## **19**80 г. Ноябрь

## УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

535,310

# ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ МЕТОДА ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ \*)

#### Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов

## СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	475
2.	Френелевские объемы лучей в неоднородных средах	477
3.	Эвристические критерии применимости геометрической оптики	480
4.	Смежные проблемы, решаемые с привлечением эвристических критериев	481
5.	Дифракция волн в свободном пространстве	484
6.	Отражение и преломление волн на криволинейных границах раздела двух	
	однородных сред	486
7.	Прикаустические области неприменимости геометрической оптики	488
8.	Дифракция волн в неоднородных средах	490
9.	Границы применимости пространственно-временной геометрической оптики	492
10.	Заключение	494
Цил	тированная литература	495

#### 1. ВВЕДЕНИЕ

#### а) Цель статьи

Метод геометрической оптики представляет собой эффективный инструмент нахождения волновых полей в условиях плавно-неоднородных и медленно-нестационарных сред. Геометрооптический подход существенно опирается на лучи, которые выполняют роль каркаса, несущего волновое поле.

Несмотря на чрезвычайно широкое распространение метода геометрической оптики, выступающего иногда как «геометрическая акустика» или «геометрическая сейсмика» и имеющего квантовомеханического «братаблизнеца» в лице квазиклассического приближения, до сих пор не были выяснены границы применимости этого метода в трехмерных задачах \*\*). Ниже предпринимается попытка сформулировать универсальные достаточные условия применимости метода на эвристической основе, опираясь на гюйгенсово-френелевскую картину формирования волнового поля. Предлагаемые эвристические критерии применимости позволяют решить и ряд смежных проблем (см. гл. 4 и заключение).

<sup>\*)</sup> Статья написана по материалам лекций <sup>1</sup>, прочитанных авторами на V Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн (Челябинск, 1979).

<sup>\*\*)</sup> Условия применимости приближения геометрической оптики для одномерных задач, т. е., в сущности, условия применимости приближения ВКБ, изучены во многих работах. Эти условия сводятся к требованию малости изменения показателя преломления *n* на длине волны в среде:  $\lambda (dn/dz) \ll n$ , где  $\lambda = \lambda_0/n$ , а  $\lambda_0 = 2\pi c/\omega$  — длина волны в пустоте. Полный физический анализ проблемы с учетом нулей и полюсов показателя преломления проведен В. Л. Гинзбургом <sup>34</sup>.

 б) Основные уравнения метода геометрической оптики

В основе метода геометрической оптики лежит предположение о плавности изменения свойств среды, характеризуемых показателем преломления *n* (**r**), и параметров лучевого поля

$$u = Ae^{ik_0\psi}, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}, \quad (1.1)$$

в масштабе длины волн в среде  $\lambda = \lambda_0/n$ .

Общепринятое разложение амплитуды A в (1.1) в асимптотический ряд по степеням  $1/ik_0^*$ ),

$$A = A_0 + \frac{1}{ik_0} A_1 + \frac{1}{(ik_0)^2} A_2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A_m}{(ik_0)^m},$$

и подстановка этого разложения в уравнение Гельмгольца  $\Delta u + k_0^2 n^2 u = 0$  позволяют определить искомые амплитуды  $A_m$  и эйконал волны  $\psi$ :

$$\psi = \psi^{0} + \int_{0}^{\tau} n^{2} d\tau = \psi^{0} + \int_{0}^{\sigma} n d\sigma, \qquad (1.2)$$

$$A_{m} = \frac{A_{m}^{0}}{\sqrt{\frac{2}{7}}} - \frac{1}{2\mathcal{D}(\tau)} \int_{0}^{\tau} \sqrt{\mathcal{D}(\tau')} \Delta A_{m-1} d\tau'; \qquad (1.3)$$

здесь  $\psi^0 = \psi(0)$ ,  $A_m^0 = A_m^0(0)$  — начальные значения эйконала и амплитуд при  $\tau = 0$ . Интегрирование в (1.2) и (1.3) проводится вдоль лучей, определяемых системой уравнений

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\tau} = \mathbf{p}, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}\tau} = \frac{1}{2} \nabla n^2, \tag{1.4}$$

где **р** = ∇ψ, а τ — параметр на луче, связанный с длиной дуги луча σ соотношением dτ = dσ/n.

Величина  $\mathcal{G}$  в (1.3), называемая расходимостью лучей, равна  $\mathcal{D}(0)/\mathcal{D}(\tau)$ , где  $\mathcal{D}(\tau) = \partial(x, y, z)/\partial(\xi, \eta, \tau) - якобиан перехода от декартовых коорди$ нат <math>x, y, z к лучевым  $\xi, \eta, \tau$ . Якобиан  $\mathcal{D}(\tau)$  легко вычисляется, если известны уравнения семейства лучей  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\xi, \eta, \tau)$  (переменные  $\xi$  и  $\eta$  «нумеруют» лучи). Расходимость лучей  $\mathcal{G}$  пропорциональна отношению поперечных сечений ds элементарной лучевой трубки

$$\mathscr{Y} = \frac{n^0 I^0}{nI} = \frac{n^0 \, \mathrm{d} s^0}{n \, \mathrm{d} s} \,, \quad I \equiv \frac{\mathrm{d} s}{\mathrm{d} \xi \, \mathrm{d} \eta} \,, \tag{1.5}$$

где верхний индекс «О» соответствует  $\tau = 0$ . Дополнительная информация об основных уравнениях геометрической оптики содержится, например, в работах <sup>4-6</sup>, <sup>35</sup>.

в) Необходимые условия применимости геометрической оптики

Обычно ограничиваются рассмотрением только нулевого приближения

$$u_0 = A_0 e^{ik_0 \Psi} = \frac{A_0^0 e^{ik_0 \Psi}}{\sqrt{\Psi}}, \qquad (1.6)$$

476

<sup>\*)</sup> Напомним, что фактически такое разложение проводится по безразмерному малому параметру  $\mu \sim 1/k_0 nL \ (L - характерный масштаб изменения A и n)$ , как это было впервые продемонстрировано С. М. Рытовым (см. <sup>2</sup>,<sup>3</sup>, а также <sup>4,35</sup>).

и под границами применимости геометрической оптики подразумевают пределы применимости именно нулевого приближения (1.6).

Необходимые условия применимости геометрической оптики (1.2) требуют отсутствия резких изменений амплитуды *А*, достаточную плавность фазовых фронтов и достаточную медленность изменения показателя преломления *n* на длине волны:

$$\lambda |\nabla A_0| \ll A_0, \quad \lambda |\nabla p_j| \ll p, \quad \lambda |\nabla n| \ll n, \quad \lambda \equiv \frac{1}{k_0 n}.$$
(1.7)

В силу (1.5) и (1.6) первое из этих условий ограничивает скорость изменения расходимости лучей  $\lambda |\nabla I| \ll I$ , а из первого и второго условий вытекает неравенство

$$\lambda \ll |R_{1,2}|, \tag{1.8}$$

где R<sub>1, 2</sub> — главные радиусы кривизны фазового фронта.

#### г) Накапливающиеся ошибки

Нулевое приближение геометрической оптики удовлетворяет уравнению Гельмгольца лишь приближенно, с точностью до членов порядка  $\mu^2 = (1/k_0 nL)^2$ . Положив

$$u = u_0 + u = A_0 e^{ik_0 \psi} + \widetilde{u}, \tag{1.9}$$

где  $\tilde{u}$  — поправка к геометрооптическому полю  $u_0$ , нетрудно показать, что  $\tilde{u}$  удовлетворяет уравнению

$$\Delta \widetilde{u} + k_0^2 n^2 \widetilde{u} = -e^{ik_0 \psi} \Delta A_0, \qquad (1.10)$$

причем  $\Delta A_0$  имеет порядок  $\mu^2$  относительно  $\Delta u_0$  или  $k_0^2 n^2 u_0$ .

Несмотря на малость невязки  $\Delta A_0 e^{ik_0 \psi}$ , на больших расстояниях она может привести к накапливающимся ошибкам, связанным с  $\partial u \phi pak$ ционными эффектами \*). Именно поэтому неравенство  $\mu \sim 1/k_0 L \ll 1$ и связанные с ним условия (1.7) и (1.8) оказываются лишь необходимыми, но не достаточными условиями применимости геометрической оптики. Достаточные же условия должны тем или иным способом отразить накапливающиеся погрешности. Приступая к формулировке достаточных условий применимости, обсудим способы построения зон Френеля в неоднородной среде и введем ключевое для дальнейших построений понятие френелевского объема.

## 2. ФРЕНЕЛЕВСКИЕ ОБЪЕМЫ ЛУЧЕЙ В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

#### а) Френелевский объем. Физическое содержание понятия «луч»

В соответствии с принципом Гюйгенса — Френеля формирование поля в точке наблюдения происходит в результате интерференции вторичных волн, которые порождаются первичной волной в каждой точке фазового фронта \*\*). Решающая роль здесь принадлежит первой зоне Френеля,

<sup>\*)</sup> Собственно говоря, все явления, приводящие к отклонениям от законов геометрической оптики, и принято называть дифракционными. \*\*) В силу произвольности выбора фазового фронта возбуждение вторичных

<sup>\*\*)</sup> В силу произвольности выбора фазового фронта возбуждение вторичных волн фактически происходит в каждой точке пространства. Гюйгенсовская концепция последовательно реализована, как известно, Р. Фейнманом при помощи интегралов по траекториям <sup>7</sup>.

поскольку вторичные волны от первой зоны Френеля отличаются между собой по фазе не более, чем на л, и поэтому не погашают друг друга, тогда как совокупный вклад от высших зон Френеля весьма мал из-за сложения противофазных колебаний.

Объем, ограниченный огибающей первых зон Френеля, мы назовем френелевским объемом \*).

Френелевский объем выделяет ту часть пространства, которую естественно считать областью локализации луча, рассматриваемого как физи-





ческий объект. В самом деле, если мы хотим выделить данный луч, пропуская волну через отверстие в экране (рис. 1), то размеры отверстия должны быть больше сечения френелевского объема. Если су́зить отверстие до размеров, меньших размера первой зоны Френеля, то это приведет к искажению поля, связанного с данным лучом. Таким образом, френелевский объем определяет область пространства, которая формирует волновое поле в заданной точке и составляет физическое содержание понятия «луч». При конечных

(хотя и малых,  $\lambda \ll L$ ) значениях длины волны физический луч имеет конечную толщину, в отличие от математического луча  $\mathbf{r} = \mathbf{r}$  ( $\boldsymbol{\tau}$ ), представляющего собой бесконечно тонкую линию в пространстве.

#### б) Уравнение границы френелевского объема

Построим френелевский объем в случае точечного излучателя в неоднородной среде. Пусть источник расположен в точке  $\mathbf{r}_1$ , а наблюдатель в точке  $\mathbf{r}_2$  (см. рис. 1). Луч  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$ , соединяющий точки  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ , назовем опорным. В окрестности опорного луча  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$  проведем деузвенный сиртуальный луч  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_2$ , состоящий из двух отрезков лучей, удовлетворяющих уравнениям (1.4). Такой луч отвечает гюйгенсовским вторичным волнам, возбуждаемым в точке  $\mathbf{r}'$ . Через  $\psi$  ( $\mathbf{r}_a$ ,  $\mathbf{r}_b$ ) обозначим оптический путь (эйконал) вдоль луча, соединяющего произвольные точки  $\mathbf{r}_a$  и  $\mathbf{r}_b$ :

$$\psi(\mathbf{r}_a, \mathbf{r}_b) = \int_a^b n \, \mathrm{d}\sigma. \tag{2.1}$$

Границей френелевского объема является поверхность  $F(\mathbf{r}') = 0$ , которой принадлежат точки  $\mathbf{r}'$  такие, что оптический путь  $\psi_{\mathsf{вирт}} = = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2)$ , вычисленный вдоль виртуального луча  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_2$ , отличается от оптического пути  $\psi_{\mathsf{опорн}} = \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$  вдоль опорного луча на половину длины волны  $\lambda_0 = 2\pi/k_0 = 2\pi c/\omega$  (соответствующие фазовые набеги  $k_0\psi_{\mathsf{опорн}}$  и  $k_0\psi_{\mathsf{вирт}}$  отличаются на  $\pi$ ). Эта поверхность и представляет собой огибающую первых зон Френеля, нанизанных на опорный луч. Ее уравнение может быть представлено в форме (см. рис. 1)

$$F(\mathbf{r}') = |\psi_{\text{BHPT}} - \psi_{\text{OHOPH}}| - \frac{\lambda_0}{2} = |\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') + \psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) - \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)| - \frac{\lambda_0}{2} = 0.$$
(2.2)

<sup>\*)</sup> Это название представляется нам более удачным, чем другие термины, употребляемые применительно к различным частным задачам: «область, существенная для дифракции» <sup>8</sup>, «пространственная вона Френеля» <sup>9</sup>, «трехмерная зона Френеля» <sup>10</sup> и др.

Подобным же образом строится френелевский объем при другой постановке задачи, а именно, при задании эйконала  $\psi^0$  на некоторой поверхности S. В этом случае уравнение оги-

бающей первых зон Френеля записывается в виде

$$F(\mathbf{r}') = |\psi_{BHPT} - \psi_{OHOPH}| - \frac{\lambda_0}{2} = r_i' + r_j' + \psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) - r_i' + \psi(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) - \tau_i' + \psi(\mathbf{r}$$

где  $\mathbf{r}_2$  — точка наблюдения,  $\mathbf{r}_1 \rightarrow \mathbf{r}_2$  — опорный луч,  $\mathbf{r}_1' \rightarrow \mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}_2$  — виртуальный луч (рис. 2).

Рис. 2.

Заметим, что френелевские объемы виртуальных лучей более высокого порядка (например, трехзвенных или четырехзвенных) обычно лежат внутри поверхности  $F(\mathbf{r}') = 0$  и ноэтому могут не рассматриваться.

## в) Приближенное урав нение границы френелевского объема

При фактическом нахождении френелевского объема можно воспользоваться малостью длины волны по сравнению со всеми характерными расстояниями в той или иной задаче. Это позволяет разложить эйконалы в формулах (2.2) и (2.3) по отклонениям г' от опорного луча. Если  $r_3$  ближайшая к г' точка на опорном луче (см. рис. 1 и 2), то с точностью до квадратичных слагаемых по г'-г<sub>3</sub> имеем

$$F(\mathbf{r}') \approx \frac{1}{2} |(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_3, \nabla_3)^2 [\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3) + \psi(\mathbf{r}_3, \mathbf{r}_2)]| - \frac{\lambda_0}{2} = 0, \qquad (2.4)$$

где ∇<sub>3</sub> — производная по **г**<sub>3</sub>. Линейный член в этом разложении отсутствует в силу экстремальных свойств опорного луча.

Аналогично, для поверхности (2.3) получим

$$F(\mathbf{r}') \approx \frac{1}{2} \left[ (\mathbf{r}_{1}' - \mathbf{r}_{1}, \nabla_{1})^{2} \psi^{0}(\mathbf{r}_{1}) + (\mathbf{r}' - \mathbf{r}_{3}, \nabla_{3})^{2} [\psi(\mathbf{r}_{1}, \mathbf{r}_{3}) + \psi(\mathbf{r}_{3}, \mathbf{r}_{2})] \right] - \frac{1}{2} = 0.$$
(2.5)

Если квадратичные члены в (2.4) (2.5) обращаются в нуль, как это имеет место на каустиках, то необходимо учесть кубичные члены и т. д.

## г) Френелевский объем плоской и сферической волн в однородной среде

В однородной среде  $\psi$  ( $\mathbf{r}_a$ ,  $\mathbf{r}_b$ ) =  $n |\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|$  и поэтому уравнениям (2.2)—(2.5) можно придать явную форму. Если точки  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  расположены на оси z, а  $\rho' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ , то приближенное уравнение (2.4) опишет эллипсоид вращения

$$F(\mathbf{r}') = \frac{n}{2} (\rho')^2 \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right) - \frac{\lambda_0}{2} = 0, \qquad (2.6)$$

где  $L_1 = z' - z_1$ ,  $L_2 = z_2 - z'$ . Сечение этого эллипсоида плоскостью z' = const имеет радиус

$$a_f = \sqrt{\frac{\lambda_0/n}{L_1^{-1} + L_2^{-1}}}.$$
 (2.7)

Аналогично в случае плоской волны, распространяющейся вдоль оси z, из (2.5) получаем уравнение френелевского параболоида

$$F(\mathbf{r}') = \frac{n(\rho')^2}{2|z-z'|} - \frac{\lambda_0}{2} = 0, \qquad (2.8)$$

сечение которого равно

$$a_j = \sqrt{\frac{\lambda_0 \left[ z - z' \right]}{n}}.$$
 (2.9)

#### 3. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ ПРИМЕНИМОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Исходя из гюйгеновско-френелевской картины формирования поля в неоднородной среде, сформулируем следующий основной критерий применимости геометрической оптики:

Критерий I. Параметры среды, а также параметры волны (амплитуда и градиент фазы) не должны заметно изменяться в поперечном сечении френелевского объема.

Это условие предполагает выполнение неравенств вида

$$a_{\mathbf{f}} | \nabla_{\perp} A_0 | \ll A_0, \quad a_{\mathbf{f}} | \nabla p_j | \ll p, \quad a_{\mathbf{f}} | \nabla n | \leq n, \quad (3.1)$$

где  $\nabla_{\perp}$  — поперечный по отношению к лучу оператор дифференцирования,  $p_j = \partial \psi / \partial x_j$ , а  $a_t$  — поперечный размер френелевского объема \*). Если подставить в (3.1) амплитуду  $A_0$ , выраженную через расходимость  $\mathcal{Y}$ , то из (3.1) можно получить ограничения на радиусы кривизны фазового фронта  $R_{1, 2}$ :

$$a_{\rm f} \ll |R_{1, 2}|.$$
 (3.2)

Если в точку наблюдения приходит не один, а несколько лучей, то результирующее поле оказывается суммой полей, связанных с отдельными лучами. Вблизи каустики, где лучи сильно сближаются, первое неравенство (3.1) нарушается из-за неограниченного роста градиента амплитуды. Можно показать, что при нарушении неравенств (3.1) один из лучей оказывается внутри френелевского объема соседнего луча. Удобно поэтому сформулировать еще одно, вспомогательное условие применимости, являющееся следствием критерия I, но в ряде случаев существенно облегчающее анализ задачи:

Критерий II. Разность фаз  $k_0$  ( $\psi_1 - \psi_2$ ), отвечающая лучам, приводящим в одну и ту же точку, не должна быть меньше  $\pi$ :

$$k_0 \mid \psi_1 - \psi_2 \mid \geqslant \pi \tag{3.3}$$

(соответственно разность хода  $|\psi_1 - \psi_2|$  не должна быть меньше  $\lambda_0/2$ ). Несколько упрощая постановку вопроса, можно сказать, что луч не

Несколько упрощая постановку вопроса, можно сказать, что луч не должен проходить заметную долю своего пути во френелевских объемах других лучей, приходящих в ту же точку. При нарушении критерия II мы

480

<sup>\*)</sup> Заметим, что критерий I удовлетворяется для зонной пластинки и для кругового отверстия радиусом в четное число зон Френеля, но поле отличается от геометрооптического. Чтобы исключить из рассмотрения такие вырожденные ситуации, в случаескачкообразного изменения параметров среды или поля в неравенствах (3.1) под *а* спедует понимать не обязательно первую зону Френеля, а некоторый характерный френелевский масштаб, сравнимый с радиусами первых зон Френеля.

рискуем дважды (или больше, чем дважды) учесть вклад одних и тех же лучей в результирующее поле \*).

Обсуждаемые здесь критерии в той или иной форме использовались или возникали во многих исследованиях, начиная с основополагающих работ Френеля. В ряде случаев они допускают строгое обоснование. Например, при дифракции волн в однородном пространстве (начальные условия заданы на некоторой поверхности) геометрооптическое поле отвечает стационарным точкам дифракционного интеграла Гюйгенса — Кирхгофа 8. В этом случае п-окрестность стационарной точки (т. е. окрестность, в которой фаза отличается от стационарного значения не более, чем на л) является сечением френелевского объема, при этом неравенства (3.1) требуют постоянства параметров волны и среды в пределах такой п-окрестности стационарной точки, а критерий II запрещает пересечение л-окрестностей близких стационарных точек. Сечение френелевского объема можно отождествить с п-окрестностью стационарной точки и во многих других задачах, допускающих точное или приближенное интегральное представление поля. Общее обоснование рассматриваемых критериев в случае плавно неоднородной среды вытекает из условия применимости метода стационарной фазы к вычислению фейнмановских континуальных интегралов, при помощи которых наиболее полно формулируется принцип Гюйгенса <sup>32</sup>, <sup>33</sup>. В предельно упрощенной постановке задачи, когда используются только двузвенные виртуальные траектории, критерии I и II могут быть получены при помощи интеграла Гюйгенса - Кирхгофа, но не с точной, а с приближенной геометрооптической функцией Грина<sup>11</sup>.

В перечисленных и некоторых других случаях критерии I и II выступают в результате констатации хорошо известных фактов. Новый момент состоит в том, что мы подчеркиваем универсальность и достаточностьэтих критериев, в том числе и в неоднородных средах. Достаточность и универсальность критериев I и II подтверждаются тем, что во всех известных нам многочисленных случаях критерии I и II согласуются с другими способами определения границ применимости метода геометрической оптики: по первому отброшенному члену, путем сравнения с точными, асимптотическими или численными решениями и др. Соответствующие примеры и сопоставления мы приведем в гл. 5—9.

Другой новый момент — предложенный в гл. З чисто лучевой рецепт построения френелевского объема в неоднородной среде. Таким образом, дифракционные по своему содержанию ограничения I и II выражены на лучевом языке. Поэтому не будет большим преувеличением сказать, что геометрическая оптика приобретает внутренние критерии применимости.

# 4. СМЕЖНЫЕ ПРОБЛЕМЫ, РЕШАЕМЫЕ С ПРИВЛЕЧЕНИЕМ ЭВРИСТИЧЕСКИХ КРИТЕРИЕВ

а) Оценки погрешности нулевого приближения геометрической оптики

Сформулированные выше критерии позволяют не только ответить на основной вопрос, поставленный выше — о достаточных условиях применимости лучевого метода, но и осветить ряд смежных проблем, представляющих и самостоятельный интерес.

<sup>\*)</sup> Л. А. Вайнштейн указал авторам на один особый случай: в задаче об излучении точечного источника над идеально проводящей плоскостью френелевские объемы прямого и зеркального отраженного лучей при разности фаз, меньшей л, пересекаются на большей части пути, но, несмотря на это, лучевое описание остается справедливым. Особый характер этого примера связан с однородностью граничных условий на всей трассе распространения, благодаря чему выполняется основной критерий I, а приближение геометрической оптики дает точное решение задачи.

Одной из таких проблем является задача оценки погрешностей нулевого приближения геометрической оптики. Можно надеяться, что фигурирующие в неравенствах (3.1), (3.2) параметры могут служить эвристической мерой неточности поля (1.6):

$$\frac{|u_{\rm TOH} - u_0|}{|u_0|} \sim \gamma_{\rm OBP} \sim a_I^2 \max\left\{\frac{|\nabla_{\perp} A_0|^2}{A_0^2}, \frac{|\nabla_{\perp} n|^2}{n^2}, \frac{|\nabla_{\perp} p_j|^2}{n^2}\right\}.$$
 (4.1)

Сама по себе оценка (4.1) не может дать достоверные уровни погрешности во всем пространстве, но она может подсказать, где именно погрешность у заведомо мала, и где — заведомо велика. Иными словами, эти оценки позволяют очертить как область применимости, так и область неприменимости геометрической оптики. Граница этих областей может быть ориентировочно определена из условия

$$\gamma_{\rm BBp} \sim 1. \tag{4.2}$$

б) Оценки волнового поля в фокальных, каустических и других зонах неприменимости геометрической оптики

На первый взгляд кажется, что геометрооптические расчеты могут пригодиться только в области применимости лучевого метода, где его



Рис. 3.

погрешность мала:  $\gamma_{\rm овр} \ll 1$ . Между тем в ряде случаев на основе лучевого подхода можно дать хотя и грубую, но правильную по порядку величины оценку поля в области неприменимости лучевого метода, в частности, в зоне полутени и в окрестностях фокусов и каустик. Рассмотрим, например, границы каустических и фокальных зон. Эти границы можно определить при помощи

(4.2), но можно воспользоваться и критерием II (см. гл. 7). Считая границы каустических и фокальных областей известными,

приведем оценки поля внутри этих областей. Прежде всего для этого можно воспользоваться значениями геометрооптического поля на границе фокальной (каустической) зоны:

$$|u_{\phi 0\kappa}| \sim \left|\frac{A^0}{\sqrt{\mathcal{P}}}\right|_{\text{Ha границе $\phi 0\kappa$. воны}}$$
 (4.3)

Другой по форме, но эквивалентный по существу способ оценки основан на использовании закона сохранения потока энергии в лучевой трубке с дополнительным допущением, что начальный поток энергии П<sup>0</sup> = = n<sup>0</sup> | A<sup>0</sup> | <sup>2</sup>  $\Delta S^0$  равномерно размазывается по фокальной (каустической) зоне:

$$\Pi^{0} = n^{0} |A^{0}|^{2} \Delta S^{0} = n_{\phi o \kappa} |u_{\phi o \kappa}|^{2} \Delta S_{\phi o \kappa}; \qquad (4.4)$$

здесь  $\Delta S_{\phi \circ \kappa}$  — ширина лучевой трубки, соответствующая фокальной (каустической) зоне (рис. 3),  $\Delta S^0$  — начальное сечение лучевой трубки. Из (4.5) получаем оценку

$$|u_{\phi_{0\mathsf{K}}}| \sim |A^0| \sqrt{\frac{n^0 \Delta S^0}{n_{\phi_{0\mathsf{K}}} \Delta S_{\phi_{0\mathsf{K}}}}}, \qquad (4.5)$$

которая близка к оценке (4.3), так как  $\mathscr{Y} \approx n\Delta S/n^0\Delta S^0$ . Эффективность этих оценок мы продемонстрируем ния (в гл. 5—9). Нес ходимость в та-

ких оценках возникает, например, при решении вопроса о возможности протекания тех или иных нелинейных процессов (генерация гармоник, самовоздействие, пробой и т. д.) в области концентрации поля в фокусах и на каустиках.

Оценки, подобные (4.3) и (4.5), справедливы и в других областях неприменимости геометрической оптики, например, в области полутени.

## в) Проблема устойчивости геометрооптического решения

Еще одна смежная проблема — поведение геометрооптических решений при малых возмущениях параметров среды, границ раздела и (или) начальных условий задачи. Существо проблемы можно пояснить на следующем простом примере.

Рассмотрим плоскую волну, которой отвечает параллельный пучок лучей (рис. 4, *a*). Если плоский начальный фазовый фронт подвергнуть слабым мелкомасштабным периодическим возмущениям, то структура лучей кардинально исказится

(рис. 4, б). Существенно исказится и поле, вычисленное по 4 = const методу геометрической оптики. Между тем ясно, что при  $\delta \ll \lambda$ истинное поле волны практически не изменится (появятся лишь возмущения поля порядка  $\delta/\lambda$ ). Этот пример показывает, что геометрооптическое приближение неустойчиво (или, точнее сказать, очень чувствительно) по отношению к малым возмущениям начальных условий. Такого же типа неустойчивость возникает и при аналогичных возмущениях параметров среды и границ раздела.

Разрешение проблемы устойчивости геометрооптических решений состоит просто  $\varphi$  = const  $\varphi$  =

в том, что при слабых мелкомасштабных возмущениях нарушаются условия применимости геометрической оптики. В частности, и старые, и новые лучи, появившиеся на рис. 4, б в результате возмущения плоского фазового фронта, становятся фиктивными, нефизическими. В самом деле, при расположении точки наблюдения на расстоянии l от экрана френелевские объемы, окружающие лучи, при  $\sqrt{\lambda l} \gg X$  содержат *много* неоднородностей, а в этом случае геометрическая оптика неприменима.

#### г) Анализ волновой картины в целом

Такая задача представляет значительный интерес в условиях, когда нужно получить оценки поля по порядку величины, или же когда нужно составить грубое представление о структуре поля перед началом аналитических или численных расчетов. Геометрооптические вычисления и оценки при таком «экспресс-анализе» играют ведущую роль, так как они позволяют простыми средствами оценить величину поля в значительной части пространства, как в области применимости, так и вне области применимости метода (см. п. б)).

Указанные соображения позволяют, таким образом, проводить не только качественный, но и количественный анализ структуры разнообразных высокочастотных полей в целом на основе одних лишь геометрооптических соображений. Несколько утрируя, можно сказать, что это равносильно решению волновой задачи, минуя решение волнового уравнения. Такой анализ особенно ценен для инженерных приложений, где в подавляющем большинстве случаев важно знать скорее порядки величин, чем точные значения амплитуд волнового поля.

## 5. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### а) Форма области полутени при дифракции на полуплоскости

В качестве первого примера использования эвристических критериев рассмотрим простейшую задачу о ширине области полутени при дифракции сферической (цилиндрической) волны на полуплоскости (рис. 5). Точка наблюдения P окажется на границе области полутени (на рис. 5 области тени и полутени выделены косой штриховкой), если френелевский объем луча коснется края полуплоскости. Радиус первой зоны Френеля  $a_t = a_t$  (z) вблизи полуплоскости можно определить по форму-



ле (2.7), положив там  $L_1 = z_0, L_2 = z$ :

$$a_{f} = \sqrt{\frac{\lambda_{0}zz_{0}}{(z+z_{0})}}.$$
 (5.1)

Расстояние точки P от оси равно (см. рис. 5)

$$x = \frac{z + z_0}{z} a_f(z) =$$
  
=  $\sqrt{\frac{\lambda_0 z (z + z_0)}{z_0}} \equiv f(z),$  (5.2)

так что функция x = f(z) представляет собой уравнение границы полутени.

Эта граница имеет форму гиперболы с прямолинейной асимптотой  $x_a = [(z + (z_0/2))]\sqrt{\lambda_0/z_0}$ . Для всех лучей с наклоном больше, чем у асимптоты, геометрическая оптика справедлива на бесконечно больших расстояниях. Для таких лучей погрешность метода геометрической оптики не накапливается, в отличие от лучей, попадающих в область полутени. Для плоской волны  $(z_0 \rightarrow \infty)$  граница области полутени (5.2) принимает вид параболы  $x = \sqrt{\lambda_0 z}$ . В этом случае все лучи рано или поздно попадают в область полутени.

Заметим, что формула (5.1) применима к волне с произвольным фазовым фронтом, если под z<sub>0</sub> подразумевать локальный радиус кривизны фазового фронта в плоскости, содержащей нормаль к кромке.

## б) Формирование лучевого поля в ближней и дальней зонах антенны

Этот пример поясняет, почему можно пользоваться геометрической оптикой и в ближней, и в дальней зонах антенны больших размеров.

Вблизи синфазной антенны с диаметром раскрыва 2b приближение геометрической оптики описывает пучок параллельных лучей (прожекторный луч) с тем же распределением амплитуды, что и на самом раскрыве. Это приближение применимо до тех пор, пока, в соответствии с критерием I, радиус первой зоны Френеля  $a_f = \sqrt{\lambda_0} z$  мал по сравнению с b, т. е. пока  $z \ll b^2/\lambda_0$ .

В дальней зоне раскрыва поле представляет собой направленную сферическую волну с шириной диаграммы направленности порядка  $\lambda_0/b$ , так что на расстоянии r от антенны характерный масштаб изменения амплитуды поля составляет  $l_{\perp} \sim \lambda_0 r/b$ . Согласно (2.7) при расположении точки наблюдения на бесконечности размер френелевой зоны на сфере радиуса r равен  $a_t = \sqrt{\lambda_0 r}$ , и поэтому условие применимости геометрической оптики принимает вид

$$a_{\mathrm{f}} \ll l_{\perp}$$
, или  $r \gg \frac{b^2}{\lambda_0}$ .

Полученное условие, естественно, совпадает с обычным критерием дальней зоны раскрыва.

Таким образом, геометрооптическое описание применимо и в дальней, и в ближней зонах антенны. Следует, однако, подчеркнуть различие в начальных условиях. При описании поля в ближней зоне мы задаем начальные данные на раскрыве, тогда как в дальней зоне в качестве начальных данных берется поле направленной сферической волны, т. е. уже сформировавшееся дальнее поле антенны. В промежуточной зоне  $r \sim b^2/\lambda_0$  неприменим ни один из описанных подходов.

## в) Поле в окрестности фокуса линзы

Рассмотрим идеальную линзу с диаметром отверстия 2b и фокусным расстоянием F. Такая линза превращает плоскую волну в сходящуюся сферическую волну с радиусом кривизны F. Простые построения дают для



Рис. 6.

радиуса первой френелевской зоны в плоскости линзы следующее выражение:

$$a_1 = \sqrt{\lambda_0 \frac{Fz}{F-z}} . \tag{5.3}$$

При приближении к фокусу  $(z \rightarrow F)$  геометрооптическое приближение теряет силу, так как радиус  $a_t$  стремится к бесконечности. Пусть  $\zeta = F - z$  — расстояние точки наблюдения z от фокуса. Потребовав, чтобы было  $a_t \ll b$ , для величины  $\zeta = F - z$  получаем неравенство

$$\zeta \gg \lambda_0 \left(\frac{F}{b}\right)^2 \equiv l_{\parallel}. \tag{5.4}$$

В выражении  $l_{ll} = \lambda_0 (F/b)^2$  легко узнать продольный размер фокального пятна. Луч AF, идущий от края линзы в фокус (рис. 6), пересекает

илоскость  $z = F - l_{jj}$  в точке B на расстоянии

$$l_{\perp} = b \frac{l_{\parallel}}{F} = \lambda_0 \frac{F}{b}$$
(5.5)

от оси линзы. Эта величина характеризует поперечный размер фокального интна.

Оценим, далее, поле |  $u_{\phi 0 \kappa}$  | в фокусе линзы, исходя из соображений, высказанных в гл. 4. Если приравнять поток энергии черев линзу  $\Pi^0 = (A^0)^{2}\pi b^{2}$  потоку энергии через фокальное пятно |  $u_{\phi 0 \kappa}$  | ${}^{2}\pi l_{\perp}^{2}$  (мы принимаем, что в фокусе линзы поток энергии равномерно размазан по кругу радиуса  $l_{\perp}$ ), для трехмерной задачи получим

$$|u_{\Phi_{0K}}| \sim |A^0| \frac{b^2}{\lambda_0 F}, \qquad (5.6a)$$

тогда нак в двумерном фокусе

$$|u_{\phi_{0}\kappa}| \sim |A^0| \sqrt{\frac{b^2}{\lambda_0 F}}.$$
 (5.66)

Эти оценки фокального поля неплохо согласуются с точными максимальными значениями поля в фокусе:

$$\left| u_{\phi \text{or}} \right|_{\text{Tpexm}} = \pi \left| A^{0} \right| \frac{b^{2}}{\lambda_{0}F}, \quad \left| u_{\phi \text{or}} \right|_{\text{двумерн}} = 2 \left| A^{0} \right| \sqrt{\frac{b^{2}}{\lambda_{0}F}}. \tag{5.7}$$

Если усреднить точные значения по фокальному пятну, то согласие с (5.6) будет еще лучшим.

## 6. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ВОЛН НА КРИВОЛИНЕЙНЫХ ГРАНИЦАХ РАЗДЕЛА ДВУХ ОДНОРОДНЫХ СРЕД

## а) Условия применимости отражательных формул

При падении волны на криволинейную границу раздела двух однородных сред возникает отраженная и преломленная волны. В приближении геометрической оптики амплитуды этих волн  $A_{orp}$  и  $A_{npen}$  на границе

раздела S связаны с амилитудой падающей волны  $A_{\text{пад}}$  локальными соотношениями

$$A_{\text{orp}}|_{S} = \Gamma A_{\text{mag}}|_{S}, \quad A_{\text{mpen}}|_{S} = D A_{\text{mag}}|_{S},$$
(6.1)

где  $\Gamma$  и D — соответственно коэффициенты отражения и прохождения, которые в силу геометрического принципа локальности определяются по формулам для плоской волны, падающей на касательную плоскость (рис. 7). Рассматривая амплитуды (6.1) как начальные значения в фор-

мулах геометрической оптики, можно рассчитать поля вдали от границы раздела.

Условия применимости (3.1) требуют плавности изменения  $A_{\text{пан,}}$ Г и D в пределах сечения френелевского объема границей раздела  $b_i$ ; при этом  $b_t = a_t/\cos \theta$ , где  $\theta$  — угол отражения или преломления луча.



Кроме того, из (3.2) следует, что радиусы кривизны поверхности  $a_{s1, 2}$ должны быть велики по сравнению с  $b_t : a_{s1, 2} \gg b_t$ . Расчет  $a_t$  производится по формуле (2.7) для сферической волны, если в качестве  $L_1$  взять радиус кривизны фазового фронта  $R_{\phi}$  отраженной (преломленной) волны непосредственно после отражения (преломления), а в качестве  $L_2$  расстояние от точки отражения (преломления). В то же время величина  $R_{\phi}$  вычисляется по заданным значениям угла падения и радиусов кривизны поверхности и фазового фронта падающей волны <sup>6</sup>, <sup>12</sup>.

Рассмотрим некоторые эффекты, возникающие при нарушении плавности изменения Г и D в пределах френелевского объема.

Отражательные формулы теряют силу при угле отражения  $\theta = \theta_{\min}$ , когда френелевский объем отраженного луча затрагивает границу свет —

тень на поверхности выпуклого тела (рис. 8), поскольку на этой границе терпит разрыв амплитуда падающей волны. Элементарный подсчет дает для соз  $\theta_{min}$  значение

$$\cos \theta_{\min} = \left(\frac{\pi}{k_0 |a_s|}\right)^{1/3}, \quad (6.2)$$

где  $a_s$  — локальный радиус кривизны поверхности на границе свет — тень <sup>1, 8, 9</sup>. Это значение очень хорошо согласуется с величиной соз  $\theta_{\min} = (2/k_0 | a_s |)^{1/3}$ , которая была получена В. А. Фоком при помощи метода параболического уравнения <sup>12</sup>.



в) Область неприменимости отраженных формул в окрестности угла полного отражения

Неприменимость геометрической оптики вблизи критического угла падения  $\theta = \theta_{\rm kp}$ , отвечающего полному отражению, связана с тем, что здесь резко меняется фаза коэффициента отражения  $\alpha = \arg \Gamma$ , вследствие чего величина |  $\nabla \Gamma$  | обращается в бесконечность при  $\theta = \theta_{\rm kp}$ .

Область неприменимости легко находится из условия, чтобы френелевский объем отраженного луча не охватывал точки отражения критического луча. Момент касания показан на рис. 9 для случая плоской поверхности, когда можно воспользоваться зеркальным изображением источника. Полученная из этих соображений зона неприменимости (на рис. 9 она заштрихована) хорошо согласуется с асимптотикой точного решения, полученного Л. М. Бреховских (см. <sup>1</sup>, <sup>13</sup>).

С физической точки зрения неприменимость метода геометрической оптики в этой области связана с тем, что здесь зарождается новый тип лучей — дифракционные лучи, описывающие поле боковой волны <sup>13</sup>. Окрестность критического луча является своеобразной областью полутени для боковой волны, т. е. для дифракционных лучей, которые необходимо учитывать при  $\theta > \theta_{\kappa p}$  наряду с обычными отраженными лучами.

Подобные же ограничения относятся к окрестности угла полного преломления (угла Брюстера), а также к окрестности луча, несущего



нулевое поле (т. е. луча, отвечающего нулю диаграммы излучения источника)<sup>1</sup>.

г) Многократное отражение лучей от вогнутого зеркала

Если источник r<sub>0</sub> расположен у вогнутой поверхности раздела, то в точку наблюдения r у той же поверхности приходят лучи, испытавшие многократные отражения от поверхности.

Кратность отражения, при которой лучи теряют свою индивидуальность, определена в <sup>5</sup>: если ψ<sub>m</sub> — оптический путь волны при *m*-кратном отражении

луча, то геометрическая оптика теряет силу при  $\psi_{m+1} - \psi_m \leq \lambda_0/2$ . С позиций предлагаемых нами условий применимости лучевого метода это неравенство означает нарушение критерия II: (m + 1)-кратно отраженный луч оказывается внутри френелевского объема *m*-кратно отраженного луча.

## 7. ПРИКАУСТИЧЕСКИЕ ОБЛАСТИ НЕПРИМЕНИМОСТИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

a) Оценка ширины прикаустической зоны в случае простой каустики. Неразличимость лучей в прикаустической зоне

Ширину каустической зоны можно оценить из соображений, опирающихся на критерий II: естественно считать, что точка г находится внутри каустической зоны, если каждый из лучей оказывается (внутри френелев-

ского объема соседнего луча (рис. 10). Отсюда непосредственно следует физическая неразличимость лучей в каустической зоне: при существенном пересечении френелевских объемов нельзя разрешить лучи (т. е. раздельно определить их параметры) при помощи непрозрачного экрана с отверстием, поскольку нельзя перекрыть путь одному лучу, не затронув френелевский объем соседнего луча.



$$k_0 | \psi_1 - \psi_2 | < \pi. \tag{7.1}$$

Простые расчеты по теории возмущений показывают <sup>14</sup>, <sup>15</sup>, что вблизи простой (неособой) каустики

$$|\psi_1 - \psi_2| \approx \frac{4}{3} \beta^{1/2} l_N^{3/2}, \quad \beta \equiv 2n_{\rm K}^2 v_{\rm OTH}, \tag{7.2}$$



где  $l_N$  — расстояние по нормали к каустике,  $n_{\rm K}$  — показатель преломления на каустике,  $v_{\rm отн} = |v_{\rm кауст} - v_{\rm луч} \cos \delta|$  — величина, определяющая относительную кривизну луча и каустики,  $v_{\rm кауст}$  — кривизна нормального сечения каустики в направлении луча,  $v_{\rm луч}$  — кривизна луча в его точке касания с каустикой,  $\delta$  — угол между нормалью к каустике и главной нормалью к лучу (нормаль к каустике предполагается направленной в область света). Подставив (7.2) в (7.1), для ширины каустической зоны  $|l_N| < l_{\rm R}$  получим оценку

$$l_{\rm \scriptscriptstyle K} = \left(\frac{3\pi}{4k_0}\right)^{2/3} \beta^{-1/3} = 1,77 \ (k_0^2\beta)^{-1/3} \equiv 1,77\Lambda. \tag{7.3}$$

Эта оценка лишь численным коэффициентом отличается от расстояния

$$l_1 = 1,02\Lambda, \quad \Lambda = (k_0^2\beta)^{-1/3}$$
 (7.4)

между каустикой и первым максимумом функции Эйри, описывающим поле вблизи простой каустики <sup>14</sup>, [17. Формула (7.4) обобщает соответствующее выражение, приведенное в <sup>18</sup>, § 59 для однородной среды с n = 1, когда  $\Lambda = (\rho/2k_0^2)^{1/3}$ , где  $\rho = v_{\text{кауст}}^{-14}$  — радиус кривизны каустики.

#### б) Оценка поля вблизи простой каустики в двумерной задаче

Если  $\Delta l^0$  — начальная ширина лучевой трубки, а  $l_{\kappa} \sim \Lambda$  — ширина каустической зоны (см. рис. 10), то, заменив в формуле (4.5)  $\Delta S^0$  на  $\Delta l^0$ и  $\Delta S_{\kappa}$  на  $\Lambda$ , для поля вблизи каустики получаем выражение

$$|u_{\oplus 0_{\mathrm{K}}}| \sim |A^{0}| \left| \frac{n^{0} \Delta l^{0}}{n_{\mathrm{K}} \Lambda} \right|.$$
(7.5)

Такой же порядок величины предсказывают и формулы каустической асимптотики Эйри для волнового поля <sup>14, 17</sup>. Подробный анализ в <sup>1</sup> показал, что максимальное значение поля (на расстоянии  $l_1 = 1.02$   $\Lambda$  от каустики) всего лишь в 1.34 раза превышает оценку (7.5).

Отметим, что равномерные асимптотические представления поля вблизи каустик, в частности, асимптотика Эйри <sup>16</sup>

$$u(r) = e^{ik_0\theta - i(\pi/4)} \left[ (-\xi)^{-1/4} (iA_1 + A_2) v(\xi) + i(-\xi)^{-1/4} (iA_1 - A_2) v'(\xi) \right], \quad (7.6)$$

где v (ξ) — функция Эйри,

$$\theta = \frac{1}{2} (\psi_1 + \psi_2), \quad \frac{2}{3} (-\xi)^{3/2} = \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_2),$$

используют геометрооптические значения эйконалов  $\psi_{1,2}$  и амплитуд  $A_{1,2}$ , хотя лучи, при помощи которых рассчитываются величины  $\psi_{1,2}$  и  $A_{1,2}$ , теряют непосредственный физический смысл. Это означает, что вблизи каустик лучи сохраняют, по образному выражению Б. Е. Кинбера, функции геометрического костяка, несущего волновую плоть <sup>19,20</sup>.

## в) Оценки поля в фокусе при наличии сферической аберрации

Пусть поле в начальной плоскости z = 0 имеет квадратичную фазу:  $u^0 = \exp(-ik_{0}\rho^2/2F)$ . Тогда при z = F вместо точечного фокуса образуется каустический клюв. Элементарный расчет по формулам гл. 3 дает следующее значение френелевского радиуса в плоскости z = 0:

$$a_{\mathbf{f}} \approx (4F^3\lambda)^{1/4}$$

$$(7.7)$$

6 УФН, т. 132, вып. 3

Поперечный размер пятна  $l_{\perp}$  можно оценить по формуле (5.5), если заменить в ней радиус линзы b эффективным радиусом  $b_{a\phi\phi} \approx a_t$ . Это дает  $l_{\perp} \sim (\lambda^3 F/4)^{1/4}$ . Полагая в (4.5)  $\Delta S^0 = \pi a_1^3$ ,  $\Delta S_{\phi o \kappa} = \pi l_{\perp}^2$ , получаем оценку среднего по пятну поля

$$|u_{\oplus 0K}| \sim |A^0| \sqrt{\frac{4F}{\lambda}}. \tag{7.8}$$

Это приближенное значение лишь в  $\pi/\sqrt{2} = 2,2$  раза меньше точного значения поля в центре пятна.

r) Индексы фокусировки поля на каустиках

Как видно из приведенных выше оценок, поле на каустиках и в фокусах обнаруживает степенную зависимость от длины волны. Если воспользоваться малым параметром  $\mu = 1/k_0 Ln$ , то поле на каустике общего вида оценивается как

$$|u_{\phi^{0}\kappa}| \sim |A^{0}| \mu^{-\sigma_{\Phi}},$$
 (7.9)

где  $\sigma_{\Phi}$  — так называемый индекс фокусировки.

Ясно, что  $\sigma_{\Phi}$  зависит от характера фокусировки. Так, для простой каустики  $\sigma_{\Phi} = 1/6$ , для двумерного каустического клюва  $\sigma_{\Phi} = 1/4$ , для двумерного фокуса и для сферической аберрации  $\sigma_{\Phi} = 1/4$ , для каустической петли, стягивающейся в точку  $\sigma_{\Phi} = 3/10$ . Наибольшее значение  $\sigma_{\Phi} = 1$  достигается в идеальном фокусе, а наименьшее ( $\sigma_{\Phi} = 0$ ) отвечает отсутствию фокусировки. Значения  $\sigma_{\Phi}$ , вычисленные на основе дифракционной теории для ряда типичных каустик, приведены, например, в <sup>1</sup>, <sup>21</sup>, <sup>22</sup>, <sup>35</sup>. Эти значения очень удобны для сугубо ориентировочных оценок полей в фокальных зонах, особенно в нелинейных задачах.

#### 8, ДИФРАКЦИЯ ВОЛН В НЕОДНОРОДНЫХ СРЕДАХ

a) Форма френелевского объема для плоской волны в плоскослоистой среде

Используя уравнения лучей в плоскослоистой среде с показателем преломления n = n(z), легко определить сечение  $a_{\tilde{t}}$  френелевского объема



горизонтальными плоскостями z = z':

$$a_{t}(z') = \sqrt{\lambda_{0} \frac{\partial}{\partial s_{0}} \int_{z}^{z} \frac{s_{0} dz}{\sqrt{n^{2}(z) - s_{0}^{2}}}}, \qquad (8.1)$$

где z — координата точки наблюдения,  $s^0 = n^0 \sin \theta^0$ ,  $\theta^0$  — начальный угол падения луча, а  $n^0$  — показатель преломления на уровне  $z = z^0$  (рис. 11, a). При вертикальном падении луча на слой ( $s_0 = 0$ )

$$a_{\rm f} = \sqrt{\lambda_0 \int_{z'}^{z} \frac{\mathrm{d}z}{n(z)}}.$$
 (8.2)

Согласно (8.2) при уменьшении n(z) вдоль луча френелевский объем несколько у́же, чем в соответствующей неоднородной среде с n = const == n(z), тогда как при увеличении n(z) френелевский объем становится более широким:  $a_1(z') > \sqrt{\lambda_0 (z-z')/n(z)}$ .

## б) Форма френелевского объема в слоистой среде при наличии каустики

В э ом случае френелевский объем ограничен двумя оболочками, отвечающими двум лучам, приходящим в точку наблюдения. При косом падении волны объемы  $V_1$  и  $V_2$  разделены в пространстве (рис. 11, 6), а при вертикальном падении объем  $V_1$  целиком лежит внутри объема  $V_3$ (см. рис. 11, e), при этом объем  $V_2$  ограничен поверхностью, имеющей форму частично вывернутого чулка (подробнее см. <sup>1</sup>).

При скользящем распространении (угол падения  $\theta$  близок к  $\pi/2$ ) лучи имеют слабо искривленную траекторию, на всем протяжении которой проницаемость незначительно уклоняется от единицы, поскольку даже минимальное значение  $\varepsilon_{\min} = \sin^2 \theta$ , достигаемое в точке отражения, при  $\theta \sim \pi/2$  близко к единице. Поэтому максимальная полуширина френелевского объема  $a_t$  может быть оценена по формуле (2.7) для однородной среды с проницаемостью  $\varepsilon \sim 1$ :  $a_{t,\max} \sim \sqrt[3]{\lambda_0 L/2}$  (L — дистанция по горизонтали).

Согласно критерию I для применимости геометрической оптики необходимо, чтобы перепад проницаемости є (z) на диаметре френелевского объема  $2a_t \sim \sqrt{\lambda_0 L}$  был мал по сравнению с единицей:

$$\frac{\partial e}{\partial z} 2a_{\rm f} \ll 1. \tag{8.3}$$

Характерный масштаб  $H \sim \epsilon/|\partial\epsilon/\partial z|$  для ионосферы составляет не менее 50—100 км, так что при длине волны  $\lambda_0 = 15$  м из (8.3) получаем  $L \ll 10^5 - 10^6$  км. Это расстояние значительно больше окружности земного шара, и поэтому в случае почти горизонтальных лучей можно рассчитывать, что геометрооптический метод пригоден для описания по крайней мере односкачкового распространения.

Подобным же образом решается и вопрос о применимости геометрооптического приближения в окрестности критического педерсеновского луча, идущего по оси антиволновода<sup>1</sup>. Получающиеся здесь оценки согласуются с дифракционным расчетом, проведенным в<sup>23</sup>.

## r) Ближнее и дальнее поле антенны в неоднородной среде

По мере удаления точки наблюдения от антенны в неоднородной среде сечение френелевского объема в плоскости антенны  $a_f$  сначала растет, а при приближении к каустике — сильно уменьшается. Если сечение  $a_f$  становится меньшим размера антенны b, то можно говорить о локальной связи поля на апертуре с полем в удаленной точке наблюдения, которая характерна для ближнего поля. Эта особенность полей в неоднородных средах обнаружена и описана в работах <sup>24</sup>, <sup>25</sup>.

## 9. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

#### a) Необходимые условия применимости

В задачах распространения нестационарных колн (импульсов, волновых пакетов) в диспергирующих средах приближение пространственновременной геометрической оптики играет такую же важную роль, как и обычное приближение геометрической оптики при распространении монохроматических волн <sup>26-28</sup>.

Если свойства среды и поля изменяются достаточно медленно, нестационарную волну

$$u(\mathbf{r}, t) = A(\mathbf{r}, t) e^{i\phi(\mathbf{r}, t)}$$
 (9.1)

можно считать локально плоской и локально монохроматической на расстояниях  $|\Delta \mathbf{r}| \sim \lambda$  и интервалах  $\Delta t \sim \tau$ , где  $\lambda$  — некоторая средняя длина волны в среде, а т — ее средний период. Необходимые для этого условия медленности имеют вид

$$\mu = \max\left\{\frac{\lambda}{L}, \frac{\tau}{T}, \frac{\tau_{0}}{T}\right\} \ll 1; \qquad (9.2)$$

здесь  $\tau_0$  — характерный масштаб частотной дисперсии (соотношение между  $\tau$  и  $\tau_0$  в общем случае произвольное), L и T — соответственно пространственный и временной масштабы изменения поля и среды.

При выполнении условий (9.2) амплитуда A и эйконал ф легко вычисляются с помощью пространственно-временных лучей <sup>26-28</sup>.

#### б) Пространственно-временной френелевский объем

Пусть начальные условия для поля нестационарной волны и (r, t) имеют вид

$$u(\mathbf{r}^{0}, t^{0}) = A(\mathbf{r}^{0}, t^{0}) e^{i\phi(\mathbf{r}^{0}, t^{0})} \equiv A^{0}(\xi) e^{i\phi^{0}(\xi)}$$
(9.3)

и задаются на произвольной гиперповерхности  $\Sigma^0$ , параметрические уравнения которой есть  $\mathbf{r} = \mathbf{r}^0$  ( $\xi$ ),  $t = t^0$  ( $\xi$ ) или  $\mathbf{R} = \mathbf{R}^0$  ( $\xi$ ), где  $\mathbf{R} \equiv (\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{R}^0 \equiv (\mathbf{r}^0, t^0)$ ,  $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ ,  $\xi_t - \kappa$ риволинейные координаты на  $\Sigma^0$ . Введем опорный пространственно-временной луч  $\mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_2$  с набегом фазы  $\varphi_{\text{опоря}} = \varphi^0$  ( $\mathbf{R}_1$ ) +  $\Phi$  ( $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_3$ ), и виртуальный луч  $\mathbf{R}'_1 \to \mathbf{R}' \to \mathbf{R}_2$  с набегом фазы  $\varphi_{\text{впрт}} = \varphi^0$  ( $\mathbf{R}'_1$ ) +  $\Phi$  ( $\mathbf{R}'_1$ ,  $\mathbf{R}'$ ) +  $\Phi$  ( $\mathbf{R}'$ ,  $\mathbf{R}_2$ ). Здесь  $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{r}_1, t_1)$ ,  $\mathbf{R}'_1 \doteq (\mathbf{r}'_1, t'_1)$  — точки выхода лучей из гиперповерхности  $\Sigma^0$ ,  $\mathbf{R}_3 =$  $= (\mathbf{r}_3, t_2)$  — точка наблюдения в четырехмерном мире. Тогда уравнение границы френелевского объема запишется в виде

 $F(\mathbf{R}') = | \varphi_{\text{вирт}} - \varphi_{\text{опорн}} | - \pi =$ =  $| [\varphi^0(\mathbf{R}'_1) + \Phi(\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}') + \Phi(\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}_2)] - [\varphi^0(\mathbf{R}_1) + \Phi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)] | - \pi = 0, \quad (9.4)$ где  $\mathbf{R}' = (\mathbf{r}', t')$  — текущая точка границы. Отметим, что из (9.4) разложением в ряд Тейлора может быть получено приближенное уравнение границы.

в) Форма пространственно-временно́го френелевского объема в однородной среде

Конкретизируем уравнение (9.4) применительно к задаче распространения илоского частотно-модулированного импульса в однородной диспергирующей среде с показателем преломления  $n(\omega)$ . Пусть в начальной плоскости z = 0 фаза импульса равна  $\varphi(0, t) \equiv \varphi^0(t)$ , т. е. начальная частота импульса изменяется по закону  $\omega^0 = -\partial \varphi^0 / \partial t$ . Тогда из (9.4) можно получить следующее выражение для

полуширины зоны Френеля в плоскости z = 0:

$$\tau_{f}^{o} = \sqrt{2\pi \left| k_{o}^{\prime} \frac{z z_{\mathrm{K}}}{z - z_{\mathrm{K}}} \right|}, \qquad (9.5)$$

где  $k_0' = d^2 k_0 (\omega)/d\omega^2 |_{\omega=\omega^0}, z_{\kappa}$  — координата точки касания опорного луча с каустикой:

$$z_{\rm \scriptscriptstyle R} = - \left\lceil k_0'' \frac{\mathrm{d}\omega^0\left(\eta\right)}{\mathrm{d}\eta} \right\rceil^{-1}. \tag{9.6}$$

Формула (9.5) является аналогом выражения (2.7) для сферической монохроматической волны.

В отсутствие частотной модуляции, когда  $\omega^0 = \text{const}$ , согласно (10.11) имеем  $|z_{\kappa}| \to \infty$  и

$$\tau_{\rm f}^{\rm o} = \sqrt{2\pi |k_{\rm o}^{"}| z}. \tag{9.7}$$

Общий вид френелевского объема на плоскости (z, t) показан на рис. 12. Сечение этого объема на уровне z = z' равно

$$\tau'_{f} = \sqrt{2\pi |k'_{0}| (z-z')}.$$
(9.8)

Отметим, что формула (9.7) согласуется с оценкой характерного интервала времени  $\sim \sqrt{|k_0'|z}$ , полученной в <sup>29, 30</sup> на основе метода пространственно-временного параболического уравнения.

г) Условия применимости пространственно-временной геометрической оптики

По аналогии с критерием 1 из гл. З потребуем выполнения условий вида

$$\tau_{f}\left|\frac{\partial A}{\partial t}\right| \ll A, \quad \tau_{f}\left|\frac{\partial \omega}{\partial t}\right| \ll \omega.$$
 (9.9)

Используя эти условия, можно оценить размеры области неприменимости в различных ситуациях, например, вблизи границы тени в пространстве — времени (вблизи фронта импульса), в окрестности пространственно-временных каустик и фокусов как в однородных, так и в неод-



Рис. 12.

нородных диспергирующих средах. Указанные оценки проводятся по аналогии с пространственным случаем. Рассмотрим здесь только один пример, относящийся к компрессии (сжатию) частотно-модулированных сигналов в диспергирующих средах (другие примеры приведены в <sup>1</sup>).

## д) Оценка поля в пространственно-временно́м фокусе: компрессия импульса

Пусть закон модуляции частоты  $\omega^0$  (t) выбран так, что все пространственно-временные лучи сходятся в одной точке ( $z_{\phi}$ ,  $t_{\phi}$ ) (рис. 13). Размер нервой френелевской зоны при z = 0 определяется формулой (9.5):





$$\tau_{\mathbf{f}}^{0} = \sqrt{2\pi \mid k_{0}^{\star} \mid \frac{zz_{\Phi}}{z - z_{\Phi}}} . \quad (9.10)$$

В силу неравенств (9.9) приближение пространственно-временной геометрической оптики теряет силу, когда т<sub>f</sub> сравняется с длиной начального импульса *T*: т<sub>f</sub> ~ *T*. Из этого условия находим пространственный размер фокального пятна (см. рис. 13):

$$|z - z_{\Phi}| \sim 2\pi |k_0^*| \frac{z_{\Phi}^2}{T^2} \equiv l.$$
 (9.11)

Расстоянию l от фокуса отвечает временной интервал

$$T_{\min} = T \frac{l}{z_{\Phi}} = 2\pi | k_0^* | \frac{z_{\Phi}}{T}, \qquad (9.12)$$

представляющий собой длительность импульса в фокусе.

Поле в фокусе можно получить из условия энергетического баланса:

 $|A^0|^2 T = A_{\Phi \circ \kappa}^2 T_{\min}.$ 

Отсюда следует, что выигрыш в амплитуде сжатого сигнала равен

$$\frac{A_{\oplus \text{or}}}{A^0} \approx \sqrt{\frac{T}{T_{\min}}} = \frac{T}{\sqrt{2\pi |k_0^*| z_{\oplus}}}.$$
(9.13)

Полученные оценки согласуются с результатами работ<sup>29, 30</sup>, полученными на основе метода пространственно-временно́го параболического уравнения. Они допускают проверку и с помощью спектрального подхода, подробно описанного Л. А. Вайнштейном<sup>31</sup> (см. также<sup>27</sup>).

## 10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенное рассмотрение показывает, что обычная геометрическая оптика, дополненная представлением о френелевских объемах лучей, позволяет осуществлять всесторонний анализ высокочастотных волновых полей, который включает не только выяснение качественной структуры полей, но и получение количественных оценок поля даже в зонах неприменимости геометрической оптики. Такой анализ слагается из следующих элементов:

1. Определение геометрооптического поля, что предполагает нахождение лучей, фазовых фронтов, расходимостей лучевых трубок и других лучевых параметров.

2. Нахождение при помощи эвристических критериев областей применимости и неприменимости геометрической оптики и границ между ними.

3. Оценки погрешности в области применимости геометрической оптики.

4. Эвристические оценки амплитуды поля в областях неприменимости геометрической оптики.

При необходимости анализ может быть дополнен также оценками экспоненциально малых рассеянных полей в областях, куда не попадают лучи \*).

Реализация этой программы существенно зависит от разрешимости уравнений геометрической оптики, в первую очередь — лучевых уравнений. Решения в аналитической форме имеются, как известно, только для ограниченного числа частных случаев, далеко не охватывающих весь спектр актуальных волновых задач электродинамики, акустики, оптики и сейсмологии. В этих условиях нам представляется желательной, а для некоторых приложений даже необходимой разработка универсальной численной программы анализа высокочастотных полей, в основе которой лежали бы вычисления лучей и соответствующих им френелевских объемов, и которая предусматривала бы определение границы применимости лучевого метода и грубое определение поля в областях неприменимости геометрической оптики.

Высказанные выше соображения без существенных изменений переносятся и на квазиклассические волновые функции в квантовой механике. Введение френелевского объема классических траекторий позволяет сформулировать ограничения на допустимую скорость изменения потенциала в пространстве, определить ширину каустических зон, оценить волновую функцию в окрестности каустик (например, в зоне радуги в задаче о потенциальном рассеянии) и т. д.

Кроме того, сформулированные критерии можно обобщить на векторные поля, потребовав дополнительно малости изменения поляризации волны в поперечном сечении френелевского объема<sup>1</sup>. В <sup>1</sup> указаны также особенности формы френелевских объемов в анизотропных средах и разобраны вопросы о реальности каустик и о возможностях локализовать комплексные лучи.

В заключение авторы выражают искреннюю признательность Л. А. Вайнштейну за ценные советы и замечания.

Физический институт им. П. Н. Лебедева АН СССР Московский энергетический институт

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. О границах применимости метода геометри-Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Ограницах применимости метода геометрической оптики: Лекции на V Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн, Челябинск, 1979 г. — В кн. Современные проблемы распространения и рассеяния волн. — М.: ИРЭ АН СССР, 1979. — С. 76.
   Рытов С. М. — ДАН СССР, 1938, т. 18, с. 263.
   Рытов С. М. — Тр. ФИАН СССР, 1940, т. 2, с. 1.
   К равцов Ю. А. — В кн. Аналитические методы в теории дифракции и рас-икаличие по в С. 2010. — В кн. Аналитические методы в теории дифракции и рас-икаличие по в С. 2010. — В кн. Аналитические методы в теории дифракции и рас-икаличие по в С. 2010. — В кн. Аналитические методы в теории дифракции и рас-икаличие по в С. 2010. — В кн. Аналитические методы в теории дифракции и рас-икаличие по в С. 2010. — В кн. Аналитические методы в теории дифракции и рас-икаличие по в С. 2010. — В кн. Аналитические методы в теории дифракции и рас-икаличие по в С. 2010. — В кн. Аналитические методы в теории дифракции и рас-икаличие по в С. 2010. — В кн. Аналитические методы в теории дифракции и рас-икаличие по в С. 2010. — В кн. Аналитические методы в теории дифракции в рас-икаличие по в с. 2010. — В кн. Аналичие методы в теории дифракции и рас-икаличие по в с. 2010. — В кн. Аналичие методы в теории дифракции в сонстранение методы в теории дифракции и рас-икаличие по в с. 2010. — В кн. Аналичие методы в теории дифракции в сонстранение методы в теории дифракции в сонстранение методы в теории с. 2010. — 201

- пространения воли. М.: Совет по акустике, 1979. С. 257. 5. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах диф-ракции коротких воли. М.: Наука, 1972.

<sup>\*)</sup> Способ оценки таких экспоненциально слабых волновых полей, использующий сходящиеся ряды с нулевым приближением геометрической оптики в качестве ведущего члена, предложен в <sup>1</sup>.

- 6. Боровиков В. А., Кинбер Б. Е. Геометрическая теория дифрации. М.-Связь, 1978.
- Фейнман Р., ХибсА., Квантовая механика и интегралы по траекториям. --7. М.: Мир, 1968.
- Фейнберг Е. Л. Распространение радиоволи вдоль земной поверхности. ---М.: Изд-во АН СССР, 1961.
- 9. Черный Ф. Б. Распространение радиоволн. М.: Сов. радио, 1972.
- 10. Bertoni H. L., Felsen L. B., Hessel A.- IEEE Trans., 1971, v. AP-19,
- р. 226. 11. Кравцов Ю. А., Фейзулин З. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1969, т. 12, с. 886.
- 12. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 13. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. — М.: Наука, 1973. 14. Газарян Ю. Л. — Вкн. Вопросы динамической теории распространения сейс-
- мических волн. М.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1961. № 5, с. 73. 15. Грошев В. Л., Кравцов Ю. А. Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1968,
- 11, c. 1812.
- 16. Кравцов Ю. А. Ibid., 1964, т. 7, с. 664.

- 17. Орлов Ю. И.— Тр. МЭИ, 1974, вып. 194, с. 103. 18. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Физматгиз, 1960. 19. Кравцов Ю. А.— Акуст. ж., 1968, т. 14, с. 3. 20. Berry M. V., Mount K. E.— Rept. Prog. Phys., 1972, v. 35, p. 315. 21. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Нау-
- ка, 1974.
- 22. Berry M. V.- Adv. Phys., 1976, v. 25, p. 1. 23. Типин М. В. – В кн. Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца. — М.: Наука, 1974. — Вып. 29, с. 157.
- 24. Кондратьев И. Г., Пермитин Г. В. Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1970, т. 13, с. 1795.

- V Всесоюзной школе по дифракции и распространению волн, Челябинск, 1979.— В кн.: Прямые и обратные задачи теории дифракции. - М.: ИРЭ АН СССР, 1979. --C. 5—114.
- 28. Бабич В. М., Булдырев В. С., Молотков И. А. Метод возмущений в теории распространения волн: Лекции на V Всесоюзной школе по дифракции и в теории распространения волн: Лекийи на у Бессоюзной школе по дифрандый и распространению волн, Челябинск, 1979. — В кн. Теория распространения волн в неоднородных и нелинейных средах. — М.: ИРЭ АН СССР, 1979. — С. 28. 29. Блиох П. В. — Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1964, т. 7, с. 460. 30. Литвак А. Г., Таланов В. И. — Ibid., 1967, т. 10, с. 539. 31. Вайнштейн Л. А. — УФН, 1976, т. 118, с. 339. 32. Фрадкин Е. С. — В кн. Проблемы теоретической физики. — М.: Наука, 4060 С. 286

- 1969.-- C. 386.
- 33. Feynman Path Integrals. In: Proc. of Intern. Colloquium. Marseille, May 1978. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verlag, 1979. — (Lecture Notes in Phy-sics. V. 106.)
- 34. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных воли в плазме. М.: Наука, 1967.
- Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И. Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.