma} \frac{\partial \epsilon_{\gamma\beta}}{\partial \mathbf{p}} \right) - \frac{1}{2} \left(\nabla \epsilon_{\alpha\gamma} \frac{\partial n_{\gamma\beta}}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial n_{\alpha\gamma}}{\partial \mathbf{p}} \nabla \epsilon_{\gamma\beta} \right) = 0, \quad (3.9)$$

уравнением непрерывности

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_4 N_4 + m_3 \int n_{\alpha\alpha} d\Gamma) + \text{div} (m_4 N_4 \mathbf{v}_s + \int \mathbf{p} n_{\alpha\alpha} d\Gamma) = 0 \quad (3.10)$$

и уравнением сверхтекучего движения

$$\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \frac{1}{m_4} \nabla \frac{\partial}{\partial N_4} \left(E_0 + \int \epsilon_{\alpha\beta} \delta n_{\beta\alpha} d\Gamma \right) = 0, \quad (3.11)$$

где $[\hat{\epsilon}, \hat{n}]_{\alpha\beta}$ — коммутатор спиновых матриц, E_0 — полная равновесная энергия системы.

Отклонение матрицы плотности от равновесной $\delta n_{\alpha\beta}$ с помощью (2.16) представим в виде

$$\delta n_{\alpha\beta} = v(\mathbf{p}) \delta_{\alpha\beta} + \lambda(\mathbf{p}) \sigma_{\alpha\beta}; \quad n_{\alpha\beta} = n_{\alpha\beta}^{(0)} + \delta n_{\alpha\beta} + \left[\frac{(\delta m)_+}{m_+} \frac{\partial n_0^+}{\partial \epsilon_+} (\delta_{\alpha\beta} + \sigma_{\alpha\beta} \mathfrak{M}) + \frac{(\delta m)_-}{m_-} \frac{\partial n_0^-}{\partial \epsilon_-} (\delta_{\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} \mathfrak{M}) \right] \frac{\mathbf{p} \mathbf{v}_s}{2}. \quad (3.12)$$

Согласно (2.4), (2.6), (2.16) энергия возбуждения $\epsilon_{\alpha\beta}$ оказывается равной

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \epsilon_{\alpha\beta}^{(0)} + \frac{\partial \epsilon_{\alpha\beta}^{(0)}}{\partial N_4} \delta N_4 + (\delta m)_{\alpha\gamma} \left(\frac{1}{m} \right)_{\gamma\beta} \mathbf{p} \mathbf{v}_s + 2\delta_{\alpha\beta} \int \psi v d\Gamma + 2\sigma_{\alpha\beta} \int \xi \lambda d\Gamma. \quad (3.13)$$

1) Высокочастотные колебания в отсутствие магнитного поля. В отсутствие магнитного поля, когда можно пользоваться выражением для f -функции (2.12), система уравнений, описывающая высокочастотные колебания в растворе (3.9)–(3.11), существенно упрощается. Малые возмущения базисных переменных v , λ , v_s и δN_4 ищем в виде $\exp(i\omega t - ikr)$. При $H = 0$ уравнения (3.9)–(3.11) сводятся к двум независимым уравнениям для колебаний магнитного момента единицы объема раствора $\sigma_{\alpha\beta} n_{\beta\alpha}$ и скалярной функции распределения $n_{\alpha\alpha}$. Поскольку $a < 0$ и ферми-жидкостное взаимодействие малое, то в отсутствие магнитного поля в растворе может распространяться только симметричная спиновая волна с азимутальным числом $m = 0$ и высокочастотный первый звук, а существование незатухающих волн нуль-звукового типа оказывается невозможным^{11,12}.

Соответствующее дисперсионное уравнение для симметричных спиновых волн в растворе в борновском приближении имеет вид^{38,94}

$$1 + \zeta_0 \int \frac{\mathbf{k} \mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}} \frac{\partial n_0}{\partial \epsilon} \cdot 2 \, d\Gamma = 0, \quad (3.14)$$

где $\zeta_0 = \zeta(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_0) = -2\pi a \hbar^2 / M$, n_0 — равновесная фермиевская функция распределения в отсутствие магнитного поля. При $T = 0$ скорость распространения колебаний $u_0 = \omega/k$ согласно (3.14) экспоненциально близка к фермиевской (ср. ^{11,12}),

$$u_0 - v_0 = v_0 \exp(1/\lambda) \ll v_0, \quad \lambda = p_0 a / \pi \hbar. \quad (3.15)$$

Выражение для скорости спиновых волн (3.15) написано с логарифмической точностью. Для вычисления предэкспоненциального множителя потребовалось бы учесть значения всех старших производных f -функции (2.12) при $\chi = 0$.

Поглощение высокочастотных мод обычно определяется столкновениями квазичастиц ферми-жидкости друг с другом и при понижении температуры убывает пропорционально T^2 .

Существует также и бесстолкновительный механизм затухания высокочастотных колебаний, связанный с черенковским поглощением волны квазичастицами. Вероятность таких процессов зависит от числа квазичастиц, движущихся в фазе с волной. Если скорость распространения высокочастотных мод значительно превосходит фермиевскую скорость v_0 , то при $T \ll T_0$ бесстолкновительное затухание экспоненциально мало. Описанный механизм затухания Ландау оказывается доминирующим в тех случаях, когда скорость волны настолько близка к фермиевской, что энергия квазичастиц, движущихся с такими скоростями, находится в области теплового размытия фермиевской ступеньки.

Именно такая ситуация осуществляется для спиновых волн в слабых растворах He^3 — He^4 , в которых скорость распространения колебаний (3.15) экспоненциально близка по концентрации He^3 в степени $1/3$ к v_0 .

Основной экспериментальной трудностью при исследовании высокочастотных колебаний, распространяющихся со скоростью, близкой к фермиевской, является идентификация коллективной моды на фоне сигнала свободных квазичастиц ферми-жидкости. Наиболее точным методом определения скорости волны являются, по-видимому, время-пролетные измерения. При этом для разрешения сигналов волны и свободных фермионов необходимо, чтобы временная разность хода между сигналами $\Delta t \sim L(u - v_0)/v_0^2$ (L — расстояние между приемником и излучателем) была велика по сравнению с шириной импульса высокочастотных колебаний $\Delta t \sim 1/\omega$, т. е. $L > v_0^2/\omega(u - v_0)$. С другой стороны, для регистрации импульса на приемнике нужно, чтобы сигнал не затух на длине L : $L < v_0/\omega''$, где $\omega'' = \text{Im } \omega$ — коэффициент поглощения высокочастотной моды. Отсюда видно, что для экспериментального выделения вклада волны требуется выполнение условия⁹⁴

$$\frac{\omega''}{\omega} < \frac{u - v_0}{v_0} \ll 1, \quad (3.16)$$

более жесткого, чем просто условие слабого затухания $\omega'' \ll \omega$.

Принципиально возможен и другой способ отделения сигнала коллективной моды, связанный с тем, что некогерентность в излучении свободных квазичастиц при-

водит к уменьшению амплитуды их сигнала пропорционально $1/L^2$ даже в пренебрежении релаксацией⁹⁵.

Бесстолкновительное затухание симметричной спиновой волны определяется мнимой частью дисперсионного уравнения (3.14), полученной с помощью обычного правила обхода полюсов⁹⁴

$$\omega'' = + \pi n_0(z) k v_0 \exp \left(- \frac{1}{|\lambda|} \right), \quad (3.17)$$

где $z = \omega/kv_0 = u/v_0$, $n_0(z)$ — значение функции распределения для квазичастиц He^3 , движущихся со скоростью, равной скорости распространения спиновой волны, т. е. при $v = \omega/k$. Действительная часть дисперсионного уравнения (3.14) определяет температурные поправки к скорости волны u_0 при $T = 0$ (3.15):

$$u = \frac{\omega}{k} = u_0 - \frac{\pi^2}{24} \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 v_0 \exp \left(- \frac{1}{|\lambda|} \right), \quad \frac{T}{T_0} \ll \exp \left(- \frac{1}{|\lambda|} \right) \ll 1. \quad (3.18)$$

Отметим, что второй член в (3.18) мал по сравнению с отличием истинного значения u_0 от задаваемого формулой (3.15) с логарифмической точностью. Однако этот член при $T/T_0 \ll \exp(-1/|\lambda|)$ полностью определяет температурную зависимость скорости спиновых волн.

Условие малости затухания, использованное при выводе равенств (3.17), в данном случае подразумевает, вследствие близости скорости распространения спиновой волны к фермиевской, что $\omega'' \ll \omega - kv_0 \sim kv_0 \exp(-1/|\lambda|)$. Это означает, что область применимости выражения для ω'' (3.17) ограничена условием

$$n_0(z) = \exp \left(- 2e^{-1/|\lambda|} \frac{T_0}{T} \right) \ll 1. \quad (3.19)$$

В данном случае неравенство (3.19) фактически эквивалентно условию (3.16). Таким образом, спиновые волны в растворе $\text{He}^3 - \text{He}^4$ можно регистрировать только при достаточно низких температурах $T \ll T_0 \exp(-1/|\lambda|)$. Это соответствует численному неравенству

$$T [\text{mK}] \ll 4,2 \cdot 10^3 x^{2/3} \exp \left(- \frac{2,4}{x^{1/3}} \right),$$

где x — молярная концентрация He^3 в растворе.

Остановимся на роли столкновительного затухания в случае близости скорости волны к фермиевской. Коэффициент столкновительного затухания высокочастотной моды с учетом квантовых свойств магнонов выражается через время релаксации τ следующим образом⁹⁸:

$$\omega''_{\text{coll}} = \frac{1}{\tau} \left[1 + \left(\frac{\hbar \omega}{2\pi T} \right)^2 \right].$$

При этом для столкновительного поглощения условие (3.16) выполняется для частот

$$\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2 \ll \frac{T_0}{\hbar}, \quad \omega_{1,2} = 2\alpha_0 \frac{\pi^2 T^2 \tau}{\hbar^2} \left\{ 1 \pm \left[1 - \left(\frac{\hbar}{\pi T \tau \alpha_0} \right)^2 \right]^{1/2} \right\}, \quad \alpha_0 = e^{-1/|\lambda|}.$$

Для существования такой области частот необходимо, чтобы температура была достаточно мала,

$$T < \frac{\alpha_0 \pi B}{\hbar}, \quad B = \tau T^2 = \text{const},$$

где учтено, что в нормальной ферми-жидкости $\tau \propto 1/T^2$.

С использованием экспериментальных данных² полученные неравенства оказываются эквивалентными следующим численным выражениям:

$$\omega_{1,2} = 10^{12} \alpha_0 \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{T^2 [\text{K}]}{10 \alpha_0^2}} \right), \quad T [\text{K}] \leq \alpha_0.$$

Это ограничение на температуру является более слабым, чем полученное выше для затухания Ландау. Из сравнения коэффициента черенковского поглощения (3.17) с ω_{coll} легко определить область частот, находящуюся внутри интервала между ω_1 и ω_2 , и условие на температуру $T [\text{K}] < 10 \alpha_0 \exp(-2\alpha_0 T_0/T)$, при которых бесстолкновительное затухание доминирует.

При более высоких температурах раствора $T \gtrsim T_0$ существенно затухание, связанное с конечным временем жизни квазичастиц ферми-жидкости. Однако благодаря малой концентрации раствора затухание возбуждений He^3 мало в меру малости газового параметра λ ⁹⁵. В борновском приближении затухание квазичастиц вообще

отсутствует. Это позволяет в первом приближении теории возмущений решить задачу о распространении волн намагниченности в слабом растворе $\text{He}^3 - \text{He}^4$ при произвольных температурах.

Однако нетрудно убедиться, что вследствие малости взаимодействия дисперсионное уравнение (3.14) имеет в больцмановской области только сильно затухающее решение $|\text{Im } \omega| \gg |\text{Re } \omega|$ ⁹⁴, что, в отличие от нарушения условия выделения вклада спиновых волн (3.16), приводит к принципиальной невозможности распространения коллективной моды. Это согласуется с полученным выше результатом, что спиновые колебания в растворе в отсутствие поля практически необнаружимы уже при весьма низких температурах $T \sim T_0 \exp(-1/|\lambda|) \ll T_0$.

Уравнение на скалярную функцию распределения примесных возмущений $n_{\alpha\alpha}$, получаемое усреднением по спинам уравнений (3.9) — (3.11), описывает закон дисперсии первого звука вблизи абсолютного нуля, когда время релаксации квазичастиц He^3 быстро возрастает и превосходит период звуковых колебаний (высокочастотный первый звук)^{12,35}:

$$Q(u) + \frac{u}{v_0} R(u) = \frac{1}{w(u/v_0)}, \quad (3.20)$$

где $u = \omega/k$ — скорость распространения колебаний,

$$\left. \begin{aligned} w(x) &= \frac{x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} - 1, \\ Q(u) &= \frac{3}{p_0^2} \frac{m^*}{m_4} \frac{1}{u^2 - s_4^2} \left[\frac{\rho^{(s)}}{m_4} N_3 \left(\frac{\partial \mu_3}{\partial N_4} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - u^2 (\rho^{(n)} - m_3 N_3) \frac{m_3}{m_4} \frac{\partial \mu_4}{\partial N_4} - u^2 (2m_3 N_3 - \rho^{(n)}) \frac{\partial \mu_3}{\partial N_4} \right], \\ R(u) &= \frac{3}{p_0} \frac{m^*}{m_4} \frac{u}{u^2 - s_4^2} \left[(\rho^{(n)} - m_3 N_3) \frac{1}{m_4} \frac{\partial \mu_4}{\partial N_4} + N_3 \frac{\partial \mu_3}{\partial N_4} \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

s_4 — скорость четвертого звука (3.4).

Решение дисперсионного уравнения (3.20) $u \sim s_0$ представляет собой скорость высокочастотного первого звука в растворе u_1 ,

$$u_1^2 = s_4^2 - c \frac{p_0^2}{3M^2} \frac{m_4}{M} \left(\alpha_1 + \frac{\delta m}{m_4} \right) \left[\alpha_1 + \frac{\delta m}{m_4} + \frac{8}{5} \left(s_0 \frac{Ma}{\pi \hbar} \right)^2 (7 \ln 2 - 1) \left(\alpha_1 - \frac{m_3}{m_4} \right) \right]. \quad (3.22)$$

Таким образом, скорость первого звука данной частоты вблизи абсолютного нуля оказывается меньше, чем при более высоких температурах (когда имеет место низкочастотный гидродинамический предел) на величину порядка $(p_0/p_c)^5$, определяемую формулой (3.22). Иначе говоря, зависимость скорости первого звука от температуры должна иметь максимум.

2) Высокочастотные колебания в магнитном поле. Включение внешнего магнитного поля качественно меняет картину распространения спиновых колебаний. Для определения закона дисперсии спиновых волн в магнитном поле, как всегда, ограничимся первым порядком теории возмущений. При этом выражение (2.16) и (3.12), (3.13) для $n_{\alpha\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}$ значительно упрощаются, и кинетическое уравнение (3.9) распадается на скалярную

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\mathbf{v} - \delta_+ \mathbf{k}\mathbf{v} \left[\frac{\omega}{\mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\delta m}{M} \mathbf{p}\mathbf{v}_s + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial N_4} \delta N_4 + 2\psi \int \mathbf{v} d\Gamma \right] + \delta_+ \mathbf{k}\mathbf{v} \left[H \frac{\partial B}{\partial N_4} \delta N_4 - 2\psi \int \lambda d\Gamma \right] = 0, \quad (3.23)$$

и векторную части

$$\begin{aligned} & (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\lambda - (\mathbf{k}\mathbf{v})\mathfrak{M}\delta_- \left[\frac{\omega}{\mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\delta m}{M} \mathbf{p}\mathbf{v}_s + \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial N_4} \delta N_4 + 2\psi \int \mathbf{v} d\Gamma \right] + \\ & + \mathbf{k}\mathbf{v}\delta_+ \left[\mathfrak{H} \frac{\partial B}{\partial N_4} \delta N_4 - 2\zeta \int \lambda d\Gamma \right] - \frac{2i}{\hbar} B [\mathfrak{H}\lambda] - \frac{2i}{\hbar} \zeta \left[\rho \int \lambda d\Gamma \right] = 0. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Здесь $\mathbf{v} = \partial \varepsilon_0 / \partial \mathbf{p}$, $\delta_{\pm} = (1/2) [\delta(\varepsilon_+ - \mu_3) \pm \delta(\varepsilon_- - \mu_3)]$ и учтено, что в первом порядке по взаимодействию f -функция (2.10) не зависит от импульсов.

В качестве оси z выберем направление магнитного поля \mathfrak{M} . Уравнение (3.23) для компонент вектора λ , перпендикулярных к направлению поля, определяет спектр поперечных спиновых волн. Так, для циркулярных компонент $\lambda_{\pm} = \lambda_x \pm i\lambda_y$ дисперсионное уравнение при $T = 0$ приводится к виду ¹⁴

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{p_0 a}{\pi \hbar} \left[w_+(u) + w_-(u) + \right. \\ & \left. + \frac{p_0}{\hbar k} \left(-\frac{u^2 - \chi_{\pm}^2}{u} w_+(u) + \frac{u^2 - \chi_{\pm}^2}{u} w_-(u) + \frac{2}{u} \frac{N_+ - N_-}{N_s} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (3.25)$$

где

$$w_{\pm}(u) = \frac{u}{2} \ln \frac{u + \chi_{\pm}}{u - \chi_{\pm}} - \chi_{\pm}, \quad u = \frac{\omega - (2BH/\hbar)}{v_0 k}, \quad v_0 = p_0/M,$$

причем $BH = \beta H - \zeta_0(N_+ - N_-)$. В области малых волновых векторов $u \gg \chi_{\pm}$ вблизи энергетической щели, соответствующей свободной прецессии ядерных спинов, спектр (3.25) квадратичен по \mathbf{k} ,

$$\omega = \frac{2\beta H}{\hbar} + \frac{\hbar k^2}{2M} \frac{(36\pi)^{1/3}}{10|a|} \frac{N_+^{5/3} - N_-^{5/3}}{(N_+ - N_-)^2}, \quad (3.26)$$

и с точностью до концентрационно малых членов сходен со спектром ферромагнитной ферми-жидкости в отсутствие поля, полученным Абрикосовым и Дзялошинским ⁵⁴, а в слабых полях $\mathcal{H} \ll 1$ переходит в соответствующий результат Силина ⁴⁷.

При этом черенковское затухание спиновой волны экспоненциально мало ⁹⁴

$$\omega'' \sim \frac{\omega_{\text{int}}}{kv_0} \exp \left[-\frac{T_0}{T} \left(\frac{\omega_{\text{int}}}{kv_0} \right)^2 \right], \quad \omega_{\text{int}} = \frac{2\zeta_0}{\hbar} (N_+ - N_-),$$

и основным диссипативным механизмом является столкновительное релаксационное поглощение.

Следует подчеркнуть, что в ферми-жидкости, обладающей в равновесии магнитным моментом, в спектр поперечных спиновых волн должны также входить квадратичные по \mathbf{k} члены, обусловленные нелокальностью взаимодействия квазичастиц и отличием точного квантового кинетического уравнения от квазиклассического (3.9). Нетрудно убедиться, что в данном случае системы низкой плотности учет таких эффектов привел бы лишь к концентрационно малым поправкам ко второму слагаемому в правой части соотношения (3.26).

В коротковолновой области $kv \gg \zeta_0(N_+ - N_-)/\hbar$ решение уравнения (3.25) экспоненциально близко по параметру $-\pi\hbar/p_+a$ к асимптотическому $\omega - 2BH/\hbar = kv_+$. Область существования такого решения ограничена по частоте и волновому вектору магнонов условием применимости квазиклассического кинетического уравнения (3.9). Результаты, полученные для затухания спиновых волн в отсутствие магнитного поля в предыдущем

разделе статьи, могут быть непосредственно распространены и на случай короткопериодных $kv_- \gg \omega_{\text{int}}$ поперечных спиновых волн, дисперсионное уравнение для которых принимает вид, аналогичный (3.14).

Включение внешнего магнитного поля H делает возможным распространение длинноволновых слабозатухающих поперечных спиновых волн также и в невырожденном растворе $T > T_0$. После вычисления интегралов с бoльцмановскими равновесными функциями распределения n_+ и n_- соответствующее кинетическое уравнение преобразуется аналогично⁹⁶ и приводит к следующему дисперсионному уравнению для поперечных колебаний намагниченности⁹⁴:

$$\Omega + \left[1 - J \left(\frac{\Omega}{kv_T} \right) \right] \left(\frac{\mu_{\text{int}}}{2T} \Omega + \omega_{\text{int}} \right) - \omega_{\text{int}} = 0, \quad (3.27)$$

$$\mu_{\text{int}} = - \frac{2\pi a \hbar^2}{M} N_3,$$

где $\Omega = \omega - 2\beta H/\hbar + \omega_{\text{int}}$, $v_T = \sqrt{T/M}$ — тепловая скорость квазичастиц,

$$J(x) = x e^{-x^2/2} \int_{-\infty}^x e^{z^2/2} dz = i \sqrt{\frac{\pi}{2}} x \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{2}}. \quad (3.28)$$

Длинноволновое слабозатухающее решение уравнения (3.27) ищем в виде разложения в ряд по степеням kv_T/ω_{int} . В нулевом приближении решение $\omega = 2\beta H/\hbar \equiv \omega_0$ соответствует однородной свободной прецессии ядерных спинов He^3 . С помощью асимптотического представления функции $J(x)$ (3.28) находим квадратичные по kv_T/ω_{int} поправки к однородному решению $\omega = \omega_0$:

$$\omega = \omega_0 + \frac{\omega_{\text{int}}}{\omega_0^2} k^2 v_T^2 = \omega_0 + \frac{2\mu_{\text{int}}}{\hbar} k^2 \frac{T}{M\omega_0^2} \operatorname{th} \frac{\beta H}{T}. \quad (3.29)$$

В (3.29) учтено, что в борновском приближении для разности заселенностей $N_+ - N_-$, входящей в ω_{int} , нужно использовать ее значение в идеальном бoльцмановском газе в пренебрежении ферми-жидкостным взаимодействием: $N_+ - N_- = N_3 \operatorname{th} (\beta H/T)$. Коэффициент поглощения волны ω'' равен

$$\omega'' = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{\text{int}}}{kv_T} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega_{\text{int}}}{kv_T} \right)^2 - \frac{\omega_{\text{int}}}{\omega_0} \right]. \quad (3.30)$$

При не слишком малых волновых векторах k черенковское затухание (3.30) может оказаться больше столкновительного $\omega''_{\text{coll}} \sim N_3 a^2 v_T$.

В коротковолновой области, когда наличие щели в законе дисперсии становится несущественным, сильное бесстолкновительное затухание делает распространение спиновой волны в невырожденном растворе невозможным.

Таким образом, наблюдение спиновых волн в растворе He^3 — He^4 в отсутствие магнитного поля требует получения весьма низких температур. Включение магнитного поля делает возможным распространение слабозатухающих поперечных спиновых мод в широком интервале температур. При этом повышение температуры сужает область волновых векторов, в которой существуют незатухающие магноны. Наблюдение спиновых волн в бoльцмановской области возможно в довольно сильных магнитных полях.

Поперечные спиновые волны, как было показано выше, не связаны с колебаниями сверхтекучего фона. Уравнения (3.24) для z -компоненты вектора λ и (3.23) определяют скорости распространения зацепленных спиновой и высокочастотной звуковой волн. Отметим, что во втором порядке теории возмущений зацепление спиновой и звуковой мод в магнитном поле возникает также из-за наличия в ферми-жидкостной функции (2.7) члена, линейного по операторам спинов $\Phi (\sigma_{\alpha\beta} \delta_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu} \delta_{\alpha\beta}) \mathfrak{M}$.

Ограничимся линейным приближением по концентрации. Для этого в энергии ϵ_0 достаточно удерживать только член, не зависящий от импульса, $\epsilon_0 \approx -\Delta$. С той же точностью $\partial B/\partial N_4 = 0$. После громоздких вычислений находим трансцендентное дисперсионное уравнение для скорости рас-

пространения связанных спин-звуковых колебаний¹⁴:

$$1 - \frac{1}{2} \Phi(w_+ + w_-) + Z_0(\Phi - Z_0)w_+w_- = 0, \quad (3.31)$$

где $\Phi(u) = Q(u) + uR(u)/v_0$, функции $Q(u)$, $R(u)$ и $w_{\pm}(u)$ определяются выражениями (3.24) и (3.25), $Z_0 = -2\lambda$ — нулевая гармоника спиновой части ферми-жидкостной функции.

Дисперсионное уравнение (3.31) всегда имеет корень порядка скорости звука в чистом He^4 s_0 , который определяет скорость распространения высокочастотной звуковой волны в растворе и в использованном приближении совпадает со значением скорости гидродинамического первого звука s_1 (3.3). Данная мода представляет собой колебания плотности примесных атомов и связанные с этим колебания проекции магнитного момента на направление внешнего поля. Зависимость скорости распространения волны u_1 от магнитного поля возникает в более высоких порядках по концентрации фермионов.

Нетрудно убедиться, что в больших магнитных полях, когда $v_+ \gg \gg v_-$ ($v_{\pm} = p_{\pm}/M$ — скорости квазичастиц на соответствующих ферми-поверхностях), уравнение (3.31) не имеет вещественных корней, отличных от $u = u_1$.

С другой стороны, в очень слабых магнитных полях,

$$\frac{v_+ - v_-}{v_0} \sim \frac{\beta H}{T_0} \ll \exp\left(-\frac{2}{Z_0}\right) \ll 1,$$

заведомо существует решение уравнения (3.31) u_H , близкое к скорости распространения спиновых волн в растворе в отсутствие поля u_0 (3.15)¹⁴:

$$u_H = u_0 - v_0 \frac{Z_0}{\Delta_s} \left(\frac{\beta H}{4T_0} \right)^2 \exp\left(-\frac{2}{Z_0}\right), \quad \Delta_s = \frac{2+c}{1+c} \frac{(3M/Z_0 m_4)(\alpha_1 p_c/p_0)^2}{(3M/Z_0 m_4)(\alpha_1 p_c/p_0)^2} \approx 1,03.$$

По мере увеличения магнитного поля при достижении некоторого критического значения H_c скорость распространения спиновой волны становится комплексной (при этом вещественная часть скорости меньше скорости Ферми v_+), и волна испытывает сильное затухание Ландау, связанное с распадом магнона на частицу и дырку. Величина критического поля H_c с логарифмической точностью равна¹⁴

$$\beta H_c \approx T_0 \exp\left[-\frac{\Phi_0}{Z_0(\Phi_0 - Z_0)}\right],$$

$$\Phi_0 \equiv -3m_4(s_0\alpha_1)^2 \frac{c}{p_0 v_0} < 0,$$

что соответствует численному равенству

$$H_c [\text{э}] \approx 10^7 x^{2/3} \exp\left(-\frac{1,16}{x^{1/3}}\right),$$

где $x = N_3/(N_3 + N_4) \equiv c/(1+c)$ — молярная концентрация.

Более общий подход к вопросу о подавлении высокочастотных мод магнитным полем был разработан авторами^{70,94} применительно к случаю поперечного нулевого звука в чистом He^3 . Этот метод позволяет точно учесть все гармоники f -функции, что связано с близостью скорости распространения волны к фермиевской и возможностью выделения логарифмических особенностей в детерминанте дисперсионного уравнения. При этом критическое поле H_c просто выражается через значение скорости высокочастотной моды в отсутствие поля.

4. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

а) Кинетические явления
в отсутствие магнитного поля

Кинетические свойства вырожденных растворов $\text{He}^3 - \text{He II}$ при низких температурах определяются исключительно примесными возбуждениями. Длина свободного пробега квазичастиц He^3 ограничена их столкновениями друг с другом. Значения кинетических коэффициентов в фермижидкости можно определить из решения кинетического уравнения методом Абрикосова и Халатникова^{1, 71}. Точные выражения для коэффициентов теплопроводности κ , вязкости η , спиновой диффузии D , полученные Брукером и Сайксом⁷², имеют в отсутствие поля следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \kappa T &= \frac{8}{3} \frac{\pi^2 \hbar^3 p_0^3}{m^{*4}} \left\langle \frac{W_\kappa(\theta, \varphi)}{\cos(\theta/2)} (1 - \cos \theta) \right\rangle^{-1} H(\lambda_\kappa), \\ \eta T^2 &= \frac{64}{45} \frac{\hbar^3 p_0^3}{m^{*4}} \left\langle \frac{W_\eta(\theta, \varphi)}{\cos(\theta/2)} (1 - \cos \theta)^2 \sin^2 \varphi \right\rangle^{-1} C(\lambda_\eta), \\ DT^2 &= \frac{32}{3} \frac{\pi^2 \hbar^3 p_0^3}{m^{*5}} (1 + Z_\theta) \times \\ &\quad \times \left\langle \frac{2W_D(\theta, \varphi)}{\cos(\theta/2)} (1 - \cos \theta)(1 - \cos \varphi) \right\rangle^{-1} C(\lambda_D); \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

здесь W_κ , W_η , W_D представляют собой феноменологические вероятности столкновений пар квазичастиц вблизи поверхности Ферми для соответствующих процессов, θ — угол между направлениями импульсов взаимодействующих частиц, φ — угол рассеяния в системе центра инерции, а коэффициенты $H(\lambda_\kappa)$, $C(\lambda_\eta)$, $C(\lambda_D)$ связаны с вероятностями столкновений W довольно громоздкими соотношениями⁷²; $\langle \dots \rangle$ — усреднение по углам.

С точностью до членов, отвечающих p -рассеянию квазичастиц He^3 , имеем¹²

$$\begin{aligned} W_\eta(\theta, \varphi) &= W_\kappa(\theta, \varphi) = 4W_D'(\theta, \varphi) = \\ &= (2\pi\hbar)^3 \left(\frac{a}{M} \right)^2 \left[1 + \lambda \left(7 + \frac{1-5w^2}{w} \text{Arth } w \right) \right], \\ \lambda_\kappa &= \frac{1}{3} + 4,76\lambda, \quad \lambda_\eta = \frac{1}{5} + 2,23\lambda, \quad \lambda_D = \frac{1}{3} + 1,19\lambda, \\ H(\lambda_\kappa) &= 0,52(1 - 0,26\lambda), \\ C(\lambda_\eta) &= 0,81(1 - 0,18\lambda); \quad C(\lambda_D) = 0,80(1 - 0,10\lambda). \end{aligned}$$

Окончательные результаты для кинетических коэффициентов выглядят следующим образом¹²:

$$\left. \begin{aligned} \kappa T &= \frac{1}{8\pi} \frac{p_0^3}{(Ma)^2} \cdot 0,52(1 - 0,34\lambda), \\ \eta T^2 &= \frac{1}{12\pi^3} \frac{p_0^3}{(Ma)^2} \cdot 0,81(1 + 0,74\lambda), \\ DT^2 &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{\hbar}{M} \right)^3 \left(\frac{p_0}{a} \right)^2 \cdot 0,80(1 - 2,18\lambda). \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Характерное время релаксации в вырожденной фермиевской системе $\tau = (8\pi^2 \hbar^3 / m^* T^2) \langle W_\eta / \cos(\theta/2) \rangle^{-1}$ имеет следующую концентрационную зависимость:

$$\tau = \frac{1}{2\pi} \frac{\hbar}{M} \left(\frac{\hbar}{a} \right)^2 \frac{1}{T^2} (1 - 1,86\lambda). \quad (4.3)$$

Сравнение вычисленных кинетических коэффициентов с экспериментальными данными^{18,19,74} проводится на рис. 8—9. Оно обнаруживает

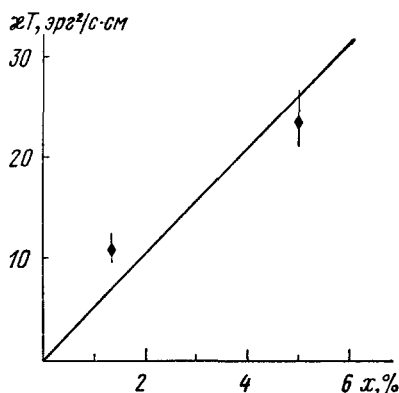


Рис. 8. Концентрационная зависимость коэффициента теплопроводности.

Значки — экспериментальные результаты¹⁹.

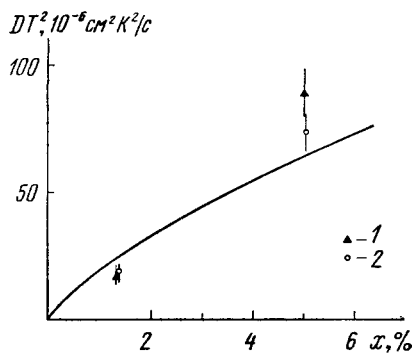


Рис. 9. Концентрационная зависимость коэффициента спиновой диффузии.

1 — экспериментальные данные^{18,2}, 2 — результаты работы⁷⁴.

удовлетворительное согласие между теоретическими и экспериментальными результатами.

б) Магнитокинетические эффекты

С увеличением магнитного поля возрастает длина свободного пробега квазичастиц со спинами, направленными вдоль \mathbf{H} , поскольку для таких частиц эффективно рассеяние на частицах со спинами, направленными против поля, число которых убывает с ростом H . Особенно заметно соответствующие магнитокинетические эффекты проявляются при определении кинетических коэффициентов, величина которых пропорциональна длине свободного пробега частиц.

Для определения кинетических коэффициентов необходимо решить столкновительное кинетическое уравнение для матрицы плотности. В левую часть кинетического уравнения (3.9), как всегда в случае слабонеоднородных систем, следует подставить локально-равновесную матрицу плотности и линеаризовать уравнение по малым значениям градиентов. При выборе оси z вдоль направления магнитного поля равновесная матрица плотности и гамильтониан возмущений (2.4) — (2.6), (2.16) диагональны в спиновом пространстве. Поэтому вместо четырех уравнений для $n_{\alpha\beta}$ возникают два уравнения для диагональных компонент матрицы плотности n^{\pm} :

$$\frac{\partial n^{\pm}}{\partial t} + \nabla n^{\pm} \frac{\partial \varepsilon_{\pm}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial n^{\pm}}{\partial \mathbf{p}} \nabla \varepsilon_{\pm} = I^{\pm}(\mathbf{p}). \quad (4.4)$$

Диагональные элементы матрицы плотности n^{\pm} и энергии возмущений ε_{\pm} определяют функцию распределения и энергию частиц с определенными проекциями спина на направление поля. В главном приближении по концентрации интегралы столкновений, входящие в (4.4), имеют обычный вид:

$$I^{\pm}(\mathbf{p}_1) = - \int d^3 p_2 d\Gamma_1' d\Gamma_2' \delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1' - \mathbf{p}_2') \delta(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \varepsilon_1' - \varepsilon_2') \times \\ \times W [n_1^{\pm} n_2^{\mp} (1 - n_1^{\pm}) (1 - n_2^{\mp}) - n_1^{\mp} n_2^{\pm} (1 - n_1^{\mp}) (1 - n_2^{\pm})], \quad (4.5)$$

где $W = (2\pi\hbar)^3 (a/M)^2$ — вероятность рассеяния частиц с импульсами \mathbf{p}_1^{\pm} , \mathbf{p}_2^{\mp} в состоянии \mathbf{p}_1^{\pm} , \mathbf{p}_2^{\mp} .

Процедура определения кинетических коэффициентов отличается от стандартных тем, что вместо одного кинетического уравнения для частиц на поверхности Ферми

$|\mathbf{p}| = p_0$ имеется два кинетических уравнения (4.4), связанных через интегралы столкновений (4.5), для функций распределения n_{\pm} частиц, находящихся на ферми-сферах разных радиусов p_{\pm} .

После громоздких вычислений для коэффициентов гидродинамической вязкости и теплопроводности получаются следующие выражения ¹⁴:

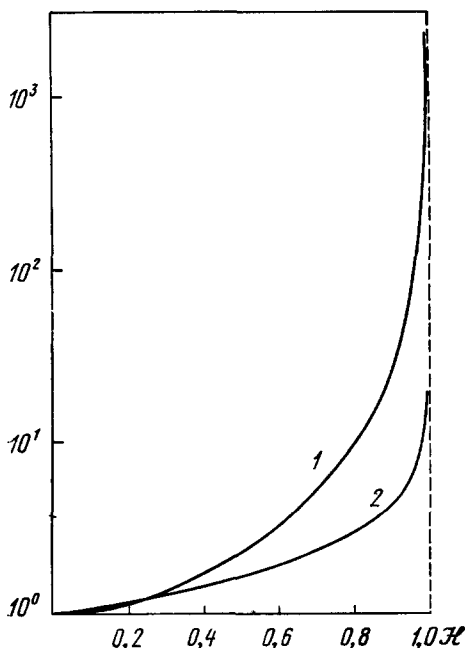


Рис. 10. Относительное изменение коэффициентов вязкости и теплопроводности в магнитном поле.

— $\eta(\mathcal{H})/\eta(0)$, 2 — $\kappa(\mathcal{H})/\kappa(0)$, $\mathcal{H} = 2\beta H/T_F$.

$$\frac{\eta(\mathcal{H})}{\eta(0)} = \frac{\chi_{\pm}^2}{2d^3} \frac{2+5d^2-3d^{10}}{5-3d^2}, \quad (4.6)$$

$$\frac{\kappa(\mathcal{H})}{\kappa(0)} = \frac{\chi_{\pm}^2}{2d} \frac{4+3d^4+d^6}{3+d^2}, \quad d = \frac{\chi_{-}}{\chi_{+}}.$$

Входящие в (4.6) коэффициенты вязкости и теплопроводности в отсутствие магнитного поля

$$\eta(0) = \frac{1}{12\pi^3} \frac{p_0^5}{(MaT)^2},$$

$$\kappa(0) = \frac{1}{8\pi} \frac{p_0^3}{(Ma)^2 T}$$

вычислены так же, как $\eta(\mathcal{H})$ и $\kappa(\mathcal{H})$, с помощью приближенного метода ⁷¹, и отличаются от точных значений (4.2) множителями порядка единицы. На рис. 10 приведен график функций $\eta(\mathcal{H})/\eta(0)$ и $\kappa(\mathcal{H})/\kappa(0)$, задаваемых формулами (4.6). В сильных магнитных полях $\mathcal{H} \rightarrow 1$ коэффициенты вязкости и теплопроводности (4.6) неограниченно возрастают,

$$\frac{\eta(\mathcal{H} \rightarrow 1)}{\eta(0)} \approx \frac{2^{5/3}}{5(1-\mathcal{H})^{3/2}},$$

$$\frac{\kappa(\mathcal{H} \rightarrow 1)}{\kappa(0)} \approx \frac{4}{3(1-\mathcal{H})^{1/2}}. \quad (4.7)$$

Предельные значения кинетических коэффициентов достигаются в полностью поляризованном растворе при $\mathcal{H} \geq 1$. В этом случае из уравнений (4.4) остается только одно, и для определения вязкости и теплопроводности можно воспользоваться точными выражениями (4.1), в которые следует подставить вероятность столкновения частиц $W(\theta, \varphi)$, связанную с амплитудой p -рассеяния (2.14),

$$W_{\kappa} = W_{\eta} = \frac{\pi}{2\hbar} |\Gamma(\mathbf{p}_F'; \mathbf{p}_F)|^2 = \frac{\pi}{2\hbar} \left(\frac{24\pi b}{M} \right)^2 p_F^4 \sin^4 \frac{\theta}{2} \cos^2 \varphi. \quad (4.8)$$

Коэффициенты $C(\lambda_{\eta})$ и $H(\lambda_{\kappa})$ для функций W (4.8) в данном случае оказываются равными $C(\lambda_{\eta}) = 0,79$, $H(\lambda_{\kappa}) = 0,55$. Окончательно,

$$\eta T^2 = \frac{7}{\pi} \left(\frac{\hbar^2}{24\pi b M} \right)^2 p_F \cdot 0,79 \quad \kappa T = \frac{35\pi}{6} \left(\frac{\hbar^2}{24\pi b M} \right)^2 \cdot \frac{0,55}{p_F}, \quad (4.9)$$

т. е. существенно меняют свою концентрационную зависимость и отличаются от своих значений в отсутствие поля $\eta(0)$, $\kappa(0)$ (4.2) большим множителем порядка

$$\frac{a^6}{b^6} (N_3 a^3)^{-4/3} \gg 1.$$

Выше предполагалось, что вся фермиевская компонента раствора, в том числе и система возбуждений He^3 со спинами, ориентированными против направления поля, является вырожденной. При этом в поле $2\beta H = T_F$ число частиц с антипараллельными полю спинами обращалось в нуль, что соответствует бесконечному возрастанию кинетических коэффициентов (4.6) — (4.7) при $\mathcal{E} \rightarrow 1$.

В действительности в растворе при ненулевой температуре всегда имеется какое-то количество фермионов со спинами, направленными против поля. Учет этого обстоятельства приводит к существенному отличию кинетических коэффициентов в сильных магнитных полях $\mathcal{E} \gg 1$ от задаваемых выражениями (4.7), (4.9) ⁷⁵:

$$\frac{\eta(\mathcal{E})}{\eta(0)} = \frac{2^{5/3}}{5} \left(\frac{T_F}{T} \right)^{3/2} V(z), \quad z = (1 - \mathcal{E}) T_F/T. \quad (4.10)$$

График функции $V(z)$

$$V(z) = \frac{\pi^2}{4} \left[\int_0^\infty \frac{t^{3/2} dt}{e^{t-z} + 1} \frac{e^{t-z}}{e^{t-z} - 1} \ln \frac{1+e^t}{1+e^z} \right]^{-1}$$

приведен на рис. 11. Выражение (4.10) справедливо для вырожденного раствора $T_F \gg T$ при почти полной поляризации раствора ($T_F/T^{2/3} V(z) \gg 1$).

Безразмерный параметр $z = (1 - \mathcal{E}) T_F/T$ фактически характеризует функцию распределения $n^-(p)$. При $z \gg 1$ система квазичастиц с направленными против поля спинами вырождена и, поскольку $V(z \gg 1) = z^{-3/2}$, выражение (4.10) совпадает с (4.7). В более сильных полях ($-z) \gg 1$ частиц с перевернутыми спинами экспоненциально мало, и функция n^- является бoльцмановской. При этом гидродинамическая вязкость (4.10) экспоненциально растет при увеличении магнитного поля: $V(z \rightarrow -\infty) \approx 0,70 \exp(-z)$. Таким образом, при увеличении температуры рост кинетических коэффициентов в зависимости от поля становится более медленным, и асимптотическое значение (4.9) достигается в более сильных полях.

Магнитокинетические эффекты — рост кинетических коэффициентов раствора с увеличением магнитного поля — могут наблюдаться и в невырожденном растворе. Для этого необходимо, чтобы фермиевская компонента оказалась достаточно поляризованной для неэффективности s -рассеяния, т. е. $\beta H \gg T$. В бoльцмановской области $T \gg T_F$ ⁷⁵

$$\frac{l_+(H)}{l(0)} = \frac{\exp(2\beta H/T) + 1}{2}. \quad (4.11)$$

В сильных магнитных полях $\beta H \gg T$ вязкость раствора растет так же, как и длина свободного пробега квазичастиц со спинами, направленными вдоль поля l_+ (4.11): $\eta(H) = \eta(0) \exp(2\beta H/T)/2$. Предельное значение l_+ в сильных полях и в бoльцмановской области определяется p -рассеянием $l_+(\infty)/l_+(0) \sim (\theta/T)^2 (\theta/Ms_F^2)^2$ и достигается в полях $\beta H \sim T \ln(\theta^2/MTs_F^2)$ ⁷⁶ (где θ — дебаевская температура He^4). Хотя при намагничивании слабого раствора длина пробега примесных возбуждений сильно возрастает, рассеяние квазичастиц He^3 на тепловых фонах в сильно поляризованном растворе почти всегда несущественно ⁷⁵⁻⁷⁸.

Основной экспериментальной трудностью для обнаружения магнитокинетических эффектов является обеспечение достаточно высокой степени поляризации спиновой системы, определяющей соотношением между температурой вырождения ($T_F [\text{K}] \approx 4,2 x^{2/3}$), магнитным полем $2\beta H$ ($2\beta = 0,16 [\text{мК/кЭ}]$) и температурой. Поле $H \sim 75$ кЭ может при достаточно низкой температуре ($2\beta H \sim 12$ мК) поляризовать раствор с концентрацией до $x \sim 10^{-4}$ ($T_F \sim 8$ мК). При этом длина пробега атомов He^3 возрастает в 10^5 раз и достигает десятков сантиметров. Во столько же раз возрастают

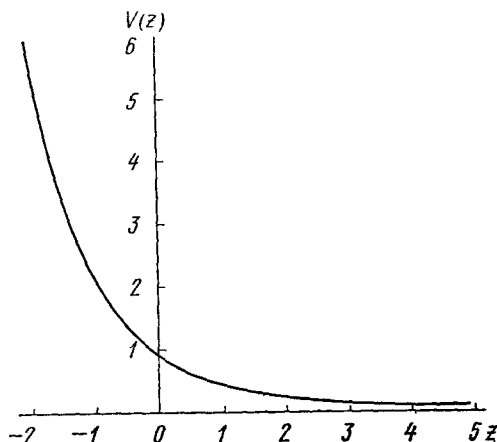


Рис. 11. График функции $V(z)$ из (4.10).

значения кинетических коэффициентов. Так, гидродинамическая вязкость увеличивается до значения $\sim 10^{-2}$ Пз, что соответствует вязкости воды. Для системы квазичастиц основным может оказаться рассеяние на стенках и становится возможным наблюдение различных эффектов нелокальности, характерных для кнудсеновского режима. В частности, могут проявиться тепловое скольжение или радиометрический эффект, а «сверхтечь» (superleak), пропускающей только сверхтекучую компоненту раствора, могут служить трубки сантиметрового диаметра.

Столь же значительное увеличение времени релаксации означает, что заметно расширяется область существования слабозатухающих высокочастотных мод $\omega\tau \gg 1$, что соответствует условию $\omega \gg 5 (10x^{1/3})^4 T^2$, где T — температура в мК. В силу обратного условия незатухающие гидродинамические колебания сильно поляризованного раствора фактически являются квазистатическими.

5. СВЕРХТЕКУЧЕСТЬ He^3 В РАСТВОРЕ

а) Температура перехода He^3 в сверхтекучее состояние

До сих пор мы рассматривали примесную подсистему He^3 как нормальную изотропную ферми-жидкость. В случае притяжения растворенных атомов существует принципиальная возможность перестройки спектра фермиевских возбуждений, вызванной БКШ-спариванием, и перехода фермиевской компоненты в сверхтекучее состояние. Бардин, Бейм, Пайнс^{21, 8} с помощью модельного потенциала взаимодействия примесных квазичастиц оценили температуру T_c перехода He^3 в растворе в сверхтекучее состояние для синглетного спаривания. В²¹ предсказывалось, что T_c порядка 10^{-6} К при нулевом давлении и уменьшается при повышении давления. Использование эмпирического потенциала с пятью подгруппными параметрами⁶⁰, наоборот, приводит к качественному изменению этого результата и к повышению температуры перехода под давлением $T_c \sim 10^{-4}$ К. В^{79, 80} обсуждалась также возможность сверхтекучего перехода в концентрированных растворах при высоких давлениях, обусловленного триплетным спариванием примесных фермионов. Интересные модельные оценки T_c проделал также Фай⁹⁷.

Поскольку длина s -рассеяния a согласно всем экспериментальным данным отрицательна, что соответствует притяжению между примесными атомами, то с помощью результатов Горькова и Мелик-Бархударова⁸¹ легко найти температуру сверхтекучего перехода, связанного с s -спариванием квазичастиц¹¹:

$$T_c = \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{2}{e} \right)^{7/3} T_0 \exp \left(-\frac{1}{2|\lambda|} \right), \quad (5.1)$$

где $\ln \gamma = C$ — постоянная Эйлера. При нулевом давлении формула (5.1) эквивалентна следующему численному выражению⁸²:

$$T_c [\text{K}] = 0,71 x_2^{2/3} \exp \left(-\frac{1,20}{x_2^{1/3}} \right),$$

что для раствора с молярной концентрацией $x = 0,03$ соответствует температуре $T_c \approx 1,4$ мК.

В отличие от электронной ферми-жидкости в металле, применение теории БКШ к вырожденным растворам He^3 — He^4 не является модельным приближением и для достаточно слабого раствора дает точное описание сверхтекучего перехода. Применение формул теории сверхпроводимости

(см., например, ⁵⁵) позволяет определить скачок теплоемкости раствора в точке фазового перехода:

$$C_s - C_n = 1,95 x \exp \left(-\frac{1,20}{x^{1/3}} \right), \quad \frac{C_s(T_c)}{C_n(T_c)} = 2,43,$$

и значение энергетической щели в спектре боголюбовских возбуждений $\Delta(T)$ при нуле температур $\Delta(0) = 1,75 T_c$. При этом длина когерентности $\xi = r_0 T_0 / \Delta(0)$ значительно превосходит среднее расстояние между растворенными атомами $r_0 \sim \hbar/p_0$, и в достаточно слабом растворе можно ожидать проявления аналога эффекта Джозефсона. Экспериментально

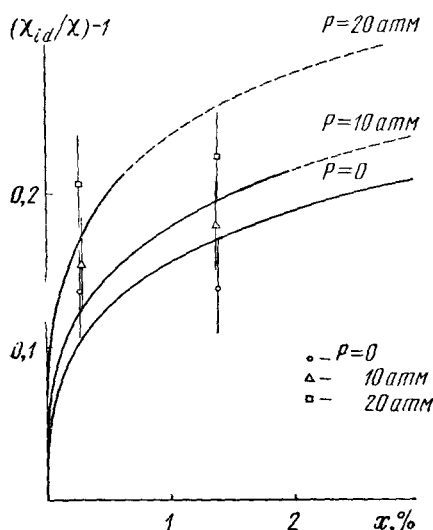


Рис. 12. Сравнение экспериментальных данных по магнитной восприимчивости слабых растворов под давлением ⁶³ и результатов, вычисленных по формуле (2.26) с помощью таблицы.

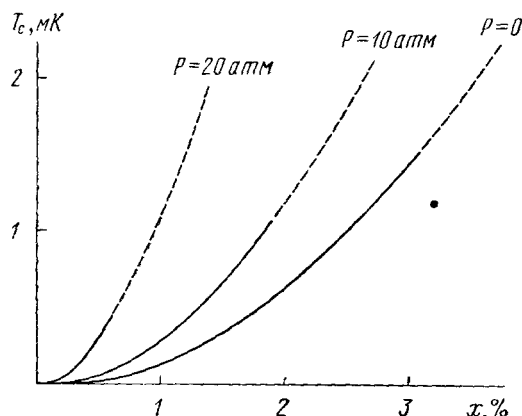


Рис. 13. Концентрационная зависимость температуры перехода He^3 в слабых растворах $\text{He}^3 - \text{He}^4$ в сверхтекучее состояние при давлениях 0; 10 и 20 атм.

переход He^3 в сверхтекучее состояние можно наблюдать, например, при измерении магнитной восприимчивости, в калориметрических опытах и по резонансному поглощению ультразвука на частоте энергетической щели.

Поскольку в термодинамические функции параметр λ входит в виде малых поправок к вкладу идеального ферми-газа, то зависимость длины s -рассеяния от давления можно наиболее точно определить из экспериментальных данных о кинетических коэффициентах раствора под давлением ⁸². С помощью данных Мэрдока и др. ⁷⁴ для раствора с $x = 1,3 \cdot 10^{-2}$ находим значение a при давлении $P = 10$ атм (см. таблицу).

P , атм	M/m_3 (m_3 — масса атома He^3 , M — эффективная масса)	V , $\text{см}^3 \cdot \text{моль}^{-1}$ (молярный объем)	a , \AA
0	2,33	27,580	—1,5
10	2,57	25,180	—1,7 ¹
20	2,85	23,744	—2,4

При давлении $P = 20$ атм и концентрации $x = 1,3 \cdot 10^{-2}$ разложение по степеням λ справедливо лишь качественно. Поэтому величина a при $P = 20$ атм была определена из данных Ахонена и др. ⁶³ по магнитной восприимчивости раствора с $x = 0,27 \cdot 10^{-2}$ с помощью соотношения (2.26). На рис. 12 проводится сравнение восприимчивости, вычисленной по формуле (2.26) с учетом данных табл. I и экспериментальных результатов ⁶³. Пунктирные линии на рис. 12—13 соответствуют вычислениям в той области,

где разложение по параметру λ имеет экстраполяционный характер. При $P = 10$ атм и $x = 1,32 \cdot 10^{-2}$ (когда λ -разложение справедливо) осмотическое давление, вычисленное в рамках изложенной схемы (2.24), достигает величины 1,51 Торр, что удовлетворительно согласуется с измеренным значением 1,59 Торр⁶⁰. Из данных по восприимчивости раствора при $x = 1,33 \cdot 10^{-2}$ ⁶³, учитывая зависимость полной эффективной массы возбуждения от концентрации (2.23), соотношение $\partial(\ln M)/\partial P = 1,5 \cdot 10^{-2}$ атм⁻¹⁶⁷ и температурные поправки, при малых давлениях находим: $\partial \ln a / \partial \ln P = 0,12$. Концентрационная зависимость температуры перехода He^3 в растворе в сверхтекучее состояние⁸² при давлениях 0; 10 и 20 атм (см. формулу (5.1) и табл. I) изображена на рис. 13. Авторы⁶³ охладили раствор с $x = 1,33 \cdot 10^{-2}$ до температуры 2,4 мК и не обнаружили фазового перехода, который в соответствии с рис. 13 должен происходить при $T_c \approx 0,5$ мК ($P = 10$ атм). Поскольку T_c зависит от a экспоненциально, то точность полученных результатов сильно зависит от точности использованных экспериментальных данных. Однако можно надеяться, что вычисления дают правильный масштаб всех величин для рассмотренных явлений.

б) Уравнения трехскоростной гидродинамики

При достаточно низких температурах $T < T_c$ раствор представляет собой макроскопическую систему, в которой одновременно существуют два вида конденсата, и соответственно два вида сверхтекучего движения. Свойства такой жидкости должны описываться уравнениями трехскоростной гидродинамики с двумя сверхтекучими и одной нормальной скоростями^{83, 84}:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\rho}_1 + \text{div}(\rho_1 \mathbf{v}_n + \mathbf{p}_1) &= 0, & \dot{\rho}_2 + \text{div}(\rho_2 \mathbf{v}_n + \mathbf{p}_2) &= 0, \\ \dot{j}_i + \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k} &= 0, & \dot{S} + \text{div} S \mathbf{v}_n &= 0, \\ \dot{\mathbf{v}}_1 + \nabla \left(\mu_1 - \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{v}_n \mathbf{v}_1 \right) &= 0, \\ \dot{\mathbf{v}}_2 + \nabla \left(\mu_2 - \frac{v_n^2}{2} + \mathbf{v}_n \mathbf{v}_2 \right) &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{v}_1 &= \text{rot } \mathbf{v}_2 = 0; \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

здесь ρ_1, ρ_2 — плотности частиц каждого сорта (полная плотность раствора $\rho = \rho_1 + \rho_2$), $\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — скорости соответственно нормального и двух сверхтекучих движений, $\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}_n + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ — импульс единицы объема, S — энтропия единицы объема. Смысл величин $\mu_1, \mu_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ определяется термодинамическим тождеством для энергии единицы объема раствора E_0 в системе координат, в которой $\mathbf{v}_n = 0$

$$dE_0 = T dS + \mu_1 d\rho_1 + \mu_2 d\rho_2 + \mathbf{p}_1 d(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_n) + \mathbf{p}_2 d(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_n). \quad (5.3)$$

Энергия в лабораторной системе при этом равна

$$E = \frac{1}{2} \rho v_n^2 + (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) \mathbf{v}_n + E_0. \quad (5.4)$$

Тензор потока импульса имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{ik} &= \rho v_{ni} v_{nk} + (p_{1i} + p_{2i}) v_{nk} + (p_{1k} + p_{2k}) v_{ni} + \\ &\quad + p_{1k} (v_{1i} - v_{ni}) + p_{2k} (v_{2i} - v_{ni}) + P \delta_{ik}, \\ P &= -E_0 + \mu_1 \rho_1 + \mu_2 \rho_2 + TS. \end{aligned} \quad (5.5)$$

Все написанные до сих пор формулы отличаются от соответствующих формул двухскоростной гидродинамики лишь тривиальным удвоением числа членов, описывающих относительное движение сверхтекучей и нормальной частей. Существенная особенность появляется, однако, при введении величин, играющих роль плотностей сверхтекучих частей⁸⁵.

Поскольку эффективная масса квазичастицы He^3 M в 2,3 раза больше массы атома He^3 m_3 , то при движении квазичастицы переносится, кроме массы He^3 , еще и отнюдь не малая масса He^4 . Куперовские пары образуются в результате слабого взаимодействия между фермионами. Они представляют собой связанное состояние квазичастиц, свойства которых практически не меняются при возникновении сверхтекучести. Ясно поэтому, что и сверхтекучее движение He^3 должно сопровождаться переносом массы He^4 . Если скорости движения не слишком велики, то относительные импульсы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_2 могут быть разложены по степеням малых относительных скоростей $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_n$ с постоянными коэффициентами:

$$\mathbf{p}_1 = \rho_{11}^{(s)} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_n) + \rho_{12}^{(s)} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_n), \quad (5.6)$$

$$\mathbf{p}_2 = \rho_{21}^{(s)} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_n) + \rho_{22}^{(s)} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_n).$$

Совокупность этих коэффициентов $\rho_{\alpha\beta}^{(s)}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) является аналогом плотности сверхтекучей части в двухскоростной гидродинамике. Как видно из термодинамического тождества (5.3), величины $\rho_{\alpha\beta}^{(s)}$ равны вторым производным от энергии E_0 по относительным скоростям. Поэтому матрица $\rho_{\alpha\beta}^{(s)}$ симметрична, т. е.

$$\rho_{12}^{(s)} = \rho_{21}^{(s)}. \quad (5.7)$$

Можно сказать, что в трехскоростной гидродинамике вместо плотности сверхтекучей части появляются три независимые величины $\rho_{11}^{(s)}$, $\rho_{22}^{(s)}$, $\rho_{12}^{(s)}$. Последняя из них описывает упоминавшийся выше эффект увлечения каждым из сверхтекучих движений обеих компонент раствора.

Соотношения (5.3) и (5.6) позволяют легко найти зависимости всех термо- и гидродинамических величин от относительных скоростей. Так, энергия раствора в лабораторной системе координат E равна⁸⁵

$$E = \frac{1}{2} (\rho^{(n)} v_n^2 + \rho_{11}^{(s)} v_1^2 + 2\rho_{12}^{(s)} \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 + \rho_{22}^{(s)} v_2^2) + E^{(0)}(S, \rho_1, \rho_2), \quad (5.8)$$

где E^0 — энергия покоящегося раствора, а величина $\rho^{(n)} = \rho - \rho_{11}^{(s)} - \rho_{22}^{(s)} - 2\rho_{12}^{(s)}$ играет роль плотности нормальной части. Для того чтобы кинетическая часть энергии раствора была положительно определенной, необходимо, как видно из (5.8), кроме положительности $\rho_{11}^{(s)}$, $\rho_{22}^{(s)}$ и $\rho^{(n)}$, еще условие $\rho_{12}^{(s)2} < \rho_{11}^{(s)} \rho_{22}^{(s)}$. Сама же величина $\rho_{12}^{(s)}$ может быть, в принципе, как положительной, так и отрицательной.

Уравнения (5.2) с условиями (5.6), (5.8) представляют собой полную систему уравнений гидродинамики, если известны термодинамические функции раствора и все три сверхтекучие плотности.

Необходимо, впрочем, подчеркнуть, что при наличии двух сверхтекучих движений имеется неоднозначность в определении соответствующих скоростей. В принципе, можно было бы определить каждую из скоростей как отношение потока массы частиц определенного сорта к их плотности. Тогда обсуждаемый выше эффект увлечения отсутствовал бы по определению. Существенно, однако, что при таком определении сверхтекучее движение не является потенциальным. Между тем условие потенциальности играет весьма важную роль в формулировке полной системы гидродинамических уравнений. Сохраняя условие потенциальности, мы обязательно должны учитывать возможность переноса каждым из сверхтекучих движений обеих компонент раствора.

На основе теории БКШ легко дать микроскопический вывод формул для потоков массы и тем самым вычислить величины $\rho_{\alpha\beta}^{(s)}$ ⁸⁵:

$$\left. \begin{aligned} \rho_{11}^{(s)} &= \frac{m_3}{M} N_s, \quad \rho_{12}^{(s)} = \rho_{21}^{(s)} = \frac{m_2}{M} (M - m_3) N_s; \\ \rho_{22}^{(s)} &= \rho_2 - (M - m_3) N_n - \frac{m_3}{M} (M - m_3) N_s, \quad \rho^{(n)} = M N_n; \\ N_n &= N_3 - N_s, \\ N_s &= N_3 \left[1 - \frac{T \partial \ln \Delta(T)}{\partial T} \right]^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

где N_s — число «сверхтекучих» атомов He^3 , а величина энергетической щели $\Delta(T)$ определяется обычными формулами теории БКШ.

При нуле температур плотность нормальной части обращается в нуль, а полный поток массы оказывается равным $\mathbf{j} = \rho_2 \mathbf{v}_2 + m_3 N_s \mathbf{v}_1$. Отметим, что в слабых растворах неравенство $\rho_{12}^{(s)2} < \rho_{11}^{(s)} \rho_{22}^{(s)}$ выполняется с большим запасом, поскольку $\rho_{12}^{(s)}$, $\rho_{11}^{(s)}$ пропорциональны концентрациям, а $\rho_{22}^{(s)}$ не содержит этого малого множителя.

Существование эффекта увлечения каждым из сверхтекучих движений обеих компонент раствора подтверждается также при подробном расчете диаграммным методом свойств системы с двумя бозе-конденсатами при $T = 0$ ⁸⁶.

Уравнения трехскоростной гидродинамики (5.2) допускают существование звуковых волн трех типов ^{83-85,87}. Определим скорости звуковых колебаний сверхтекучего раствора. Это легко сделать с помощью линеаризованных уравнений (5.2), если учесть, что, как будет видно из результата, скорости трех типов звуковых колебаний удовлетворяют условию $c_1 \gg c_2 \gg c_3$, причем c_2 имеет степенную малость по концентрации раствора, а c_3 — экспоненциальную (как и температура перехода фермиевской компоненты в сверхтекучее состояние). Не останавливаясь на простых вычислениях, приведем результаты ⁸⁵.

Скорость колебаний первого типа определяется обычным образом через сжимаемость раствора

$$c_1^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho},$$

слабо зависит от температуры и близка к скорости первого звука в чистом He^4 .

Колебания второго типа представляют собой колебания концентрации раствора. Соответствующая скорость определяется формулой

$$c_2^2 = \frac{\rho^{(n)} \rho_{11}^{(s)} + (\rho_1 - \rho_{11}^{(s)} - \rho_{12}^{(s)})^2}{\rho^2 \rho^{(n)}} \left(\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} \right)_{P,T} \approx \frac{v_0^2}{3}, \quad (5.10)$$

где $x = \rho_1 / (\rho_1 + \rho_2)$ — концентрация. Таким образом, колебания второго типа представляют собой не что иное, как известные ⁸⁸⁻⁹⁰ коллективные колебания сверхтекучего ферми-газа примесных частиц He^3 .

Колебания третьего типа — это в основном колебания температуры, и в этом смысле они аналогичны второму звуку в обычной сверхтекучей жидкости. Квадрат скорости колебаний равен

$$c_3^2 = \frac{TS^2}{C} \frac{\rho_{11}^{(s)}}{\rho^{(n)} \rho_{11}^{(s)} + (\rho_1 - \rho_{11}^{(s)} - \rho_{12}^{(s)})^2} = \frac{TS^2}{C} \frac{N_s}{M N_s N_n}, \quad (5.11)$$

что также весьма напоминает выражение для скорости второго звука; здесь $C = T \partial S / \partial T$ — теплоемкость единицы объема раствора. В точке $T = T_c$ перехода фермиевской компоненты в сверхтекучее состояние c_3 обращается в нуль пропорционально $(T_c - T)^{1/2}$. При $T \ll T_c$ она пропорциональна первой степени температуры: $c_3 = (9/2\pi)^{1/4} (T/p_0)$.

Формулы (5.9) перестают быть справедливыми при очень низких температурах, когда основной вклад в температурную зависимость термодинамических величин и сверхтекучих плотностей вносят не боголюбовские возбуждения, а фононы. В данном случае имеются два типа фононов, соответствующих первым двум типам звуковых колебаний раствора. Однако основной вклад в температурную зависимость всех вели-

чин вносят фононы второго звука, поскольку их скорость много меньше⁸⁵ (подробнее см. ⁹¹).

Волны третьего звука представляют собой при этом звуковые колебания в фононном газе второго звука, и их скорость распространения равна $c_3 = c_2/\sqrt{3} = v_0/3$. Следует подчеркнуть, что частота колебаний третьего звука в рассматриваемом температурном интервале должна быть весьма низкой, поскольку длина волны должна значительно превосходить длину свободного пробега тепловых возбуждений, которая чрезвычайно велика при столь низких температурах.

Исследование гидродинамических и высокочастотных колебаний в растворе сверхтекучей ферми-жидкости в сверхтекучей бозе-жидкости с помощью кинетического уравнения и феноменологической f -функции имеется также в работе Воловика, Минеева и Халатникова⁹².

* * *

Многие из полученных результатов могут быть использованы и для других типов ферми-жидкости низкой плотности, в которой взаимодействие между затравочными частицами убывает с ростом расстояния между ними достаточно быстро (например, для экранированного кулоновского потенциала).

Наиболее интересным, по нашему мнению, является исследование фермиевских систем с высокой степенью спиновой поляризации. Значительная поляризация спиновой системы может быть достигнута не только с помощью внешнего магнитного поля, но и многими другими методами. Примером полностью поляризованной ферми-жидкости низкой плотности является ферромагнитная фаза кристаллического He^3 ⁹³, в которой длина свободного пробега вакансионных оказывается весьма значительной. Для электронных систем неравномерная заселенность спиновых состояний может быть создана, например, методами инжекции спинов определенной ориентации. Значительный интерес представляет также разработанный недавно⁹⁸⁻¹⁰⁰ способ магнитной поляризации жидкого He^3 . Для подобных плотных ферми-систем некоторые из полученных выше результатов также являются строгими.

Институт физических проблем
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Халатников И. М. Теория сверхтекучести. — М.: Наука, 1971.
2. Есельсон Б. Н., Григорьев В. Н., Иванцов В. Г., Рудавский Э. Я., Саникидзе Д. Г., Сербин И. А., Растворы квантовых жидкостей He^3 — He^4 . — М.: Наука, 1973.
3. Wilks J. Liquid and Solid Helium. — Oxford: University Press, 1967.
4. Keller W. E. Helium-3 and Helium-4. — N.Y.: Plenum Press, 1969.
5. Пешков В. П. — УФН, 1968, т. 94, с. 607.
6. Taconis K. W., De Bruyn Ouboter R. — In: Progress in Low Temperature Physics. — Amsterdam: North-Holland, 1964. — V. IV, p. 38.
7. Ebner C., Edwards D. O. — Phys. Rept., 1971, v. 2C, p. 77.
8. Wheatley J. C. — Am. J. Phys., 1968, v. 36, p. 181.
9. Radebaugh R. — NBS Techn. Note, 1968, v. 362, p. 105.
10. Baym G., Pethick C. Low Temperature Properties of Dilute Solutions of He^3 in Superfluid He^4 . — In: The Properties of Liquid and Solid Helium/Ed. K. H. Bennemann, J. B. Ketterson. — N.Y.: Wiley, 1978. — v. II, p. 123.
11. Башкин Е. П. — Письма ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 3.
12. Башкин Е. П. — ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 1849.
13. Башкин Е. П., Мейерович А. Э. — Письма ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 696.
14. Башкин Е. П., Мейерович А. Э. — ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 1904.
15. Башкин Е. П., Мейерович А. Э. — УФН, 1978, т. 125, с. 360.
16. Edwards D. O., Brewer D. F., Seligmann P., Skertic M., Yaqub M. — Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 773.
17. Anderson A. C., Roach W. R., Sarwinski R. E., Wheatley J. C. — Ibid., 1966, v. 16, p. 263.
18. Anderson A. C., Edwards D. O., Roach W. R., Sarwinski R. E., Wheatley J. C., — Ibid., 1966, v. 17, p. 367.

19. Abel W. R., Johnson R. T., Wheatley J. C., Zimmermann W.—*Ibid.*, 1967, v. 18, p. 737.
20. Bardeen J., Baym G., Pines D.—*Ibid.*, 1966, v. 17, p. 372.
21. Bardeen J., Baym G., Pines D.—*Phys. Rev.*, 1967, v. 156, p. 207.
22. Campbell L. J.—*Phys. Rev. Lett.*, 1967, v. 19, p. 156.
23. Van Leeuwen J. M. J., Cohen E. G. D.—*Phys. Rev.*, 1968, v. 176, p. 385.
24. Emery V. J.—*Ibid.*, 1966, v. 148, p. 138; 1967, v. 161, p. 194; 1968, v. 175, p. 251.
25. Baym G.—*Phys. Rev. Lett.*, 1966, v. 17, p. 952.
26. Woo C. W., Tan H. T., Massey W. E.—*Phys. Rev.*, 1969, v. 185, p. 287.
27. Davison T. B., Feenberg E.—*Ibid.*, 1969, v. 178, p. 306.
28. Hansen J. P., Schiff D.—*Phys. Rev. Lett.*, 1969, v. 23, p. 1488.
29. McMillan W. L.—*Phys. Rev.*, 1969, v. 182, p. 299.
30. Ostgaard E.—*Ibid. Ser. A.*, 1970, v. 1, p. 1048.
31. Ebner C.—*Phys. Rev.*, 1967, v. 156, p. 222; 1969, v. 185, p. 392.
32. Baym G., Ebner C.—*Ibid.*, 1968, v. 170, p. 346.
33. Eckstein S. G., Eckstein Y., Kuper C. G., Ron A.—*Phys. Rev. Lett.*, 1970, v. 25, p. 97.
34. Disatnik Y., Brucker H.—*J. Low Temp. Phys.*, 1972, v. 7, p. 491.
35. Халатников И. М.—*Письма ЖЭТФ*, 1967, т. 5, с. 288.
36. Халатников И. М.—*ЖЭТФ*, 1968, т. 35, с. 1919.
37. Ландау Л. Д.—*ЖЭТФ*, 1956, т. 30, с. 1058; то же; *Собрание сочинений*.— М: Наука, 1969.— Т. 2, с. 328.
38. Ландау Л. Д.—*ЖЭТФ*, 1957, т. 32, с. 59; то же; *Собрание сочинений*.— М.: Наука, 1969.— Т. 2, с. 337.
39. Ландау Л. Д.—*ЖЭТФ*, 1958, т. 35, с. 97; то же; *Собрание сочинений*.— М: Наука, 1969.— Т. 2, с. 363.
40. Ландау Л. Д., Померанчук И. Я.—*ДАН СССР*, 1948, т. 59, с. 669; то же; Ландау Л. Д. *Собрание сочинений*.— М: Наука, 1969.— Т. 2, с. 35.
41. Померанчук И. Я.—*ЖЭТФ*, 1949, т. 19, с. 42.
42. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая механика*.— М: Наука, 1974.
43. Huang K., Yang C. N.—*Phys. Rev.*, 1957, v. 105, p. 767.
44. Lee T. D., Yang C. N.—*Ibid.*, p. 1119.
45. Абрикосов А. А., Халатников И. М.—*ЖЭТФ*, 1957, т. 33, с. 1154.
46. Fu H. H., Pethick C. J.—*Phys. Rev. Ser. B*, 1976, v. 14, p. 3837.
47. Силин В. П.—*ЖЭТФ*, 1957, т. 33, с. 1227.
48. Lynton E. A., Fairbank H. A.—*Phys. Rev.*, 1950, v. 80, p. 1043.
49. Pellam J. R.—*Ibid.*, 1955, v. 99, p. 1327.
50. Roberts T. R., Sherman R. H., Sydorik S. G.—*J. Res. NBS. Ser. A*, 1964, v. 68, p. 567.
51. Massey W. E., Woo C. W., Tan H. T.—*Phys. Rev. Ser. A*, 1970, v. 1, p. 519.
52. Brubaker N. R., Edwards D. O., Sarwinski R. E., Seligmann P., Sherlock R. A.—*Phys. Rev. Lett.*, 1970, v. 25, p. 715.
53. Есельсон Б. Н., Слюсарев В. А., Соболев В. Н., Стржеменный М. А.—*Письма ЖЭТФ*, 1975, т. 21, с. 253.
54. Абрикосов А. А., Дзялошинский И. Е.—*ЖЭТФ*, 1958, т. 35, с. 771.
55. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Статистическая физика*.— М: Наука, 1964.
56. Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. *Методы квантовой теории поля в статистической физике*.— М.: Наука, 1962.
57. Edwards D. O., Ifft E. M., Sarwinski R. E.—*Phys. Rev.*, 1969, v. 177, p. 380.
58. Seligmann P., Edwards D. O., Sarwinski R. E., Tough J. T.—*Ibid.*, 1969, v. 181, p. 415.
59. Landau J., Tough J. T., Brubaker N. R., Edwards D. O.—*Phys. Rev. Lett.*, 1969, v. 23, p. 183.
60. Landau J., Tough J. T., Brubaker N. R., Edwards D. O.—*Phys. Rev. Ser. A*, 1970, v. 2, p. 2472.
61. Husa D. L., Edwards D. O., Gaines J. R.—*In: Proc. LT-10*.— М.: 1966.—P. 365.
62. Husa D. L., Edwards D. O., Gaines J. R.—*Phys. Lett.*, 1966, v. 21, p. 28.
63. Ahonen A. I., Palanen M. A., Richardson R. C., Takano Y.—*J. Low Temp. Phys.*, 1976, v. 25, p. 733.
64. McDougall J., Stoner E. C.—*Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A*, 1938, v. 237, p. 350.
65. Галицкий В. М.—*ЖЭТФ*, 1958, т. 34, с. 151.
66. Lhuillier D., Francois M.—*J. Low. Temp. Phys.*, 1977, v. 28, p. 473.

67. Abraham B. M., Eckstein Y., Ketterson J. B. — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 422.
68. Саникидзе Д. Г., Шаанова А. Н. — Письма ЖЭТФ, 1969, т. 10, с. 482.
69. Андреев А. Ф., Халатников И. М. — ЖЭТФ, 1963, т. 44, с. 2058.
70. Башкин Е. П., Мейерович А. Э. — Письма ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 517.
71. Абрикосов А. А., Халатников И. М. — ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 1084.
72. Brooker G. A., Sykes J. — Phys. Rev. Lett., 1968, v. 21, p. 279.
73. Силин В. П. Введение в кинетическую теорию газов. — М.: Наука, 1971.
74. Murdock E. S., Mountfield K. R., Corruccini L. R. — J. Low Temp. Phys., 1978, v. 31, p. 581.
75. Мейерович А. Э. — Phys. Lett. Ser. A, 1978, v. 69, p. 279.
76. Халатников И. М., Жарков В. Н. — ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 1108.
77. Baum G., Ebner C. — Phys. Rev., 1967, v. 164, p. 235.
78. Мейерович А. Э. — ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1180.
79. Hoffberg M. B. — Phys. Rev. Ser. A, 1972, v. 5, p. 1963.
80. Patton B. R., Zaringham A. — Phys. Lett. Ser. A, 1975, v. 55, p. 95.
81. Горьков Л. П., Мелик-Бархударов Т. К. — ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 1452.
82. Bashkin E. P. — Phys. Lett. Ser. A, 1978, v. 69, p. 282.
83. Халатников И. М. — ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 653; Письма ЖЭТФ, 1973, т. 17, с. 534.
84. Galasiewicz — Phys. Lett. Ser. A, 1973, v. 43, p. 149; Phys. kondens. Matter, 1974, v. 18, p. 141, 155.
85. Андреев А. Ф., Башкин Е. П. — ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 319.
86. Непомнящий Ю. А. — ЖЭТФ, 1976, т. 70, с. 1070.
87. Минеев В. П. — ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 683.
88. Боголюбов Н. Н., Толмачев В. В., Ширков Д. В. [‡] Новый метод в теории сверхпроводимости. — М.: Изд. АН СССР, 1958.
89. Галицкий В. М. — ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 1011.
90. Anderson P. W. — Phys. Rev., 1959, v. 112, p. 1900.
91. Башкин Е. П. Кандидатская диссертация. — М.: ИФП АН СССР, 1978.
92. Воловик Г. Е., Минеев В. П., Халатников И. М. — ЖЭТФ, 1975, т. 69, с. 675.
93. Андреев А. Ф., Марченко В. И., Мейерович А. Э. — Письма ЖЭТФ, 1977, т. 26, с. 40.
94. Башкин Е. П., Мейерович А. Э. — ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 383.
95. Фомин И. А. — ЖЭТФ, 1968, т. 54, с. 1881; Письма ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 90.
96. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред. — М.: Госатомиздат, 1961.
97. Fay D. — Phys. Rev. Ser. B, 1977, v. 16, p. 537.
98. Lhuillier C., Laloë F. — J. de Phys., 1979, t. 40, p. 239.
99. Castaing B., Nozieres P. — Ibid., 1979, t. 40, p. 257.
100. Chapellier M., Frosatti G., Rasmussen F. B. — Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 904.