1980 г. Ноябрь *Том 132, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145

КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ТРАЕКТОРИЯМ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Ф. А. Березин

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

1) Метод континуальных интегралов. В настоящее время метод континуальных интегралов занимает одно из центральных мест в математическом аппарате теоретической физики. Это связано в основном с двумя обстоятельствами. Во-первых, континуальный интеграл необычайно нагляден и универсален: с его помощью любая квантовая величина представляется в виде суммы вкладов виртуальных классических траекторий, простая зависимость от планковской постоянной h

позволяет легко усмотреть, что при $h \to 0$ доминирующий вклад в квантовую величину дается реальной классической траекторией, т. е. траекторией, удовлетворяющей принципу наименьшего действия. Во-вторых, он технически очень удобен; с его помощью легко строятся ряды теории возмущений, а также квазиклассические асимптотики.

В предлагаемой статье дается последовательное изложение теории континуальных интегралов, базирующееся на теории символов операторов.

2) Континуальный интеграл по траекториям в фазовом пространстве, символы операторов и квантование. Интеграл Фейнмана по траекториям в фазовом пространстве [1] имеет вид

$$J = \int e^{\frac{1}{ih}\int\limits_{t_1}^{t_2} L\,dt} \prod dp(t)\,dq(t), \tag{1}$$

где L — функция Лагранжа:

$$L = H(p,\ q) - \sum p_k \dot{q}_k$$

(с точностью до полной производной), H — гамильтониан системы. Интеграл (1) берется по тому или иному множеству траекторий в зависимости от решаемой задачи. (Например, для нахождения матричного элемента $\langle q_2 \mid e^{(t/ih)\hat{H}} \mid q_1 \rangle$ следует вычислить интеграл (1) по траекториям, удовлетворяющим граничным условиям $q(0) = q_1$, $q(t) = q_2$.)

Каков математический смысл этого интеграла? Другими словами, как его вычислять?

Существует точка зрения, согласно которой интеграл (1) является лишь удобным иероглифом, в сжатой форме записывающий алгоритм, теории возмущений (см., например, [2]). Такая точка зрения представляется слишком ограничительной. С другой стороны, идущий от Винера традиционный взгляд на континуальный интеграл как на интеграл по мере в функциональном пространстве, наталкивается здесь на слишком большие сложности и поэтому представляется неадекватным *).

Другая причина неудовлетворительности подхода к интегралу (1) со стороны теории меры состоит в том, что он должен обслуживать также системы фермионов, а в этом случае интегрирование берется по «антикоммутирующим переменным»; оно имеет чисто алгебраический характер и ни с какой мерой заведомо не связано. Наша точка зрения состоит в том, что интеграл (1) следует понимать как предел конечнократных аппроксимаций. Однако каких? В работе [4] показано, что интеграл (1) очень чувствителен к выбору его аппроксимаций, причем неоднозначность, возникающая в результате этой зависимости, носит тот же характер, что и неоднозначность квантования. Этот пункт является принципиальным, поэтому поясним его более подробно.

Фиксировать квантование — значит установить единое правило, согласно которому каждой классической наблюдаемой величине $f(p,\ q)$ ставится в соответствие квантовая наблюдаемая $\hat{f}$, т. е. оператор в гильбертовом пространстве **). Соответствие $f \to \hat{f}$ должно быть линейным.

*) Отметим, однако, что в настоящее время разрабатывается подход к континуальным интегралам, основанный на далеких обобщениях понятия меры. Подробное изложение относящихся сюда вопросов см. в работе [3].

**) Например, произведению pq можно сопоставить оператор $\hat{p}\hat{q}$, можно $\hat{q}\hat{p}$, а можно также $(\hat{p}\hat{q} + \hat{q}\hat{p})/2$, где $\hat{p}$, $\hat{q}$ — обычные операторы импульса и координаты.

В этой ситуации функция f называется символом оператора $\hat{f}$. Как только такое соответствие построено, в пространстве функций возникает операция, копирующая произведение операторов: если f, f_1, f_2 — символы операторов $\hat{f}$, $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$, причем $\hat{f} = \hat{f}_1\hat{f}_2$, то $f = f_1 * f_2$. Операция $*$, будучи билинейной по f_1 и f_2, задается интегралом *)

$$f(p, q) = (f_1 * f_2)(p, q) = \\ = \int K_h(p, q; p_1, q_1; p_2, q_2) f_1(p_1, q_1) f_2(p_2, q_2)\, dp_1\, dp_2\, dq_1\, dq_2. \quad (2)$$

Наиболее важным для практических применений являются вейлевские и виковские квантования. Последнее является важнейшим инструментом для изучения систем с бесконечным числом степеней свободы.

3) Конструкция континуального интеграла с помощью символов операторов. Пусть $\hat{H}$ — некоторый гамильтониан и $H(p, q)$ — его символ. При малых t

$$\hat{G}(t) = \exp\left(\frac{t}{ih}\hat{H}\right) = 1 + \frac{t}{ih}\hat{H} + O(t^2).$$

Поэтому символ оператора $\hat{G}(t)$ равен

$$G(t) = 1 + \frac{t}{ih}H + O(t^2) = e^{(t/ih)H}(1 + O(t^2)). \quad (3)$$

Обозначим через $\hat{U}(t)$ оператор, символом которого является $U(t) = \exp[(t/ih)H]$. Из (3) следует, что

$$\hat{G}(t) = \hat{U}(t)(1 + O(t^2)). \quad (4)$$

Рассмотрим операторное тождество $\hat{G}(t) = (\hat{G}(t/N))^N$. Заменим в нем оператор $\hat{G}(t/N)$ оператором $\hat{U}(t/N)$. В результате получится приближенное выражение для $\hat{G}$:

$$\hat{G}_N(t) = \left(\hat{U}\left(\frac{t}{N}\right)\right)^N. \quad (5)$$

Из (4) следует, что $\lim_{N\to\infty} \hat{G}_N(t) = \hat{G}(t)$. Поскольку символ оператора $\hat{U}(t/N)$ известен, в (5) можно перейти от операторов к символам:

$$G_N(t) = U\left(\frac{t}{N}\right) * \ldots * U\left(\frac{t}{N}\right). \quad (6)$$

Учитывая, что операция $*$ задается интегралом (2), мы получаем выражение для G_N в виде многократного интеграла, $G = \lim_{N\to\infty} G_N$. Аналогичная конструкция возможна также в случае, когда гамильтониан H зависит от t. На близких соображениях основана работа [8].

4) Содержание статьи. Выражение (6) является исходной конечнократной аппроксимацией континуального интеграла (1). В зави-

*) Соответствие $f \to \hat{f}$ не вполне произвольно. Главное требование, которое к нему предъявляется,— это принцип соответствия:

1) $\lim_{h\to 0}(f_1 * f_2)(p, q) = f_1(p, q) f_2(p, q)$, 2) $\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f_1 * f_2 - f_2 * f_1) = \frac{1}{i}[f_1, f_2]$,

где f_1, f_2— обычное произведение функций и $[f_1, f_2]$ — скобка Пуассона.

Все остальные требования, которые могут быть предъявлены к квантованию, связаны с техническим удобством. (Это определение квантования является частным случаем более общего, предложенного в [5]. См. также работы [6, 7].)

симости от рода символов, т. е. от способа квантования, функции K_h в (2) различны, тем самым различными оказываются интегралы (6). В работе [4] показано, что наивный предельный переход в (6) для основных видов символов нивелирует разницу между ними, приводя всегда к одному и тому же ответу (который, таким образом, может оказаться верным лишь в силу каких-нибудь особых обстоятельств).

В предлагаемой работе анализируется поведение интеграла (6) при $N \to \infty$. Оказывается, что предельное выражение имеет первозданный вид (1) только в случае вейлевских символов. В остальных случаях оно отягощается некоторыми деталями, наиболее характерной из которых является возникновение интегралов со сдвинутым аргументом в показателе (1), например, появляется интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} H(p(t+0),\ q(t))\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

вместо интеграла

$$\int_{t_1}^{t_2} H(p(t),\ q(t))\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

Возникают также внеинтегральные члены в показателе (1), свои для каждого рода символов. После того как правильное выражение для интеграла (1) написано, выясняется, что этот интеграл является пределом конечномерных аппроксимаций общего вида, одной из которых служит (6). Аппроксимация строится следующим образом. Рассматривается гильбертово пространство $\mathscr{H}(t_1,\ t_2)$ траекторий со скалярным произведением

$$(x,\ x) = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t,\quad x = (p_1,\ \ldots,\ p_n,\ q_1,\ \ldots,\ q_n),\quad x^2 = \sum (p_i^2 + q_i^2). \tag{9}$$

В $\mathscr{H}(t_1,\ t_2)$ рассматривается последовательность вложенных друг в друга конечномерных подпространств $\mathscr{H}_N \subset \mathscr{H}_{N+1}$, состоящих из дифференцируемых траекторий; интеграл

$$\int_{t_1}^{t_2} (H(p,\ q) - p\dot{q})\,\mathrm{d}t \quad \text{при} \quad p(t),\ q(t) \in \mathscr{H}_N$$

является функцией конечного числа переменных. Заменяя в (1) континуальное интегрирование интегрированием по $\mathscr{H}_N$, мы получаем конечнократную аппроксимацию интеграла (1) $J = \lim\limits_{N\to\infty} J_N$. Предельный переход при $N \to \infty$ в интеграле (6) в сильной степени основан на интуиции. Поэтому он нуждается в обосновании. Это обоснование «на физическом уровне» дается в настоящей статье. Его нестрогость состоит в вольной перестановке различных предельных соотношений. Она может быть устранена обычными средствами при естественных предположениях относительно функции Гамильтона. В работе выясняется также, на каких траекториях сосредоточен интеграл (1). Показано, что эти траектории обязательно разрывны. Это обстоятельство делает ясной разницу между интегралами (7) и (8) *). Более того, выясняется, что множество траекторий, на которых сосредоточен интеграл, не определено однозначно: его

*) Отметим, кстати, что эта разница не существенна в случае квантовой теории поля: она проявляется лишь в квазилокальных членах и поэтому уничтожается перенормировкой.

можно варьировать, увеличивая гладкость координат за счет импульсов или, наоборот, импульсов за счет координат, однако нельзя добиться, чтобы и те и другие были непрерывны. Это обстоятельство находится в согласии с принципом неопределенности *).

Помимо описанных качественных результатов, работа содержит значительное количество формул, выражающих различные физические объекты в виде континуальных интегралов. Как правило, эти формулы не являются новыми, их вывод на основе теории символов имеет главным образом методическое значение (помимо уточнения, о котором шла речь выше). Преимущество предлагаемого вывода по сравнению с традиционным (основанном на коммутационных соотношениях **)) состоит, во-первых, в большей простоте и, во-вторых, в возможности его перенесения на случай, когда фазовое пространство является искривленным и естественных координат с каноническими соотношениями (скобками Пуассона) в нем нет. Такого рода пример содержится в [10].

Наконец, отметим, что предлагаемая работа не является первой, в которой совершается предельный переход в интеграле (6). Такого рода попытка делается в книге [2], однако приведенные там формулы, к сожалению, не точны: отсутствуют сдвиги аргументов вида (7) ***).

Для того чтобы сделать чтение этой статьи независимым, в ней приводится дополнение, содержащее краткую сводку свойств различных символов.

1. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДЛЯ СИМВОЛА ОПЕРАТОРА ЭВОЛЮЦИИ

а) Вейлевский символ оператора эволюции

1) Основная конструкция. Пусть $\hat{H}$ — некоторый оператор в $L^2(R^n)$, $H(p, q)$ — его символ Вейля:

$$\hat{H} = \int e^{i(\alpha\hat{p}+\beta\hat{q})}\varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \qquad H(p, q) = \int e^{i(\alpha p+\beta q)}\varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \tag{1.1}$$

где $\hat{p} = (\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_n)$, $\hat{q} = (\hat{q}_1, \ldots, q_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $\alpha\hat{p} = \sum \alpha_i \hat{p}_i$, $\beta\hat{q} = \sum \beta_i \hat{q}_i$; $d\alpha = d\alpha_1 \ldots d\alpha_n$, $d\beta = d\beta_1 \ldots d\beta_n$. Аналогичные обозначения употребляются и в дальнейшем. $\hat{p}_i$, $\hat{q}_j$ — обычные операторы импульса и координаты в R^n:

$$(\hat{p}_k f)(s) = \frac{h}{i}\frac{\partial f}{\partial s_k}, \qquad (\hat{q}_k f)(s) = s_k f(s). \tag{1.2}$$

Функции $\varphi(\alpha, \beta)$ могут быть как обычными, так и обобщенными. Кроме того, они могут зависеть от планковской постоянной h, как от параметра. В соответствии с этим, символ $H(p, q)$ также может зависеть от h как от параметра. В случае необходимости мы будем обозначать эту зависимость индексом: $H_h(p, q)$, $\varphi_h(\alpha, \beta)$.

---

*) Отметим в этой связи работу [9], в которой показано, что континуальный интеграл можно вычислять по траекториям с непрерывной координатой и разрывным импульсом.

**) Формулы для основных физических величин в виде континуальных интегралов, основанные на канонических соотношениях, были получены в 50—60-х годах в работах [12-16].

***) Отметим, кстати, что в книге [2] воспроизводится основная часть статьи [4], содержащая конструкцию континуального интеграла с помощью символов, с ошибочной ссылкой на доклад одного из авторов этой книги [11] вместо [4].

Положим для удобства

$$x=(p,\ q),\quad \omega=\begin{pmatrix}0 & \mathrm{I}_n\\ -\mathrm{I}_n & 0\end{pmatrix}.$$

Если $y=(\widetilde{p},\ \widetilde{q})$, то

$$x\omega y=(p,\ q)\,\omega\begin{pmatrix}\widetilde{p}'\\ \widetilde{q}'\end{pmatrix},\quad \widetilde{p}'=\begin{pmatrix}\widetilde{p}_1\\ \vdots\\ \widetilde{p}_n\end{pmatrix},\quad \widetilde{q}'=\begin{pmatrix}\widetilde{q}_1\\ \vdots\\ \widetilde{q}_n\end{pmatrix}$$

(I_n означает единичную матрицу n-го порядка). Пусть $f_i(x)$, $i=0,\ \ldots$ $\ldots,\ N$ — вейлевские символы некоторых операторов, $G_N(x)$ — вейлевский символ их произведения. Используя формулу композиции вейлевских символов (см. дополнение), получаем непосредственно

$$G_N(x)=\frac{1}{(\pi h)^{2nN}}\int f_0(y_1)\ \ldots\ f_N(y_{N+1})\,e^{\frac{2}{ih}K_N}\,d^{N+1}y\,d^{N-1}x,$$

$$K_N=\sum_1^{N-1}(x_i\omega y_{i+2}+y_{i+2}\omega x_{i+1}+x_{i+1}\omega x_i)+y_1\omega y_2+y_2\omega x_1+x_1\omega y_1,$$

где $x_N=x$. Эта формула приобретает более удобный вид, если положить $f_0\equiv 1$ и переобозначить переменные интегрирования: $y_1\to x_1$, $y_k\to y_{k-1}$ при $k>1$, $x_k\to x_{k+1}$:

$$G_N(x)=\frac{1}{(\pi h)^{2nN}}\int f_1(y_1)\ \ldots\ f_N(y_N)\,e^{\frac{2}{ih}K_N}\,d^Ny\,d^Nx,$$
$$K_N=\sum_1^N(x_k\omega y_k+y_k\omega x_{k+1}+x_{k+1}\omega x_k),\quad x_{N+1}=x. \tag{1.3}$$

По переменным x_i можно выполнить интегрирование. Так как они входят в показатель не более чем квадратично, для этого можно воспользоваться методом статистической фазы (далее — статфаза).

Преобразуем K_N:

$$\begin{aligned}K_N=x_1\omega y_1+x_2\omega(y_2-y_1)+\ \ldots\ +x_N\omega(y_N-y_{N-1})+y_N\omega x_{N+1}+\\ +x_2\omega(x_1-x_3)+x_4\omega(x_3-x_5)+\ \ldots\\ \ldots+\begin{cases}x_{N+1}\omega x_N & \text{при нечетном } N,\\ x_N\omega(x_{N-1}-x_{N+1}) & \text{при четном } N.\end{cases}\end{aligned}\tag{1.4}$$

Приравнивая нулю производные по x_i, получаем соотношения

$$y_1-x_2=0,\ y_k-y_{k-1}+x_{k-1}-x_{k+1}=0,\quad k=2,\ \ldots,\ N. \tag{1.5}$$

Далее случаи четного и нечетного N несколько различаются. Пусть вначале N четно. В этом случае уравнения (1.5) однозначно разрешаются относительно x_i:

$$x_{2k}=y_1+\sum_1^{k-1}(y_{2i+1}-y_{2i}),\quad 1\leqslant k\leqslant\frac{N}{2},$$
$$x_{2k-1}=x+\sum_k^{\frac{N}{2}}(y_{2i-1}-y_{2i}),\quad 1\leqslant k\leqslant\frac{N}{2}. \tag{1.6}$$

Однозначная разрешимость уравнений (1.5) означает невырожденность квадратичной формы во второй строке (1.4). Следовательно, применим метод статистической фазы в простейшем варианте.

Введем теперь непрерывный параметр τ, $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$ и будем считать, что $x_{2k} = x(\tau_{2k})$, $x_{2k+1} = \tilde{x}(\tau_{2k+1})$, $y_k = y(\tau_k)$,

$$f_k(x) = f(\tau_k;\ x) = e^{\frac{1}{ih}\frac{t_2 - t_1}{N} g(\tau_k;\ x)},$$

где $\tau_k = t_2 - \frac{k}{N}(t_2 - t_1)$, $x(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $y(\tau)$ — непрерывно дифференцируемые функции τ, $g(\tau;\ x)$ — непрерывная функция переменных τ и x.

При этих условиях в соотношениях (1.6) возможен предельный переход при $N \to \infty$:

$$\begin{gathered} x(\tau) = y(t_2) - \frac{1}{2}\int_{\tau}^{t_2} \dot{y}(s)\,\mathrm{d}s = \frac{y(\tau) + y(t_2)}{2}, \\ \tilde{x}(\tau) = x + \frac{1}{2}\int_{t_1}^{\tau} \dot{y}(s)\,\mathrm{d}s = x + \frac{1}{2}(y(\tau) - y(t_1)). \end{gathered} \tag{1.7}$$

Выражение (1.4) для K_N, за исключением первого и последнего слагаемых первой строки, является интегральной суммой. Предел этих слагаемых при $N \to \infty$ равен соответственно $\tilde{x}(t_2)\,\omega y(t_2)$ и $y(t_1)\,\omega x(t_1)$. Имея это в виду и учитывая (1.7), для $K = \lim K_N$, получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} K = \tilde{x}(t_2)\,\omega y(t_2) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \tilde{x}(\tau)\,\omega\dot{y}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \\ - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} x(\tau)\,\omega\dot{y}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + y(t_1)\,\omega x + \int_{t_1}^{t_2} x\omega\dot{\tilde{x}}\,\mathrm{d}\tau = \\ = -\frac{1}{4}\int_{t_1}^{t_2} y(\tau)\,\omega\dot{y}(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}(x\omega y(t_2) + y(t_1)\,\omega x) + \frac{1}{4}y(t_2)\,\omega y(t_1). \end{aligned} \tag{1.8}$$

Отнесем теперь множитель $(1/\pi h)^{2nN}$ перед интегралом (1.3) в нормировку дифференциалов и обозначим $G = \lim G_N$. Для G получаем окончательное выражение

$$\begin{aligned} G(t_2,\ t_1 \mid x) = \int \exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int_{t_1}^{t_2} g(\tau;\ y(\tau))\,\mathrm{d}\tau - \right.\right. \\ \left.\left. - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} y\omega\dot{y}\,\mathrm{d}\tau + x\omega y(t_2) + y(t_1)\,\omega x + \frac{1}{2}y(t_2)\,\omega y(t_1)\right]\right\} \prod \mathrm{d}y(\tau). \end{aligned} \tag{1.9}$$

Интеграл ведется по всем траекториям.

Перейдем к случаю нечетного N. Решение уравнений (1.5) в этом случае имеет вид

$$\begin{gathered} x_{2k} = y_1 + \sum_{1}^{k-1}(y_{2i+1} - y_{2i}), \quad 1 \leqslant k \leqslant \frac{N+1}{2}, \\ x_{2k-1} = x_N + \sum_{k}^{\frac{N-1}{2}}(y_{2i-1} - y_{2i}), \quad 1 \leqslant k \leqslant \frac{N+1}{2}. \end{gathered} \tag{1.10}$$

Таким образом, уравнения разрешимы не всегда и не однозначно. Условие разрешимости получается из первой группы равенств (1.10) при $k = (N+1)/2$ (напомним, что $x_{N+1} = x$):

$$x = y_1 - \sum_{1}^{\frac{N-1}{2}} (y_{2i+1} - y_{2i}) = 0. \tag{1.11}$$

В случае разрешимости решение зависит от x_N, как от параметра. Отсюда следует, что методом статфазы может быть вычислен интеграл по $x_2, \ldots, x_{N-1}$, причем оставшийся интеграл, как функция x_N, с необходимостью имеет вид

$$\int e^{ic_N x_N \varphi_N} \, dx_N = (2\pi)^n \delta(c_N \varphi_N) = (2\pi)^n c_N^{-1} \delta(\varphi_N),$$

где φ_N — левая часть равенства (1.11) и $c_N \neq 0$ — некоторая константа.

Перейдем теперь так же, как и раньше, к непрерывному пределу. Введем, как прежде, функции $x(\tau)$, $\tilde{x}(\tau)$, $y(\tau)$. Из (1.10) находим

$$x(\tau) = \frac{y(\tau) + y(t_2)}{2}, \quad \tilde{x}(\tau) = \tilde{x}(t_2) + \frac{1}{2}(y(\tau) - y(t_1)).$$

Для $K = \lim K_N$ получаем выражение, аналогичное (1.8):

$$K = \tilde{x}(t_2)\, y(t_2) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} x(\tau)\, \omega \dot{y}(\tau)\, d\tau - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \tilde{x}(\tau)\, \omega y(\tau)\, d\tau + y(t_1)\, \omega x +$$

$$+ \int_{t_1}^{t_2} x(\tau)\, \omega \dot{\tilde{x}}(\tau)\, d\tau + x\omega \tilde{x}(t_1) = -\frac{1}{4}\int_{t_1}^{t_2} y(\tau)\, \omega \dot{y}(\tau)\, d\tau +$$

$$+ \left[x - \frac{1}{2}(y(t_2) + y(t_1))\right] \omega \tilde{x}(t_1) + y(t_1)\, \omega x + \frac{1}{4} y(t_2)\, \omega y(t_1). \tag{1.12}$$

Из (1.12) видно, что интегрирование по $\tilde{x}(t_1)$ приводит к множителю

$$\delta\left(x - \frac{y(t_1) + y(t_2)}{2}\right).$$

Это находится в полном согласии с тем обстоятельством, что условие (1.11) в пределе при $N \to \infty$ превращается в

$$x = \frac{y(t_1) + y(t_2)}{2}. \tag{1.13}$$

С учетом (1.13) окончательное выражение для G приобретает вид

$$G(t_2, t_1 \mid x) = \int\limits_{\frac{y(t_1) + y(t_2)}{2} = x} \exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int_{t_1}^{t_2} g(\tau; y(\tau))\, d\tau - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} y(\tau)\, \omega \dot{y}(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2} y(t_1)\, \omega y(t_2)\right]\right\} \prod dy(\tau). \tag{1.14}$$

В заключение сделаем несколько замечаний.

а) Для одной и той же величины получены два интегральных представления (1.9) и (1.14). Одно из них переводится в другое следующим образом. Обозначим подынтегральные выражения континуальных интегралов (1.9) и (1.14) через $F_1(x, y)$ и $F_2(x, y)$ соответственно, $F_i(x, y)$

является функцией точки фазового пространства x и функционалом от траектории $y = y(\tau)$. F_2 содержит в качестве множителя $\delta\left(\frac{y(t_1)-y(t_2)}{2} - x\right)$. Легко видеть, что

$$F_\alpha(x, y) = \frac{1}{(\pi h)^n} \int F_\beta(\tilde{x}, y)\, e^{\frac{2}{ih}(\tilde{x}\omega y(t_2)+y(t_2)\omega x+x\omega\tilde{x})}\, d\tilde{x} \quad (\alpha \neq \beta).$$

Это соотношение соответствует умножению допредельного оператора на единичный:

$$G_N(t_2, t_1 \mid x) = \frac{1}{(\pi h)^n} \int G_N(t_2, t_1 \mid x)\, e^{\frac{2}{ih}(\tilde{x}\omega\tilde{\tilde{x}}+\tilde{\tilde{x}}\omega x+x\omega\tilde{x})}\, d\tilde{x}\, d\tilde{\tilde{x}}.$$

б) Формулы (1.9), (1.14) несколько упрощаются, если положить в них

$$y(t) = x + u(t).$$

Формула (1.9) приобретает вид

$$G(t_2, t_1 \mid x) = \int \exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int_{t_1}^{t_2} g(\tau; x+u(\tau))\, d\tau - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} u\omega\dot{u}\, d\tau - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2} u(t_1)\omega u(t_2)\right]\right\} \prod_\tau du(\tau). \quad (1.9')$$

Формула (1.14) приобретает вид

$$G(t_1, t_2; x) = \int \exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int_{t_1}^{t_2} g(\tau; x+u(\tau)\, d\tau - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} u\omega\dot{u}\, d\tau\right]\right\} \prod_\tau du(\tau). \quad (1.14')$$

в) Преобразуем интеграл (1.9′), подставив в подынтегральное выражение $\delta\left(a - \frac{1}{2}[u(t_1) + u(t_2)]\right)$ и проинтегрировав затем дополнительно по a. Это преобразование является тождественным ввиду того, что $\int \delta\left(a - \frac{1}{2}[u(t_1) + u(t_2)]\right) du = 1$.

Оказывается, мы это увидим ниже, в п. в), что, если недоинтегрировать в (1.9) по a, то ответ от этого не изменится:

$$G(t_2, t_1; x) = \int \exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int_{t_1}^{t_2} \left(g(\tau; x+u(\tau)) - \frac{1}{2}u\omega\dot{u}\right) d\tau\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} u(t_1)\omega u(t_2)\right\} \delta\left(a - \frac{1}{2}\left[u(t_1)+u(t_2)\right]\right). \quad (1.15)$$

Другими словами, интеграл не меняется, если интегрировать не по всем траекториям, а только по таким, которые удовлетворяют условию

$$\frac{1}{2}(u(t_1)+u(t_2)) = a, \quad (1.16)$$

где a — произвольная точка фазового пространства: хотя подынтегральное выражение в (1.15) зависит от a, как от параметра, интеграл от a не зависит.

Это свойство интеграла (1.9′) аналогично свойствам континуальных интегралов, возникающих в калибровочных теориях поля. Его естественно назвать калибровочной особенностью.

С этой точки зрения преобразования $u(t) \to u(t) + c$, где c — константа, можно рассматривать как калибровочные, соотношение (1.16) как условие, закрепляющее калибровку, интеграл (1.14′) получается из (1.15) при специальном выборе калибровки $a = 0$.

На первый взгляд калибровочное свойство интеграла (1.9′) кажется противоречивым: из (1.9′) и (1.15) формально следует, что

$$G(t_2,\ t_1;\ x) = G(t_2,\ t_1;\ x) \int \mathrm{d}a = G(t_2,\ t_1;\ x)\cdot\infty.$$

Противоречия не возникает благодаря определению континуального интеграла: грубо говоря, он является дробью, как числитель, так и знаменатель которой содержат $\int \mathrm{d}a$ в качестве множителя. Более подробно это объясняется в следующем разделе.

2) Аппроксимации общего вида. Континуальные интегралы (1.9), (1.9′), (1.14), (1.14′), (1.5) были введены в предыдущем разделе на основе интуитивных соображений. В этом разделе им придается более точный смысл, по существу, приводится их математическое определение.

Вначале рассмотрим интеграл (1.14′). Обозначим через $\mathscr{H}(t_1,\ t_2)$ гильбертово пространство, состоящее из функций $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, принимающих значения в фазовом пространстве (т. е. из классических траекторий со скалярным произведением

$$(x,\ x) = \int\limits_{t_1}^{t_2} x^2(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.17}$$

где

$$x(t) = (p_1(t),\ \ldots,\ p_n(t),\ q_1(t),\ \ldots,\ q_n(t)),$$

$$x^2(t) = \sum_1^n (p_i^2(t) + q_i^2(t)).$$

Пусть P_N — семейство операторов ортогонального проектирования со свойствами

$$\begin{gathered} \dim P_N\mathscr{H}(t_1,\ t_2) = \mathrm{d}(N) < \infty, \\ P_N P_{N+1} = P_{N+1} P_N = P_N, \\ \lim_{N\to\infty} P_N = \mathrm{I}, \end{gathered} \tag{1.18}$$

где I — единичный оператор в $\mathscr{H}_{t_1,\ t_2}$, и предел понимается в сильном смысле. Отметим, что второе условие (1.18) означает, что подпространства $\mathscr{H}_N = P_N\mathscr{H}_{t_1,\ t_2}$ вложены друг в друга: $\mathscr{H}_N \subset \mathscr{H}_{N+1}$.

Обозначим через $\tilde{\mathscr{H}}(t_1,\ t_2) \subset \mathscr{H}(t_1,\ t_2)$ множество непрерывно дифференцируемых траекторий и через $\tilde{\mathscr{H}}^0(t_1,\ t_2) \subset \tilde{\mathscr{H}}(t_1,\ t_2)$ подмножество $\tilde{\mathscr{H}}$, состоящее из траекторий, удовлетворяющих условию

$$x(t_1) + x(t_2) = 0. \tag{1.19}$$

Положим $\tilde{\mathscr{H}}_N^0 = P_N\tilde{\mathscr{H}}^0(t_1,\ t_2)$. Рассмотрим в пространстве $\mathscr{H}(t_1,\ t_2)$ оператор B с областью определения, состоящей из пространства $\tilde{\mathscr{H}}^0(t_1,\ t_2)$:

$$Bu = \omega\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}. \tag{1.20}$$

Рассмотрим далее в пространствах $\tilde{\mathscr{H}}_N^0$ операторы B_N, подчиненные условиям

$$\det B_N \neq 0, \quad B_N = B_N^*, \quad \lim_{N\to\infty} B_N P_N f = Bf. \tag{1.21}$$

Последнее соотношение должно быть выполнено для любого $f \in \mathscr{H}^0(t_1, t_2)$. (В (1.21), так же, как и в аналогичных предельных соотношениях в дальнейшем, имеется в виду сходимость в смысле метрики гильбертова пространства $\mathscr{H}(t_1, t_2)$.) Наконец, обозначим через $d^L u$, $L = \dim P_N\tilde{\mathscr{H}}^0(t_1, t_2)$ лебегову меру в пространстве $\tilde{\mathscr{H}}_N^0$. Положим

$$G_N = \frac{\int e^{\frac{1}{ih}\left\{\int\limits_{t_1}^{t_2} g(\tau; x+u(\tau))d\tau - \frac{1}{2}(u, B_N u)\right\}} d^L u}{\int e^{-\frac{1}{2ih}(u, B_N u)} d^L u}. \tag{1.22}$$

Очевидно, что выражение (1.3), обозначенное той же буквой, после интегрирования по x_i и подстановки $f_k(y) = \exp\left\{\frac{1}{ih}\frac{t_2-t_1}{N} g(\tau_k; y)\right\}$ при нечетном N превращается в частный случай (1.22), отвечающий специальному выбору подпространств $\mathscr{H}_N = P_N\mathscr{H}(t_1, t_2)$ и операторов B_N. Совершенно аналогично определяются интегралы (1.14) и (1.15). Разница состоит лишь в том, что вместо функционала $\int\limits_{t_1}^{t_2} g(\tau; x + u(\tau))\, d\tau$ в первом случае рассматривается функционал $\int\limits_{t_1}^{t_2} g(\tau; y(\tau))\, d\tau + \frac{1}{2} y(t_1)\, \omega y(t_2)$, во втором случае — функционал $\int\limits_{t_1}^{t_2} g(\tau; x + a + \tilde{u}(\tau))\, d\tau - a\omega(\tilde{u}(t_2) - \tilde{u}(t_1))$.

Перейдем к интегралу (1.9′). Рассмотрим гильбертово пространство $\hat{\mathscr{H}}(t_1, t_2) = \mathscr{H}(t_1, t_2) \oplus R^{2n}$, где $\mathscr{H}(t_1, t_2)$ — рассмотренное ранее пространство траекторий и R^{2n} — вещественное евклидово пространство размерности $2n$ с обычным скалярным произведением, w — число степеней свободы. Элементами $\hat{\mathscr{H}}(t_1, t_2)$ являются пары $\{x, \alpha\}$, $x \in \mathscr{H}(t_1, t_2)$, $\alpha \in R^{2n}$, скалярное произведение определяется формулой

$$(\{x, \alpha\}, \{y, \beta\}) = (x, y) + (\alpha, \beta). \tag{1.23}$$

Сопоставим каждой траектории $u(t) \in \tilde{\mathscr{H}}(t_1, t_2)$ элемент $\tilde{u}$ пространства $\tilde{\mathscr{H}}(t_1, t_2)$:

$$\hat{u} = \{u, \alpha\}, \quad \alpha = \frac{1}{2}(u(t_1) + u(t_2)). \tag{1.24}$$

Множество элементов $\hat{u}$ вида (1.24) обозначим $\hat{\tilde{\mathscr{H}}}(t_1, t_2)$. Рассмотрим в $\hat{\mathscr{H}}$ оператор B, областью определения которого служит $\hat{\tilde{\mathscr{H}}}$:

$$\tilde{B}\hat{u} = \left\{\omega\frac{du}{dt}, \ \omega(u(t_2) - u(t_1))\right\}. \tag{1.25}$$

Заметим, что

$$u(t_1)\,\omega u(t_2) = \frac{u(t_1) + u(t_2)}{2}\,\omega(u(t_2) - u(t_1)).$$

Отсюда следует, что квадратичная форма в показателе (1.9′) равна $-(1/2\,ih)(\hat{u}, \tilde{B}\hat{u})$. Рассмотрим теперь в пространстве $\hat{\mathscr{H}}(t_1, t_2)$ проекторы P_N со свойствами (1.18) и операторы $\hat{B}_N$ в пространствах $\hat{\mathscr{H}}_N^N = P_N\hat{\mathscr{H}}(t_1, t_2)$

со свойствами, аналогичными (1.21),

$$\det \widetilde{B}_N \neq 0, \quad \lim \widetilde{B}_N P_N f = \widetilde{B} f, \quad \lim \widetilde{B}_N^* P_N f = \widetilde{B}^* f$$

для любого $f \in \tilde{\tilde{\mathscr{H}}}(t_1, t_2)$. (В отличие от оператора $\widetilde{B}$, оператор $\widetilde{B}$ не только не самосопряжен, но даже не симметричен *).) Определим функции $\widetilde{G}_N$ формулой, аналогичной (1.22):

$$\widetilde{G}_N = \frac{\int e^{\frac{1}{ih}\left\{\int\limits_{t_1}^{t_2} g(\tau,\, x+u(\tau))\,d\tau - \frac{1}{2}(\hat{u},\, \widetilde{B}_N \hat{u})\right\}} d^L \hat{u}}{\int e^{-\frac{1}{2ih}(\hat{u},\, \widetilde{B}_N \hat{u})} d^L \hat{u}}, \tag{1.26}$$

где $\hat{u} = \{u(t),\ \frac{1}{2}(u(t_1) + u(t_2))\} \in \tilde{\mathscr{H}}(t_1, t_2)$ $u(t) \in \mathscr{H}(t_1, t_2)$.

В следующем разделе мы покажем, что функции G_N, $\widetilde{G}_N$, определяемые формулами (1.22), (1.26), при $N \to \infty$ сходятся к функции $G(t_1, t_2 \mid x)$, которая является вейлевским символом оператора эволюции, причем инфинитезимальным оператором этой эволюции служит оператор с вейлевским символом $g(\tau; x)$.

3) Обоснование. Следует проверить, что функции G_N, $\widetilde{G}_N$, *определяемые равенствами* (1.22) *или* (1.26), *сходятся к функции* $G(t_1, t_2 | x)$, являющейся символом Вейля оператора $\hat{G}(t_1, t_2)$, который удовлетворяет условиям

$$ih \frac{\partial \hat{G}}{\partial t^2} = \hat{g}(t_2)\, \hat{G}(t_2, t_1), \quad \hat{G}(t, t) = I,$$

где $\hat{g}(t)$ — оператор с символом Вейля $g(t; x)$.

Прежде всего вычислим в аппроксимациях (1.22), (1.26) континуальный интеграл в случае, когда $g(t; x) = u(t)\, x$, где $u(t)$ — произвольная функция. Интегралы (1.22), (1.26) вычисляются методом стационарной фазы. Следует вычислить эти интегралы при фиксированном N, затем найти предел при $N \to \infty$. При сделанных относительно операторов B_N, $\widetilde{B}_N$ предположениях результат будет таким же, как если применить метод стационарной фазы непосредственно к предельному показателю. Вычисления очень просты и могут быть опущены. Они несколько различаются в случаях аппроксимаций (1.22), (1.26), однако, как и следует ожидать, приводят к общему результату **):

$$G(t_2, t_1 | x) = \exp\left\{\frac{1}{ih}\left[x \int\limits_{t_1}^{t_2} u(\,)\, dt - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{4} \int\limits_{t_1}^{t_2} \int\limits_{t_1}^{t_2} \operatorname{sign}(t-s)\, u(t)\, \omega u(s)\, dt\, ds\right]\right\}. \tag{1.27}$$

*) Рассмотрим в пространстве $\tilde{\mathscr{H}}(t_1, t_2)$ оператор J, определяемый формулой

$$J\ \{x,\ \alpha\} = \{x,\ -\alpha\}.$$

Нетрудно показать, что оператор $J\widetilde{B}$ самосопряжен. В связи с этим естественно выделяется класс аппроксимаций, для которых, помимо (1.26), выполнено условие $(P_N J \widetilde{B}_N P_N)^* = P_N J \widetilde{B}_N P_N$.

**) Роль знаменателей в формулах (1.22), (1.26) состоит в том, что с их помощью сокращаются $\det B_N$, $\det \widetilde{B}_N$. Обратим внимание на то, что предельный оператор $B = \lim B_N$ не вырожден: из условия $Bf = 0$, $f \in \tilde{\mathscr{H}}^0(t_1, t_2)$ (т. е. $f(t_1) + f(t_2) = 0$) следует, что $f \equiv 0$. В то же время оператор $\widetilde{B} = \lim \widetilde{B}_N$ вырожден: $\widetilde{B}\hat{u}_0 = 0$, где $\hat{u}_0 = \{u_0,\ \alpha\}$, $u_0(x) \equiv \text{const} = \alpha$.

Тот же ответ получается при вычислении интеграла (1.16). Параметр a выпадает из ответа. Пусть теперь $g(\tau; x)$ — произвольная функция, представимая в виде преобразования Фурье:

$$g(\tau; x) = \int e^{-ixv} \tilde{g}(\tau; v)\, dv.$$

Заметим, что

$$\int_{t_1}^{t_2} g(\sigma; y(\sigma))\, d\sigma = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int e^{\frac{1}{ih}\int_{t_1}^{t_2} y(\tau) u(\tau)\, d\tau} \tilde{g}(\sigma; v)\, dv \right) d\sigma, \tag{1.28}$$

где $u(\tau) = h\delta(\tau - \sigma) v$. Найдем континуальный интеграл

$$F_1 = \int \left(\int_{t_1}^{t_2} g(\sigma; y(\sigma))\, d\sigma\, e^{\frac{1}{2ih}K} \right) \prod dy. \tag{1.29}$$

Подставим в (1.29) значение внутреннего интеграла из (1.28), переставим интегрирование по dv и $d\sigma$ с континуальным интегрированием и воспользуемся формулой (1.27). В результате получим

$$F_1 = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int e^{-ixv} \tilde{g}(\sigma; v)\, dv \right) d\sigma = \int_{t_1}^{t_2} g(\sigma; x)\, d\sigma. \tag{1.30}$$

(Второе слагаемое в показателе (1.27) при $u(\tau) = hv\delta(\tau - \sigma)$ равно $-(h/4i)\, v\omega v \operatorname{sign}(0) = 0$ в силу того, что $v\omega v = 0$. Неопределенность $\operatorname{sign} 0$ при этом не играет роли.)

Рассмотрим более общий интеграл

$$F_n = \int \left(\int_{t_1}^{t_2} g(\sigma; y(\sigma))\, d\sigma \right)^n e^{\frac{1}{2ih}K} \prod dy, \quad n > 1. \tag{1.31}$$

Поступая аналогичным образом, находим, что

$$F_n = \int \tilde{g}(\sigma_1; v_1) \ldots \tilde{g}(\sigma_n; v_n)\, d^n v\, d^n \sigma \int e^{-i\int_{t_1}^{t_2} y(u_1 + \ \ + u_n) d\tau + \frac{1}{2ih}K} \prod dy =$$

$$= \int \tilde{g}(\sigma_1; v_1) \ldots \tilde{g}(\sigma_n; v_n)\, e^{-ix(v_1 + \ \ + v_n) + \frac{ih}{4}\sum v_i \omega v_j \operatorname{sign}(\sigma_i - \sigma_j)}\, d^n v\, d^n \sigma. \tag{1.32}$$

Из (1.32) очевидным образом следует, что

$$F_n = O((t_2 - t_1)^n) \text{ при } t_2 \to t_1.$$

Рассмотрим теперь интегралы (1.9), (1.14). Разлагая $\exp\left(\frac{1}{ih}\int g(y(\tau), \tau)\, d\tau\right)$ в ряд и пользуясь полученными результатами, получаем

$$G = \sum_0^\infty \left(\frac{1}{ih}\right)^n \frac{1}{n!} F_n = 1 + \frac{1}{ih}\int_{t_1}^{t_2} g(\tau; x)\, d\tau + O((t_2 - t_1)^2), \tag{1.33}$$

где F_n при $n > 0$ имеет вид (1.32), $F_0 = 1$ и второе равенство справедливо при $t_2 \to t_1$. Докажем теперь формулу композиции

$$\frac{1}{(\pi h)^{2n}} \int G(t_2, t' \mid x_1)\, G(t', t_1 \mid x_2)\, e^{\frac{2}{ih}(x_1 \omega x_2 + x_2 \omega x + x \omega x_1)}\, dx_1\, dx_2 = G(t_2, t_1 \mid x). \tag{1.34}$$

С этой целью воспользуемся разложением (1.33). Переставим суммирование с интегрированием по x_1, x_2. В результате интеграл (1.34) превращается в сумму слагаемых вида

$$\frac{1}{(\pi h)^n}\frac{1}{m!n!}\int \tilde{g}(\sigma_1; v_1)\ldots\tilde{g}(\sigma_m; v_m)\tilde{g}(\tau_1; u_1)\ldots\tilde{g}(\tau_n; u_n)\times$$
$$\times e^{-ix_1\sum v_k+ix_2\sum u_k+\frac{ih}{4}\left[\sum v_l\omega v_k\operatorname{sign}(\sigma_l-\sigma_k)+\sum u_l\omega u_k\operatorname{sign}(\tau_l-\tau_k)\right]}\times$$
$$\times e^{\frac{2}{ih}(x_1\omega x_2+x_2\omega x+x\omega x_1)}\prod dv_l\prod du_k\prod d\sigma_i\prod d\tau_k\,dx_1\,dx_2, \qquad (1.35)$$

причем интегрирование по σ_l ведется в пределах $t_1\leqslant\sigma_l\leqslant t'$, по τ_l — в пределах $t'\leqslant\tau_l\leqslant t_2$.

В (1.35) выполним интегрирование по x_1 и x_2. (Для этого удобно воспользоваться методом статфазы.) В результате получаем для (1.35) новое выражение

$$\frac{1}{m!n!}\int\tilde{g}(\sigma_1; v_1)\ldots\tilde{g}(\sigma_m; v_m)\tilde{g}(\tau_1; u_1)\ldots\tilde{g}(\tau_n; u_n)\times$$
$$\times e^{-ix\left(\sum v_l+\sum u_k\right)+\frac{ih}{4}\left[\sum v_l\omega v_k\operatorname{sign}(\sigma_l-\sigma_k)+\sum u_l\omega u_k\operatorname{sign}(\tau_l-\tau_k)\right]}\times$$
$$\times e^{\frac{ih}{2}\sum u_l\omega v_k}\prod du_i\prod dv_k\prod d\sigma_i\prod d\tau_k. \qquad (1.36)$$

Переменим теперь обозначения, положив $u_k=v_{m+k}$, $\tau_k=\sigma_{m+k}$. В результате выражение (1.36) перепишется в более компактной форме

$$\frac{1}{m!n!}\int\tilde{g}(\sigma_1; v_1)\ldots\tilde{g}(\tau_{m+n}; v_{m+n})\,\theta(t'-\sigma_1)\ldots$$
$$\ldots\theta(t'-\sigma_m)\,\theta(\sigma_{m+1}-t')\ldots\theta(\sigma_{m+n}-t')\times$$
$$\times e^{-ix\sum v_k+\frac{ih}{4}\sum v_l\omega v_k\operatorname{sign}(\sigma_l-\sigma_k)}\prod dv_k\prod d\sigma_k, \qquad (1.37)$$

причем интеграл по всем σ_i ведется в пределах $t_1\leqslant\sigma_i\leqslant t_2$. Очевидно, что сумма выражений (1.37) по всем m, n, удовлетворяющим условию $m+n=N$, может быть представлена в виде

$$\frac{1}{N!}\int\tilde{g}(\sigma_1; v_1)\ldots\tilde{g}(\sigma_N; v_N)\,(\theta(t'-\sigma_1)+$$
$$+\theta(\sigma_1-t'))\ldots(\theta(t'-\sigma_N)+\theta(\sigma_N-t'))\times$$
$$\times e^{-ix\sum v_k+\frac{ih}{4}\sum v_l\omega v_k\operatorname{sign}(\sigma_l-\sigma_k)}\prod dv_k\prod d\sigma_k=$$
$$=\frac{1}{N!}\int\tilde{g}(\sigma_1; v_1)\ldots\tilde{g}(\sigma_N; v_N)\,e^{-ix\sum v_k+\frac{ih}{4}\sum v_l\omega v_k\operatorname{sign}(\sigma_l-\sigma_k)}\prod dv_k\prod d\sigma_k. \qquad (1.38)$$

В силу (1.33) сумма по всем $N\geqslant 0$ правых частей (1.38) равна $G(t_2, t_1\mid x)$. Формула (1.34) доказана.

Продифференцируем теперь тождество (1.34) по t_2 и положим затем $t'=t_2$. Пользуясь вторым равенством (1.33), получаем

$$\frac{\partial G(t_2, t_1\mid x)}{\partial t_2}=\frac{1}{(\pi h)^{2n}}\int\frac{1}{ih}g(t_2; x_1)\,G(t_2, t_1\mid x_2)\,e^{\frac{2}{ih}(x_1\omega x_2+x_2\omega x+x\omega x_1)}\,dx_1\,dx_2. \qquad (1.39)$$

Обозначим через $\hat{G}(t_2, t_1)$, $\hat{g}(t)$ операторы, символами Вейля которых являются соответственно $G(t_2, t_2 \mid x)$ и $g(t; x)$. Уравнение (1.39) эквивалентно операторному уравнению

$$\frac{\partial \hat{G}(t_2, t_1)}{\partial t_2} = \frac{1}{ih} \hat{g}(t_2) \hat{G}(t_2, t_1).$$

4) На каких траекториях сосредоточен интеграл. Определенные выше континуальные интегралы $G = \lim G_N$ и $G = \lim \tilde{G}_N$, где G_N, $\tilde{G}_N$ определяются из (1.22) или (1.26), внешне напоминают интегралы по мере в функциональном пространстве с плотностью

$$\delta\left(\frac{u(t_1)+u(t_2)}{2}\right) \exp\left\{-\frac{1}{2ih} \int_{t_1}^{t_2} u(\tau)\, \omega \dot{u}(\tau)\, d\tau\right\}$$

или

$$\exp\left\{-\frac{1}{2ih}\left[\int_{t_1}^{t_2} u(\tau)\, \omega \dot{u}(\tau)\, d\tau + u(t_1)\, \omega u(t_2)\right]\right\}.$$

соответственно. Очевидно, однако, что ни одно из этих выражений нельзя интерпретировать как плотность какой бы то ни было меры в каком бы то ни было смысле. Поэтому постановка задачи о том, на каких траекториях сосредоточены эти интегралы, требует уточнения *). Сформулируем ее следующим образом. Пусть $\mathcal{H}$ — некоторое гильбертово пространство, состоящее из классических траекторий $x(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Обозначим через $S(r)$ шар радиуса r в $\mathcal{H}$. Рассмотрим далее последовательность ортогональных проекторов со свойствами (1.18) и обозначим через $\mathcal{H}_N$ пространство $P_N\mathcal{H}$, через $S_N(r)$ — пересечение $S(r)$ с $\mathcal{H}_N$. Рассмотрим интеграл

$$J_N(r) = \int\limits_{y \in S_N(r)} e^{\frac{1}{2ih}(y,\, B_N y)}\, d^L y, \tag{1.40}$$

где $d^L y$ — лебегова мера в $P_N\mathcal{H}$, $L = \dim P_N\mathcal{H}$, и B_N — операторы со свойствами (1.21). Обозначим через $J_N(\infty)$ интеграл, аналогичный (1.40), но распространенный на все пространство $P_N\mathcal{H}$ и положим

$$\mathcal{Y}_N(r) = \frac{J_N(r)}{J_N(\infty)}. \tag{1.41}$$

Очевидно, что $\lim\limits_{r \to \infty} \mathcal{Y}_N(r) = 1$.

Предположим теперь, что существует такая последовательность проекторов P_N со свойством (1.18), что

1) при каждом $r \geqslant 0$ существует предел $\mathcal{Y}(r) = \lim\limits_{N \to \infty} \mathcal{Y}_N(r)$,

2) существует предел $\lim\limits_{r \to \infty} \mathcal{Y}_N(r)$, причем $\lim\limits_{r \to \infty} \mathcal{Y}(r) = 1$.

В этом случае мы будем говорить, что континуальный интеграл (1.14) сосредоточен в пространстве $\mathcal{H}$. Аналогично определим, что́ значит, что интеграл (1.9) сосредоточен в пространстве $\mathcal{H}$.

Если бы функционал $e^{\frac{1}{2ih}(y,\, By)}$ порождал меру в каком-нибудь функциональном пространстве K, то любое гильбертово пространство, содержащее K, обладало бы этими свойствами. Таким образом, наше определе-

*) Если бы рассматриваемые интегралы были интегралами по мере, то задача состояла бы в том, чтобы описать пространство, в котором эта мера сосредоточена.

ление пространства, на котором сосредоточен интеграл, является естественным обобщением определения, имеющегося в ситуации, когда интеграл порожден мерой.

Разумеется, определение может быть видоизменено так, чтобы роль гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в нем играло банахово пространство или же линейное топологическое пространство с подходящими свойствами. На этом пути можно, по-видимому, получить столь же исчерпывающее описание траекторий, на которых сосредоточен интеграл, как это в настоящее время сделано, например, для винеровской меры. Останавливаться мы на этом не будем.

Покажем, что интеграл (1.14) сосредоточен в пространстве $\mathscr{H}(t_1, t_2)$ со скалярным произведением (1.17). Рассмотрим для простоты случай одной степени свободы. Введем в $\mathscr{H}(t_1, t_2)$ ортонормированный базис, состоящий из векторов, удовлетворяющих условию $x(t_1)+x(t_2)=0$: $\begin{pmatrix} e^{\frac{\pi i}{T}(2n+1)t} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ e^{\frac{\pi i}{T}(2n+1)} \end{pmatrix}$. Разложение траектории по этому базису есть разложение в ряд Фурье:

$$x=\sum_{-\infty}^{\infty} x(2n+1)\, e^{(2n+1)\frac{\pi i}{T}t},$$
$$x(m)=\begin{pmatrix} \alpha(m) \\ \beta(m) \end{pmatrix}, \quad m=2n+1,\ \alpha(m),\ \beta(m) - \tag{1.42}$$

коэффициенты Фурье соответственно импульса и координаты, $\overline{x(m)}=x(-m)$. Из (1.42) следует, что

$$\int_{t_1}^{t_2} x\omega\dot{x}\,\mathrm{d}\tau=\pi i\sum m\,(\bar{\alpha}(m)\,\beta(m)-\bar{\beta}(m)\,\alpha(m)).$$

Обозначим через $\mathscr{H}_N$ подпространство $\mathscr{H}(t_1, t_2)$, состоящее из траекторий, разложение которых в ряд Фурье содержит лишь те слагаемые в (1.42), для которых $|n| \leqslant N$. Вместо шара в $\mathscr{H}_N$ нам, имея в виду дальнейшие цели, удобнее рассмотреть эллипсоид $S_N(\sigma, \mu, r)$, определяемый неравенством

$$\sum_{\left|\frac{m-1}{2}\right|\leqslant N} (\sigma(m)\,|\alpha(m)|^2+\mu(m)\,|\beta(m)|^2)\leqslant r^2. \tag{1.43}$$

Найдем интеграл J_N по эллипсоиду (1.43):

$$J_N(r)=\int\limits_{S_N(\sigma,\mu,r)} e^{-\frac{1}{2ih}\int_{t_1}^{t_2} x\omega\dot{x}\,\mathrm{d}\tau} \prod \mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\bar{\alpha}\,\mathrm{d}\beta\,\mathrm{d}\bar{\beta}=$$
$$=\int_{-r^2}^{r^2}\mathrm{d}s\,\delta\Bigl(s-\sum_{\left|\frac{m-1}{2}\right|\leqslant N}(\sigma(m)\,|\alpha(m)|^2+$$
$$+\mu(m)\,|\beta(m)|^2)\Bigr)\, e^{-\frac{1}{2ih}\int_{t_1}^{t_2} x\omega\dot{x}\,d\tau} \prod \mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\bar{\alpha}\,d\beta\,\mathrm{d}\bar{\beta}=$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-r^2}^{r^2} ds \int \exp\left\{\frac{\pi}{2h} \sum_{\left|\frac{m-1}{2}\right| \leqslant N} m\left(\bar{\alpha}(m)\beta(m) - \bar{\beta}(m)\alpha(m)\right) + \right.$$
$$+ ip\left[s - \sum_{\left|\frac{m-1}{2}\right| \leqslant N} (\alpha(m)\bar{\alpha}(m)\sigma(m) + \right.$$
$$\left.\left. + \beta(m)\bar{\beta}(m)\mu(m))\right]\right] \prod d\alpha\, d\bar{\alpha}\, d\beta\, d\bar{\beta} \cdot dp =$$
$$= \int \frac{e^{ipr^2} - e^{-ipr^2}}{2\pi ip} \left(\frac{h^2}{\pi^2}\right)^{2N+1} \frac{1}{[(2N+1)!!]^4} \frac{1}{\prod\limits_{\left|\frac{m-1}{2}\right| \leqslant N} \left(1 - \frac{p^2h^2\sigma(m)\mu(m)}{\pi^2 m^2}\right)} dp$$

(контур интегрирования обходит полюсы снизу).

Интеграл $J_N(\infty)$ равен $J_N(\infty) = \left(\frac{h^2}{\pi^2}\right)^{2N+1} \frac{1}{[(2N+1)!!]^4}$. Отсюда

$$\frac{J_N(r)}{J_N(\infty)} = \int \frac{e^{ipr^2} - e^{-ipr^2}}{2\pi ip} \frac{1}{\prod\limits_{\left|\frac{m-1}{2}\right| \leqslant N} \left(1 - \frac{p^2h^2\sigma(m)\mu(m)}{\pi^2 m^2}\right)} dp.$$

Далее

$$\mathscr{Y}(r) = \lim_{N\to\infty} \frac{J_N(r)}{J_N(\infty)} = \int \frac{e^{ipr^2} - e^{-ipr^2}}{2\pi ip} F^{-1}(p)\, dp, \tag{1.44}$$

где

$$F(p) = \prod_{\substack{m=2n+1 \\ -\infty < n < \infty}} \left(1 - \frac{p^2h^2\sigma(m)\mu(m)}{\pi^2 m^2}\right). \tag{1.45}$$

Бесконечное произведение (1.45) сходится, если выполнено условие

$$\sum \frac{\sigma(2n+1)\mu(2n+1)}{(2n+1)^2} < \infty. \tag{1.46}$$

В интересующем нас случае $\sigma(m) = \mu(m) = 1$ условие (1.46) очевидным образом выполнено. Первый множитель в подынтегральном выражении (1.44) имеет при $r \to \infty$ предел, равный $\delta(p)$. Функция $F(p)$ при условии (1.46) очевидным образом регулярна при $p = 0$, причем $F(0) = 1$. Таким образом, $\lim\limits_{r\to\infty} \mathscr{Y}(r) = 1$.

Сформулированное утверждение доказано. Приведенные рассуждения позволяют, однако, получить весьма любопытный дальнейший результат. Оказывается, можно указать пространство траекторий, на котором сосредоточен интересующий нас интеграл и у которого гладкость импульсов увеличена за счет гладкости координат или, наоборот, другое пространство, у которого гладкость координат увеличена за счет гладкости импульсов. Обозначим через $\mathscr{H}^{\sigma,\mu}$ гильбертово пространство траекторий, со скалярным произведением

$$(x, x) = \sum_{-\infty}^{\infty} |\alpha(2n+1)|^2 \sigma(2n+1) + \sum_{1}^{\infty} |\beta(2n+1)|^2 \mu(2n+1). \tag{1.47}$$

Через $\mathscr{H}_N^{\sigma,\mu}$ обозначим подпространство траекторий, у которых $\alpha(2n+1) = \beta(2n+1) = 0$ при $\eta > N$. Эллипсоид (1.43) в пространстве $\mathscr{H}_N$

является шаром в $\mathcal{H}_N(\sigma, \mu)$. Положим теперь

$$\sigma(2n+1) = (2n+1)^{1+\varepsilon}, \quad \mu(2n+1) = (2n+1)^{-2\varepsilon}, \quad \varepsilon > 0. \tag{1.48}$$

Очевидно, что условие (1.46) выполняется. Покажем, что условие (1.48) гарантирует непрерывность импульсов. В самом деле, из (1.47) следует, что

$$\alpha(2n+1) = \frac{\gamma(n)}{\sqrt{\sigma(2n+1)}}, \quad \sum |\gamma(n)|^2 < \infty. \tag{1.49}$$

С другой стороны, согласно (1.48) $\sum \frac{1}{\sigma(2n+1)} < \infty$, поэтому

$$\sum_1^\infty |\alpha(2n+1)| < \infty. \tag{1.50}$$

Условие (1.50) влечет за собой непрерывность импульсов. Что касается координат, то из (1.48) следует, что их дифференциальные свойства при любом $\varepsilon > 0$ хуже, чем у функций с суммируемым квадратом. (Они могут иметь не интегрируемые с квадратом особенности.) При $\varepsilon > 1/2$ координаты могут быть даже обобщенными функциями. Меняя ролями $\sigma(n)$ и $\mu(n)$, мы увеличиваем гладкость координат за счет импульсов.

Полученный результат находится в хорошем согласии с принципом неопределенности. В самом деле, измерить значение какой-либо функции в точке можно только в случае, если она в этой точке непрерывна. Поэтому координата и импульс не могут быть одновременно непрерывны. Чем детальнее мы хотим знать координату, т. е. чем большей гладкостью она обладает, тем хуже обстоит дело с импульсами, и наоборот, чем глаже импульс, тем хуже дифференциальные свойства координаты.

Возникает вопрос, каким же пространством следует пользоваться при вычислении интеграла? По-видимому, ответ состоит в следующем. Во всех случаях годится пространство $\mathcal{H}(t_1, t_2)$. В некоторых случаях лучшие результаты (т. е. более быструю сходимость конечномерных аппроксимаций) может дать то или иное пространство $\mathcal{H}^{\sigma,\mu}$. Вопрос о том, в каких случаях какое пространство следует использовать, зависит от конкретной ситуации. Например, если $g = \left(\frac{1}{2}\right) p^2 + v(q)$, то естественно рассматривать пространство, гарантирующее непрерывность q, но не дифференцируемость: кажется очевидным, что основной вклад в интеграл в этом случае должны давать траектории, подобные броуновским.

5) Теория возмущений. Формулу (1.33) (точнее, первое равенство в этой формуле) можно рассматривать как ряд теории возмущений для символа оператора эволюции. Невозмущенным инфинитезимальным оператором при этом является $\hat{g} = 0$. Отдельные слагаемые этого ряда даются формулой (1.32), они явно выражаются через преобразование Фурье символа инфинитезимального оператора эволюции. Последнее обстоятельство часто оказывается неудобным. В связи с этим приведем ряд теории возмущений к виду, в котором явно участвует сам символ инфинитезимального оператора.

Рассмотрим оператор в пространстве функционалов

$$L = -\frac{1}{4}\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2}\int_{\tilde{t}_1}^{\tilde{t}_2} \operatorname{sign}(t-s)\, \frac{\delta}{\delta x(t)}\, \omega\, \frac{\delta}{\delta x(s)}\, dt\, ds, \tag{1.51}$$

где $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2)$ — произвольный отрезок, содержащий внутри себя отрезок (t_1, t_2). (На практике удобны случаи $(\tilde{t}_1, \tilde{t}_2) = (t_1, t_2)$ или $\tilde{t}_2 = -\infty$, $\tilde{t}_2 =$

$= +\infty$.) Заметим, что функционал

$$\widetilde{F}_n = \int\limits_{t_1 \leqslant \sigma_i \leqslant t_2} \widetilde{g}(\sigma_1; v_1) \ldots \widetilde{g}(\sigma_n; v_n)\, e^{-i(x(\sigma_1)v_1 + \ldots + x(\sigma_n)v_n)}\, d\sigma^n \quad (1.52)$$

является собственным для L с собственным числом

$$\frac{1}{4} \sum \operatorname{sign}(\sigma_k - \sigma_e)\, v_k \omega v_e.$$

Следовательно, функция (1.32) представляется в виде

$$F_n = \int e^{ihL} \widetilde{F}_n \big|_{x(\tau)=x} d^n v\, d^n \sigma = e^{ihL} \int \widetilde{F}_n\, d^n v\, d^n \sigma \big|_{x(\tau)=x} =$$

$$= e^{ihL} \left(\int\limits_{t_1}^{t_2} g(\sigma; x(\sigma))\, d\sigma \right)^n \Bigg|_{x(\sigma)=x}.$$

Пользуясь формулой (1.33), получаем окончательный результат

$$G(t_2, t_1 \mid x) = e^{ihL} e^{\frac{1}{ih} \int\limits_{t_1}^{t_2} g(\tau; x(\tau)) d\tau} \Bigg|_{x(\tau)=x}. \quad (1.53)$$

б) Виковский символ оператора эволюции

1) Основная конструкция. Пусть $\hat{a}^*(i)$, $\hat{a}(i)$, $i = 1, \ldots, n$ — бозевские или фермиевские операторы рождения и уничтожения:

$$[\hat{a}(i), \hat{a}^*(j)]_{\pm} = h\delta_{ij},$$

$\hat{H}$ — некоторый оператор в пространстве Фока, $H(a^*, a)$ — его виковский символ:

$$\hat{H} = \sum H(i_1, \ldots, i_k \mid j_1 \ldots j_l)\, \hat{a}^*(i_1) \ldots a^*(i_k)\, \hat{a}(j_l) \ldots \hat{a}(j_1),$$

$$H(a^*, a) = \sum H(i_1 \ldots i_k \mid j_1 \ldots j_l)\, a^*(i_1) \ldots a^*(i_k)\, a(j_l) \ldots a(j_1).$$

В бозевском случае $a(j) = (1/\sqrt{2})(q(j) + ip(j))$ — голоморфные координаты фазового пространства, $a^*(j) = (1/\sqrt{2})(q(j) - ip(j))$ — антиголоморфные координаты фазового пространства. В фермиевском случае $a(j)$ — образующие грассмановой алгебры с инволюцией. В обоих случаях приняты обозначения $a^* = (a^*(j), \ldots, a^*(j))$, $ab = \sum a(j)\, b(j)$. Знак $*$ в применении к числу или к функции означает, если противное не оговорено, комплексное сопряжение, в применении к элементу грассмановой алгебры — инволюцию, $a(j)$, $a^*(j)$ являются независимыми переменными в бозевском случае и независимыми образующими грассмановой алгебры в фермиевском *).

---

*) Связь между виковскими символами и операторами в бозевском случае может быть описана также формулами, аналогичными вейлевским формулам (1.1). Пусть $f(a^*, a)$ — функция на фазовом пространстве, представимая в виде преобразования Фурье:

$$f(a^*, a) = \int \widetilde{f}(z^*, z)\, e^{i(a^* z + z^* a)}\, \Pi\, dz^*\, dz.$$

Положим

$$\hat{f} = \int \widetilde{f}(z^*, z)\, e^{i\hat{a}^* z} e^{iz^* \hat{a}}\, \Pi\, dz^*\, dz.$$

Функция f является виковским символом оператора $\hat{f}$. Существенное различие между виковскими и вейлевскими символами состоит в том, что вейлевские формулы (1.1) имеют смысл практически для любых функций f, в то время как аналогичные виковские — только для целых аналитических функций p_k, q_k определенного класса. См. дополнение.

Основные формулы и их вывод в бозевском и фермиевском случаях, по существу, совпадают. Поэтому мы ограничиваемся подробным рассмотрением бозевского случая, фермиевскому посвящен заключительный раздел этого пункта.

Пусть $f_i(a^*, a)$ — виковские символы операторов $\hat{f}_i$, $i = 1, \ldots, N$, $\hat{G}_N = \hat{f}_1 \ldots \hat{f}_N$, G_N — виковский символ $\hat{G}_N$. Используя формулу композиции виковских символов, находим

$$G_N(a^*, a) = \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{n(N-1)} \int f_1(a^*, a_1) f_2(a_1^*, a_2) \ldots f_N(a_{N-1}^*, a) \times$$
$$\times e^{\frac{1}{h}K_N} \mathrm{d}a_1^* \, \mathrm{d}a_1 \ldots \mathrm{d}a_{N-1}^* \, \mathrm{d}a_{N-1}, \tag{2.1}$$
$$K_N = (a^* - a_1^*) a_1 + \sum_1^{N-2} (a_k^* - a_{k+1}^*) a_{k+1} + (a_{N-1}^* - a^*) a.$$

Введем, подобно предыдущему, непрерывный параметр t, $t_1 < t < t_2$, и положим

$$a_k = a(\tau_k), \quad a_k^* = a^*(\tau_k),$$
$$f_k(a^*, a) = e^{\frac{\Delta}{ih}; \, g(\tau_k; \, a^*, \, a)},$$

где $a(\tau) = \{a(\tau; 1), \ldots, a(\tau; n)\}$ — фазовая траектория в комплексных координатах, $a(t; k) = (1/\sqrt{2})(q(t; k) + ip(t; k))$, $a^*(t) = \{a^*(\tau; 1), \ldots$ $\ldots, a^*(\tau; n)\}$, $a(\tau; k)$, $g(\tau; a^*, a)$ — непрерывно дифференцируемые функции τ, $\tau_k = t_2 - (k/N)(t_2 - t_1)$, $\Delta = (1/N)(t_2 - t_1)$. Кроме того, вид подынтегрального выражения в (2.1) наводит на мысль о естественности обозначений $a_0^* = a^*$, $a_N = a$ или, что то же самое, граничных условий

$$a^*(t_2) = a^*, \quad a(t_1) = a \tag{2.2}$$

для фазовых траекторий $a(\tau)$. В этих предположениях K_N имеет предел при $N \to \infty$

$$K = \lim K_N = \int_{t_1+0}^{t_2} \frac{\mathrm{d}a^*(\tau)}{\mathrm{d}\tau} a(\tau - 0) \, d\tau + (a^*(t_1 + 0) - a^*) a \tag{2.3}$$

(последнее слагаемое в выражении (2.1) для K_N не входит в интегральную сумму). Отнеся множитель $(2\pi h)^{-(N-1)n}$ в нормировку дифференциалов, получаем для $G = \lim G_N$ окончательное выражение

$$G(t_2, t_1 \,|\, a^*, a) = \int\limits_{\substack{a^*(t_2)=a^*, \\ a(t_1)=a}} \exp\left\{\frac{1}{ih} \int_{t_1+0}^{t_2} g(\tau; a^*(\tau), a(\tau - 0)) \, \mathrm{d}\tau + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{h} \int_{t_1+0}^{t_2} \frac{\mathrm{d}a^*(\tau)}{\mathrm{d}\tau} a(\tau - 0) \, \mathrm{d}\tau + \frac{1}{h}(a^*(t_1 + 0) - a^*) a \right\} \times$$
$$\times \prod_\tau \mathrm{d}a^*(\tau) \, \mathrm{d}a(\tau). \tag{2.4}$$

Обратим внимание на следующие обстоятельства.

1. В формулах (2.3), (2.4) содержатся выражения $\tau - 0$, $t_1 + 0$. Они служат напоминанием об аналогичном сдвиге аргументов в допредельных

выражениях:

$$\sum_{0}^{N-1} \Delta g(\tau_k; a^*(\tau_k), a(\tau_{k+1})) \to \int_{t_1+0}^{t_2} g(\tau; a^*(\tau), a(\tau-0))\, d\tau,$$

$$\sum_{0}^{N-2} (a^*(\tau_k) - a^*(\tau_{k+1}))\, a(\tau_{k+1}) =$$

$$= \sum \Delta \frac{da^*}{d\tau}\bigg|_{\tau=\tilde{\tau}_k} a(\tau_{k+1}) \to \int_{t_1+0}^{t_2} \frac{da^*}{d\tau} a(\tau-0)\, d\tau, \qquad (2.5)$$

$$(a^*(\tau_{N-1}) - a^*)\, a \to (a^*(t_1+0) - a^*)\, a.$$

(Напомним, что $\tau_k = t_2 - k\Delta$, $\Delta = (t_2 - t_1)/N$; первое равенство во второй строчке получено с помощью формулы Лагранжа, $\tau_{KH} \leqslant \tilde{\tau}_k < \tau_k$.) Разумеется, если траектория $\alpha(\tau)$ непрерывно дифференцируема, то можно заменить $\tau - 0$ на τ_n, $t_1 + 0$ на t_2. Однако фактически, так же как в вейлевском случае, интеграл (2.4) сосредоточен на разрывных траекториях. Сдвиг аргументов поэтому оказывается существенным. Более того, существенным оказывается даже такой нюанс: сдвиг аргумента $a(\tau)$ в выражении для K меньше, чем в первом слагаемом в показателе (2.4). Это видно из формулы (2.5), в допредельном выражении для первого слагаемого сдвиг равен $\Delta = \tau_k - \tau_{k+1}$, в допредельном выражении для K сдвиг равен $\tau_k - \tilde{\tau}_{k+1} \leqslant \Delta$. Это можно было бы зашифровать в формуле (2.4); мы, однако, этого не делаем, имея в виду, что в дальнейшем будет указано уточнение формулы (2.4), учитывающее явным образом разницу в сдвиге аргументов (см. формулу (2.19)).

2. Отметим также, что при отсутствии сдвига аргументов первое слагаемое в показателе (2.4) имело бы вид

$$\int_{t_1}^{t_2} g(\tau; a^*(\tau), a(\tau))\, d\tau. \qquad (2.6)$$

Подынтегральное выражение в (2.6) имеет смысл, если функция $g(\tau; a^*, a)$ является непрерывной функцией τ и фазовых переменных p_k, q_k. В то же время допредельное выражение (2.1) содержит в показателе сумму

$$\Delta \sum g(\tau_k; a_k^*, a_{k+1}).$$

Ввиду того, что аргументы a_k, a_{k+1} имеют различные номера, они являются независимыми комплексными переменными. Таким образом выражение (2.1) предполагает возможность аналитического продолжения функции $g(\tau; a^*, a)$ в комплексную область по фазовым переменным p_k, q_k. Это обстоятельство является принципиальным: по смыслу решаемой задачи функция $g(\tau; a^*, a)$ является виковским символом инфинитезимального оператора эволюции, в то же время известно, что виковский символ $A(a^*, a)$ любого оператора $\hat{A}$ является целой функцией фазовых переменных.

3. Выше уже отмечалось, что формула (2.1) наводит на мысль о естественности обозначений $a_0^* = a^*$, $a_N = a$, которые эквивалентны соотношениям (2.2). Примем эти обозначения и заметим теперь, что в (2.1) отсутствуют a_0 и a_N^*. Поэтому мы вправе положить $a_0 = a_N = a$, $a_N^* = a_0^* = a^*$. Эти обозначения позволяют записать формулу (2.1) в более

компактной форме

$$F_N(a^*, a) = \int e^{\frac{1}{h}\left(\sum\limits_{0}^{N-1} i\Delta g(\tau_k;\, a_k^*,\, a_{k+1}) + (a_k^* - a_{k+1}^*)a_{k+1}\right)} \prod_{1}^{N-1} \mathrm{d}a_k^*\, \mathrm{d}a_k. \qquad (2.7)$$

Формальный предельный переход в (2.7) при $N \to \infty$ привел бы нас к формуле (2.4) без внеинтегрального члена. Тот же результат получается, если в последнем слагаемом в показателе подынтегрального выражения в (2.4) пренебречь сдвигом аргумента. В самом деле, дополняя соотношения (2.2) комплексно сопряженными, получаем

$$a(t_2) = a, \quad a^*(t_1) = a^*. \qquad (2.8)$$

При отсутствии сдвига аргумента соотношения (2.8) обращают внеинтегральное слагаемое в показателе (2.4) в нуль.

4. Соотношения (2.2), (2.8) показывают, что интеграл (2.4) берется по замкнутым фазовым траекториям. Эти соотношения, однако, играют совершенно различную роль. Наиболее выпукло различия между ними проявляются при рассмотрении аппроксимаций общего вида для интеграла (2.4). Мы увидим, что благодаря сдвигу аргументов голоморфные координаты фазовой траектории $a(\tau)$, $a^*(\tau)$ участвуют в конструкции аппроксимации на участке $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$, $-\sigma$, в то время как антиголоморфные — на участке $t_1 + \sigma \leqslant \tau \leqslant t_2$, где $\sigma > 0$ — некоторое число. Таким образом, соотношения (2.8) выполняются на участках траекторий $a(t)$, $a^*(t)$, не играющих роли в конструкции конечномерных аппроксимаций. В то же время соотношения (2.2) выполняются на существенных участках траекторий. Эти различия, хотя и не столь отчетливо, видны и в исходной аппроксимации (2.1), (2.7) интеграла (2.4).

С этими различиями связано еще одно важное обстоятельство. При применении метода перевала к интегралу (2.4) на стационарной траектории всегда сохраняются соотношения (2.2). В то же время, если эта траектория оказывается комплексной, она может не удовлетворять соотношениям (2.8).

Учитывая все эти особенности, в описание области интегрирования для интеграла (2.4) мы включаем соотношения (2.2) и опускаем соотношения (2.8).

2) Аппроксимации общего вида. Положим

$$a(t) = a + b(t), \quad a^*(t) = a^* + b^*(t). \qquad (2.9)$$

Заметим, что с учетом условий (2.2) выражение (2.3) для K преобразуется к виду

$$K = \int\limits_{t_1+0}^{t_2} \frac{\mathrm{d}b^*}{\mathrm{d}\tau}\, b(\tau - 0)\, \mathrm{d}\tau. \qquad (2.10)$$

Выражение (2.10) примем за основу дальнейших конструкций. Обозначим $\mathscr{H}(t_1, t_2)$ гильбертово пространство траекторий $a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q(t) + p(t))$ со скалярным произведением

$$(a_1^*, a_2) = \int\limits_{t_1}^{t_2} a_1^*(t)\, a_2(t)\, \mathrm{d}t. \qquad (2.11)$$

Через $\tilde{\mathscr{H}}(t_1, t_2) \subset \mathscr{H}(t_1, t_2)$ обозначим подмножество $\mathscr{H}(t_1, t_2)$, состоящее из непрерывно дифференцируемых траекторий и через $\tilde{\mathscr{H}}^0(t_1, t_2) \subset \subset \tilde{\mathscr{H}}(t_1, t_2)$ — подмножество $\tilde{\mathscr{H}}(t_1, t_2)$, состоящее из траекторий, удовлетворяющих условию

$$a(t_1) = a(t_2) = 0. \tag{2.12}$$

Рассмотрим оператор B_σ, определенный на $\tilde{\mathscr{H}}^0(t_1, t_2)$:

$$(B_\sigma f)(\tau) = \theta(t_2 - \sigma - \tau)\,\theta(\tau - t_1)\,\frac{d}{d\tau} f(\tau + \sigma). \tag{2.13}$$

Заметим, что оператор B_σ нильпотентен: из (2.13) следует, что $B_\sigma^n = 0$ при $n > (t_2 - t_1)/\sigma$. Отсюда следует, что для любого $\delta > 0$ и $f \neq 0$, $f \in \tilde{\mathscr{H}}^0(t_1, t_2)$

$$\operatorname{Re}(\delta(f^*, f) + (B_\sigma f^*, f)) > 0. \tag{2.14}$$

Перейдем к описанию аппроксимаций. Пусть P_N — ортогональные проекторы в $\mathscr{H}(t_1, t_2)$ со свойствами (1.18), $\mathscr{H}_N = P_N\mathscr{H}(t_1, t_2)$, $\tilde{\mathscr{H}}_N^0 = P_N\tilde{\mathscr{H}}^0(t_1, t_2)$. Обозначим через $B_{N,\sigma}$ операторы в $\mathscr{H}_N$ со свойствами:

1) $\lim B_{N,\sigma}P_N f = B_\sigma f$ для любой траектории $f \in \tilde{\mathscr{H}}^0(t_1, t_2)$.

2) Для каждого $\delta > 0$ существует такое число N_δ, что при $N > N_\delta$ выполнено соотношение, аналогичное (2.14):

$$\operatorname{Re}(\delta(f^*, f) + (B_{N,\sigma} f^*, f)) > 0 \tag{2.15}$$

при $f \neq 0$, $f \in \tilde{\mathscr{H}}_N^0$.

Обозначим через $F_{N,\varepsilon,\sigma}(\delta \mid t_2, t_1; a^0, a)$ следующую функцию:

$$F_{N,\varepsilon,\sigma}(\delta \mid t_2, t_1 \mid a^*, a) = \int\limits_{\tilde{\mathscr{H}}_N^0} \exp\left\{\frac{1}{h}\left[\frac{1}{i}\int\limits_{t_1+\varepsilon}^{t_2} g(\tau; a^*(\tau), a(\tau - \varepsilon))\,d\tau + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (B_{N,\sigma} b^*, b) - \delta(b^*, b)\right]\right\} \prod db\,db^*, \tag{2.16}$$

где $b \in \tilde{\mathscr{H}}^0(t_1, t_2)$, $a(\tau) = a + b(\tau)$, $\varepsilon > \sigma > 0$ и $\delta > 0$ — число, удовлетворяющее условию (2.15). Через $F_{N,\varepsilon,\sigma}^{(0)}(\delta \mid t_2, t_1 \mid a^*, a)$ обозначим аналогичную функцию, получаемую из (2.16) при $g(\tau; a^*, a) \equiv 0$.

Положим далее

$$G_{N,\varepsilon,\sigma}(\delta \mid t_1, t_2 \mid a^*, a) = \frac{F_{N,\varepsilon,\sigma}(\delta \mid t_1, t_2 \mid a^*, a)}{F_{N,\varepsilon,\sigma}^0(\delta \mid t_1, t_2 \mid a^*, a)}, \tag{2.17}$$

$$G_{\varepsilon,\sigma} = \lim_{\delta \to 0} \lim_{N \to \infty} G_{N,\varepsilon,\sigma}(\delta). \tag{2.18}$$

Формула (2.18) служит определением континуального интеграла

$$G_{\varepsilon,\sigma}(t_2, t_1 \mid a^*, a) =$$
$$= \int\limits_{\substack{a^*(t_2)=a,\\ a(t_1)=a}} \exp\left\{\frac{1}{h}\left[\frac{1}{i}\int\limits_{t_1+\varepsilon}^{t_2} g(\tau; a^*(\tau), a(\tau - \varepsilon))\,d\tau + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \int\limits_{t_1+\sigma}^{t_2} \frac{da^*}{d\tau}\,a(\tau - \sigma)\,d\tau + (a^*(t_1 + \sigma) - a^*)\,a\right]\right\} \prod_\tau da^*(\tau)\,da(\tau). \tag{2.19}$$

Символ G оператора эволюции связан с $G_{\varepsilon,\sigma}$ соотношением

$$G(t_1, t_2 \mid a^*, a) = \lim_{\substack{\varepsilon, \sigma \to 0 \\ \varepsilon > \sigma}} G_{\varepsilon, \sigma}(t_1, t_2 \mid a^*, a). \tag{2.20}$$

Отметим характерную особенность интеграла (2.19): в нем участвуют голоморфные координаты траектории $a(\tau)$, $a^*(\tau)$ на участке $t_1 + \sigma \leqslant \tau \leqslant t_2$ и антиголоморфные координаты этой траектории — на участке $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2 - \sigma$. (См. по этому поводу замечание 4 в конце п. 1).)

Формулы (2.16) — (2.20) содержат описание схемы конечнократных аппроксимаций континуального интеграла для символа оператора эволюции. Эти аппроксимации являются достаточно общими и, по-видимому, наиболее удобными для приложений.

Однако следует иметь в виду, что описанная схема все же не является максимально общей: легко видеть, что она не включает исходной аппроксимации (2.1). Этого включения можно добиться, если обобщить описанную схему; «разрешим» числам σ, ε, δ зависеть от N.

3) Обоснование. Траектории, на которых сосредоточен интеграл. Так же, как в вейлевском случае, обоснование формул (2.18) — (2.20) основано на вычислении интеграла для функции $g(t; a^*, a)$, линейно зависящей от a, a^*. Пусть $g(t; a^*, a) = f(t)\, a^* + f^*(t)\, a$. Удобно считать, что $f(t) = f^*(t) = 0$ при $t < t_1$ и $t > t_2$. Положим

$$\left.\begin{aligned} f_1(\tau) &= \begin{cases} f(\tau) & \text{при } t_1 + \varepsilon < \tau < t_2, \\ 0 & \text{при } \tau > t_2,\ \tau < t_1 + \varepsilon, \end{cases} \\ f_2(\tau) &= \begin{cases} f^*(\tau + \varepsilon) & \text{при } t_1 < \tau < t_2 - \varepsilon, \\ 0 & \text{при } \tau > t_2 - \varepsilon,\ \tau < t_1, \end{cases} \\ \bar{f}_i &= \int_{t_1}^{t_2} f_i(\tau)\, d\tau. \end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

В этих обозначениях показатель в (2.16) приобретает вид

$$\frac{1}{i}(a^* \bar{f}_1 + \bar{f}_2 a) + \frac{1}{i}((b^*, f_1) + (f_2, b)) + (B_{N,\sigma} b^*, b) - \delta(b^*, b). \tag{2.22}$$

Применяя метод перевала, вычисляем интеграл (2.16) и находим для $G_{N,\varepsilon,\sigma}(\delta)$ следующее выражение:

$$G_{N,\varepsilon,\sigma}(\delta) = e^{\frac{1}{h}\left[\frac{1}{i}(\bar{f}_1 a^* + \bar{f}_2 a) - ((\delta - B_{N,\sigma})^{-1} P_N f_2,\, P_N f_1)\right]}. \tag{2.23}$$

Для нахождения оператора $(\delta - B_{N,\sigma})^{-1}$ следует решить уравнение

$$(\delta - B_{N,\sigma})\, P_N \varphi = P_N \psi.$$

Совершая в этом уравнении предельный переход при $N \to \infty$ и пользуясь формулой (2.13), получаем

$$\delta\varphi(\tau) - \theta(t_2 - \sigma - \tau)\,\theta(\tau - t_1)\frac{d}{d\tau}\varphi(\tau + \sigma) = \psi(\tau). \tag{2.24}$$

В дальнейшем нам предстоит предельный переход при $\delta \to 0$. Очевидно, что уравнение (2.24) с $\delta = 0$ разрешимо только в случае, если $\psi(\tau) = 0$ при $\tau > t_2 - \sigma$. При этом условии оно имеет решение с граничным условием $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) = 0$, определяемое единственным образом при $t_1 + \sigma < \tau < t_2$:

$$\varphi(\tau) = \lim_{\delta \to 0} (\delta - B_\sigma)^{-1} \psi = \int_{\tau - \sigma}^{t_2 - \sigma} \psi(s)\, ds.$$

При $t_1 < \tau < t_1 + \sigma$ функция φ не определяется на этом участке, она произвольна за вычетом единственного требования $\varphi(t_1) = 0$ *).

Вспомним теперь, что $\varepsilon > \sigma$, поэтому из (2.21) следует, что функция f_2 обладает нужным свойством (т. е. $f_2 = 0$ при $\tau > t_2 - \sigma$). Окончательно получаем, что

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{N\to\infty}(\delta - B_{N,\sigma})^{-1}P_N f_2 = \int_{\tau-\sigma}^{t_2-\sigma} f_2(s)\,\mathrm{d}s = \int_{\tau+\varepsilon-\sigma}^{t_2} f^*(s)\,\mathrm{d}s.$$

Отсюда

$$\lim_{\delta\to 0}\lim_{N\to\infty}((\delta - B_{N,\sigma})^{-1}P_N f_2,\ P_N f_1) = \iint\limits_{\substack{t_1+\sigma<\tau<t_2,\\ t_1+\varepsilon<s<t_2}} \theta(s-\tau-\varepsilon+\sigma) f^*(s) f(\tau)\,\mathrm{d}s\,d\tau.$$

Таким образом

$$G(t_1,\ t_2;\ a^*,\ a) = \exp\left[\frac{1}{ih}\int_{t_1}^{t_2}(a^* f(\tau) + f^*(\tau)\,a)\,\mathrm{d}\tau - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{h}\iint\limits_{t_1\leqslant\tau,\ s\leqslant t_2} \theta(s-\tau-0) f^*(s) f(\tau)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau\right]. \qquad (2.25)$$

Разумеется, слагаемое -0 в (2.25), доопределяющее $\theta(\tau - s)$ при $\tau = s$, не существенно, если функции $f(s)$, $f(\tau)$ являются обычными. Однако оно становится существенным для обобщенных функций.

Пусть функция $g(\sigma;\ a^*,\ a)$ представима в виде преобразования Фурье

$$g(\tau;\ a^*,\ a) = \int \tilde{g}(\tau;\ v^*,\ v)\, e^{-i(a^* v + a v^*)}\,\mathrm{d}v^*\,\mathrm{d}v. \qquad (2.26)$$

Используя (2.25), вычислим интеграл

$$G^{(n)}(t_2,\ t_1;\ a^*,\ a) =$$
$$= \lim_{\substack{\varepsilon,\ \sigma\to 0\\ \varepsilon>\sigma}} \int \left(\int_{t_1+\varepsilon}^{t_2} g(\tau;\ a^*(\tau),\ a(\tau-\varepsilon))\right)^n e^{\frac{1}{h}(B_\sigma b^*,\ b)} \prod \mathrm{d}b^*\,\mathrm{d}b. \qquad (2.27)$$

Так же как в вейлевском случае, подставим (2.26) в (2.27) и переставим континуальное интегрирование с интегрированием по τ, v, v^*. Воспользуемся далее интегралом (2.25) при

$$f(t) = h\sum_1^n v_k\delta(t-\tau_k), \quad f^*(t) = h\sum_1^n v_k^*\delta(t-\tau_k).$$

В результате находим

$$G^{(n)}(t_2,\ t_1\,|\,a^*,\ a) =$$
$$= \int \tilde{g}(\tau_1;\ v_1^*,\ v_1)\ldots\tilde{g}(\tau_n;\ v_n^*,\ v_n)\, e^{\frac{1}{i}\left(a^*\left(\sum v_k\right)+\left(\sum v_k^*\right)a\right)-h\sum v_k^* v_l \theta(\tau_k-\tau_l-0)} \times$$
$$\times\, \mathrm{d}^n v\,\mathrm{d}^n v\,\mathrm{d}^n\tau. \qquad (2.28)$$

Интеграл (2.4) выражается через интегралы (2.28) в виде ряда:

$$G(t_2,\ t_1\,|\,a^*,\ a) = \sum\left(\frac{1}{ih}\right)^n \frac{1}{n!} G^{(n)}(t_2,\ t_1\,|\,a^*,\ a), \qquad (2.29)$$

*) Напомним, что оператор B_σ имеет в качестве области определения пространство $\mathscr{H}^0(t_1,\ t_2)$, состоящее из траекторий с нулевыми граничными условиями.

Из формул (2.28), (2.29) следует, что $G(t_2, t_1 \mid a^*, a)$ является виковским символом оператора эволюции, причем инфинитезимальные оператор этой эволюции имеет символ $g(t; a^*, a)$. Вывод этого утверждения из (2.28), (2.29) полностью дублирует соответствующую часть обоснования в случае вейлевских символов и поэтому может быть опущен.

Так же как в случае вейлевских символов, определяется, что́ значит, что интеграл (2.4) сосредоточен на том или ином множестве функций, и устанавливается, что он сосредоточен на множестве траекторий $\mathscr{H}(t_1, t_2)$ с суммируемым квадратом. Однако дальнейшее уточнение множества траекторий, на которых сосредоточен интеграл (2.4), подобное тому, которое делалось в случае вейлевских символов, здесь вряд ли имеет смысл.

4) Теория возмущений. Приведем формулы теории возмущений (2.28), (2.29) к более компактному и удобному для приложений виду. Рассмотрим оператор L в пространстве функционалов

$$L = -i \int\limits_{\tilde{t}_1 < t,\, s < \tilde{t}_2} \theta(s-t-0) \frac{\delta}{\delta a(s)} \frac{\delta}{\delta a^*(t)} \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t, \quad \tilde{t}_1 \leqslant t_1, \ \tilde{t}_2 \leqslant t_2. \tag{2.30}$$

Заметим, что функционал $u = e^{\frac{1}{ih}\int_{t_1}^{t_2} g(\tau;\, a^*(\tau),\, a(\tau))\, \mathrm{d}\tau}$ при $g(\tau; a^*(\tau), a(\tau)) = a^*(\tau) f(\tau) + f^*(\tau) a(\tau))$ является собственным для L:

$$Lu = \frac{i}{h^2} \int \theta(s-t-0) f^*(s) f(t) \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s u. \tag{2.31}$$

Следовательно, формула (2.25) для символа оператора эволюции может быть переписана в виде

$$G(t_2, t_1 \mid a^*, a) = e^{ihL} e^{\frac{1}{ih}\int_{t_1}^{t_2} g(\tau;\, a(\tau),\, a^*(\tau))\, \mathrm{d}\tau} \Bigg|_{\substack{a(\tau)=a,\\ a^*(\tau)=a^*}}. \tag{2.32}$$

Заметим теперь, что ряд (2.29) есть не что иное, как разложение по собственным функциям оператора L. Поэтому из (2.28), (2.29) следует, что формула (2.32) сохраняет силу для функционалов $g(\tau; a^*, a)$, являющихся виковскими символами операторов общего вида. Отметим, что все сдвиги аргументов, имевшиеся на предыдущих этапах, сконцентрировались в слагаемое — 0 в формуле (2.30). Нетрудно проследить, что (во всяком случае, с точки зрения теории возмущений) наличие этого слагаемого эквивалентно соотношению

$$Lg = 0. \tag{2.33}$$

Таким образом, при применении теории возмущений мы вправе забыть о слагаемом — 0 в (2.30), заменив его соотношением (2.33).

5) Метод перевала. Уравнение для стационарной траектории интеграла (2.16) при $N \to \infty$ $\delta \to 0$ превращается в уравнение для стационарной траектории интеграла (2.19):

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} a^*(\tau+\sigma) + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial a} g(\tau; a^*(\tau+\varepsilon), a(\tau)) = 0, \quad t_1 < \tau < t_2 - \sigma, \\ &-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} a(\tau-\sigma) + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial a^*} g(\tau; a^*(\tau), a(\tau-\varepsilon)) = 0, \quad t_1 + \sigma < \tau < t_2. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Граничными условиями к этим уравнениям служат соотношения $a(t_1) =$

$= a(t_2) = a$, $a^*(t_1) = a^*(t_2) = a^*$. Заметим, однако, что $a(\tau)$ входит в уравнения (2.37) только при $t_1 < \tau < t_2 - \sigma$, $a^*(\tau)$ входит только при $t_1 - \sigma < \tau < t_2$. Таким образом, существенны только соотношения

$$a^*(t_2) = a^*, \quad a(t_1) = a. \tag{2.35}$$

Функции $a(t)$, $a^*(t)$, служащие решением уравнений (2.34) с условиями (2.35), не обязательно комплексно сопряжены. Отсутствие комплексной сопряженности означает комплексность траектории $a(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(g(t) + ip(t))$, $a^*(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(q(t) - ip(t))$: $q(t) = (q(t;\ 1), \ldots, q(t;\ n))$, $p(t) = (p(t; 1), \ldots, p(t; n))$, $q(t, k)$, $p(t; k)$ — комплекснозначные функции. Функции $a(t)$, $a^*(t)$, являющиеся решением системы (2.34) с условием (2.35), могут оказаться не комплексно сопряженными также и в пределе $\varepsilon = \sigma = 0$. В этом случае соотношения $a(t_2) = a^*$, $a^*(t_1) = a^*$, разумеется, невозможны. Таким образом, при использовании метода перевала следует рассматривать функции $a(t)$, $a^*(t)$ как независимые, удовлетворяющие уравнениям (2.34) и условию (2.35). Причиной, приводящей к отсутствию комплексной сопряженности у функций $a(t)$, $a^*(t)$, является несамосопряженность оператора B_σ, определяемого формулой (2.13), и его предела $B = \lim\limits_{\sigma \to 0} B_\sigma$.

Рассмотрим простейшие примеры.

1) $g(\tau;\ a^*, a) = f^*(\tau)\, a + a^* f(\tau)$. (Этот пример уже рассматривался в предыдущем пункте.) Уравнения (2.30) при $\varepsilon = \sigma = 0$ дают

$$-\frac{\mathrm{d}a^*(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + if^* = 0, \quad \frac{\mathrm{d}a(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + if = 0$$

Отсюда, учитывая (2.35), находим

$$a(\tau) = a - i\int_{t_1}^{\tau} f(s)\,\mathrm{d}s, \quad a^*(\tau) = a^* - i\int_{\tau}^{t_2} f^*(s)\,\mathrm{d}s$$

Комплексная сопряженность $a(\tau)$, $a^*(\tau)$ при условии комплексной сопряженности f, f^* возможна лишь, если $\int\limits_{t_1}^{t_2} f\mathrm{d}s = 0$.

2) $g(\tau;\ a^*, a) = \omega a^* a$ (гармонический осциллятор). Уравнения (2.34) при $\varepsilon = \sigma = 0$ дают

$$-\frac{\mathrm{d}a^*(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + i\omega a^*(\tau) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}a(\tau)}{\mathrm{d}\tau} + i\omega a(\tau) = 0.$$

Отсюда, с учетом (2.35), находим

$$a^*(\tau) = a^* e^{i(\tau - t_2)\omega}, \quad a(\tau) = a e^{i(t_1 - \tau)\omega}.$$

Континуальный интеграл в этом случае является гауссовым. Поэтому он с точностью до множителя равен значению подынтегрального функционала на стационарной траектории:

$$G(t_2,\ t_1 \mid a^*,\ a) = c(t_2,\ t_1)\, e^{\frac{1}{h}(i\omega(t_1 - t_2) - 1)a^* a}.$$

Для нахождения константы c проще всего воспользоваться формулой (2.29).

В рассматриваемом случае $\tilde{g}\,(\tau;\, v^*,\, v) = -\omega\delta'\,(v)\,\delta'\,(v^*)$, поэтому

$$G^{(n)}(t_2,\, t_1\,|\,0,\, 0) = (-1)^n\omega^n \int \frac{\partial^{2n}}{\partial v_1\,\partial v_1^* \ldots \partial v_n\,\partial v_n^*}\, e^{-h\sum v_k^* v_l \theta(\tau_k - \tau_l - 0)}\Big|_{v=v^*=0} d^n\tau.$$

Благодаря слагаемому -0 в аргументе θ

$$\frac{\partial^{2n}}{\partial v_1 \ldots \partial^* v_n}\, e^{-h\sum v_k^* v_l \theta(\tau_k - \tau_l - 0)}\Big|_{v=v^*=0} = 0,$$

при $n > 0$. Таким образом, $c\,(t_1,\, t_2) = G\,(t_1,\, t_2;\, 0,\, 0) \equiv 1$, что совпадает с известным результатом *).

6) Фермиевский случай. Формула (2.4) и ее уточнения — формулы (2.17) — (2.20) — сохраняют силу, следует лишь заменить в них обычное интегрирование на интегрирование по антикоммутирующим переменным. Эвристический вывод и обоснование этих формул остаются, по существу, прежними, единственная разница состоит в том, что функции $f\,(\tau)$, $f^*\,(\tau)$ теперь принимают не численные значения, но антикоммутирующие между собой, с операторами $\hat{a}\,(i)$, $\hat{a}^*\,(i)$ и с их символами $a\,(i)$, $a^*\,(i)$.

Формулы теории возмущений (2.32), (2.35) также сохраняют силу. Следует лишь под вариационными производными понимать левые производные и иметь в виду, что, в отличие от бозевского случая, они не коммутируют, поэтому их порядок жестко фиксирован.

Несколько иначе обстоит дело с множеством траекторий, на которых сосредоточен интеграл. Вместо пространства $\mathscr{H}\,(t_1,\, t_2)$ траекторий с суммируемым квадратом следует рассмотреть пространство траекторий, удовлетворяющих условию

$$\int_{t_1}^{t_2} \|\, a^*\,(t)\, a\,(t)\,\|\, dt < \infty,$$

где $\|\quad\|$ означает норму в грассмановой алгебре.

---

*) Отметим, что ряд

$$U = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\omega)^n}{n!}\, \frac{\partial^{2n}}{\partial v_1 \ldots \partial v_n^*}\, e^{\sum K(\tau_i,\, \tau_j) v_i v_j}\Big|_{v=v^*=0} d^n\tau,$$

легко суммируется при любой функции $K\,(\tau_1,\, \tau_2)$. В самом деле,

$$(-\omega)^n \int \frac{\partial^{2n}}{\partial v_1 \ldots \partial v_n^*}\, e^{\sum K(\tau_i,\, \tau_j) v_i^* v_j}\Big|_{v=v^*=0} d^n\tau =$$

$$= \int \frac{\delta^{2n}}{\delta v\,(\tau_1)\,\delta v^*\,(\tau_1) \ldots \delta v\,(\tau_n)\,\delta v^*\,(\tau_n)}\, e^{-\omega\int K(t,\, s) v^*(t) v(s)\, dt\, ds}\Big|_{v=v^*=0} d^n\tau.$$

Отсюда

$$U = e^{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\delta_2}{\delta v(\tau)\delta v^*(\tau)}\, d\tau} e^{-\omega\int K(t,\, s) v^*(t) v(s)\, dt\, ds}\Big|_{v=v^*=0} =$$

$$= \int e^{-\int v^* v\, d\tau - \omega\int K(t,\, s) v^*(t) v(s)\, dt\, ds} \prod_t dv\,(t)\, dv^*\,(t) = \det\,(1 + \omega\hat{K})^{-1},$$

где $\hat{K}$ — оператор в $L^2\,(t_1,\, t_2)$, определяемый функцией K: $(\hat{K}f)\,(\tau) = \int_{t_1}^{t_2} K\,(\tau,\, s)\, f(s)\, ds$.

В нашем случае $K\,(\tau,\, s) = h\theta\,(\tau - s - 0)$, т. е. оператор $\hat{K}$ является треугольным с нулевой диагональю. Поэтому $\det\,(1 + \omega\hat{K}) = 1$.

в) Символы других типов

1) Определение $p-q$- и $q-p$-символов. Определение $p-q$ символов, так же как и рассматриваемых далее $q-p$-символов, аналогично определению вейлевских символов.

Пусть $f(p, q)$ — функция на фазовом пространстве, представимая в виде преобразования Фурье:

$$f(p, q) = \int \tilde{f}(u, v)\, e^{i(pu+qv)} du\, dv.$$

Поставим ей в соответствие оператор

$$\hat{f} = \int \tilde{f}(u, v)\, e^{i\hat{p}u} e^{i\hat{q}v}\, du\, dv.$$

Функция f называется $p-q$-символом оператора $\tilde{f}$. Если функции f сопоставляется другой оператор,

$$\hat{f} = \int \tilde{f}(u, v)\, e^{i\hat{q}v} e^{i\hat{p}v}\, du\, dv,$$

то функция f называется $q-p$-символом оператора $\hat{f}$.

2) Основная конструкция. Исходная конечномерная аппроксимация $p-q$ символа оператора эволюции имеет вид

$$G_N(p, q \mid t_2, t_1) = \left(\frac{1}{2\pi h}\right)^{n(N-1)} \int e^{\frac{1}{ih}\left[\Delta \sum_{1}^{N} g(\tau_k;\, p_{k-1},\, q_k) + K_N\right]} \prod_{1}^{N-1} dp\, dq, \qquad (3.1)$$

где

$$p_0 = p, \quad q_N = q, \quad \Delta = \frac{t_2 - t_1}{N},$$

$$K_N = p(q_1 - q) + p_1(q_2 - q_1) + \ldots + p_{N-1}(q - q_{N-1}). \qquad (3.2)$$

Аналогично предыдущему, вводя непрерывный параметр τ, $t_1 \leqslant \tau \leqslant t_2$, полагаем $p_k = p(\tau_k)$, $q_k = q(\tau_k)$, $\tau_k = t_2 - \frac{K}{N}(t_2 - t_1)$ и объединяем все слагаемые в (3.2), кроме первого, в интегральную сумму. После этого осуществляем в (3.2) предельный переход при $N \to \infty$:

$$K = \lim_{N\to\infty} K_N = p(q(t_2) - q) - \int_{t_1}^{t_2} p(\tau)\, \dot{q}(\tau)\, d\tau. \qquad (3.3)$$

Относя предынтегральный множитель в (3.1) в нормировку дифференциала и совершая формальный предельный переход при $N \to \infty$, получаем окончательное выражение для G:

$$G(t_2, t_1 \mid p, q) =$$

$$= \int\limits_{p(t_2)=p,\ q(t_1)=q} e^{\frac{1}{ih}\left[\int_{t_1+0}^{t} (g(\tau;\, p(\tau),\, q(\tau-0)) - p\dot{q})\, d\tau + p(q(t_2)-q)\right]} \prod dp(\tau)\, dq(\tau). \qquad (3.4)$$

Исходная конечномерная аппроксимация $q-p$-символа оператора эволюции имеет вид

$$G_N(t_2, t_1 \mid p, q) = \frac{1}{(2\pi h)^{n(N-1)}} \int e^{\frac{1}{ih}\left(\Delta \sum_{1}^{N} g(\tau;\, p_k,\, q_{k-1}) + K_N\right)} \sum_{1}^{N-1} dp\, dq, \qquad (3.5)$$

где $q_0 = q$, $p_N = p$, $\Delta = \frac{t_2 - t_1}{N}$ и

$$K_N = p_1(q_1 - q) + p_2(q_2 - q_1) + \ldots + p_{N-1}(q_{N-1} - q_{N-2}) + \\ + p(q - q_{N-1}). \quad (3.6)$$

Вводим, как ранее, непрерывный параметр τ и относим все слагаемые, кроме последнего, в интегральную сумму. После этого в (3.6) совершаем предельный переход при $N \to \infty$:

$$K = \lim K_N = -\int_{t_1}^{t_2} p\dot{q}\, d\tau + p(q - q(t_1)). \quad (3.7)$$

Окончательное выражение для G имеет вид

$$G(t_2, t_1 \mid p, q) = \\ = \int\limits_{q(t_2)=q,\ p(t_1)=p} e^{\frac{1}{ih}\left[\int_{t_1+0}^{t_2} (g(\tau;\, p(\tau-0),\, q(\tau)) - p\dot{q})\, d\tau + p(q - q(t_1))\right]} \prod dp\, dq. \quad (3.8)$$

Так же как в вейлевском и виковском случаях, интегралы (3.4) и (3.8) оказываются пределами конечномерных аппроксимаций более общего вида, чем исходная. Эти аппроксимации строятся аналогично тому, как это делалось для вейлевского и виковского символов. Знак $\tau - 0$ в (3.4) и (3.8) имеет тот же смысл, что аналогичный знак в случае виковских символов. Точно так же как в виковском случае, ни в одной из этих формул нельзя заменить $\tau - 0$ на τ. Однако, в отличие от виковского случая, сдвиг аргумента вводится в формулах (3.4), (3.8) лишь в одном месте.

Построение аппроксимаций общего вида и их обоснование может быть сделано на основе тех же соображений, что в вейлевском и виковском случаях. В частности, для обоснования аппроксимаций общего вида интегралов (3.4), (3.8) естественно воспользоваться соответственно $p - q$- и $q - p$-символами оператора эволюции, порожденной инфинитезимальным оператором $\hat{q}(t) = u(t)\hat{p} + v(t)\hat{q}$. Эти символы имеют такой вид:
$p - q$-символ:

$$G(t_2, t_1;\ p, q) = \\ = \exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int_{t_1}^{t_2} (u(\tau)p + v(\tau)q)\, d\tau + \int\limits_{t_1 \leqslant s,\ t \leqslant t_2} \theta(s - t - 0)\, v(s)\, u(t)\, ds\, dt\right\}\right], \quad (3.9)$$

$q - p$-символ:

$$G(t_2, t_1;\ p, q) = \exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int_{t_1}^{t_2} (u(\tau)p + v(\tau)q)\, d\tau - \right.\right. \\ \left.\left. - \int\limits_{t_1 \leqslant s,\ t \leqslant t_2} \theta(s - t - 0)\, u(s)\, v(t)\, ds\, dt\right]\right\}. \quad (3.10)$$

Формулы (3.9) и (3.10) подобно аналогичным формулам в теории вейлевских и виковских символов могут служить основой теории возмущений для вычисления символа оператора эволюции в случае произвольного инфинитезимального оператора. Ряд теории возмущений дается формулой, аналогичной соответствующей формуле в теории вейлевских и виковских символов:

$$G(t_2, t_1 \mid p, q) = e^{ihL} e^{\frac{1}{ih}\int\limits_{t_1}^{t_2} g(\tau;\, p(\tau),\, q(\tau))\, d\tau} \Big|_{\substack{p(\tau)=p,\\ q(\tau)=q}}, \tag{3.11}$$

где $g(\tau;\, p,\, q)$ — p — q- или q — p-символ инфинитезимального оператора эволюции, оператор L имеет вид

$$L = \int \theta(s - t - 0) \frac{\delta^2}{\delta q(s)\, \delta p(t)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t \tag{3.12}$$

для случая p — q-символов и

$$L = -\int \theta(s - t - 0) \frac{\delta^2}{\delta p(s)\, \delta q(t)}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}t \tag{3.13}$$

для случая q — p-символов.

Ряд теории возмущений получается при разложении второй экспоненты в (3.11) по степеням показателя. Каждый член этого ряда явно выражается через преобразование Фурье функции $g(\tau;\, p,\, q)$ по p, q. Получающиеся формулы аналогичны (1.33) и (2.29), останавливаться на них мы не будем.

Исследование множества траекторий, на которых сосредоточены интегралы (3.4), (3.8), проводится так же, как аналогичное исследование в вейлевском случае и приводит к тем же результатам.

3) Матричные элементы оператора эволюции. Воспользуемся связью между q — p-символами операторов и их матричными элементами в x-представлении. Пусть $\hat{A}$ — некоторый оператор в $L^2(R^n)$, $A(p,\, q)$ — его q — p-символ, $\langle x \mid \hat{A} \mid y\rangle$ — матричный элемент. Тогда (см. дополнение)

$$\langle x \mid \hat{A} \mid y \rangle = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int f(p,\, x)\, e^{\frac{1}{ih} p(y-x)}\, \mathrm{d}^n p. \tag{3.14}$$

Рассмотрим в качестве оператора $\hat{A}$ q — p-символ оператора эволюции. Подставим в (3.14) выражение для G из (3.8) и проинтегрируем вначале по p, затем по $p(t_1)$:

$$G(t_2,\, t_1 \mid x,\, y) = \langle x \mid \hat{G} \mid y \rangle =$$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{\frac{1}{ih}\left\{\int\limits_{t_1}^{t_2} (g(\tau;\, p(\tau - 0),\, q(\tau)) - p\dot{q})\, \mathrm{d}\tau + p(x - q(t_1))\right\}} \delta(q(t_2) - x) \times$$

$$\times\, \delta(p(t_1) - p)\, e^{\frac{1}{ih} p(y-x)} \prod \mathrm{d}p(t)\, \mathrm{d}q(t)\, \mathrm{d}^n p =$$

$$= \frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{\frac{1}{ih}\left\{\int\limits_{t_1}^{t_2} (g(\tau;\, p(\tau - 0),\, q(\tau)) - p\dot{q})\, \mathrm{d}\tau + p(t_1)(y - q(t_1))\right\}} \times$$

$$\times\, \delta(q(t_2) - x) \prod \mathrm{d}p(t)\, \mathrm{d}q(t) = \int e^{\frac{1}{ih}\int\limits_{t_1}^{t_2} (g(\tau;\, p(\tau - 0),\, q(\tau)) - p\dot{q})\, \mathrm{d}\tau}\, \delta(q(t_2) - x) \times$$

$$\times\, \delta(q(t_1) - y) \prod \mathrm{d}p(t)\, \mathrm{d}q(t).$$

Окончательно получаем

$$G(t_2, t_1) \mid x, y) = \langle x \mid \hat{G} \mid y \rangle =$$
$$= \int\limits_{\substack{q(t_1)=y, \\ q(t_2)=x}} e^{\frac{1}{ih} \int [g(\tau;\, p(\tau-0),\, q(\tau)) - p\dot{q}]\, d\tau} \prod dp(\tau)\, dq(\tau). \qquad (3.15)$$

По поводу этого вывода следует сделать несколько замечаний.

1) Интеграл по p берется благодаря наличию δ-функции в подынтегральном выражении.

2) Интегрируя по $p(t_1)$, мы учитываем зависимость от $p(t_1)$ внеинтегрального члена и игнорируем зависимость от $p(t_1)$ первого слагаемого в показателе. Обоснованием такого образа действий служит следующее соображение. Рассмотрим конечнократную аппроксимацию интеграла (3.8), даваемую формулами (3.5), (3.6). Выполняя интегрирование вначале по p, затем по $p_N = p(t_2)$, мы получим конечнократную аппроксимацию последнего интеграла в (3.15), причем вместо $\delta(q(t_1) - y)$ будет, как легко видеть, стоять интеграл

$$\frac{1}{(2\pi h)^n} \int e^{\frac{1}{ih} [\Delta g(\tau_N;\, p_N,\, q_{N-1}) - p_N(y - q_{N-1})]}\, d^n p_N, \qquad (3.16)$$

где $\Delta = (t_2 - t_1)/N$. Полагая $q_{N-1} = q(t_2)$, находим, что пределом интегралов (3.16) при $N \to \infty$ служит $\delta(q(t_2) - y)$.

Для интеграла (3.15) могут быть построены конечнократные аппроксимации общего вида, исходя из аппроксимаций символов. Аппроксимации имеют вид

$$G_N(t_2, t_1 \mid x, y) = \frac{F_N(t_2, t_1 \mid x, y)}{F_N^{(0)}(t_2, t_1 \mid x, y)}.$$

В отличие от случая, когда рассматриваются символы, знаменатель не получается из числителя при $g(\tau; p, q) \equiv 0$: он остается таким же, каким был для символа оператора $\hat{G}$. Это различие связано с тем, что при $g(\tau; p, q) \equiv \equiv 0$ оператор эволюции является единичным, его символ тождественно равен 1, в то время как матричный элемент равен $\delta(x - y)$.

Естественно задаться вопросом, что произойдет, если в изложенной конструкции заменить $q - p$-символы символами типа $p - q$ или вейлевскими. Ответ, который легко проследить, состоит в следующем. Формула (3.15) видоизменяется следующим образом. В случае $p - q$-символов $p(\tau - 0)$ заменяется на $p(\tau)$, $q(\tau)$ — на $q(\tau - 0)$. В случае вейлевских символов единственное изменение состоит в замене $p(\tau - 0)$ на $p(\tau)$: сдвиг аргумента у $p(\tau)$ и $q(\tau)$ отсутствует. Эти различия существенны: выбрав символ инфинитезимального оператора, для получения матричного элемента оператора эволюции следует пользоваться формулой, соответствующей этому символу. Разумеется, если инфинитезимальный оператор имеет вид $\hat{g}(t) = A(t, \hat{p}) + B(t, \hat{q})$, то $p - q$-, $q - p$- и вейлевские символы этого оператора совпадают, поэтому безразлично, какой разновидностью формулы (3.15) пользоваться. В общем случае это не так; простейшим примером служит оператор в $L^2(R^1)$ вида $\hat{g} = \hat{q}\hat{p}$. Его $q - p$-символ равен pq, а вейлевский равен $pq - (h/2i)$. Поэтому если для вычисления $\langle x \mid e^{t\hat{q}/ih} \mid y \rangle$ воспользоваться разновидностью формулы (3.15), при которой игнорируется сдвиг аргумента, и в то же время подставить в нее $g = pq$, но ответ получится неверный *).

*) Получится $\langle x \mid e^{t\hat{g}_1/ih} \mid y \rangle$, где $\hat{g}_1$ — оператор с вейлевским символом, равным pq. Очевидно, что $\hat{g} = \hat{g}_1 + (h/2i)$. Поэтому $\langle x \mid e^{t\hat{g}/ih} \mid y \rangle = e^{-t/2} \langle x \mid e^{t\hat{g}_1/ih} \mid y \rangle$.

2. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ДЛЯ СИМВОЛА ОПЕРАТОРА РАССЕЯНИЯ И ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ

а) Континуальный интеграл для символа оператора рассеяния

1) **Формальное определение оператора рассеяния.** Пусть некоторая система развивается со временем в соответствии с уравнением Шрёдингера

$$\left(ih\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}(t)\right)\psi=0. \tag{4.1}$$

Решение уравнения (4.1) с начальным условием $\psi(t')=\varphi$ запишем в виде

$$\psi(t)=\hat{G}(t,\ t')\,\varphi.$$

Оператор $\hat{G}(t,\ t')$ удовлетворяет операторному уравнению и начальному условию

$$\left(ih\frac{\partial}{\partial t}-\hat{H}(t)\right)\hat{G}(t,\ t')=0,\quad \hat{G}(t',\ t')=I, \tag{4.2}$$

т. е. является оператором эволюции. Предположим теперь, что решения уравнения (4.1) с начальными данными $\psi(0)=\varphi\in D$, где D — некоторая область в пространстве состояний, имеют при $t\to\pm\infty$ асимптотики вида

$$e^{t\hat{H}_0/ih}\psi_+\underset{t\to+\infty}{\sim}\psi(t)\underset{t\to-\infty}{\sim}e^{t\hat{H}_0/ih}\psi_-, \tag{4.3}$$

где $\hat{H}_0$ — некоторый отличный от $\hat{H}(t)$ оператор. Из (4.3) следует, что ψ_-, ψ_+ линейно зависят от φ:

$$\psi_+=\hat{V}_+\varphi,\quad \psi_-=\hat{V}_-\varphi, \tag{4.4}$$

где $\hat{V}_\pm=\lim\limits_{t\to\pm\infty}\hat{V}(t)$,

$$\hat{V}(t)=e^{-t\hat{H}_0/ih}\hat{G}(t,\ 0). \tag{4.5}$$

Согласно (4.4)

$$\psi_+=\hat{V}_+\hat{V}_-^{-1}\psi_-.$$

Оператор

$$\hat{S}=\hat{V}_+\hat{V}_-^{-1}$$

называется (формальным) оператором рассеяния. Ясно, что

$$\hat{S}=\lim_{\substack{t\to+\infty,\\ t'\to-\infty}}\hat{S}(t,\ t'), \tag{4.6}$$

где

$$\hat{S}(t,\ t')=\hat{V}(t)\,\hat{V}^{-1}(t')=e^{-t\hat{H}_0/ih}\hat{G}(t,\ 0)\,(\hat{G}(t',\ 0))^{-1}\,e^{t'\hat{H}_0/ih}=$$
$$=e^{-t\hat{H}_0/ih}\hat{G}(t,\ t')\,e^{t'\hat{H}_0/ih}. \tag{4.7}$$

Из (4.7) для $\hat{S}(t,\ t')$ следует эволюционное уравнение, аналогичное (4.1), и начальное условие:

$$ih\frac{\partial\hat{S}(t,\ t')}{\partial t}=\hat{K}(t)\,\hat{S}(t,\ t'),\quad \hat{S}(t',\ t')=I, \tag{4.8}$$

где

$$\hat{K}(t)=e^{-t\hat{H}_0/ih}\hat{H}_1(t)\,e^{t\hat{H}_0/ih},\quad \hat{H}_1(t)=\hat{H}(t)-\hat{H}_0. \tag{4.9}$$

Соотношения (4.7) и (4.8) (представление взаимодействия) служат основой для представления символа оператора рассеяния в виде континуального интеграла.

В большинстве приложений

$$\hat{H}_1(t) = \hat{H}_{\text{int}} e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0, \tag{4.10}$$

H_{int} не зависит от t. Оператор рассеяния в этом случае зависит от α как от параметра, $\hat{S} = \hat{S}_\alpha$ и называется адиабатическим. В особо простых случаях адиабатический оператор рассеяния имеет предел при $\alpha \to 0$. Сюда, в частности, относится случай нерелятивистской квантовой механики, когда

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2m}\hat{P}^2 = -\frac{1}{2mh^2}\Delta \text{ и } H_{\text{int}}\psi = v(x)\psi,$$

где $v(x)$ — быстро убывающий потенциал.

2) Вейлевский символ оператора рассеяния. Рассмотрим гамильтониан

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{H}_1, \quad \hat{H}_0 = \frac{\hat{p}^2}{2m}, \quad \hat{H}_1 = v(t;\, q). \tag{4.11}$$

Потенциал $v(t;\, q)$ предположим достаточно быстро стремящимся к 0 при $|t| \to \infty$ и фиксированном q. Типичный пример:

$$v(t;\, q) = e^{-\alpha|t|}u(q). \tag{4.12}$$

Оператор $e^{t\hat{H}_0/ih}$ имеет вейлевский символ, равный $e^{tp^2/2mih}$. Используя формулу композиции вейлевских символов и соотношение (4.7), после очевидных преобразований находим связь между символами операторов $\hat{G}(t_2,\, t_1)$ и $\hat{S}(t_2,\, t_1)$:

$$S(t_2, t_1 \mid p, q) = \\ = \frac{1}{(\pi h)^n}\int G(t_2, t_1 \mid p, q_1)\, e^{-\frac{t_2}{2imh}p_2^2 + \frac{t_1}{2imh}p_1^2 + \frac{2}{ih}(p_1 - p)(q - q_1)} \times \\ \times \delta(2p - p_1 - p_2)\, dp_1\, dp_2\, dq_1. \tag{4.13}$$

Подставляя сюда $G(t_2,\, t_1 \mid p,\, q)$ из (1.9), находим для $\hat{S}(t_2,\, t_1)$ выражение в виде континуального интеграла:

$$S(t_2, t_1 \mid p, q) = \\ = \int \exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int_{t_1}^{t_2}\left(g(\tau;\, y(\tau)) - \frac{1}{2}y\omega\dot{y}\right)d\tau + x\omega y(t_2) + y(t_1)\,\omega x + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{1}{2}y(t_2)\,\omega y(t_1) + \frac{1}{2m}t_1\left(p - \frac{\Delta p}{2}\right)^2 - \frac{1}{2m}t_2\left(p + \frac{\Delta p}{2}\right)^2\right]\right\}\prod dy(t), \tag{4.14}$$

где $\Delta p = p(t_2) - p(t_1)$.

Интеграл (4.14) обладает той же калибровочной особенностью, что и исходный интеграл (1.9). Доказательство этого свойства получается дословным повторением соответствующих рассуждений из п. а) гл. 3 и поэтому может быть опущено.

Оператор $\hat{S}(t_2,\, t_1)$ имеет предел при $t_1 \to -\infty$, $t_2 \to +\infty$. Тем же свойством должен обладать и его символ. Преобразуем выражение (4.14) с тем, чтобы сделать это обстоятельство непосредственно очевидным. Фиксируем число $T > 0$ и положим

$$v_T(t;\, q) = \theta(T - |t|)\, v(t;\, q).$$

Обозначим через $\hat{S}_T(t_2,\, t_1)$ оператор, получаемый из $\hat{S}(t_2,\, t_1)$ заменой $v(t;\, q)$ на $v_T(t;\, q)$ и через $S_T(t_2,\, t_1 \mid p,\, q)$ символ оператора $\hat{S}_T(t_2,\, t_1)$.

Ясно, что $\hat{S}(t_2, t_1) = \lim\limits_{T\to\infty} \hat{S}_T(t_2, t_1)$ и что аналогичное соотношение связывает символы этих операторов. Заметим теперь, что при $t_2 > T$, $t_1 < -T$

$$\hat{S}_T(t_2, t_1) = \hat{S}_T(t_2, T)\,\hat{S}_T(T, -T)\,\hat{S}_T(-T, t_1). \tag{4.15}$$

Далее, операторы $\hat{S}_T(t_2, T)$ и $\hat{S}_T(-T, t_1)$ получаются из $\hat{S}(t_2, T)$ и $\hat{S}(-T, t_1)$ соответственно при $v(t; q) \equiv 0$. Поэтому континуальные интегралы для их символов вычисляются методом статфазы, т. е. сосредоточены на классических траекториях. Учитывая вид оператора $\hat{H}_0$, находим, что эти траектории имеют вид

$$q(t) = a + \frac{b}{m}t, \quad p(t) = b, \quad a,\ b = \mathrm{const}. \tag{4.16}$$

Перейдем теперь в (4.15) от операторов к символам, воспользуемся формулой композиции вейлевских символов и запишем $S_T(t_2, t_1 \mid p, q)$ в виде единого континуального интеграла, учитывая при этом, что континуальные интегралы для символов операторов $\hat{S}_T(t_2, T)$ и $\hat{S}_T(-T, t_1)$ сосредоточены на функциях вида (4.16). В результате получаем, что континуальный интеграл для символа оператора $\hat{S}_T(t_2, t_1)$ сосредоточен на функциях вида

$$q(t) = \begin{cases} \tilde{q}(t), & |t| < T, \\ a_+ + \frac{p_+}{m}t & t > T, \\ a_- + \frac{p_-}{m}t & t < -T, \end{cases} \qquad p(t) = \begin{cases} \tilde{p}(t), & |t| < T, \\ p_+ & t > T, \\ p_- & t < -T, \end{cases}$$

где $\tilde{q}(t)$, $\tilde{p}(t)$ — произвольные функции, $a_\pm$, $p_\pm$ — константы.

Устремим теперь T к ∞ и перейдем тем самым от оператора $\hat{S}_T(t_2, t_1)$ к оператору $\hat{S}(t_2, t_1)$.

Исходя из приведенных соображений, естественно ожидать, что континуальный интеграл для $S(t_2, t_1 \mid p, q)$ сосредоточен на траекториях, имеющих функции вида (4.16) своими асимптотиками при $|t| \to \infty$:

$$\begin{aligned} p(t) &= \tilde{p}(t) + p_{\mathrm{out}} r_+(t) + p_{\mathrm{in}} r_-(t), \\ q(t) &= \tilde{q}(t) + \frac{t}{m}\left(p_{\mathrm{out}} s_+(t) + p_{\mathrm{in}} s_-(t)\right), \end{aligned} \tag{4.17}$$

где $\tilde{p}(t) \to 0$ при $|t| \to \infty$, $\tilde{q}(t)$ имеет конечные пределы при $t \to \pm\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty} \tilde{q}(t) = \tilde{q}_{\mathrm{out}}$, $\lim\limits_{t\to-\infty} q(t) = \tilde{q}_{\mathrm{in}}$, $r_\pm(t)$, $s_\pm(t)$ — фиксированные функции со свойствами

$$\lim_{t\to\pm\infty} r_\pm(t) = \lim_{t\to\pm\infty} s_\pm(t) = 1, \quad \lim_{t\to\mp\infty} r_\pm(t) = \lim_{t\to\mp\infty} s_\pm(t) = 0. \tag{4.18}$$

В остальном эти функции произвольны. В частности, можно положить

$$r_+(t) = s_+(t) = \theta(t), \quad r_-(t) = s_-(t) = \theta(-t). \tag{4.19}$$

Все функции в (4.17), имеющие пределы при $t \to \pm\infty$, будем предполагать настолько быстро сходящимися, чтобы обеспечить предельные соотношения типа $\lim\limits_{t\to\pm\infty} t\tilde{p}(t) = 0$, а также существование интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |t\tilde{p}(t)|\,dt$ и т. п.

Предполагая, что интеграл (4.14) сосредоточен на траекториях вида (4.17), преобразуем внеинтегральные члены в показателе (4.14):

$$x\omega\,(y\,(t_2)-y\,(t_1))+\frac{1}{2}\,y\,(t_2)\,\omega y\,(t_1)+\frac{1}{2m}\,t_1\left(p-\frac{\Delta p}{2}\right)^2-\frac{1}{2m}\,t_2\left(p+\frac{\Delta p}{2}\right)^2=$$
$$=-q\,(p\,(t_2)-p\,(t_1))+\frac{1}{2}\,(p\,(t_2)\,\tilde{q}\,(t_2)-p\,(t_1)\,\tilde{q}\,(t_1))+$$
$$+\left(p-\frac{1}{2}\,(p\,(t_2)+p\,(t_1))\right)\tilde{q}+\frac{t_1-t_2}{2m}\left(p-\frac{1}{2}\,(p\,(t_2)+p\,(t_1))\right)^2. \qquad (4.20)$$

Все слагаемые в правой части (4.20), кроме последнего, заведомо имеют предел при $t_2\to+\infty$, $t_1\to-\infty$. Что касается интегрального слагаемого в показателе (4.14), то, как легко видеть, на функциях вида (4.17) он также имеет предел при $t_2\to+\infty$, $t_1\to-\infty$. Таким образом, показатель имеет предел при $t_2\to+\infty$, $t_1\to-\infty$ только в том случае, если

$$\frac{1}{2}\,(p_{\mathrm{out}}+p_{\mathrm{in}})=p. \qquad (4.21)$$

Учитывая, что интеграл (4.14) заведомо имеет предел при $t_2\to+\infty$, $t_1\to-\infty$, естественно предположить, что он сосредоточен на функциях вида (4.17), удовлетворяющих калибровочному условию (4.21). Соотношение (4.21) лишь частично устраняет калибровочную особенность интеграла (4.14). Чтобы ликвидировать ее полностью, следует дополнить его аналогичным соотношением, касающимся координат. В отличие от импульсов это соотношение не диктуется с необходимостью какими бы то ни было условиями. Выберем его в виде

$$\frac{1}{2}\,(\tilde{q}_{\mathrm{out}}+\tilde{q}_{\mathrm{in}})=r, \qquad (4.22)$$

где r — произвольная константа. С учетом условий (4.21), (4.22) символ оператора рассеяния может быть представлен в виде

$$S\,(p,\,q)=\int\exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{p^2\,(t)}{2m}+v\,(t;\,q\,(t))-\frac{1}{2}\,(p\dot{q}-q\dot{p})\right)\mathrm{d}t+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{2}\,(p_{\mathrm{out}}\tilde{q}_{\mathrm{out}}-p_{\mathrm{in}}\tilde{q}_{\mathrm{in}})-q\,(p_{\mathrm{out}}-p_{\mathrm{in}})\right]\right\}\delta\left(p-\frac{1}{2}\,(p_{\mathrm{out}}+p_{\mathrm{in}})\right)\times$$
$$\times\,\delta\left(r-\frac{1}{2}\,(\tilde{q}_{\mathrm{out}}+\tilde{q}_{\mathrm{in}})\right)\prod\mathrm{d}\tilde{p}\,(t)\,\mathrm{d}\tilde{q}\,(t)\,\mathrm{d}p_{\mathrm{out}}\,\mathrm{d}p_{\mathrm{in}}. \qquad (4.23)$$

(Функции $\tilde{p}\,(t)$, $\tilde{q}\,(t)$ связаны с функциями $p\,(t)$, $q\,(t)$ соотношениями (4.17).) Несмотря на то, что правая часть (4.23) зависит от параметра r, левая часть от r не зависит. Соображения, приведшие к интегралу (4.23), носят в некоторой степени интуитивный характер. Ниже будет приведено обоснование формулы (4.23) с принятой в этой статье строгостью.

В (4.23) можно выполнить интегрирование по $\tilde{p}$. Для этого воспользуемся методом статфазы. Варьируя показатель по $\tilde{p}$, получаем соотношение

$$\frac{p\,(t)}{m}=\dot{q}\,(t). \qquad (4.24)$$

Прежде, чем подставлять выражение для $p(t)$ из (4.24) в показатель (4.23), преобразуем его:

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} q\dot{p}\,dt = \frac{1}{2}qp\Big|_{t_1}^{t_2} - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{q}p\,dt = \frac{1}{2m}(t_2p_{\rm out}^2 - t_1p_{\rm in}^2) +$$

$$+\frac{1}{2}(\tilde{q}_{\rm out}p_{\rm out} - \tilde{q}_{\rm in}p_{\rm in}) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{\tilde{q}}p\,dt + \ldots = \frac{1}{2m}\int_{t_1}^{t_2}(\theta(t)\,p_{\rm out} + \theta(-t)\,p_{\rm in})^2\,dt +$$

$$+\frac{1}{2}(\tilde{q}_{\rm out}p_{\rm out} - \tilde{q}_{\rm in}p_{\rm in}) - \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}\dot{\tilde{q}}p\,dt + \ldots, \qquad (4.25)$$

где точками обозначены слагаемые, стремящиеся к 0 при $t_2 \to +\infty$, $t_1 \to \to -\infty$.

Используя (4.24) и (4.25), получаем

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}(\dot{p}q - q\dot{p})\right]dt =$$

$$= -\frac{m}{2}\int_{t_1}^{t_2}\left[\dot{\tilde{q}}^2 - \frac{1}{m^2}(\theta(t)\,p_{\rm out} + \theta(-t)\,p_{\rm in})^2\right]dt +$$

$$+\frac{1}{2}(\tilde{q}_{\rm out}p_{\rm out} - \tilde{q}_{\rm in}p_{\rm in}) + \ldots \qquad (4.26)$$

Под знаком интеграла стоит суммируемая функция, поэтому в (4.26) возьмем предельный переход при $t_2 \to +\infty$, $t_1 \to -\infty$. Окончательно получаем

$$S(p, q) = \int \exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left[-\frac{m}{2}\dot{\tilde{q}}^2 + \frac{1}{2m}(\theta(t)\,p_{\rm out} + \theta(-t)\,p_{\rm in}) + v(t; q(t))\right]dt -\right.\right.$$

$$\left.\left. - q(p_{\rm out} - p_{\rm in}) + p_{\rm out}\tilde{q}_{\rm out} - p_{\rm in}\tilde{q}_{\rm in}\right]\right\} \times$$

$$\times\,\delta\left(r - \frac{1}{2}(\tilde{q}_{\rm out} + \tilde{q}_{\rm in})\right)\delta\left(p - \frac{1}{2}(p_{\rm out} + p_{\rm in})\right)\prod d\tilde{q}(t)\,dp_{\rm out}\,dp_{\rm in}. \qquad (4.27)$$

Замечание. При вычислении интеграла по $\tilde{p}$ мы произвели требуемые методом статфазы преобразования в показателе, но проигнорировали возникающий детерминант. Это связано с определением континуального интеграла:

$$S(p, q) = \lim_{N\to\infty}\frac{S_N(p, q)}{S_N^{(0)}(p, q)},$$

где $S_N(p, q)$ — конечнократный интеграл, строящийся по образцу гл. 1, $S_N^{(0)}(p, q)$ — интеграл, получающийся из $S_N(p, q)$ при $v(t; q) \equiv 0$. Детерминанты, возникающие от интегрирования по $\tilde{p}$, в числителе и знаменателе одинаковы и поэтому сокращаются. Применим формулу (4.27) к случаю, когда

$$v(t; q) = f(t)\,q. \qquad (4.28)$$

Пользуясь методом статфазы, находим

$$m\ddot{q} + f(t) = 0. \qquad (4.29)$$

Отсюда

$$q(t) = -\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}|t - s|\,f(s)\,ds + a + \frac{b}{m}t. \qquad (4.30)$$

Асимптотика $q(t)$ при $t\to\pm\infty$ имеет вид

$$q(t)=\frac{t}{m}\left(b-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,ds\right)+\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}sf(s)\,ds+a+O(1)\quad t\to+\infty,$$

$$q(t)=\frac{t}{m}\left(b+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,ds\right)-\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}sf(s)\,ds+a+O(1)\quad t\to-\infty.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}p_{out}&=b-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,ds, & \tilde{q}_{out}&=a+\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}sf(s)\,ds,\\ p_{in}&=b+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}f(s)\,ds, & \tilde{q}_{in}&=a-\frac{1}{2m}\int_{-\infty}^{\infty}sf(s)\,ds.\end{aligned}\tag{4.31}$$

Возникновение соотношений на переменные интегрирования означает появления соответствующих δ-функций. Учитывая их, а также множитель $\delta\left(p-\frac{1}{2}(p_{out}+p_{in})\right)$, имеющийся в (4.27), можно взять интеграл по p_{out}, p_{in} и b. В результате получаем в дополнение к (4.31), что

$$b=p.\tag{4.32}$$

Теперь следует подставить выражение (4.30) для $q(t)$ в показатель экспоненты, стоящей под знаком континуального интеграла в (4.27) и полученный результат проинтегрировать по a. В результате очевидных вычислений с использованием соотношений (4.31), (4.32) находим *)

$$S(p,q)=\exp\left\{\frac{1}{ih}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(q+\frac{p}{m}t\right)f(t)\,dt-\frac{1}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|t-s|\,f(t)f(s)\,ds\,dt\right]\right\}.\tag{4.33}$$

Как и следует ожидать, ответ не зависит от параметра r, входящего в правую часть (4.27). Формула (4.23) нуждается в обосновании. Оно может быть сделано, исходя из тех же соображений, что и в случае формул (1.9), (1.4), и мы его опустим.

3) Виковский символ оператора рассеяния. Пусть $\hat{H}=\hat{H}_0+\hat{H}_I(t)$,

$$\left.\begin{aligned}\tilde{H}_0&=\int\omega(p)\,\hat{a}^*(p)\,\hat{a}(p)\,dp,\\ \hat{H}_I(t)&=\sum\int V_{mn}(t\mid p_1,\ldots,p_m\mid q_1,\ldots,q_n)\,a^*(p_1)\ldots\\ &\qquad\ldots a^*(p_m)\,a(q_n)\ldots a(q_1)\,d^mp\,d^nq.\end{aligned}\right\}\tag{4.34}$$

---

*) Для уменьшения громоздкости вычислений удобно предварительно произвести интегрирование по частям:

$$\int_{t_1}^{t_2}\dot{q}^2\,dq=\dot{q}q\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\ddot{q}q\,dt.$$

Легко видеть, что

$$\lim_{\substack{t_1\to-\infty,\\ t_2\to+\infty}}\left[-\frac{m}{2}\dot{q}q\Big|_{t_1}^{t_2}+\frac{1}{2m}\int_{t_1}^{t_2}(\theta(t)\,p_{out}+\theta(-t)\,p_{in})^2\right]=-\frac{1}{2}(p_{out}q_{out}-p_{in}q_{in}).$$

Отсюда, учитывая 42,9), находим, что показатель равен

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}f(t)\,q(t)\,dt+\frac{1}{2}(p_{out}q_{out}-p_{in}q_{in})-q(p_{out}-p_{in}).$$

Подставляя сюда выражение для $q(t)$ из (4.30) и пользуясь соотношениями (4.31), (4.32), получаем (4.33).

Пользуясь представлением взаимодействия (4.8), заметим, что континуальный интеграл для $\hat{s}(t_2, t_1)$ совпадает с континуальным интегралом для оператора эволюции, порожденным инфинитезимальным оператором $\hat{g}$ с символом $g(t; a^*, a) = H_{\mathrm{I}}(t; e^{it\omega}a^*, e^{-it\omega}a)$. Применяя формулу (2.32), получаем отсюда

$$S(t_2, t_1 \mid a^*, a) = \\ = e^{ihL} \exp\left[\frac{1}{ih}\int\limits_{t_1}^{t_2} H_{\mathrm{I}}(\tau; e^{i\tau\omega}\alpha^*(\tau), e^{-i\tau\omega}\alpha(\tau))\,d\tau\right]\Big|_{\substack{\alpha(t_1)=a,\\ \alpha(t_2)=a^*}}. \qquad (4.35)$$

Формула (4.35) служит основой диаграммной техники в теории возмущений. В релятивистски-инвариантном случае вместо переменных интегрирования $\alpha(\tau)$, $\alpha^*(\tau)$ удобнее рассматривать полевые переменные. В результате формула (4.35) превращается в формулу Хори, служащую наиболее удобным исходным пунктом для развития фейнмановской диаграммной техники. Соответствующие формальные преобразования можно найти в [2].

б) Континуальный интеграл для статистической суммы

1) Выражение статистической суммы в виде континуального интеграла. Пусть $\hat{A}$ — некоторый оператор в $L^2(R^n)$ и $A(p, q)$ — его вейлевский символ. В таком случае

$$\operatorname{Sp}\hat{A} = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int A(p, q)\,dp\,dq. \qquad (5.1)$$

Если $\hat{A}$ — оператор в фоковском пространстве, то его след в бозевском и фермиевском случаях выражается через виковский символ несколько различными формулами:

$$\operatorname{Sp}\hat{A} = \frac{1}{h^{\varepsilon n}}\int A(a^*, a)\, e^{\frac{1}{h}(1-\varepsilon)a^*a}\prod da^*\,da, \qquad (5.2)$$

где $\varepsilon = 1$ в бозевском случае и $\varepsilon = -1$ в фермиевском. Пусть $\hat{G}(\beta)$ — оператор эволюции с мнимым временем $t = -ih\beta$. Полагая в формулах (1.9), (1.15), (2.4) $g = -ihH$, $t_1 = 0$, $t_2 = \beta$, получаем соответственно вейлевский и виковский символы оператора $\hat{G}(\beta)$. Применяя затем формулы (4.36), (4.37), находим статистическую сумму. Формулы (1.9), (1.15), дают соответственно

$$\Xi(\beta) = \operatorname{Sp}\hat{G}(\beta) = \int \exp\left\{-\int\limits_0^p\left[H(y(\tau)) + \frac{1}{2ih}y(\tau)\,\omega\dot{y}(\tau)\right]d\tau\right\}\prod dy(\tau) \qquad (5.3)$$

и

$$\Xi(\beta) = \operatorname{Sp}\hat{G}(\beta) = \frac{1}{(2\pi h)^n}\int \exp\left\{-\int\limits_0^\beta\left[H(y(\tau)) + \frac{1}{2ih}y(\tau)\,\omega\dot{y}(\tau)\right]d\tau + \right. \\ \left. + \frac{1}{ih}a\omega(y(0) - y(\beta)) + \frac{1}{2ih}y(0)\,\omega y(\beta)\right\}\prod dy(\tau), \qquad (5.4)$$

причем в формуле (5.3) интеграл берется по замкнутым траекториям, а в (5.4) по всем. Как и следовало ожидать заранее, (5.3) получается из (5.4) в результате дополнительного интегрирования по a.

Перейдем к виковским символам. Здесь нам будет удобнее рассмотреть допредельное выражение (2.1). Для получения соответствующей аппроксимации статсуммы следует умножить выражение (2.1) на $e^{(1-\varepsilon)a^*a}$ и затем проинтегрировать по $da^*\,da$. Введем обозначения: $a^* = a_0^*$, $a = a_N$. Заметим, что подынтегральное выражение в этих обозначениях не содержит a_0 и a_N^*. Поэтому мы вправе обозначить $a_0 = a_N$, $a_N^* = a_0^*$. Имея в виду эти обозначения, получаем окончательное выражение для статсуммы:

$$\Xi(\beta) = \operatorname{Sp}\hat{G}(\beta) =$$
$$= \int \exp\left\{\int_0^\beta \left[-H(a^*(\tau), a(\tau-0)) + \frac{1}{h}\frac{da^*(\tau)}{d\tau}a(\tau)\right]d\tau\right\}\prod da^*da. \quad (5.5)$$

Интеграл берется по периодическим траекториям с периодом β в бозевском случае и по антипериодическим в фермиевском:

$$a(\beta) = \varepsilon a(0), \quad a^*(\beta) = \varepsilon a^*(0). \quad (5.6)$$

Предложенный вывод нуждается в некоторых комментариях.

1) В соответствии с выводом, континуальные интегралы (5.3) — (5.5), так же как аналогичные интегралы для операторов эволюции, следует понимать как пределы отношений

$$\Xi(\beta) = \lim_{N\to\infty}\frac{\Xi_N(\beta)}{F_N^{(0)}}, \quad (5.6')$$

где $\Xi_N(\beta)$ — непосредственная конечнократная аппроксимация интегралов (5.3) — (5.5), которая получается из числителя в соответствующей формуле для операторов эволюции (см. (1.22), (1.20)) дополнительным интегрированием по $dp\,dq$. Знаменатель $F_N^{(0)}$ — тот же, что в (1.22) или (1.26). Этот способ определения континуального интеграла не удобен из-за различных свойств дифференциального члена в числителе и знаменателе формулы (5.6): в обоих случаях он имеет вид (y, By), где $B = \omega\,(d/dt)$, однако в формуле (5.3) граничные условия являются периодическими, а в (1.26) нет никаких граничных условий. Аналогичное различие — в формулах (5.4) и (1.22). Это неудобство обходится следующим образом. Рассмотрим оператор

$$\hat{H}_0(\lambda) = \frac{\lambda}{2}\sum\left(\hat{p}^2(k) + \hat{q}^2(k) - \frac{h}{2}\right), \quad (5.7)$$

через $\Xi_\lambda^{(0)}(\beta)$ обозначим соответствующую статсумму $\Xi_\lambda^{(0)}(\beta) = \operatorname{Sp} e^{-\beta\hat{H}_0}$. Наконец, положим

$$\Xi(\beta) = \lim_{\lambda\to\infty}\lim_{N\to\infty}\frac{\Xi_N(\beta)}{\Xi_{N,\lambda}^{(0)}(\beta)}, \quad (5.8)$$

где $\Xi_N(\beta)$, $\Xi_{N,\lambda}^{(0)}(\beta)$ — конечномерные аппроксимации соответствующих интегралов, построенные с помощью одной и той же системы конечномерных проекторов P_N.

Роль оператора $\hat{H}_0(\lambda)$ состоит в том, что он имеет однократное собственное значение $E_0(\lambda) = 0$, в то время как все остальные его собственные значения $E_n(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\Xi_\lambda(\beta) = 1$. Вместо (5.7) может быть рассмотрен любой другой оператор с этим же свойством.

В случае виковских символов аппроксимация общего вида для интеграла (4.39) строится с помощью формулы, аналогичной (4.43),

$$\Xi(\beta) = \lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{\Xi_N(\beta)}{\Xi_{N,\lambda}^{(0)}(\beta)}.$$

Параметр $\varepsilon > 0$ входит в числитель и знаменатель правой части благодаря сдвигу аргумента в формуле (5.5). В качестве $\hat{H}_0(\lambda)$ в виковском случае естественно рассмотреть оператор

$$\hat{H}_0(\lambda) = \lambda \sum \omega(k)\, \hat{a}^*(k)\, \hat{a}(k). \tag{5.9}$$

2) Обратим внимание на то, что континуальный интеграл для статсуммы в виковском варианте, в отличие от континуального интеграла для символа оператора эволюции, содержит сдвиг аргумента лишь в первом слагаемом в показателе экспоненты. Причина этого — в различных свойствах дифференциального члена в этих интегралах: в обоих случаях он имеет вид (Ba^*, a), где $B = \mathrm{d}/\mathrm{d}\tau$, однако в случае статсуммы оператор B имеет периодические или антипериодические граничные условия и поэтому самосопряжен, в случае оператора эволюции — нулевые и поэтому симметричен, но существенным образом не самосопряжен.

2) Пример. Рассмотрим систему с одной степенью свободы, бозевский вариант вторичного квантования. Положим

$$\hat{H} = \omega \hat{a}^* \hat{a} \tag{5.9'}$$

(гармонический осциллятор).

Учитывая периодические граничные условия, разложим траекторию в ряд Фурье:

$$a(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n\tau/\beta}, \quad a^*(\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n^* e^{-2\pi i n\tau/\beta}. \tag{5.10}$$

В качестве $\mathscr{H}_N$ рассмотрим подпространство траекторий, у которых коэффициенты Фурье отличны от нуля только при $|n| \leqslant N$. В таком случае

$$\Xi_N(\beta) = \int \exp\left[-\sum_{-N}^{N}\left(\beta\omega e^{-2\pi i n/\beta} + \frac{2\pi i n}{h}\right) a_n^* a_n\right] \prod_{-N}^{N} \mathrm{d}a_n^*\, \mathrm{d}a_n = \prod_{-N}^{N}\left(\beta\omega e^{-2\pi i n\varepsilon/\beta} + \frac{2\pi i n}{h}\right)^{-1}.$$

Аналогично,

$$\Xi_{N,\lambda}(\beta) = \sum_{-N}^{N}\left(\beta\lambda e^{-2\pi i n\varepsilon/\beta} + \frac{2\pi i n}{h}\right)^{-1}.$$

Отсюда

$$\frac{\Xi_N(\beta)}{\Xi_{N,\lambda}(\beta)} = \frac{\lambda}{\omega}\, \frac{\prod\limits_{|n|=1}^{N}\left(1 + \frac{h\beta\lambda}{2\pi i n} e^{-2\pi i n\varepsilon/\beta}\right)}{\prod\limits_{|n|=1}^{N}\left(1 + \frac{h\beta\omega}{2\pi i n} e^{-2\pi i n\varepsilon/\beta}\right)}.$$

Найдем

$$\Phi(\beta, \lambda) = \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty} \prod_{|n|=1}^{N}\left(1 + \frac{h\beta\lambda}{2\pi i n} e^{-2\pi i n\varepsilon/\beta}\right).$$

Обозначим через $\Phi_\varepsilon(\beta, \lambda)$ функцию, стоящую под знаком первого предела. Имеем

$$\ln \Phi_\varepsilon = \sum_1^\infty \left[\ln\left(1+\frac{h\beta\lambda}{2\pi i n} e^{-2\pi i n\varepsilon/\beta}\right)+\ln\left(1-\frac{h\beta\lambda}{2\pi i n} e^{2\pi i n\varepsilon'\beta}\right)\right]=$$

$$=\sum_1^\infty \frac{h\beta\lambda}{2\pi i n}\left(1-e^{-2\pi i n\varepsilon/\beta}-e^{2\pi i n\varepsilon/\beta}\right)+R_\varepsilon(\beta, \lambda), \quad (5.11)$$

где $R_\varepsilon(\beta, \lambda)$ — абсолютно сходящийся ряд, в котором предельный переход при $\varepsilon \to 0$ можно совершить почленно. Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} R_\varepsilon(\beta, \lambda)=\sum_1^\infty \ln\left[1+\left(\frac{h\beta\lambda}{2\pi n}\right)^2\right].$$

Первое слагаемое в правой части (5.11) обозначим $T_\varepsilon(\beta, \lambda)$. Воспользуемся тождеством, справедливым на отрезке $-\pi < x < \pi$:

$$\theta(x)(\pi-x)-\theta(-x)(\pi+x)=2\sum_1^\infty \frac{\sin nx}{n}. \quad (5.12)$$

Из (5.12) следует, что

$$T_\varepsilon(\beta, \lambda)=\frac{h\beta\lambda}{2\pi}\left[\theta\left(-\frac{2\pi\varepsilon}{\beta}\right)\left(\pi+\frac{2\pi\varepsilon}{\beta}\right)-\theta\left(\frac{2\pi\varepsilon}{\beta}\right)\left(\pi-\frac{2\pi\varepsilon}{\beta}\right)\right].$$

Таким образом, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon(\beta, \lambda)=-\frac{h\beta\lambda}{2}$,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\Phi_\varepsilon(\beta, \lambda)=e^{-h\beta\lambda/2}\prod_1^\infty\left[1+\left(\frac{h\beta\lambda}{2\pi n}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{e^{-h\beta\lambda/2}}{h\beta\lambda}\left(e^{h\beta\lambda/2}-e^{-h\beta\lambda/2}\right)=\frac{1-e^{-h\beta\lambda}}{h\beta\lambda}.$$

Окончательно получаем

$$\Xi(\beta)=\lim_{\lambda\to\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{\Xi_N(\beta)}{\Xi_{N,\lambda}(\beta)}=\lim_{\lambda\to\infty}\frac{\lambda}{\omega}\frac{\Phi(\beta, \lambda)}{\Phi(\beta, \omega)}=\frac{1}{1-e^{-h\beta\omega}}.$$

ДОПОЛНЕНИЕ
СВОЙСТВА СИМВОЛОВ

а) Вейлевские символы

1) Определение. Пусть $p=(p_1, \ldots, p_n)$, $q=(q_1, \ldots, q_n)$, p_i, q_j — канонические координаты в фазовом пространстве R^{2n}, $\hat H$ — оператор в пространстве $L^2(R^n)$ и $H(p, q)$ — его символ Вейля:

$$H(p, q)=\int e^{i(\alpha p+\beta q)}\varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta,$$
$$\hat H(p, q)=\int e^{i(\alpha\hat p+\beta\hat q)}\varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \quad (Д1)$$

где $\hat p=(\hat p_1, \ldots, \hat p_n)$, $\hat q=(\hat q_1, \ldots, \hat q_n)$, $\hat p_i$, $\hat q_j$ — обычные операторы импульса и координаты. Функция φ в (Д.1) может быть как обычной, так и обобщенной. В частности, не исключается случай, когда $H(p, q)$ является полиномом. В этом случае $\varphi(\alpha, \beta)$ является линейной комбинацией производных δ-функции, а связь между оператором и его символом носит чисто алгебраический характер: если

$$H(p, q)=\sum h_{m, n}p^m q^n,$$

то

$$\hat{H}=\sum h_{m,\,n}\,(\widehat{p^m q^n}), \tag{Д.2}$$

где m, n — мультииндексы: $m=(m_1, m_2, \ldots)$, $n=(n_1, n_2, \ldots)$, $p^m=p_1^{m_1}p_2^{m_2}, \ldots$, $q^n=q_1^{n_1}q_2^{n_2}\ldots$, $(\widehat{p^m q^n})$ означает симметрическое произведение. (Симметрическим произведением некоммутирующих операторов $A_1^{k_1}, \ldots, A_N^{k_N}$ называется оператор $(A_1^{k_1}, \ldots, A_N^{k_N})$, определяемый согласно формуле

$$(\alpha_1 A_1+\ldots+\alpha_N A_N)^M=\sum\frac{m!}{k_1!\ldots k_N!}\alpha_1^{k_1}\ldots\alpha_N^{k_N}\,(A_1^{k_1}\ldots A_N^{k_N}), \tag{Д.3}$$

где α_i — числа и $M=k_1+\ldots+k_N$. В частности, если $H(p, q)=(p^2/2m)+v(q)$, то $\hat{H}=(\hat{p}^2/2m)+v(\hat{q})$, если $H(p, q)=pq$, то $\hat{H}=(1/2)\,(\hat{p}\hat{q}+\hat{q}\hat{p})=\hat{q}\hat{p}+(h/2i)$.

2) Связь с матричными элементами. Рассмотрим $\hat{q}$-представление. Решая задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial t}=i\,(\alpha\hat{p}+\beta\hat{q})\,f$$

и затем полагая $t=1$, находим, что

$$(e^{i(\alpha\hat{p}+\beta\hat{q})}f)\,(s)=f\,(s+\alpha h)\,e^{i\left(\beta s+\frac{\alpha\beta h}{2}\right)}. \tag{Д.4}$$

Отсюда

$$(\hat{H}f)\,(s)=\int\varphi\,(\alpha, \beta)\,e^{i\left(\beta s+\frac{\alpha\beta h}{2}\right)}f\,(s+\alpha h)\,d\alpha\,d\beta=\int K\,(s, s')\,f\,(s')\,ds,$$

где $K(s, s')=\langle s\mid\hat{H}\mid s'\rangle$ — матричный элемент оператора $\hat{H}$, равный

$$K\,(s, s')=\frac{1}{h^n}\int\varphi\left(\frac{s'-s}{h}, \beta\right)e^{\frac{i\beta}{2}(s+s')}\,d\beta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{2n}h^n}\int H\,(p, q)\,e^{-i\left(\frac{s'-s}{h}p+\beta q\right)+\frac{i\beta}{2}(s'+s)}\,dp\,dq\,d\beta=$$

$$=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int H\,(p, q)\,\delta\left(q-\frac{s+s'}{2}\right)e^{-i\frac{s'-s}{h}p}\,dp\,dq=$$

$$=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int H\left(p, \frac{s+s'}{2}\right)e^{\frac{i}{h}p(s-s')}\,dp. \tag{Д.5}$$

Формула (Д.5) допускает обращение

$$H\,(p, q)=\int K\left(q-\frac{\xi}{2}, q+\frac{\xi}{2}\right)e^{ip\xi/h}\,d\xi. \tag{Д.6}$$

3) Закон умножения. Если $\hat{H}=\hat{H}_1\hat{H}_2$, то матричные элементы этих операторов связаны соотношением

$$K\,(x, y)=\int K_1\,(x, s)\,K_2\,(s, y)\,ds. \tag{Д.7}$$

Отсюда, пользуясь (Д.5), (Д.6), находим связь между их символами:

$$H\,(p, q)=(H_1 * H_2)\,(p, q)=$$

$$=\frac{1}{(\pi h)^{2n}}\int H_1\,(p_1, q_1)\,H_2\,(p_2, q_2)\,e^{\frac{2i}{h}s(p,\,q;\,p_1,\,q_1;\,p_2,\,q_2)}\,dp_1\,dq_1\,dp_2\,dq_2, \tag{Д.8}$$

где

$$s=p_1\,(q-q_1)+p_2\,(q_2-q)+p\,(q_2-q_1)=-2\int_{\triangle A_1 A A_2} p\,dq, \tag{Д.9}$$

$A_1 \overset{A}{\triangle} A_2$ — прямолинейный треугольник в фазовом пространстве с вершинами

$A = (p, q)$, $A_1 = (p_1, q_1)$, $A_2 = (p_2, q_2)$. В частности, при $n = 1$, площадь этого треугольника равна $| s/2 |$. Рассмотрим в $L^2 (R^{4n})$ оператор

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial q_2} - \frac{\partial^2}{\partial p_2 \partial q_1}\right). \tag{Д.10}$$

Положим $U(t) = e^{itL}$. Легко видеть, что

$$(U(t) f)(p_1, p_2, q_1, q_2) = \frac{1}{(\pi t)^{2n}} \int e^{2i/t} [(p_1 - p_1')(q_2 - q_2') - (p_2 - p_2')(q_1 - q_1')] f(p_1', p_2', q_1', q_2')\, dp_1'\, dp_2'\, dq_1'\, dq_2'. \tag{Д.11}$$

Сравнивая (Д.11) с (Д.7), (Д.8), находим, что

$$(H_1 * H_2)(p, q) = (U(t) H_1 H_2)(p_1, p_2, q_1, q_2)\big|_{\substack{p_1 = p_2 = p,\\ q_1 = q_2 = q}} \tag{Д.12}$$

где $H_1 H_2 = H_1 (p_1', q_1') H_2 (p_2', q_2')$.

Из (Д.12) следует разложение $H_1 * H_2$ в ряд по степеням

$$(H_1 * H_2)(p, q) = \sum \frac{(ih)^n}{n!} L^n H_1 (p_1, q_1) H_2 (p_2, q_2)\Big|_{\substack{p_1 = p_2 = p,\\ q_1 = q_2 = q}}. \tag{Д.13}$$

Эту формулу можно переписать также следующим образом:

$$(H_1 * H_2)(p, q) = H_1 \left(p + \frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{q}}, q - \frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{p}}\right) H_2 (\tilde{p}, \tilde{q})\Big|_{\substack{\tilde{p} = p,\\ \tilde{q} = q}} =$$

$$= H_2 \left(p - \frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{q}}, q + \frac{ih}{2}\frac{\partial}{\partial \tilde{p}}\right) H_1 (\tilde{p}, \tilde{q})\Big|_{\substack{\tilde{p} = p,\\ \tilde{q} = q}}. \tag{Д.14}$$

Первые члены разложения по степеням h дают

$$(H_1 * H_2)(p, q) = H_1 (p, q) H_2 (p, q) + \frac{ih}{2}\left(\frac{\partial H_1}{\partial p}\frac{\partial H_2}{\partial q} - \frac{\partial H_1}{\partial q}\frac{\partial H_2}{\partial p}\right),$$

в соответствии с общим определением квантования.

В заключение приведем формулу композиции в терминах преобразования Фурье символов:

$$\varphi(\alpha, \beta) = \int \varphi_1 (\alpha - \alpha', \beta - \beta') \varphi_2 (\alpha', \beta') e^{-\frac{ih}{2}(\alpha\beta' - \beta\alpha')} d\alpha'\, d\beta'. \tag{Д.15}$$

((Д.15) проще всего вывести из (Д.12).).

4) Эрмитово-сопряженный оператор. След. Матричные элементы эрмитово-сопряженных операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}_1 = \hat{H}^*$ связаны соотношением $K_1 (s_1, s_2) = \overline{K (s_2, s_1)}$. Используя (Д.5), получаем, что символы этих операторов комплексно сопряжены:

$$H_1 (p, q) = \overline{H (p, q)}. \tag{Д.16}$$

Далее, $\operatorname{Sp} \hat{H} = \int K(s, s)\, ds$. Отсюда, используя (Д.5), находим

$$\operatorname{Sp} \hat{H} = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int H(p, q)\, dp\, dq. \tag{Д.17}$$

Аналогично,

$$\operatorname{Sp} (\hat{H}_1 \hat{H}_2^*) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int H_1 (p, q) \overline{H_2 (p, q)}\, dp\, dq. \tag{Д.18}$$

5) Линейные канонические преобразования. Пусть $\hat{U}$ — унитарный оператор в $L^2 (R^n)$, осуществляющий линейное каноническое преобразование

$$\begin{aligned} \hat{U}\hat{p}\hat{U}^{-1} &= \hat{p}_1 = A\hat{p} + B\hat{q} + a, \\ \hat{U}\hat{q}\hat{U}^{-1} &= \hat{q}_1 = C\hat{p} + D\hat{q} + b, \end{aligned} \tag{Д.19}$$

где $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ — вещественная симплектическая матрица и a, b — произвольные векторы. Из (Д.1) следует, что символы операторов $\hat{H}$ и $\hat{H}_1 = \hat{U}\hat{H}\hat{H}^{-1}$ связаны соотношением

$$H_1(p, q) = H(Ap + Bq + a,\ Cp + Dq + b), \tag{Д.20}$$

т. е. линейное преобразование над символами сводится к замене переменных. Можно показать (см. [5, 17]), что это свойство характеризует вейлевские символы однозначно. Отметим связь между квантовыми и классическими линейными каноническими преобразованиями. Игнорировав в (Д.13) первые равенства и ликвидировав знак $\wedge$ над $\hat{p}$ и $\hat{q}$, мы получим классическое каноническое преобразование, которое естественно назвать классическим вариантом преобразования (Д.13). Обратно, поставив знак $\wedge$ над p и q в формулах классического линейного канонического преобразования, мы получим квантовое каноническое преобразование, которое естественно назвать квантовым вариантом классического.

6) Отражения. Сопоставим каждому классическому линейному каноническому преобразованию определенный с точностью до множителя унитарный оператор $\hat{U}$, осуществляющий его квантовый вариант согласно формуле (Д.19). Таким образом, возникает проективное представление группы классических линейных канонических преобразований. В общем случае уменьшить неоднозначность сопоставления оператора каноническому преобразованию нельзя *). Однако для некоторых семейств канонических преобразований такая возможность имеется. К их числу относятся отражения

$$p_1 = -p + 2p_0, \quad q_1 = -q + 2q_0. \tag{Д.21}$$

Отражению (Д.21) в точке (p_0, q_0) естественно сопоставить оператор $\hat{U}_{p_0, q_0}$ с вейлевским символом

$$U_{p_0, q_0}(p, q) = (\pi h)^n\, \delta(p - p_0)\, \delta(q - q_0). \tag{Д.22}$$

В самом деле, из (Д.8), (Д.14) и (Д.22) следует, что

$$\hat{U}_{p_0, q_0}\hat{p}\hat{U}^{-1}_{p_0, q_0} = -\hat{p} + 2p_0, \quad \hat{U}_{p_0, q_0}\hat{q}\hat{U}^{-1}_{p_0, q_0} = -\hat{q} + 2q_0,$$
$$\hat{U}^2_{p_0, q_0} = 1, \quad \hat{U}^* = \hat{U}. \tag{Д.23}$$

Рассмотрим гильбертово пространство операторов со скалярным произведением $(A, B) = \mathrm{Sp}\,(AB^*)$. Формулы (Д.18) и (Д.22) показывают, что операторы отражения $\hat{U}_{p,q}$ играют в этом пространстве роль обобщенной ортонормированной системы, аналогичной e^{ipx} в обычном пространстве L^2, причем вейлевские символы играют роль преобразования Фурье:

$$(\hat{U}_{p_1, q_1}, \hat{U}_{p_2, q_2}) = \left(\frac{\pi h}{2}\right)^n \delta(p_1 - p_2)\, \delta(q_1 - q_2), \tag{Д.24}$$
$$\hat{H} = \frac{1}{(\pi h)^n} \int H(p, q)\, \hat{U}_{p, q}\, dp\, dq, \quad H(p, q) = 2^n\, \mathrm{Sp}\,(\hat{H}\hat{U}_{p, q}).$$

Эта интерпретация вейлевских символов может служить основой далеких обобщений (см. [18]). Вейлевские символы введены Г. Вейлем в известной книге [19], однако там не содержится никаких формул операторного исчисления. Приведенные здесь формулы рассеяны по большому количеству работ, часть которых носит спекулятивно-философский характер (см. [20]). В настоящее время представляется невозможным установить

*) С точностью до множителя оператор, соответствующий параллельному переносу на вектор $x = (\alpha, \beta)$, равен $\hat{T}_x = \exp\left\{\frac{i}{h}(\beta\hat{p} - \alpha\hat{q})\right\}$. Если бы существовал множитель $c(x) \neq 0$, делающий сопоставление однозначным, то он должен был бы удовлетворять уравнению

$$c(x)\, c(y) = c(x + y)\, e^{-\frac{i}{2h} x\omega y}, \quad \omega = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{*}$$

Соотношение (*) противоречиво, так как его левая часть симметрична относительно x и y, а правая — нет. Таким образом, неоднозначность представления группы линейных канонических преобразований является фундаментальным свойством квантования. (Соотношение (*) следует из равенства $\hat{T}_x\hat{T}_y = e^{\frac{i}{2h} x\omega y}\, \hat{T}_{x+y}$, которое в свою очередь вытекает из (Д.15).)

авторство каждой конкретной формулы. Одной из первых работ, использующей символы Вейля современным образом, является работа Грюневольда [21]. (В ней строится на их основе континуальный интеграл, однако не для оператора эволюции в пространстве состояний, а для соответствующего автоморфизма в алгебре операторов.) Аналитическим свойствам вейлевских символов посвящена работа [22].

б) Виковские символы. Бозевский вариант

1) Определение и основные свойства. Обозначим через F_2 фоковское пространство целых антианалитических функций $f(\bar{z})$ n переменных со скалярным произведением

$$(f, g)=\frac{1}{h^n}\int f(z)\,g(z)\,e^{-\frac{1}{h}z\bar{z}}\prod dz\,d\bar{z}. \qquad (\text{Д}.25)$$

В произведение дифференциалов включен нормированный множитель, обеспечивающий равенство

$$(f, f)=1 \quad \text{при} \quad f(\bar{z})\equiv 1. \qquad (\text{Д}.26)$$

В F_2 действуют операторы рождения и уничтожения $\hat{a}_k^*$, $\hat{a}_k$:

$$(\hat{a}_k^* f)(\bar{z})=\bar{z}_k f(\bar{z}), \quad (\hat{a}_k f)(\bar{z})=h\frac{\partial}{\partial\bar{z}_k}f(\bar{z}). \qquad (\text{Д}.27)$$

Каждому оператору, записанному в виковской нормальной форме

$$\hat{A}=\sum A_{mn}(\hat{a}^*)^m\hat{a}^n, \qquad (\text{Д}.28)$$

сопоставляется его виковский символ *

$$A(\bar{z}, z)=\sum A_{mn}\bar{z}^m z^n. \qquad (\text{Д}.29)$$

(В (Д.28), (Д.29) коэффициенты A_{mn} одни и те же, m, n — мультииндексы.) Символ $A(z, \bar{z})$ *является сужением на* R^{2n} *целой аналитической функции* $2n$ *переменных*

$$A(v, z)=\sum A_{mn}v^m z^n$$

(см. ниже). Действие оператора на вектор задается формулой

$$(\hat{A}f)(\bar{z})=\frac{1}{h^n}\int A(\bar{z}, v)\,f(\bar{v})\,e^{\frac{1}{h}(\bar{z}-\bar{v})v}\prod dv\,d\bar{v}. \qquad (\text{Д}.30)$$

Символ оператора $\hat{A}=\hat{A}_1\hat{A}_2$ выражается через символы операторов $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ согласно формуле

$$A(\bar{z}, z)\,(A_1 * A_2)(z, \bar{z})=\frac{1}{h^n}\int A_1(\bar{z}, v)\,A_2(\bar{v}, z)\,e^{-\frac{1}{h}(\bar{z}-\bar{v})(z-v)}\prod dv\,d\bar{v}. \qquad (\text{Д}.31)$$

Функции $A(\bar{z}, v)$, $A_1(\bar{z}, v)$, $A_2(\bar{v}, z)$, участвующие в формулах (Д.30), (Д.31), являются аналитическими продолжениями соответствующих символов. Символ оператора $\hat{A}_1=\hat{A}^*$, эрмитово сопряженного к $\hat{A}$, комплексно сопряжен символу оператора $\hat{A}$:

$$A_1(\bar{z}, z)=\overline{A(\bar{z}, z)}. \qquad (\text{Д}.32)$$

В частности, символ самосопряженного оператора веществен.

След оператора выражается через его виковский символ согласно формуле

$$\operatorname{Sp}\hat{A}=\frac{1}{h^n}\int A(\bar{z}, z)\prod d\bar{z}\,dz. \qquad (\text{Д}.33)$$

Рассмотрим в F_2 семейство векторов, зависящих от параметра v:

$$\Phi_v(\bar{z})=e^{\frac{1}{h}v\bar{z}}. \qquad (\text{Д}.34)$$

(*Эти векторы называются когерентными состояниями.*) Оказывается, что виковский символ оператора $\hat{A}$ является его средним значением по этому состоянию:

$$A(\bar{v}, v)=\frac{(\Phi_v, \hat{A}\Phi_{\bar{v}})}{(\Phi_{\bar{v}}, \Phi_{\bar{v}})}. \qquad (\text{Д}.35)$$

Из (Д.35) следует возможность аналитического продолжения символа на C^{2n}:

$$A(z, v) = \frac{(\Phi_z, \hat{A}\Phi_{\bar{v}})}{(\Phi_z, \Phi_{\bar{v}})}. \tag{Д.36}$$

(Из (Д.25) следует, что $(\Phi_z, \Phi_{\bar{v}}) = e^{\frac{1}{h} zv} \neq 0$.) Отметим еще одно важное свойство виковских символов. В F_2 существует ортонормированный базис, состоящий из векторов

$$e_k = \frac{z^k}{\sqrt{k! h^{|k|}}}, \tag{Д.37}$$

где $k = (k_1, \ldots, k_n)$ — мультииндекс, $|k| = \sum k_i$ (k_i — так называемые числа заполнения).

Пусть $\| \tilde{A}_{kl} \|$ — матрица оператора $\hat{A}$ в базисе (Д.37), k, l — мультииндексы. Рассмотрим производящую функцию для матричных элементов $\tilde{A}_{k,l}$:

$$\tilde{A}(\bar{z}, z) = \sum \frac{\tilde{A}_{k,l}}{\sqrt{k! l! h^{|k|+|l|}}} \bar{z}^k z^l. \tag{Д.38}$$

Функция $\tilde{A}$ тесно связана с виковским символом оператора $\hat{A}$:

$$\tilde{A}(\bar{z}, z) = A(\bar{z}, z) e^{\frac{1}{h}\bar{z}z}. \tag{Д.39}$$

В заключение этого раздела укажем разложение композиции символов по степеням h. Рассмотрим оператор

$$\Delta = \sum \frac{\partial^2}{\partial z_k \partial \bar{z}_k} = \frac{1}{4} \sum \left(\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_k^2} \right),$$

где $z_k = x_k + i y_k$. Напомним, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u, \tag{Д.40}$$

задается ядром Пуассона. В комплексных координатах оно может быть записано в виде

$$u(t; z, \bar{z}) = \int K_t(z - v, \bar{z} - \bar{v}) f(v, \bar{v}) \prod dv\, d\bar{v}, \tag{Д.41}$$

где

$$K_t(z, \bar{z}) = \frac{1}{t^n} e^{-\frac{1}{t}\bar{z}z}. \tag{Д.42}$$

(В (Д.38) имеется в виду та же нормировка дифференциалов, что и в предшествующих интегралах.) Сопоставляя формулы (Д.41), (Д.42) и (Д.31), находим, что

$$(A_1 * A_2)(\bar{z}, z) = e^{h\Delta_{v\bar{v}}} A_1(\bar{z}, v) A_2(\bar{v}, z) |_{v=z, \bar{v}=\bar{z}}. \tag{Д.43}$$

(Оператор $\Delta_{v\bar{v}}$ действует на A_1, A_2 как на функцию $v, \bar{v}$. Аргументы $z, \bar{z}$ играют роль параметров.) Формула (Д.43) может быть переписана в эквивалентном виде

$$(A_1 * A_2)(\bar{z}, z) = A_1\left(\bar{z}, z + h\frac{\partial}{\partial \bar{v}}\right) A_2(\bar{v}, z) |_{\bar{v}=\bar{z}} = A_2\left(\bar{z} + h\frac{\partial}{\partial v}, z\right) A_1(\bar{z}, v) |_{v=z}. \tag{Д.44}$$

Первые члены разложения по степеням h имеют вид

$$(A_1 * A_2)(\bar{z}, z) = A_1(\bar{z}, z) A_2(\bar{z}, z) + h \frac{\partial A_1}{\partial z} \frac{\partial A_2}{\partial \bar{z}},$$

что согласуется с общей концепцией квантования.

2) Связь между виковскими и вейлевскими символами. Рассмотрим в пространстве F_2 операторы

$$\hat{q}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^*), \qquad \hat{p}_k = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a}_k - \hat{a}_k^*). \qquad (Д.45)$$

Легко видеть, что они удовлетворяют тем же соотношениям коммутации, что и обычные операторы координаты и импульса. Более того, можно показать, что диагонализуя операторы $\hat{q}_k$ вида (Д.45), мы приходим к обычному $\hat{q}$-представлению, в котором операторы $\hat{p}_k$ и $\hat{q}_k$ имеют вид (1.2) *). Таким образом, возникает возможность для одного и того же оператора $\hat{A}$ рассмотреть как виковский, так и вейлевский символы $A_{\text{Wick}}(\bar{z}, z)$ и $A_{\text{Weyl}}(p, q)$. Аргументы этих функций связаны соотношением (Д.45):

$$q_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(z_k + \bar{z}_k), \quad p_k = \frac{1}{i\sqrt{2}}(z_k - \bar{z}_k). \qquad (Д.46)$$

Для установления связи между виковскими и вейлевскими символами прежде всего укажем виковский символ оператора отражения U_{p_0,q_0}. Он оказывается равным

$$K_{p_0,\,q_0}(\bar{z}, z) = e^{-\frac{2}{h}(\bar{z}-\bar{z}_0)(z-z_0)}, \qquad (Д.47)$$

где z_0, $\bar{z}_0$ связаны с p_0, q_0 аналогично (Д.46) **). Из второй формулы (Д.24) и из (Д.35) следует, что

$$A_{\text{Wick}}(\bar{z}, z) = \frac{1}{(\pi h)^n}\int A_{\text{Weyl}}(p, q)\, K_{p,\,q}(\bar{z}, z)\, dp\, dq =$$

$$= \left(\frac{2}{h}\right)^n \int A_{\text{Weyl}}(p, q)\, e^{-\frac{2}{h}(\bar{z}-\bar{v})(z-v)}\, dv\, d\bar{v}. \qquad (Д.48)$$

Таким образом, виковский символ служит решением задачи Коши уравнения теплопроводности (Д.40), на время $t = \frac{h}{2}$, вейлевский символ является начальным условием для этой задачи.

---

*) Положим $\hat{b}_k = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q}_k + i\hat{p}_k)$, $\hat{b}_k^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(q_k - ip_k)$, где $\hat{q}_k$, $\hat{p}_k$ — операторы координаты и импульса в $\hat{q}$-представлении — имеют вид (1.2). Положим

$$\Phi_0(s) = e^{-\frac{s^2}{2h}}, \quad \Phi_{k_1 \ldots k_n}(s) = \hat{b}_1^{*k_1} \ldots \hat{b}_n^{*k_n}\Phi_0(s).$$

Функции $\Phi_{k_1,\ldots,k_n}(s)$ образуют ортогональный (ненормированный) базис в $L^2(R^n)$. $\left(\Phi_{k_1,\ldots,k_n} = h^{\frac{1}{2}\sum k_i} H_{k_1}\left(\frac{s}{\sqrt{h}}\right)\ldots H_{k_n}\left(\frac{s}{\sqrt{h}}\right)\right.$, где H_{k_i} — функции Эрмита.$\left.\right)$

Рассмотрим отображение $L\colon L^2(R^n) \to F_2$, определяемое формулой

$$L\Phi_{k_1 \ldots k_n} = \bar{z}_1^{k_1} \ldots \bar{z}_n^{k_n}.$$

Легко видеть, что L является изоморфизмом пространств и что $L\hat{b}_kL^{-1} = \hat{a}_k$, $L\hat{b}_k^*L^{-1} = \hat{a}_k^*$, где $\hat{a}_k$, $\hat{a}_k^*$ — операторы вида (Д.27). Следовательно, $L\hat{q}_kL^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_k + \hat{a}_k^*)$, $L\hat{p}_kL^{-1} = \frac{1}{i\sqrt{2}}(\hat{a}_k - \hat{a}_k^*)$. Отметим в заключение, что изоморфизм L может быть задан в интегральной форме с помощью производящей функции для полиномов Эрмита:

$$(Lf)(\bar{z}) = \frac{1}{(\pi h)^{n/4}}\int \exp\left[-\frac{1}{2n}(s^2 - 2\sqrt{2}\,\bar{z}s + \bar{z}^2)\right] f(s)\, ds,$$

(см. по этому поводу [23]).

**) Формула (Д.47) устанавливается следующим образом. Используя (Д.44), находим, что если $\hat{V}_{p_0q_0}$ — оператор с виковским символом (Д.47), то

$$\hat{a}_k\hat{V}_{p_0,\,q_0} = \hat{V}_{p_0,\,q_0}(-\hat{a}_k + 2z_0), \quad \hat{a}_k^*\hat{V}_{p_0,\,q_0} = \hat{V}_{p_0,\,q_0}(-\hat{a}_k^* + 2\bar{z}_0),$$

3) Антивиковские символы. Запишем оператор $\hat{A}$ в антивиковской нормальной форме:

$$\hat{A}=\sum \overset{\bullet}{A}_{mn}\hat{a}^m(\hat{a}^*)^n. \tag{Д.49}$$

Производящая функция $\overset{\bullet}{A}(z, \bar{z})$ для коэффициентов $\overset{\bullet}{A}_{mn}$ называется антивиковским символом оператора $\hat{A}$:

$$\mathring{A}(\bar{z}, z)=\sum \overset{\bullet}{A}_{mn}z^m\bar{z}^n. \tag{Д.50}$$

Виковский и антивиковский символы одного и того же оператора связаны формулой

$$\mathring{A}(\bar{z}, z)=\frac{1}{h^n}\int \overset{\bullet}{A}(\bar{v}, v)e^{-\frac{1}{h}(\bar{z}-\bar{v})(z-v)}\prod dv\,d\bar{v}, \tag{Д.51}$$

т. е. виковский символ является решением задачи Коши уравнения теплопроводности (Д.40) на время $t=h$, причем начальным условием служит антивиковский символ. Формула (Д.51) позволяет обобщить определение антивиковского символа: пусть виковский символ $\overset{\bullet}{A}(\bar{z}, z)$ оператора $\hat{A}$ допускает интегральное представление (Д.51), с некоторой функцией $\mathring{A}(\bar{v}, v)$; тогда $\mathring{A}(\bar{v}, v)$ называется антивиковским символом оператора $\hat{A}$.

Между виковскими и антивиковскими символами существует ряд важных соотношений двойственности. Приведем важнейшие из них:

1)
$$\operatorname{Sp}\hat{A}\hat{B}^*=\frac{1}{h^n}\int \mathring{A}(\bar{z}, z)\,\overset{\bullet}{B}(\bar{z}, z)\prod dz\,d\bar{z}. \tag{Д.52}$$

2) Пусть $D(\hat{A})$ — множество значений квадратичной формы $(\hat{A}f, f)$, когда f пробегает единичную сферу $\|f\|=1$. (Можно показать, что $D(\hat{A})$ является выпуклым множеством на комплексной плоскости; см., например, [24].) Пусть, далее, $D(A)$ — множество значений виковского символа оператора $\hat{A}$ и $D(\mathring{A})$ — выпуклая оболочка множества значений антивиковского символа. Тогда

$$D(A)\subset D(\hat{A})\subset D(\mathring{A}). \tag{Д.53}$$

3) Пусть $\hat{A}$ — самосопряженный оператор, $\varphi(x)$ — выпуклая вниз функция вещественного переменного. Тогда

$$\frac{1}{h^n}\int \varphi(A(\bar{z}, z))\prod dz\,d\bar{z}\leqslant \operatorname{Sp}\varphi(\hat{A})\leqslant\frac{1}{h^n}\int \varphi(\mathring{A}(\bar{z}, z))\prod dz\,d\bar{z}. \tag{Д.54}$$

Формулы (Д.53), (Д.54) полезны при исследовании спектра оператора $\hat{A}$.

В заключение отметим, что антивиковские символы, в отличие от вейлевских и виковских, существуют лишь у сравнительно узкого множества операторов. Так, например, оператор Шрёдингера $\hat{H}=(\hat{p}^2/2m)+v(\hat{q})$ обладает антивиковским символом лишь, если потенциал допускает интегральное представление

$$v(q)=\int e^{-\frac{1}{h}(q-q')^2}u(q')\,dq.$$

Отсюда с необходимостью следует аналитичность потенциала. Виковские символы (как в бозевском, так и в фермиевском вариантах) были введены в работе [25]. Их свойства детально изучены в [26]. Антивиковские символы впервые появились в работах по квантовой оптике [27, 28]. Приведенные здесь свойства этих символов заимствованы из [29]. Связь между вейлевскими и виковскими символами установлена в [30].

где $z_0=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_0+ip_0)$. Отсюда следует, что оператор $\hat{V}_{p_0,q_0}$ отличается от оператора $\hat{U}_{p_0,q_0}$ множителем: $\hat{U}_{p_0,q_0}=c(p_0, q_0)\hat{V}_{p_0,q_0}$. Отсюда согласно (Д.24) (Д.35) вытекает связь между виковскими и вейлевскими символами, отличающаяся от (Д.47) наличием множителя c в правой части. Осталось заметить, что как виковский, так и вейлевский символы единичного оператора тождественно равны 1. Следовательно, $c=1$.

в) Виковские символы. Фермиевский случай

Определение виковского символа (формулы (Д.28), (Д.29)) сохраняется прежним, разница состоит лишь в том, что теперь z_k, $\bar{z}_k$ — не комплексные переменные, но образующие грассмановой алгебры Λ с инволюцией, знак «—» означает инволюцию. Таким образом, $A(\bar{z}, z) \in \Lambda$. Формулы (Д.32) и (Д.39), устанавливающие связь между символами сопряженных операторов и между символом оператора и производящей функцией его матричных элементов в базисе из чисел заполнения, полностью сохраняются. Определение скалярного произведения (Д.25) в фоковском пространстве, а также формулы (Д.30) и (Д.31) для действия оператора на вектор и произведения операторов сохраняют силу с единственным изменением: множитель $1/h^n$, стоящий перед знаком интеграла, следует заменить множителем h^n (знак $\int$ означает, разумеется, интеграл по антикоммутирующим переменным). Формулы (Д.27), (Д.43) сохраняют свою силу, однако требуют уточнения: $\partial/\partial\bar{z}_k$ в (Д.27) означает левую производную, оператор $\Delta_{v\bar{v}}$ в (Д.43) равен

$$\Delta_{v\bar{v}} = (\partial/\partial v_r)\,\partial/\partial\bar{v}_l, \tag{Д.55}$$

где индексы r и l означают соответственно правую и левую производные. Формула (Д.44) модифицируется:

$$(A_1 * A_2)(\bar{z}, z) =$$

$$= A_1\left(\bar{z},\ z + h\frac{\vec{\partial}}{\partial\bar{v}}\right) A_2(\bar{v}, z)\,\Big|_{\bar{v}=\bar{z}} = A_1(\bar{z}, v)\, A_2\left(\bar{z} + h\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial v},\ z\right)\Big|_{v=z} \tag{Д.56}$$

($\vec{\partial}/\partial\bar{v}$ означает левую производную, $\overleftarrow{\partial}/\partial v$ — правую). Существенно меняется формула следа:

$$\operatorname{Sp}\hat{A} = h^n \int A(\bar{z}, z)\, e^{\frac{2}{h}\bar{z}z} \prod dz\, d\bar{z}. \tag{Д.57}$$

Во всех формулах надо следить за правильным порядком множителей. (Для бозевского случая это не существенно. Однако формулы из предыдущего раздела, на которые здесь есть ссылки, написаны с учетом их применимости в фермиевском случае.)

В фермиевском случае могут быть также рассмотрены аналоги вейлевских и антивиковских символов. Вейлевские символы и связанные с ними континуальные интегралы подробно рассмотрены в работе [31], здесь мы их не касаемся.

Антивиковские символы в фермиевском случае утрачивают все свои замечательные свойства, и их рассмотрение большого смысла не имеет.

г) $p-q$- и $q-p$-символы

1) Определение и основные свойства. Сопоставим функции $H(p, q)$ вида (Д.1) операторы

$$\hat{H}_1 = \int e^{i\alpha\hat{p}} e^{i\beta\hat{q}} \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \qquad \hat{H}_2 = \int e^{i\beta\hat{q}} e^{i\alpha\hat{p}} \varphi(\alpha, \beta)\, d\alpha\, d\beta, \tag{Д.58}$$

где $\hat{p}_i$, $\hat{q}_j$ — операторы импульса и координаты. Функция $H(p, q)$ называется $p-q$-символом оператора $\hat{H}_1$ и $q-p$-символом оператора $\hat{H}_2$. В случае, если функция $H(p, q)$ является полиномом,

$$H(p, q) = \sum h_{m,n} p^m q^n.$$

Операторы $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_2$ могут быть определены чисто алгебраически:

$$\hat{H}_1 = \sum h_{mn} \hat{p}^m \hat{q}^n, \qquad \hat{H}_2 = \sum h_{mn} \hat{q}^n \hat{p}^m.$$

Пусть H — некоторый оператор, $H_{\hat{p}\hat{q}}(p, q)$ и $H_{\hat{q}\hat{p}}(p, q)$ его соответственно $p-q$- и $q-p$-символы, $K(s_1, s_2) = \langle s_1 \mid \hat{H} \mid s_2\rangle$ — матричный элемент в $\hat{q}$-представлении. Символы H_1 и H_2 связаны с $K(s_1, s_2)$ соотношениями

$$H_{\hat{p}\hat{q}}(p, q) = \int K(x, q)\, e^{\frac{p}{ih}(x-q)}\, dx, \qquad H_{\hat{q}\hat{p}}(p, q) = \int K(q, y)\, e^{\frac{p}{ih}(q-y)}\, dy, \tag{Д.59}$$

$K(s_1, s_2)=$

$$=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int H_{\hat p \hat q}(p, s_2)\, e^{-\frac{p}{ih}(s_1-s_2)}\,dp=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int H_{\hat q \hat p}(p, s_1)\, e^{-\frac{p}{ih}(s_1-s_2)}\,dp.$$

Формулы (Д.59) выводятся так же, как аналогичные формулы для вейлевских символов. Из них следуют законы умножения и формулы следа

$(A_{\hat p \hat q} * B_{\hat p \hat q})(p, q)=$

$$=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int A_{\hat p \hat q}(p, q_1)\, B_{\hat p \hat q}(p_1, q)\, e^{-\frac{1}{ih}(q-q_1)(p-p_1)}\,dq_1\,dp_1, \qquad (Д.60)$$

$$(A_{\hat q \hat p} * B_{\hat q \hat p})(p, q)=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int A_{\hat q \hat p}(p_1, q)\, B_{\hat q \hat p}(p, q_1)\, e^{\frac{1}{ih}(q-q_1)(p-p_1)}\,dp_1\,dq_1,$$

$$\operatorname{Sp}\hat A=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int A_{\hat q \hat p}(p, q)\,dp\,dq=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int A_{\hat p \hat q}(p, q)\,dp\,dq, \qquad (Д.61)$$

$$\operatorname{Sp}\hat A\hat B^*=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int A_{\hat p \hat q}(p, q)\,\overline{B_{\hat p \hat q}(p, q)}\,dp\,dq=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int A_{\hat q \hat p}(p, q)\,\overline{B_{\hat q \hat p}(p, q)}\,dp\,dq,$$

а также связь между p — q-и q — p-символами одного оператора

$$\left.\begin{aligned} H_{\hat p \hat q}(p, q)&=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int H_{\hat q \hat p}(p_1, q_1)\, e^{-\frac{1}{ih}(q-q_1)(p-p_1)}\,dp_1\,dq_1,\\ H_{\hat q \hat p}(p, q)&=\frac{1}{(2\pi h)^n}\int H_{\hat p \hat q}(p_1, q_1)\, e^{\frac{1}{ih}(q-q_1)(p-p_1)}\,dp_1\,dq_1. \end{aligned}\right\} \qquad (Д.62)$$

В отличие т вейлевских виковских символов, связь между символами сопряженных операторов является сложной: если $A=\hat B^*$, то

$$A_{\hat q \hat p}(p, q)=\overline{B_{\hat q \hat p}(p, q)}. \qquad (Д.63)$$

Заметим, что функция $(1/(2\pi h)\, e^{-\frac{1}{ih}(q-q_1)(p-p_1)}$ служит функцией Грина задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial h}=i\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}u$. Поэтому формулы (Д.62) могут быть переписаны в виде

$$H_{\hat p \hat q}(p, q)=e^{ih\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}}H_{\hat q \hat p}(p, q). \qquad (Д.64)$$

Кроме того, отсюда следует, что разложение композиций (Д.60) по степеням h:

$$(A_{\hat p \hat q} * B_{\hat p \hat q})(p, q)=e^{ih\frac{\partial^2}{\partial p_1\,\partial q_1}}A_{\hat p \hat q}(p, q_1)\, B_{\hat p \hat q}(p_1, q)\Big|_{\substack{q_1=q,\\ p_1=p}}, \qquad (Д.65)$$

$$(A_{\hat q \hat p} * B_{\hat q \hat p})(p, q)=e^{-ih\frac{\partial^2}{\partial p_1\,\partial q_1}}A_{\hat q \hat p}(p_1, q)\, B_{\hat q \hat p}(p, q_1)\Big|_{\substack{q_1=q,\\ p_1=p}}. \qquad (Д.66)$$

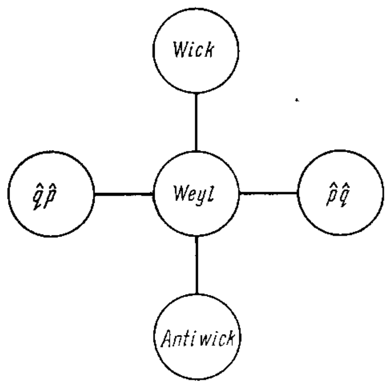
2) Связь с вейлевскими символами. Сопоставляя третью формулу (Д.59) с формулой (Д.6), находим связь между вейлевским символом $H(p, q)$ оператора $\hat H$ и его q — p символом:

$H(p, q)=$

$$=\frac{1}{\pi h}\int H_{\hat q \hat p}(p_1, q_1)\, e^{-\frac{2}{ih}(q-q_1)(p-p_1)}\,dp_1\,dq_1=e^{\frac{ih}{2}\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}}H_{\hat q \hat p}(p, q). \qquad (Д.67)$$

Сопоставляя эту формулу с (Д.64), находим, что

$$H(p, q)=e^{-\frac{ih}{2}\frac{\partial^2}{\partial p\,\partial q}}H_{\hat p \hat q}(p, q). \qquad (Д.68)$$



$\hat{p}\hat{q}$ и $\hat{q}\hat{p}$ символы служат основой теории псевдодифференциальных операторов. Современное изложение этой теории см. в [32].

Замечание. Формулы связи между символами (Д.64), (Д.67), (Д.68), а также (Д.48), (Д51) наводят на мысль об их интерполяции. Положим

$$H_t(p, q) = e^{it\frac{\partial^2}{\partial p_i\,\partial q}} H_{\hat{q}\hat{p}}(p, q),$$

$$A_s(\bar{z}, z) = e^{-s\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial \bar{z}}} \mathring{A}(\bar{z}, z).$$

Взаимоотношения между интерполирующими символами H_t, A_s и четырьмя типами рассмотренных ранее символов удобно изобразить схемой (см. рисунок).

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Feynman R. P.— Phys. Rev., 1951, v. 84, p. 108.
2. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1978.
3. De Witt-Morette C., Maheshwari A., Nelson B.— Phys. Rept. 1979, v. 5C, p. 255.
4. Березин Ф. А.— ТМФ, 1971, т. 6, с. 194.
5. Березин Ф. А.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1974, т. 38. с. 1116.
6. Березин Ф. А.— ДАН СССР, 1973, т. 211, с. 1263.
7. Flato M., Lichnerowicz A., Sternheimer D.— C. R. Acad. Sci. Ser. A, 1974, t. 279, p. 877; Compositio Mathematica, 1975, v. 31, p. 47; J. Math. Phys., 1976, v. 17, p. 1754.
8. Toboiman W.— Nuovo Cimento, 1956, v. 3, p. 1213.
9. Garrod C.— Rev. Mod. Phys., 1966, v. 38, p. 483.
10. Berezin F. A.— Comm. Math. Phys., 1978, v. 63, p. 131.
11. Faddeev L. D.— In: Les Houches Lectures. Session XX.— Amsterdam: North-Holland, 1976.
12. Hori J.— Progr. Theor. Phys., 1952, v. 7, p. 578.
13. Edvards S., Pierls R.— Proc. Roy. Soc., 1954, v. 224, p. 24.
14. Mattews R., Salam A.— Nuovo Cimento, 1954, p. 12, p. 563.
15. Фрадкин Е. С.— ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 47; т. 100, с. 897; 1959, т. 125, с. 311; Nucl. Phys., 1959, v. 12, p. 466; 1966, v. 76, p. 688; Acta Phys. Hung., 1965, v. 19, p. 175; Пробл. теор. физ., 1969, с. 390; 1972, с. 146; Тр. ФИАН СССР, 1965, с. 1.
16. Barry Q., Mount Q.— Rept. on Progr. Phys.
17. Буслаев В. С., Скриганов М. М.— ТМФ, 1970, № 2, с. 292.
18. Berezin F. A.— Commun. Math. Phys., 1975, v. 40, p. 153.
19. Weyl H. The Theory of Groups and Quantum Mechanics.— Dover, 1931.
20. Moyal J. E.— Proc. Cambr. Phil. Soc., 1949, v. 45, p. 99.
21. Grünewold H. J.— Math. Fys. Meed, Kgl. Danske Vidensk. Selskab., 1956, 3a, Nr. 19.
22. Berezin F. A., Šubin M. A. In: Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai. 5. Hilbert Space Operators Theory.— Tihany, Hungary.
23. Bergmann V.— Comm. on Pure and Appl. Math., 1961, v. 3, p. 215..
24. Глазман И. М., Любич Ю. И. Конечномерный анализ.— М.: Наука, 1969.
25. Березин Ф. А.— ДАН СССР, 1961, т. 137, с. 311.
26. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования.— М.: Наука, 1965.
27. Glauber R. J.— Phys. Rev. Lett., 1963, v. 10, p. 84.
28. Sudarshan E.C.G.— Ibid., p. 277.
29. Березин Ф. А.— Матем. сб., 1971, т. 86 (128), с. 578.
30. Березин Ф. А.— Тр. Моск. матем. об-ва, 1967, т. 17, с. 118.
31. Berezin F. A., Marinov M. S.— Ann. Phys., 1977, v. 104, p. 336.
32. Шубин М. А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.— М.: Наука, 1978.