

[51+53]:681.142

**АНАЛИТИЧЕСКИЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ НА ЭВМ В ПРИЛОЖЕНИИ  
К ФИЗИКЕ И МАТЕМАТИКЕ****В. П. Гердт, О. В. Тарасов, Д. В. Ширков****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение . . . . .	113
2. Общие свойства программных систем для аналитических вычислений . . .	116
3. Приложения в физике . . . . .	119
а) Небесная механика (119). б) Общая теория относительности (121). в) Квантовая теория поля (124). г) Физика плазмы (129). д) Гидродинамика (131). е) Атомная и молекулярная физика, квантовая химия (134).	
4. Приложения к математике . . . . .	135
а) Вычисление неопределенных интегралов (135). б) Решение дифференциальных уравнений (139). в) Анализ математических выражений (141).	
5. Заключение . . . . .	141
6. Примеры простых программ на языках SCHOONSCHIP и REDUCE-2 . . .	142
Цитированная литература . . . . .	144

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Мысль о том, что любая аналитическая точная процедура может быть выполнена компьютером, высказала еще в 1844 г. леди Лавлейс, патрон английского математика Беббиджа, разработавшего в 1833 г. проект «аналитической машины»<sup>1</sup> — арифмометра с программным управлением, арифметическим и запоминающим устройствами. Эти свойства машины Беббиджа спустя 100 лет легли в основу современных ЭВМ. Что же касается аналитических вычислений, то первые успешные попытки реализации на ЭВМ простейшей нечисленной операции — дифференцирования — были предприняты четверть века назад<sup>2</sup>. Следующий важный шаг в этом направлении — реализация полиномиальной алгебры — потребовал еще 10 лет интенсивного развития вычислительной техники, разработки новых нечисленных алгоритмов<sup>3</sup> и создания алгоритмических языков программирования. К последним относятся, в частности, хорошо известные<sup>4</sup> FORTRAN, ALGOL, PL/I и др., а также менее известный, но гораздо более пригодный для аналитических вычислений язык LISP<sup>5</sup>, разработанный в 1960 г. Маккарти<sup>6</sup>.

Начиная с середины 60-х годов было создано более 30 программных систем для аналитических вычислений (CAB), из которых около 10 нашли многочисленные применения для решения широкого класса задач физики и математики.

Тем не менее, когда речь заходит о том, что ЭВМ способна производить не только численные, но и аналитические выкладки, многим это кажется крайне удивительным. Такое удивление обусловлено, с одной стороны, привычкой рассматривать ЭВМ как инструмент сугубо численных расче-

тов, а с другой — весьма скудной информацией в отечественной литературе.

Хорошо известно, что в алгоритмических языках численного программирования таких, например, как FORTRAN и ALGOL, все используемые символы служат для обозначения некоторых чисел, и результат вычисления также является числом.

В то же время САВ позволяют аналитически выполнять такие операции, как дифференцирование, упрощение выражений (приведение подобных членов), подставлять вместо символа или выражения другое выражение и т. д. В итоге (и это особенно важно!) результат вычисления представляет собой некоторое аналитическое выражение, например функцию с явной зависимостью от ее аргументов.

Примечательно, что аналитические выкладки удалось реализовать на цифровых вычислительных машинах, хотя это и потребовало развития ряда тонких методов программирования. Так, при проведении численных вычислений распределение информации в памяти машины обычно фиксируется и ее объем известен еще до начала работы программы. С другой стороны, при проведении алгебраических выкладок трудно, а подчас и просто невозможно, заранее распределить память или точно учесть объем памяти, который потребуется на промежуточных этапах. Одним из путей решения этой проблемы является динамическое распределение памяти: на промежуточных этапах вычислений происходит стирание уже ненужной информации и освободившееся место заполняется новой. Как яркий пример отметим реализацию этого принципа в алгоритмическом языке LISP.

Другой отличительной чертой аналитических преобразований является более сложная структура элементарных операций: сложения, умножения и т. д., которые должны быть модифицированы программным путем. Кроме того, усложняются команды по управлению как исходной информацией, так и результатами вычислений. В этом главное отличие аналитических выкладок от численных.

В некоторых случаях для проведения аналитических выкладок можно обойтись без непосредственного использования символов, которые, так же как и числа, легко записать в машинной памяти в двоичном коде. Например, полином  $(54/7) x^3 y z^2$  по переменным  $x, y, z, w$  может быть совершенно однозначно описан последовательностью чисел: 54, 7, 3, 1, 2, 0. На основе такого представления легко составить компактную и быструю систему, но даже такую простую символьную операцию, как дифференцирование, запрограммировать крайне трудно.

В настоящее время можно выделить четыре способа проведения аналитических выкладок на ЭВМ, имеющих, разумеется, ряд общих черт.

*При первом способе* исходные данные задают в память машины каким-либо компактным образом, подобным описанному выше, а необходимую программу управления этими данными пишут на языке низшего уровня — ассемблере (представляющего собой символьную форму машинных команд). Первый способ ориентирован, как правило, на решение узкого круга задач и лежит в основе многих специализированных САВ, для которых характерны компактность и высокое быстродействие. Примером такой САВ является система SCHOONSCHIP<sup>7</sup>. Однако введение новых возможностей (математических операций) в таком подходе требует большого и кропотливого труда высококвалифицированных программистов.

*Во втором подходе* исходные данные также задают наиболее компактным образом, а программу обращения с этими данными составляют либо целиком на языке высшего уровня (например, языке FORTRAN), либо составляют часть подпрограмм на языке высшего уровня, а часть на ассем-

блере. Управление же этими подпрограммами реализуется на языке высшего уровня. Примером системы, в основе которой лежит такой метод, является система SAC-1<sup>8</sup>.

Для аналитических выкладок можно использовать и *третий метод*, заключающийся в программировании требуемых операций непосредственно на языке более высокого, чем ассемблер, уровня. В этом случае как исходные данные, так и манипуляции с ними определяются синтаксисом выбранного языка. Внутреннее представление исходных данных теперь уже не обязательно компактно, как в первых двух способах. Особенностью данного подхода является также то, что здесь нет привязанности к ассемблеру, который различен для разных ЭВМ. Следовательно, написанные таким образом программы можно сравнительно легко переносить с ЭВМ одного типа на другую. В качестве базисного языка можно использовать, например, LISP. На его основе легко составить, скажем, программу символьного дифференцирования<sup>9</sup>, используя таблицу производных.

Самым многообещающим является *четвертый метод* реализации аналитических вычислений, лежащий в основе наиболее развитых САВ. Этот метод опирается на набор стандартных подпрограмм аналитических

Таблица I

Общие свойства некоторых программных систем для аналитических вычислений

САВ:	SCHOONSHIP	CLAM	REDUCE-2	
Версия (год) ЭВМ	1977 CDC-6500	1972 CDC-6500	1973 CDC-6500 EC-1040	
Объем системы	25 000 слов	20 000 слов	65 000 слов (CDC) 300 кбайт (EC)	
Состояние в ОИЯИ	Внедрена	Внедрена	Внедрена	
Язык реализации	Ассемблер	Ассемблер	LISP	
Тип внешнего языка	*	LISP	ALGOL	
Диалоговый режим	Есть	Нет	Есть	
Область основных применений	КТП	ОТО	Унив.	
САВ:	SYMBAL	CAMAL	АВТО-АНАЛИТИК	MACSYMA
Версия (год) ЭВМ	1970 CDC-6500	1975 EC-1040	1973 БЭСМ-6	1977 DEC PDP-10
Объем системы	25 000 слов	240 К байт	30 000 слов	221 000 слов
Состояние в ОИЯИ	Внедрена	Внедряется	Будет внедряться	—
Язык реализации	Ассемблер	BCPL	Машинный код	LISP
Тип внешнего языка	ALGOL	*	*	ALGOL
Диалоговый режим	Нет	Нет	Нет	Есть
Область основных применений	Общ.	НМ и ОТО	МФ	Унив.
Обозначения: * — специальный язык данной системы. КТП — квантовая теория поля, ОТО — общая теория относительности, НМ — небесная механика, МФ — математическая физика, Унив. — универсальная, Общ. — общего назначения.				

манипуляций, написанных на каком-либо символьном языке L (например, языке LISP). Кроме того, система содержит также большое число специальных функций, предварительно написанных на языке L. Исходная информация и управляющая ими программа пишутся на специальном внешнем языке, разрабатываемом создателем системы. Одним из основных критериев для внешнего языка является максимальное удобство для пользователя. Поэтому ряд развитых систем имеют, например, алголоподобный внешний язык (табл. I). Важным преимуществом последнего

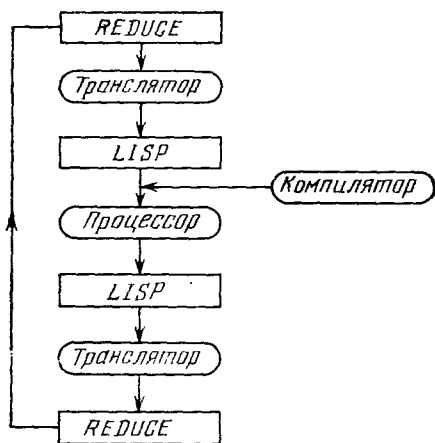


Рис. 1. Схема выполнения команды в системе REDUCE-2.

подхода является то, что пользователь может сам расширять возможности системы, добавляя нужные ему подпрограммы, написанные на внешнем языке или языке L. Будучи удобными для составления программы, такие системы, к сожалению, работают, как правило, медленнее, чем системы других типов.

Четвертый подход к реализации аналитических выкладок лежит в основе универсальных САВ и, в частности, системы REDUCE-2<sup>10</sup>. Процесс выполнения команды в системе REDUCE-2 происходит по схеме<sup>11</sup>, представленной на рис. 1. Ясно, что такое многоэтапное транслирование и использование LISP-системы сказывается на быстродействии REDUCE-2.

Разумеется, ЭВМ может помочь только тогда, когда процедура нахо-

ждения решения достаточно ясна, т. е. известен четкий алгоритм построения нужного решения. По существу, САВ можно рассматривать как мощный и практически единственный инструмент решения следующих двух типов задач: 1) требующих непомерно больших затрат ручного труда, 2) очень чувствительных к потере точности при численном решении.

К задачам первого типа относится, например, задача обращения матрицы достаточно высокого порядка, элементы которой являются символами или алгебраическими выражениями.

Важным примером задачи второго типа является анализ устойчивости плазмы в установке типа «Токамак», которое сводится к условию существования нуля некоторой функции в заданной области. Положение этого нуля очень чувствительно к потере точности в промежуточных вычислениях. Применение САВ к данной задаче оказалось исключительно плодотворным и подробно рассмотрено ниже (см. гл. 3).

## 2. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ПРОГРАММНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Все имеющиеся в настоящее время САВ можно условно разделить на три группы.

1. Специализированные системы — ориентированные на вполне определенную область применения и чаще всего на очень длинные выкладки. Для многих таких систем характерен узкий класс встроенных математических операций, использующих, как правило, специальные алгоритмы и, как следствие этого, — высокое быстродействие и относительно небольшие требования к объему центральной памяти ЭВМ.

К специализированным САВ можно отнести, например, системы: SCHOONSCHIP<sup>7</sup> и ASHMEDAI<sup>12</sup>, предназначенные для стандартных выкладок в квантовой теории поля;

ALAM<sup>13</sup>, ее версию CLAM<sup>14</sup>, а также SHEEP<sup>15</sup> — для вычислений в общей теории относительности;

MAO<sup>16</sup>, AMC<sup>17</sup> — для операций с рядами Пуассона в небесной механике;

SAMAL<sup>18</sup> — для задач небесной механики и общей теории относительности;

АВТО-АНАЛИТИК<sup>19</sup>, предназначенная для решения ряда задач математической физики.

II. Системы общего назначения — со встроенными математическими операциями, типичными для многих задач физики и математики, такими, например, как дифференцирование, алгебра векторов и матриц и др.

Среди САВ этого типа выделим системы FORMAC<sup>20</sup>, ALTRAN<sup>21</sup>, SYMBAL<sup>22</sup> и АНАЛИТИК-74<sup>23</sup>.

III. Универсальные системы, к которым можно отнести три самые развитые системы общего назначения REDUCE-2<sup>10</sup>, MACSYMA<sup>24</sup> и SCRATCHPAD<sup>25</sup>. Две последние являются наиболее мощными из существующих САВ и обладают подавляющим большинством аналитических операций, которые удалось реализовать на современных ЭВМ. Система REDUCE-2 обладает значительно меньшим числом встроенных операций, чем MACSYMA и SCRATCHPAD. Однако пользователь REDUCE-2 имеет широкие возможности для определения новых объектов и (или) новых математических операций средствами внешнего языка системы. Это особенно привлекательное свойство системы REDUCE-2 служит источником ее постоянного развития и позволяет отнести ее к классу универсальных систем. Следует подчеркнуть, что многие специализированные системы и некоторые системы общего назначения написаны на ассемблере, что и обеспечивает во многом их компактность и быстродействие. В то же время универсальные системы написаны на языке LISP<sup>5</sup>. Язык LISP, предоставляя широкие возможности для аналитических выкладок, требует, однако, сравнительно большого машинного времени на выполнение отдельных операций. Это приводит к относительной «медленности» счета с помощью универсальных САВ.

В отличие от численных программ, САВ, и в особенности универсальные системы, требуют значительно большего объема памяти ЭВМ — типично десятков, а иногда и сотен тысяч машинных слов (см., например, табл. I). Конечно, при практическом использовании какой-либо системы нужна дополнительная память, зависящая от типа решаемой задачи. Такие высокие требования к объему памяти ЭВМ обусловлены характером используемых нечисленных алгоритмов и необходимостью сохранять в памяти все промежуточные результаты. Последние часто сильно «разбухают» в процессе счета. Поэтому наиболее мощные САВ реализованы на больших ЭВМ, таких, как IBM-360/370, CDC-6000/7000, DEC PDP-10 и др. Как яркий пример САВ, реализованной на малой ЭВМ, отметим систему АНАЛИТИК-74<sup>23</sup> для машин серии МИР-3, разработанную в СССР. К сожалению, несмотря на гибкость и применимость системы АНАЛИТИК к разным задачам<sup>26</sup>, ее возможности на МИР-3 ограничиваются сравнительно небольшими по объему выкладок вычислениями. В Советском Союзе начало исследованиям в области «машинной аналитики» было положено в конце 50-х годов Канторовичем и его учениками<sup>27-31</sup> (см. также книгу Смирновой<sup>32</sup> и ссылки в ней) и позднее Шурыгиным и Яненко<sup>33</sup>. К настоящему времени в СССР разработан ряд САВ

для отечественных машин: СИРИУС<sup>34</sup> для М-20 и М-222, вышеупомянутые АВТО-АНАЛИТИК и АМС для БЭСМ-6, АНАЛИТИК-74 и др. Помимо систем, был создан также ряд процессоров и программ специального назначения, таких, например, как процессоры КИНО и ПАССИВ для анализа групповых свойств дифференциальных уравнений<sup>35</sup>, программы, реализующие некоторые выкладки квантовой электродинамики<sup>36-37</sup> и т. д. Хорошее представление о направлениях развития машинной аналитики в СССР дают материалы всесоюзной дискуссии «Выполнение аналитических преобразований на ЦВМ»<sup>38</sup>.

Таблица II

Встроенные математические объекты и операции над ними  
в различных САВ из табл. I

САВ:	SCHOONSCHIP	CLAM	REDUCE-2	SYMBAL	CAMAL	АВТО-АНАЛИТИК	MACSYMA
Элементарные функции	Нет	Большинство	Некоторые	Мало	Большинство	Большинство	Все
Дробно-рациональные выражения	Нет	Есть	Есть	Есть	Есть	Нет	Есть
Поиск наибольшего общего делителя	Нет	Нет	Есть	Нет	В простых случаях	Нет	Есть
Дифференцирование	Нет	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть
Интегрирование	Нет	Нет	Нет	В простых случаях	В простых случаях	В простых случаях	Есть
Комплексные величины	Есть	Нет	Есть	Есть	Есть	Нет	Есть
Рациональные числа	Есть	Есть	Есть	Есть	Есть	Нет	Есть
Арифметика чисел с плавающей запятой	Очень быстрая	Нет	Медленная	Нет	Очень быстрая	Очень быстрая	Быстрая
Работа с отрезками степенных рядов	Нет	Нет	Неплохая	Отличная	Хорошая	Нет	Отличная
Работа с отрезками рядов Фурье	Нет	Нет	Нет	Специального вида	Отличная	Нет	Хорошая
Алгебра векторов и тензоров	Неплохая	Специального вида	Хорошая	Неплохая	Неплохая	Нет	Отличная
Метрическая алгебра	Нет	Нет	Хорошая	Неплохая	Нет	Неплохая	Отличная
Алгебра $\gamma$ -матриц и спиноров	Отличная	Нет	Хорошая	Нет	Нет	Нет	Нет
Некоммутативная алгебра	Хорошая	Нет	Неплохая	Нет	Нет	Неплохая	Отличная

В Объединенном институте ядерных исследований использование САВ началось с конца 1975 г. после внедрения системы SCHOONSHIP<sup>7</sup>. Сейчас в ОИЯИ поставлены также системы CLAM<sup>14</sup>, REDUCE-2<sup>10</sup>, SYMBAL<sup>22</sup>, внедряется SAMAL<sup>18</sup> и в ближайшем будущем предполагается внедрение системы АВТО-АНАЛИТИК<sup>19</sup>. Наиболее общие свойства этих систем, а также встроенных в них математические объекты и операции над ними (типичные и для многих других САВ) содержатся в табл. I и II. Для сравнения в последней колонке каждой таблицы приведены также соответствующие параметры системы MACSYMA<sup>24</sup> — самой мощной из существующих САВ. Из общих свойств (см. табл. I) выделим диалоговый (интерактивный) режим работы, имеющийся в системах SCHOONSHIP и REDUCE-2. Работая в таком режиме, пользователь может контролировать промежуточные результаты и тем самым резко повысить эффективность решения широкого класса задач. Среди встроенных возможностей САВ (см. табл. II) нами не указаны: *полиномиальная алгебра*, *упрощение выражений* (приведение подобных членов), *аппарат подстановок*, присущие всем современным системам. При этом, подстановки позволяют в отдельных случаях существенно расширить возможности системы по отношению к встроенным операциям. Вообще же содержащаяся в табл. II информация далеко не исчерпывает всех возможностей системы MACSYMA, в которую встроена также процедура вычисления широкого класса определенных интегралов, ряд специальных функций, прямое и обратное преобразование Лапласа и многое другое<sup>24,39</sup>.

Ниже мы рассмотрим ряд плодотворных приложений САВ в физике и математике.

### 3. ПРИЛОЖЕНИЯ В ФИЗИКЕ

#### а) Небесная механика

Одной из фундаментальных проблем небесной механики (НМ) является построение аналитической теории небесных тел, т. е. больших планет, их спутников, искусственных спутников, космических станций и т. д. Под словом «теория» в НМ понимается совокупность формул, определяющих положение небесного тела как функцию времени. Чтобы построить такую теорию, необходимо решить систему дифференциальных уравнений, описывающих движение тела, и только в тривиальных случаях решение удастся найти в замкнутом виде. Наиболее общим подходом к построению аналитической теории небесных тел является теория возмущений. Учитывая, что движение тел в НМ, как правило, почти периодическое, решение чаще всего ищут в виде ряда по тригонометрическим функциям, аргументы которых линейно зависят от времени, а коэффициенты ряда являются полиномами по малым параметрам данной задачи.

Такие ряды называются рядами Пуассона и имеют следующий общий вид:

$$\varphi(x, y) = \sum_j \{P_j(x) \cos(j \cdot y) + Q_j(x) \sin(j \cdot y)\}, \quad (3.1)$$

где  $x = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$  — вектор полиномиальных переменных,  $y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$  — вектор тригонометрических переменных, а  $j = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$  — вектор с целочисленными компонентами,  $P_j(x)$ ,  $Q_j(x)$  — полиномы по переменным  $x_1, x_2, \dots, x_m$ , индексированные набором  $\{j_i\}$ .

Проиллюстрируем сказанное на простом примере<sup>40</sup>. Рассмотрим невозмущенное кеплеровское движение, описываемое уравнением

$$E = u + e \sin E, \quad (3.2)$$

в котором  $e$  есть эксцентриситет орбиты,  $E$  — эксцентрическая аномалия, через которую координаты и скорости в эллиптическом движении выражаются в конечном виде, а  $u$  — средняя аномалия, являющаяся линейной функцией времени.

Рассматривая  $e$  как малый параметр, что типично для задач НМ, будем искать решение  $E = f(u, e)$  уравнения Кеплера (3.2) методом последовательных приближений:

$$E = u + \lim_{n \rightarrow \infty} A_{n\pi} \quad (3.3)$$

где

$$A_0 = 0,$$

$$A_1 = e \sin u,$$

$$\dots \dots \dots$$

$$A_{k+1} = \left[ e \sin u \left( 1 - \frac{A_k^2}{2!} + \frac{A_k^4}{4!} - \dots \right) + e \cos u \left( A_k - \frac{A_k^2}{2!} + \dots \right) \right]_{k+1}. \quad (3.4)$$

Индекс  $k + 1$  у квадратных скобок в (3.4) означает, что нужно отбросить члены более высокого, чем  $k + 1$ , порядка по  $e$ . Преобразуя правые части равенств (3.4) к линейным по тригонометрическим функциям выражениям, придем к следующему общему виду  $A_k$ :

$$A_k = \sum_{j=0}^k [P_j(e) \cos(ju) + Q_j(e) \sin(ju)]$$

с полиномами  $P_j$  и  $Q_j$ . Таким образом, решение (3.3) уравнения Кеплера (3.2) выражается через одномерный ряд Пуассона (3.4), у которого средняя аномалия  $u$  является тригонометрической, а эксцентриситет — полиномиальной переменной.

Высокая точность вычислений, требуемая в НМ, приводит к необходимости учитывать сотни, тысячи и даже десятки тысяч членов в рядах Пуассона и связанных с ними разложениях. Не случайно поэтому, что еще в 1958 г. <sup>41</sup> астрономы заинтересовались применением ЭВМ для аналитических выкладок, и уже через год была опубликована первая программа <sup>42</sup> на IBM-650 для аналитических преобразований рядов Пуассона. В дальнейшем был разработан еще целый ряд программ, а также САВ, специально для вычислений в НМ (см. обзоры <sup>40, 43</sup>). Интерес разработчиков САВ к НМ подогревался также желанием проверить результаты, полученные еще в середине прошлого столетия в монументальной работе Делоне <sup>44</sup>. Делоне построил аналитическую теорию движения Луны в седьмом порядке по малым величинам, таким, как эксцентриситеты  $e \approx 1/20$  и  $e' \approx 1/60$ , отношение размеров  $a/a' \approx 1/400$  и синус угла наклона  $\gamma = \sin i \approx 1/11$  лунной и земной орбит. Особенностью движения Луны является то обстоятельство, что ее орбита расположена за пределами области, в которой притяжение Земли преобладает над притяжением Солнца. Поэтому при построении теории Луны приходится учитывать большие порядки теории возмущений. Вычисляя пертурбационную функцию и затем интегрируя уравнения движения Луны, Делоне оперировал с тысячами слагаемых и потратил на весь расчет 20 лет. В 1958 г. эксперты <sup>41</sup> оценили объем работ, необходимый для воспроизведения результатов Делоне на ЭВМ, в 200 человеко-лет программирования. К счастью, эти пессимистические прогнозы оказались явно несостоятельными, и в 1970 г. группа авторов <sup>45</sup>, состоящая из трех человек, в течение года воспроизвела результаты Делоне с помощью системы МАО, разработанной одним из авторов — Ромом <sup>16</sup>. Примечательно, что в многотомном труде Дело-



не <sup>44</sup>, содержащем около 40 000 формул, была обнаружена всего одна ошибка.

Будучи основным математическим объектом аналитической теории возмущений, ряды Пуассона (3.1) составляют множество, замкнутое относительно операций сложения, вычитания и умножения. Более того, если ограничиться подходящим классом рядов Пуассона, то можно ввести операции интегрирования и выполнить ряд подстановок, не выводящих из этого класса. Другой примечательной особенностью рядов (3.1) является достаточность для манипуляций с ними полиномиальной алгебры и стандартных операций над тригонометрическими (экспоненциальными) функциями. Если же учесть практическую необходимость обрабатывать огромное количество слагаемых, ясно, что наиболее эффективный путь использования ЭВМ — создание специальных пуассоновских процессоров. Быстродействие и минимально необходимый объем оперативной памяти — главные требования к используемым в них алгоритмам.

В СССР такой подход интенсивно развивается в Институте теоретической астрономии Академии наук СССР. Так, Брумберг и Исакович <sup>46</sup> на основе созданной ими ранее <sup>17</sup> системы АМС для аналитических операций над рядами Пуассона, разработали и реализовали на БЭСМ-6 фортрановские процедуры кеплеровского процессора и разложения пертурбационной функции в спутниковых задачах. В ИТА АН СССР разработаны также и другие специальные фортрановские системы для манипуляций как с рядами Пуассона <sup>47</sup>, так и со степенными рядами <sup>48</sup>.

Конечно, для решения широкого круга задач НМ и в особенности тех, которые требуют выхода за рамки рядов Пуассона (см., например, приложения в обзоре Джеффриса <sup>49</sup>) можно с успехом применять более общие САВ. Особенно удобна система SAMAL <sup>18</sup>, предназначенная не только для НМ, но и для общей теории относительности. Как пример применения в НМ универсальной системы отметим работу Андерсона и Лоу <sup>49</sup>. Используя систему MACSYMA <sup>24</sup>, они вычислили временные вариации параметров кеплеровской орбиты в первом порядке теории возмущений для произвольной пертурбационной функции.

Для более подробного ознакомления с кругом задач НМ, решаемых с помощью САВ, мы рекомендуем обзоры <sup>40,43</sup>.

## 6) Общая теория относительности

За последние десять лет в общей теории относительности (ОТО) был проведен целый ряд исследований, опирающихся на применение САВ. При этом во многих случаях САВ играли первостепенную роль, поскольку ручной счет практически исключался из-за чрезмерного объема необходимых вычислений. В качестве примера наиболее распространенного типа выкладок в ОТО, целиком выполняемых на ЭВМ, рассмотрим процедуру вычисления тензора Римана (тензора кривизны) и связанных с ним величин для заданной ковариантной метрики  $g_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, 2, 3$ ), определяемой соотношением

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j.$$

Вычисление контравариантной метрики  $g^{ij}$  требует решения системы линейных уравнений

$$g^{jk} g_{ik} = \delta^j_i, \quad (3.5)$$

т е обращения матрицы  $\|g_{ij}\|$ .

Символы Кристоффеля первого рода определяются частными производными первого порядка от  $g_{ij}$ :

$$\Gamma_{kij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right). \quad (3.6)$$

Поднимая первый индекс у  $\Gamma_{kij}$ , приходим к символам Кристоффеля второго рода

$$\Gamma_{ij}^k = g^{kp} \Gamma_{pij}. \quad (3.7)$$

Следующий шаг состоит в вычислении тензора Римана по формуле

$$R_{ijkl} = \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ijl} - \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{ijk} + \Gamma_{pil} \Gamma_{jk}^p - \Gamma_{pij} \Gamma_{kl}^p. \quad (3.8)$$

Свертка тензора Римана дает тензор Риччи

$$R_{ij} = g^{pq} R_{piqj} \quad (3.9)$$

и скалярную кривизну

$$R = g^{ij} R_{ij}. \quad (3.10)$$

Последние через тензор Эйнштейна

$$G_{ij} = R_{ij} - \frac{1}{2} R g_{ij} \quad (3.11)$$

входят в основное уравнение ОТО — уравнение Эйнштейна

$$G_{ij} = T_{ij}, \quad (3.12)$$

в котором  $T_{ij}$  есть тензор энергии-импульса.

Вычисления по формулам (3.5) — (3.11) в дополнение к полиномиальным операциям требуют лишь обращения матриц и дифференцирования и доступны в принципе большинству САВ. Специальные программы для таких вычислений имелись уже в первых системах GRAD-ASSISTANT и FORMAC и описаны в работе <sup>50</sup>. Однако из-за трудностей с объемом оперативной памяти IBM-7090/7094, на которой они были реализованы, их практическое применение ограничивалось такими задачами, когда, скажем, компоненты тензора Риччи содержат не более 100 слагаемых.

С целью оптимизации вычислений типа (3.5) — (3.11) и введения дополнительных возможностей (тетрады, работа с метрикой, содержащей малый параметр и т. д.) был разработан ряд специализированных САВ для решения задач ОТО, таких, как ALAM <sup>13</sup> (и его версии LAM для IBM-360/370 и CLAM <sup>14</sup> для CDC-6000/7000) CAMAL <sup>18</sup>, SHEEP <sup>15</sup> и др. Чтобы проиллюстрировать возможности таких специализированных САВ, рассмотрим метрику, предложенную в работе Бонди и др. <sup>51</sup> при анализе гравитационного излучения вращающейся звезды:

$$ds^2 = \left[ V \frac{\exp(2\beta)}{r} - U^2 r^2 \exp(2\gamma) \right] du^2 + 2 \exp(2\beta) du dr + \\ + 2Ur^2 du d\theta - r^2 [\exp(2\gamma) d\theta^2 - \exp(-2\gamma) \sin^2 \theta d\varphi^2], \quad (3.13)$$

где  $U$ ,  $V$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  являются функциями координат  $u$ ,  $r$  и  $\theta$ .

Вычисление всех тензоров для метрики (3.13) вплоть до тензора Эйнштейна (3.11) с помощью системы CLAM требует всего 32 с на CDC-6500.

Большинство приложений САВ в ОТО связано с анализом уравнения Эйнштейна (3.12) в пустоте ( $T_{ij} = 0$ ). В этом случае условие  $G_{ij} = 0$  эквивалентно условию

$$R_{ij} = 0. \quad (3.14)$$

Из-за свойств симметрии тензора Риччи и метрики  $g_{ij}$  уравнения (3.11) представляют собой систему из 10 дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка для 10 независимых функций  $g_{ij}$  ( $i \geq j$ ).

В 1959 г. Харрисон<sup>52</sup> исследовал важный класс решений вакуумных уравнений (3.14), имеющих структуру

$$g_{ij} = A_i(x_0, x_1) B_j(x_0, x_2) \delta_{ij}. \quad (3.15)$$

Подстановка (3.15) в уравнения (3.14) сводит их к обыкновенным дифференциальным уравнениям на функции  $A_i$  и  $B_j$ . На этом пути Харрисон нашел все различные решения типа (3.15). Их оказалось 40. Некоторые решения были простыми, другие же имели сложную алгебраическую структуру. Проверка последних прямой подстановкой в (3.14) без использования ЭВМ не представлялась возможной. В 1971 г. решения Харрисона были независимо проверены на системе ALAM Д'Инверно и Рассел-Кларком<sup>53</sup> и на системе SAMAL — Фичем<sup>54</sup>. В результате было установлено, что в 4 случаях из 40 выражения Харрисона для  $g_{ij}$  не удовлетворяют уравнениям (3.14).

Однако, Д'Инверно и Рассел-Кларк<sup>53</sup> пошли дальше этого важного результата. Они проклассифицировали все решения Харрисона по различным типам метрик, введенным Петровым<sup>55</sup>. Важность такой классификации обусловлена тем фактом, что метрику одного типа нельзя перевести в метрику другого типа с помощью преобразования координат. Иначе говоря, метрики разных типов существенно различны. Для определения типа данной метрики авторы работы<sup>53</sup> разработали специальный алгоритм, который опирается на анализ кратности корней уравнения 4-го порядка

$$\Phi_0 Z^4 + 4\Phi_1 Z^3 + 6\Phi_2 Z^2 + 4\Phi_3 Z + \Phi_4 = 0; \quad (3.16)$$

здесь  $\Phi_i$  ( $i = 0 - 4$ ) — скаляры Ньюмена — Пенроуза, которые строятся из тензора Вейля:

$$G_{ijkl} = R_{ijkl} + \frac{1}{2} (g_{il}R_{jk} - g_{ik}R_{lj} + g_{jk}R_{li} - g_{jl}R_{ki}) - \frac{R}{6} (g_{il}g_{kj} - g_{ik}g_{lj}).$$

Заметим, что в пустоте тензор Вейля в силу (3.14) сводится к тензору Римана. Чтобы выяснить кратность корней уравнения (3.16) и по ней определить тип метрики, не обязательно решать это уравнение. Достаточно проверить выполнение определенного набора полиномиальных соотношений на функции  $\Phi_i$ . Такие соотношения довольно громоздки, и некоторые из них включают члены шестого порядка по переменным  $\Phi_i$ . Однако благодаря САВ, а именно, системе ALAM, все решения Харрисона удалось расклассифицировать по Петрову.

Разумеется, рассмотренные выше примеры далеко не исчерпывают всех применений САВ в ОТО. Ряд других приложений можно найти, например, в работах<sup>56,57</sup> и обзорах<sup>40,58,59</sup>. Из систем, имеющих в ОИЯИ (см. табл. I), CLAM и SAMAL специально предназначены для вычислений в ОТО. Это не исключает, однако, полезности применения в отдельных случаях других систем, и, в частности, SYMBAL и REDUCE-2. Как пример задачи такого типа укажем вычисление приливных сил в окрестности черной дыры, выполненные в работе<sup>60</sup> на основе системы REDUCE-2.

## в) К в а н т о в а я т е о р и я п о л я

Наряду с небесной механикой и общей теорией относительности вычисления по теории возмущений (ТВ) в квантовой теории поля (КТП) явились наиболее плодотворной сферой применения САВ. Эта важная область теоретической физики сочетает исключительную громоздкость выкладок со сравнительно небольшим количеством требуемых математических операций. ЭВМ и, главным образом, САВ нашли многочисленные применения (см., например, обзоры <sup>40, 61-65</sup>) на каждом шаге вычислений по хорошо известной диаграммной технике Фейнмана <sup>66-68</sup>. Рассмотрим эти шаги последовательно.

I. Г е н е р а ц и я д и а г р а м м д а н н о г о п о р я д к а Т В для рассматриваемого процесса. К настоящему времени опубликовано четыре различные программы генерации диаграмм в КТП <sup>69-72</sup>. Наиболее развитой из них является программа, разработанная Сасаки <sup>72</sup> специально для квантовой электродинамики (КЭД). Данная программа, написанная на языке LISP и имеющаяся в ОИЯИ на CDC-6500, генерирует только топологически неэквивалентные диаграммы, отбрасывая физически неинтересные из них (несвязные, содержащие замкнутые электронные петли с нечетным числом вершин и др.).

II. П о с т р о е н и е п о д ы н т е г р а л ь н ы х в ы р а ж е н и й. Для моделей КТП, описывающих частицы с ненулевым спином, эта часть вычислений часто является исключительно громоздкой. Так, например, в КЭД здесь требуется выполнение трудоемких операций алгебры  $\gamma$ -матриц Дирака и, в частности, операций приведения (упрощения выражений типа  $\sum_{\mu} \gamma_{\mu} \dots \gamma_{\mu}$ ) и вычисления следа. Эффективная реализация последних на ЭВМ потребовала разработки специальных алгоритмов <sup>73-74</sup>, встроенных в настоящее время в системы SCHOONSCHIP <sup>7</sup>, ASHMEDAI <sup>12</sup> и REDUCE-2 <sup>10</sup>. Каждая из этих трех систем позволяет полностью выполнить все выкладки по построению подынтегральных выражений. Однако в высших порядках ТВ предпочтительнее использовать SCHOONSCHIP и ASHMEDAI, которые, будучи специализированными для вычислений в КТП, требуют значительно меньших машинных ресурсов, чем универсальная система REDUCE-2.

III. У с т р а н е н и е р а с х о д и м о с т е й. В высших порядках ТВ вычисления шага II приводят, как известно <sup>66-68</sup>, к расходящимся интегралам, что является одной из главных проблем КТП. Строгая математическая процедура придания смысла таким интегралам, а именно,  $R$ -операция Боголюбова — Парасюка <sup>66, 75</sup>, позволяет отделять их расходящиеся части и тем самым строить ренормированные подынтегральные выражения, соответствующие конечным интегралам. К сожалению, несмотря на отдельные важные результаты <sup>76</sup>, общий алгоритмический подход к крайне трудоемкой процедуре ренормировки в КТП пока не разработан. По этой причине в КЭД, например, на ЭВМ удалось реализовать лишь часть  $R$ -операции, а именно, процедуру анализа структуры расходимостей данной диаграммы <sup>77</sup>. Полностью же вычитательную процедуру на ЭВМ в настоящее время удалось провести только для скалярных теорий. Так, Калмэ и Перроттэ <sup>70</sup> рассмотрели наиболее простой пример скалярной теории — суперренормируемую модель  $gf^3$ , в которой расходимости возникают лишь в диаграммах второго порядка для собственной энергии. Они написали программу на языке LISP, строящую ренормированные амплитуды в модели  $gf^3$ . Значительно более общий подход развит

в работе <sup>78</sup>, в которой предложен алгоритм и дано описание программы на языке SCHOONSCHIP, полностью реализующей *R*-операцию для скалярных теорий в случае произвольной точки вычитания.

IV. И н т е г р и р о в а н и е. Разумеется, аналитическое вычисление ренормированных фейнмановских интегралов, составляющих особый класс многократных интегралов, удастся выполнить далеко не всегда. Но в ряде важных частных случаев, когда рецепт аналитического интегрирования известен, применение САВ оказалось весьма плодотворным. Эти случаи суммированы в табл. III, взятой из обзора <sup>65</sup>, в котором можно

Таблица III

Представление интеграла	Порядок теории возмущений	Число петель интегрирования	Кратность интеграла	Используемая система	ЭВМ	Характерное время счета	Вычисляемая физическая величина	Литература
Импульсное *)	6	3	12	ASHMEDAI	UNIVAC-1108	10 мин	Аномальный магнитный момент электрона	80
То же	6	2	8	MACSYMA	DEC PDP-10	2 мин	Расходящая часть константы ренормировки электрического заряда	81
» »	4	2	8	SCHOONSCHIP	CDC-6600	—	Формфакторы электрона	82
» »	6	3	12	SCHOONSCHIP	CDC-7600	—	Аномальный магнитный момент электрона и мюона	83
Параметрическое **)	4	2	4	SCHOONSCHIP	CDC-6500	1 мин	Аномальный магнитный момент электрона, лэмбовский сдвиг	84
То же	4	2	4	REDUCE-2	DEC PDP-10	2 мин	Аномальный магнитный момент электрона, лэмбовский сдвиг	85

\*) Интеграл вычисляется непосредственно в импульсном пространстве.  
 \*\*) Используется представление интеграла через параметры Фейнмана.

найти дальнейшие детали. На первый взгляд может показаться, что для тех задач, в которых нас не интересует точная зависимость фейнмановской амплитуды от каких-либо параметров (кинематических переменных), аналитический счет не обязателен и достаточно обычного численного интегрирования. Однако из-за структуры подынтегрального выражения, которое, как правило, имеет интегрируемые особенности, един-

ственным надежным методом численного интегрирования является метод Монте-Карло <sup>79</sup>. Но последний очень медленный и требует больших затрат машинного времени. Скажем, вычисление семикратных параметрических интегралов с точностью 1%, дающих вклад в шестой порядок ТВ для аномального магнитного момента электрона, требует нескольких часов машинного времени на самых мощных современных ЭВМ. В то же время САВ дают точный ответ за время  $\sim 10$  мин (см. табл. III). И даже в тех случаях, когда интеграл не удается взять аналитически до конца, применение САВ для вычисления части повторных интервалов резко повышает точность численных расчетов.

**V. Вычисление сечений рассеяния.** Многие задачи физики высоких энергий связаны с расчетами дифференциальных сечений. Такие расчеты требуют продолжения описанной выше схемы вычислений. При этом все выкладки, связанные с возведением фейнмановской амплитуды (матричного элемента) в квадрат, аналогичны вычислениям шага II и также могут быть целиком выполнены на ЭВМ с помощью систем SCHOONSCHIP, ASHMEDAI и REDUCE-2. Значительно более трудной является задача вычисления интегралов по фазовому пространству, для которых характерна зависимость подынтегрального выражения от параметров (масс и кинематических переменных) и сложная структура пределов интегрирования. В этих условиях применение САВ может оказаться исключительно плодотворным. В качестве примера отметим работу Бардина и др. <sup>86</sup>, в которой они с помощью системы SCHOONSCHIP получили точное значение электромагнитной поправки низшего порядка к упругому рассеянию точечных частиц со спинами  $1/2$ ,  $1/2$  и  $0, 1/2$ . Целью расчета был анализ экспериментов, в которых не делается различия между упругой реакцией и процессом тормозного излучения фотона. Другим интересным примером является расчет <sup>87</sup> дифференциального распределения (отношения дифференциального сечения к полному) пары  $e^- \mu^+$ , полученной от лептонного распада пары тяжелых лептонов, рожденных в процессе  $e^+e^-$ -аннигиляции. Предполагая V — A-тип слабого взаимодействия, авторы работы <sup>87</sup> вычислили распределение лептонной пары  $e^- \mu^+$  в низшем порядке ТВ, используя SCHOONSCHIP для вычисления квадрата матричного элемента процесса и частичного интегрирования по фазовому пространству недетектируемых частиц (четырех нейтрино). Оставшаяся часть фазового интеграла считалась численно. Аналитическая часть расчета заняла 6 мин на CDC Cyber-175 при максимальной длине промежуточных выражений  $\approx 40\,000$  слагаемых.

Рассмотрим теперь наиболее яркий пример применений САВ в КТП — вычисление в шестом порядке ТВ такой фундаментальной физической величины, как аномальный магнитный момент электрона. Последний, как известно <sup>66-67</sup>, является частью полного магнитного момента

$$\mu = \mu_0 (1 + a),$$

обусловленной радиационными поправками к точечной электромагнитной вершине, соответствующей магнитному моменту  $\mu_0$ , равному магнетону Бора

$$\mu_0 = \frac{e}{2m}.$$

Величину  $a$  можно написать в виде ряда ТВ по степеням  $\alpha/\pi = e^2/4\pi^2$ :

$$a = a_2 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right) + a_4 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^2 + a_6 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^3 + a_8 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^4 + \dots$$

Коэффициент  $a_2$ , определяемый одной диаграммой Фейнмана (рис. 2, а), равен

$$a_2 = \frac{1}{2}$$

и был вычислен в 1948 г. Швингером <sup>89</sup>.

Вычисление в следующем порядке ТВ требует учета пяти различных двухпетлевых диаграмм (рис. 2, б). Полный их вклад в  $a$  был вычислен спустя десять лет после Швингера Петерманом <sup>90</sup> и Зоммерфельдом <sup>91</sup>:

$$a_4 = \frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \pi^2 \ln 2 + \frac{3}{4} \xi(3),$$

где

$$\xi(3) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1,2020569 \dots$$

Для определения коэффициента  $a_6$ , т. е. вклада шестого порядка ТВ, необходимо вычисление 40 различных трехпетлевых диаграмм, что практически невозможно вручную из-за непомерно длинных вычислений.

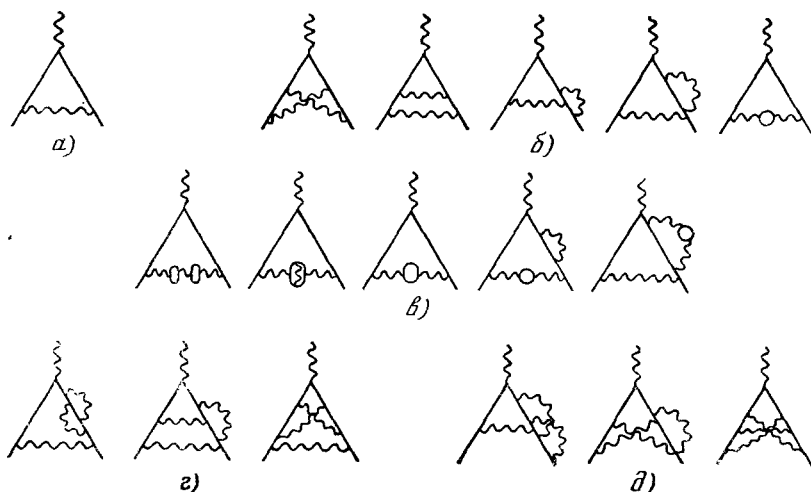


Рис. 2. Одно-, двух- и некоторые трехпетлевые вершинные диаграммы для аномально-го магнитного момента электрона.

Достаточно сказать, что ни одна из трехпетлевых вершинных диаграмм не была вычислена аналитически без использования САВ <sup>92-94</sup>. Но если к 1973 г. удалось вычислить аналитически лишь пять диаграмм, представленных на рис. 2, в (и все с помощью системы SCHOONSCHIP), то за последние пять лет благодаря применению систем SCHOONSCHIP <sup>7</sup> и в особенности ASHMEDAI <sup>12</sup>, было вычислено аналитически еще 25 диаграмм. Это позволило на порядок уменьшить ошибку в теоретическом значении  $a_6$  (табл. IV). Заметим, что наиболее сложными для вычислений оказались диаграммы рис. 2, г, которые в промежуточной стадии расчета содержат до 24 000 слагаемых и потребовали <sup>80</sup> каждая около 150 мин счетного времени на машине UNIVAC-1108 (это время включает II — IV стадии описанной выше схемы вычислений, полностью реализованные в системе ASHMEDAI).

Таблица IV

Прогресс в эксперименте и теории аномального магнитного момента  
электрона за последние 5 лет

Год	Вычисленные диаграммы 7-го порядка		$a_6^{\text{теор}}$	$a_6^{\text{эксп}}$	$a^{\text{теор}}$	$a^{\text{эксп}}$	$\frac{\Delta a^{\text{эксп}}}{a^{\text{эксп}}}$	$\frac{\Delta \mu^{\text{эксп}}}{\mu^{\text{эксп}}}$
	анали- тиче- ски	чи- слен- но						
1973 <sup>95</sup>	5	33	$1,21 \pm 0,07$	$1,060 \pm 0,33$	$(1159651,9 \pm 2,5) \cdot 10^{-9}$	$(1159656,7 \pm 3,5) \cdot 10^{-9}$	$3,0 \cdot 10^{-6}$	$3,5 \cdot 10^{-9}$
1978 <sup>94</sup>	30	10	$1,184 \pm 0,007$	$1,189 \pm 0,025$	$(1159652,375 \pm 261) \cdot 10^{-9}$	$(1159652,41 \pm 0,20) \cdot 10^{-9}$	$1,7 \cdot 10^{-7}$	$2,0 \times 10^{-10}$

Для остальных 10 диаграмм, дающих вклад в  $a_6$ , стадии II — III (построение подынтегральных выражений и устранение расхождений) были выполнены с помощью САВ, а оставшаяся часть вычислений — шаг III (интегрирование) — выполнялся численно.

В результате (см. табл. IV) расчеты оказались в блестящем согласии с последними <sup>96</sup> прецизионными измерениями аномального магнитного момента электрона, точность которых  $2 \cdot 10^{-10}$ .

В ближайшие годы следует ожидать дальнейшего прогресса в уточнении как экспериментальных <sup>96</sup>, так и теоретических <sup>94</sup> данных. Так, например, есть все основания считать, что из 10 известных в настоящее время численно диаграмм 7-го порядка еще семь удастся вскоре вычислить аналитически известными методами. Оставшиеся три непланарные диаграммы (рис. 2, б), к которым неприменима техника вычислений, развитая Левиным и др. <sup>80</sup>, пока не ясно как считать. Но если ограничиться их численными значениями, то можно добиться ошибки в теоретическом значении  $a_6$ , равной <sup>97</sup>

$$0,13 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^4 \approx 4 \cdot 10^{-12}.$$

Однако на этом уровне точности следует принять во внимание другие вклады в  $a$ , а именно <sup>94</sup>, мюонной петли:

$$a(\text{muon loop}) = 2,8 \cdot 10^{-12} \approx 0,1 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^4,$$

адронной поляризации вакуума:

$$a(\text{hadron}) = 2 \cdot 10^{-12} \approx 0,07 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^4,$$

слабых взаимодействий:

$$a(\text{Salam — Weinberg}) = 0,05 \cdot 10^{-12} \approx 0,0017 \left( \frac{\alpha}{\pi} \right)^4.$$

Малость этих эффектов по сравнению с  $(\alpha/\pi)^4$  означает, что следующий шаг в уточнении теоретического значения аномального магнитного момента электрона состоит в вычислении вклада 8-го порядка ТВ в квантовой электродинамике

Для этого нужно рассчитать вклад 430 различных четырех петлевых вершинных диаграмм. Из них 161 диаграмма получается внесением электронных петель в диаграммы низшего порядка и вычисляется не сложнее, чем диаграммы, дающие вклад  $\sim (\alpha/\pi)^3$ . Остальные 269 диаграмм соответствуют десятикратным интегралам в параметрическом пространстве,



подынтегральное выражение которых в 10—20 раз длиннее, чем у трехпетлевых диаграмм.

Уже начата работа<sup>97</sup> по вычислению величины  $a_8$ . В частности, составлена программа на языке SCHOONSCHIP для построения подынтегральных выражений, которая требует для одной диаграммы от 2 до 10 мин на CDC-7600. По оценкам Киношита<sup>97</sup> это потребует несколько сот часов для численного интегрирования на CDC-7600 с точностью 10%. Ожидается, что полный объем вычислений по данному проекту займет от 4 до 6 человеко-лет.

В последние годы САВ нашли ряд интересных приложений в неабелевых калибровочных моделях КТП. Отметим, в частности, выполненные с помощью системы SCHOONSCHIP двухпетлевые вычисления<sup>98,99</sup> функции Гелл-Манна — Лоу и аномальных размерностей пропагаторов в теории Янга — Миллса с произвольным калибровочным параметром. Вычисления проводились в ОИЯИ на CDC-6400 и заняли для всех 33 двухпетлевых диаграмм 84 мин машинного времени. Как другой важный пример, укажем выполненный на REDUCE-2 расчет нарушения правил Окубо — Иизуки — Цвейга в низшем порядке ТВ в квантовой хромодинамике, обусловленного радиационными распадами тяжелых псевдоскалярных частиц<sup>100</sup>.

### г) Физика плазмы

В этой исключительно важной области физики САВ нашли ряд плодотворных применений<sup>101-106</sup>. Наиболее интересным из них является анализ гидродинамического условия устойчивости плазмы в установках типа «Токамак»<sup>101-103</sup>. Если считать численно, то затрата нескольких часов машинного времени, даже на самых мощных современных ЭВМ, позволяет лишь с минимально допустимой достоверностью сделать заключение об устойчивости плазмы. С другой стороны, при чисто аналитических расчетах получающиеся на промежуточных этапах выражения настолько громоздки, что возникают проблемы с машинной памятью. Кроме того, такие расчеты требуют также значительных затрат машинного времени. Наиболее рациональным оказалось совмещение численных и аналитических методов<sup>102</sup>.

Рассмотрим теперь структуру вычислений, связанных с проблемой устойчивости плазмы. При наличии смещений  $\xi$  в плазме ее устойчивость определяется отклонением  $\delta U$  потенциальной энергии плазмы от равновесного значения. Если  $\delta U < 0$ , плазма неустойчива. Согласно магнито-гидродинамической (МГД) теории  $\delta U$  можно записать в виде следующего трехкратного интеграла, зависящего от геометрии установки и характера отклонения  $\xi$ :

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_{\text{объем плазмы}} dv_i^* \{g_{ij} Q^i Q^j + \xi [QJ] + \phi\}, \quad (3.17)$$

где

$$Q = \nabla \times [\xi B],$$

$$\phi = (\nabla \cdot \xi) \frac{1}{2} (\xi \nabla p) + \frac{5}{3} p (\nabla \cdot \xi)^2,$$

$B$  и  $J$  — соответственно магнитное поле и плотность тока в равновесном состоянии,  $g_{ij}$  — метрический тензор,  $p$  — давление плазмы.

Если  $\phi = 0$ , то смещение  $\xi$  удовлетворяет условию

$$\nabla \cdot \xi = 0.$$

Проблема заключается в вычислении интеграла (3.17) с достаточной точностью. Для проведения расчетов в работе <sup>102</sup>, изложению которой мы следуем, выбрана система криволинейных координат  $X^1, X^2, X^3$ , учитывающая аксиальную симметрию «Токамака» (рис. 3):

$$\left. \begin{aligned} X^1 &= \sqrt{\left[ z^2 (r^2 - \gamma) + \frac{\alpha^2}{4} (r^2 - R^2)^2 \right] \frac{1}{\alpha^2}}, \\ X^2 &= \varphi, \\ X^3 &= \operatorname{Arctg} \left( \frac{2}{\alpha} \frac{z \sqrt{r^2 - \gamma}}{r^2 - R^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

здесь  $z, \varphi, r$  — цилиндрические координаты, а постоянные  $\alpha, \gamma$  и  $R$  определяют геометрию установки.

В системе (3.18)  $X^2, X^3 \in [0, 2\pi]$ ,  $X^1 = \text{const}$  — магнитная поверхность, а  $X^1 = X_b^1 = \text{const}$  соответствует граничной поверхности плазмы.

Вариацию  $\delta U$  потенциальной энергии плазмы находят, разлагая  $\xi$  в ряд Фурье:

$$\xi = \sum_{k, m} \xi_{k, m}(X^1) \exp(ikX^2 + imX^3). \quad (3.19)$$

Вследствие аксиальной симметрии задачи можно искать вариацию  $\delta U$  отдельно для каждого  $k$ . В работе <sup>102</sup> исследован следующий вид смещения:

$$\xi_k = \sum_m \xi_{k, m}(X^1) \exp(ikX^2 + imX^3) K_0(X^1, X^3),$$

где

$$K_0(X^1, X^3) = \sum_{l=0}^L d_l \left( \frac{2X^1}{R^2} \cos X^3 \right)^l. \quad (3.20)$$

При варьировании функции  $\xi_{k, m}^i(X^1)$  брались двух типов: I) полиномы по  $X^1$ ; II) функции Бесселя целого порядка. Исследование выражения

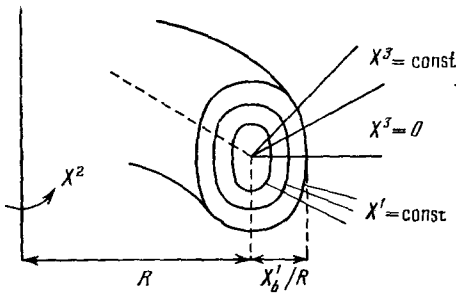


Рис. 3. Криволинейная система координат, выбранная для анализа стабильности плазмы в установке типа «Токамак».

(3.17) производится варьированием по параметрам функции (3.20) и по параметрам функций  $\xi_{k, m}^i(X^1)$ . При этом в случае I) интегрирование по всем  $X^1$  можно выполнить аналитически, а в случае II) — после аналитического интегрирования по  $X^2$  и  $X^3$  выражение (3.17) сводится к эллиптическим интегралам, которые берутся лишь численно. Однако если подынтегральное выражение разложить в ряд Тейлора, то для каждого члена разложения можно получить полностью аналитический ответ.

Практически вычисления проводились <sup>102</sup> как с использованием тей-

лоровского разложения (при этом для достижения нужной точности потребовался 21 член разложения), так и без него, но с численным интегрированием по  $X^1$ . Для аналитических выкладок была использована система REDUCE-2 <sup>10</sup>. Расчет выполнялся в следующей последовательности:

1. Вычисление величин  $Q^i$  и затем подынтегрального выражения в (3.17).
2. Интегрирование по  $X^2$ .
3. Подготовка к интегрированию по  $X^3$ .

3.1) Разложение подынтегрального выражения, если нужно, в ряд Тейлора.

3.2) Введение функции  $K_0$  согласно (3.20).

4. Интегрирование по  $X^3$ .

5. Интегрирование по  $X^1$ . В случае, когда этот интеграл считается численно, делается специальное преобразование подынтегрального выражения для удобства дальнейших вычислений.

6. Получение окончательного выражения путем упрощения результатов предыдущих вычислений.

В случае, когда для функции  $\xi_{h,m}(X^1)$  использовалось представление через функции Бесселя целого порядка, аналитическая часть вычислений потребовала 40 мин на ЭВМ Amdahl-470V/6, после чего численный счет занял около 50 с.

Согласно МГД-теории интеграл (3.17) представляет собой разность двух больших, но близких по величине чисел:

$$\delta U = \delta U_+ - \delta U_- \quad (\delta U_{\pm} > 0).$$

Вследствие этого величины  $\delta U_{\pm}^*$  должны быть вычислены с большой точностью. Вычисления, проведенные описанным методом, показали, что численные расчеты не являются достаточно точными, а использование численно-аналитических методов позволяет получить хорошую точность и в принципе, учитывая достаточное число членов при разложении в ряды, позволяет добиться любой точности.

#### д) Г и д р о д и н а м и к а

В гидродинамике, как, впрочем, и во многих других областях прикладной математики, требуется решать сложные системы дифференциальных уравнений в частных производных. Решение таких уравнений аналитическими методами сопряжено с непреодолимыми трудностями и возможно лишь в некоторых сравнительно простых случаях. Но даже тогда, когда разработан аналитический метод решения какой-либо задачи гидродинамики, практическая его реализация требует, как правило, проведения громоздких аналитических выкладок. Для таких задач САВ является крайне полезным, а часто и единственным методом решения.

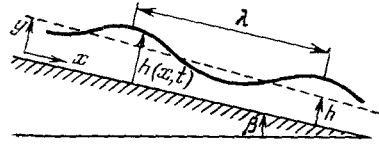


Рис. 4. Геометрия задачи стекания тонкого двумерного потока жидкости с наклонной плоскости.

В качестве примера рассмотрим задачу построения уравнения эволюции для функции  $h(x, t)$ , описывающей свободную поверхность тонкого двумерного потока сильно вязкой жидкости, стекающего с наклонной плоскости (рис. 4).

В приближении длинных поверхностных волн данная задача была успешно решена с помощью системы REDUCE-2<sup>107</sup>. Ниже, следуя работе<sup>107</sup>, мы дадим точную математическую формулировку задачи и кратко опишем метод решения.

Рассматриваемое движение жидкости характеризуется двумя различными масштабами длины: вдоль оси  $x$  — длина поверхностных волн  $\lambda$  и вдоль оси  $y$  — толщина слоя  $h$ .

Введем функцию тока  $\psi(x, y, t)$ , которая в рассматриваемом нами двумерном случае позволяет свести уравнения Навье — Стокса к одному дифференциальному уравнению в частных производных. Перейдем к без-

размерным переменным с помощью масштабных преобразований

$$\begin{aligned}(x, y, t) &\rightarrow \left( \frac{\alpha x}{h_0}, \frac{y}{h_0}, \frac{\alpha t u_0}{h_0} \right), \\ (\psi, p, h) &\rightarrow \left( \frac{\psi h_0}{u_0}, \frac{p h_0}{\mu u_0}, \frac{h}{h_0} \right),\end{aligned}$$

где  $h_0 = ah/k$  ( $a$  и  $k$  — соответственно коэффициенты теплопередачи и теплопроводности) — толщина Нуссельта для нашего потока,  $u_0$  — средняя скорость,  $\alpha = 2\pi h_0/\lambda$  — безразмерное волновое число и  $\mu$  — вязкость.

Тогда основное нелинейное динамическое уравнение для  $\psi(x, y, t)$  примет вид

$$\begin{aligned}\psi_{yyyy} &= \alpha \operatorname{Re} (\psi_{tyy} + \psi_y \psi_{xyy} - \psi_x \psi_{yyx}) - 2\alpha^2 \psi_{xxyy} + \\ &+ \alpha^3 \operatorname{Re} (\psi_{txx} - \psi_x \psi_{xxy} + \psi_y \psi_{xx} - \alpha^4 \psi_{xxxx}),\end{aligned}\quad (3.21)$$

где  $\operatorname{Re}$  — число Рейнольдса. В дополнение к уравнению (3.21) функция тока должна удовлетворять следующим граничным условиям:

1. Условия прилипания:

$$\psi_x = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, \quad (3.22)$$

$$\psi_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0. \quad (3.23)$$

2. Условия поверхностного натяжения

$$\begin{aligned}(\psi_{yy} - \alpha^2 \psi_{xx}) (1 - \alpha^2 h_x^2) - 4\alpha^2 h_x \psi_{xy} &= 0 \quad \text{при} \quad y = h(x, t), \quad (3.24) \\ \psi_{yy} + 3 + \alpha^2 \psi_{xxy} - \alpha \operatorname{Re} (\psi_{ty} + \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yx}) - \alpha^2 h_x \psi_{yyx} - 3\alpha h_x \operatorname{ctg} \beta - \\ - \alpha^4 h_x \psi_{xxx} + \alpha^3 \operatorname{Re} h_x (\psi_{tx} + \psi_y \psi_{xx} - \psi_x \psi_{yx}) + 2\alpha^2 (\psi_{yxx} + \psi_{yyx} h_x) + \\ + 8\alpha^4 \psi_{xy} (h_x h_{xx} + 2\alpha^2 h_x^3 h_{xx} + 3\alpha^4 h_x^5 h_{xx}) + \\ + \alpha \operatorname{Re} P \left[ h_{xxx} + 3\alpha^2 \left( -\frac{1}{2} h_x^3 h_{xxx} - h_{xx}^2 h_x \right) + \right. \\ \left. + 15\alpha^4 \left( \frac{1}{8} h_{xxx} h_x^4 + \frac{1}{2} h_{xx}^2 h_x^3 \right) + 35\alpha^6 \left( -\frac{1}{48} h_x^8 h_{xxx} - \frac{3}{8} h_x^5 h_{xx}^2 \right) \right] + \\ + 4\alpha^4 h_x^2 (\psi_{yxx} + \psi_{xyy} h_x) (1 + \alpha^2 h_x^2 + \alpha^4 h_x^4) + O(\alpha^9) &= 0 \quad \text{при} \quad y = h(x, t); \quad (3.25)\end{aligned}$$

здесь  $P = \alpha^2 W$ , где  $W = \sigma/h_0 \bar{u}_0^2$  — число Вебера ( $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения и  $\rho$  — плотность), а  $\beta$  — угол наклона плоскости (см. рис. 3).

3. Кинематическое условие на свободной поверхности:

$$h_t + h_x \psi_y + \psi_x = 0 \quad \text{при} \quad y = h(x, t). \quad (3.26)$$

Условия (3.22) — (3.25) вместе с уравнением (3.21) являются достаточными для того, чтобы выразить  $\psi$  через функцию  $h(x, t)$  и ее производные, после чего условие (3.26) дает уравнение эволюции функции  $h(x, t)$ , что и является конечной целью данного анализа.

В длинноволновом приближении ( $\lambda \gg h$ )  $\alpha \ll 1$  и решение задачи (3.21) — (3.25) можно искать в виде ряда

$$\psi = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \psi^{(k)}$$

методом последовательных приближений. Для  $\psi^{(0)}$  имеем

$$\psi_{yyy}^{(0)} = 0, \quad (3.27)$$

причем для  $y = h(x, t)$

$$\psi_{yyy}^{(0)} + 3 = 0, \quad \psi_{yy}^{(0)} = 0, \quad \psi_y^{(0)} = 0, \quad \psi_x^{(0)} = 0, \quad (3.28)$$

Задача (3.27), (3.28) легко решается и дает

$$\psi^{(0)} = \frac{3}{2} \left( y^2 h - \frac{1}{3} y^3 \right).$$

Дальнейший процесс сводится к решению уравнения

$$\psi_{yyy}^{(n)} = f(\psi^{(n-1)}, \psi^{(n-2)}, \dots, \psi^{(0)}), \quad (3.29)$$

которое имеет структуру

$$\psi_{yyy}^{(n)} = \sum_{i=0}^{t_n} \bar{g}_i^{(n)} y^i \quad (h=0, 1, \dots),$$

$$\{t_n\} = \{0, 1, 5, 9, \dots, t_{n-1} + 4\},$$

где  $g_i^{(n)}$  зависят от  $x, t$  через функцию  $h(x, t)$  и ее производные, т. е.

$$\bar{g}_i^{(n)} = \bar{g}_i^{(n)}(h, h_t, h_x, h_{xt}, \dots).$$

Тогда уравнение (3.29) легко интегрируется и дает

$$\psi^{(n)} = \sum_{i=0}^{t_n} \frac{g_i^{(n)} y^{i+4}}{(i+4)(i+3)(i+2)(i+1)} + C_3^{(n)} y^3 + C_2^{(n)} y^2 + C_1^{(n)} y + C_0^{(n)}. \quad (3.30)$$

Так как функция тока задана с точностью до аддитивной постоянной, то условиям (3.22), (3.23) можно придать вид

$$D^{(0)}\psi^{(n)} \equiv \psi^{(n)}(0) = 0, \quad D^{(1)}\psi^{(n)} \equiv \psi_y^{(n)}(0) = 0,$$

откуда немедленно следует

$$C_0^{(n)} = C_1^{(n)} = 0 \quad (n=0, 1, 2, \dots).$$

После этого величины  $\bar{g}_i^{(n)}$ ,  $C_2^{(n)}$ ,  $C_3^{(n)}$  выражаются через результаты предыдущей итерации подстановкой (3.30) в соотношения (3.24) и (3.25), которые можно записать как

$$D^{(3)}\psi^{(n)} \equiv \psi_{yyy}^{(n)} - f_3(\psi^{(n-1)}, \psi^{(n-2)}, \dots, \psi^{(0)}) = 0,$$

$$D^{(2)}\psi^{(n)} \equiv \psi_{yy}^{(n)} - f_2(\psi^{(n-1)}, \psi^{(n-2)}, \dots, \psi^{(0)}) = 0.$$

В результате кинематическое условие (3.26) можно преобразовать в параболическое уравнение

$$\frac{\partial h}{\partial t} + [\psi^{(0)}(h, h) + \alpha \psi^{(1)}(h, h) + \alpha^2 \psi^{(2)}(h, h) + \dots]_x = 0,$$

описывающее волнообразное поведение свободной поверхности жидкости в рассматриваемом гидродинамическом процессе.

Описанный выше метод сводится к полиномиальным операциям и подстановкам и поэтому может быть реализован на любой САВ из табл. I.

Авторы работы<sup>107</sup> привели результаты вычисления  $\psi^{(2)}(h, h)$  и  $\psi^{(3)}(h, h)$  на REDUCE-2 ( $\psi^{(1)}(h, h)$  еще сравнительно нетрудно вычислить вручную), которые представляют собой довольно громоздкие выражения. Так, например,  $\psi^{(3)}(h, h)$  является полиномом по производным функции  $h(x, t)$  и состоит из 60 членов вида

$$\psi^{(3)}(h, h) = -\frac{83}{168} P^2 \text{Re}^3 h^7 h_{xxx} h_{xxx} - \frac{3479}{1440} \text{Re}^2 \text{ctg } \beta h^9 h_{txx} + \dots$$

Другие приложения САВ в гидродинамике можно найти, например, в работах<sup>108-110</sup>. Интересные применения САВ нашли и в аэродинамике.

Отметим, в частности, расчет параметров быстровращающегося идеально-го газа с малым числом Маха, выполненный недавно Коэном и др.<sup>111,112</sup> с помощью системы REDUCE-2.

#### е) Атомная и молекулярная физика, квантовая химия

Как хорошо известно, численные расчеты на ЭВМ стали неотъемлемой частью многих исследований в области атомной и молекулярной физики, а также квантовой химии. В последние же годы и САВ нашли здесь ряд плодотворных приложений.

Для квантовой химии, например, САВ являются мощным инструментом стандартных аналитических преобразований, связанных с вычислением матричных элементов от произведения операторов рождения и уничтожения. Основная вычислительная трудность здесь заключается в приведении такого произведения (часто содержащего большое число операторов) к нормальной форме на основе коммутационных соотношений. Наиболее подходящей САВ для выполнения аналитических преобразований данного типа является система SCHOONSCHIP<sup>7</sup>. Недавно на основе этой системы Нербрант разработал специальную программу<sup>113</sup>, позволяющую быстро и эффективно вычислять матричные элементы от произведения операторов рождения и уничтожения для фермионных полей.

В атомной и молекулярной физике интересные применения нашла система FORMAC<sup>20</sup>. Так, Бенеш<sup>114</sup>, используя FORMAC, вычислил функции радиального распределения в координатном и импульсном пространстве для гелия и гелиеподобных ионов ( $\text{Li}^+$ ,  $\text{B}^{3+}$ ,  $\text{O}^{6+}$ ,  $\text{Ne}^{8+}$ ,  $\text{Mg}^{10+}$ ).

Многие расчеты в атомной физике требуют знания коэффициентов Клебша — Гордана. Для аналитического вычисления последних на языке FORMAC была написана программа<sup>115</sup>, использующая хорошо известную формулу<sup>115</sup>

$$\begin{aligned} \langle j_1 j_2 m_1 m_2 | JM \rangle = & \\ = & \sqrt{2J+1} \sqrt{\Delta(j_1, j_2, J)} \sqrt{(j_1+m_1)(j_1-m_1)(j_2+m_2)(j_2-m_2)(J+M)(J-M)} \times \\ & \times \sum_k (-1)^k [k! (J-j_2+k+m_1)! (J-j_1+k-m_2)! \times \\ & \times (j_1-j_2+J-k)! (j_1-k-m_1)! (j_2-k+m_2)!]^{-1}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где

$$\Delta(j_1, j_2, J) = \frac{(j_1+j_2-J)! (j_2+J-j_1)! (J+j_1-j_2)!}{(j_1+j_2+J+1)!}$$

и суммирование ведется по всем целым  $k$ , для которых под знаком факториалов получаются неотрицательные числа. Программа<sup>115</sup> для заданного числа  $j_2$ , исходя из выражения (3.31), получает аналитическое выражение для коэффициентов Клебша — Гордана как функцию остальных параметров  $(j_1, m_1, m_2, J, M)$ . При этом она требует, например, 11 с для  $j_2 = 1/2$ , 3/2, 6 и 6 мин для  $j_2 = 2, 5/2, 3, 7/2, 4, 9/2$  счетного времени на IBM-370/168<sup>2</sup>. Как интересное применение систем REDUCE-2<sup>10</sup> и SYMBAL<sup>22</sup> отметим работу<sup>117</sup>, где было вычислено пять членов разложения энергии при гладких возмущениях линейных потенциалов в уравнении Шрёдингера.

Фундаментальную роль в квантовой механике атомных систем играют интегралы Слэтера<sup>118</sup>, имеющие вид

$$\int_0^\infty \int_0^\infty P(n_1 e_1; s) P(n_2 e_2; r) \left\langle \frac{r}{s} \right\rangle^{k+1} \frac{1}{rs} P(n_3 e_3; s) P(n_4 e_4; r) ds dr, \quad (3.32)$$

где  $k$  — целое число,  $\langle r/s \rangle = \min \{r/s, s/r\}$ , а функции  $P(ne; r)$  имеют структуру типа  $e^{-ur} f(r)$ , где  $f(r)$  — полином по  $r$ .

Применение САВ для вычисления интегралов (3.32) оказалось исключительно полезным. Отметим, в частности, работы Фишера, Прентайса<sup>119</sup>, использовавших ALTRAN<sup>21</sup> и Голдена<sup>120</sup>, который использовал FORMAC.

#### 4. ПРИЛОЖЕНИЕ К МАТЕМАТИКЕ

##### а) Вычисление неопределенных интегралов

Если дифференцирование является легко алгоритмизуемой математической операцией и была первой, выполненной аналитически на ЭВМ<sup>2</sup>, то обратная проблема — интегрирование — сопряжена с несравненно большими трудностями. Первая успешная попытка в этом направлении была предпринята Слэглом<sup>121</sup>. Написанная им на языке LISP, вскоре после появления последнего, программа SAINT (Symbolic Automatic Integrator) использовала некоторую таблицу интегралов, пытаясь свести данный интеграл к табличным с помощью стандартных приемов из университетского курса математического анализа.

Такой эвристический подход спустя несколько лет получил более совершенное воплощение в разработанной Моузесом программе SIN<sup>122</sup> (Symbolic, Integrator), которая (с включением в нее алгоритма Риша<sup>123</sup>) является составной частью систем MACSYMA<sup>24</sup> и SCRATCHPAD<sup>25</sup>.

Однако наиболее важным достижением явилось развитие и внедрение алгоритмического подхода к вычислению неопределенных интегралов. Специальные алгоритмы были разработаны для интегрирования рациональных функций<sup>125,126</sup>, а также — универсальный алгоритм интегрирования элементарных функций, открытый Ришем<sup>123,124</sup> (см. также обзоры<sup>40,127</sup>).

Алгоритмический подход, в отличие от эвристического, дает интеграл без обращения к каким-либо таблицам.

Следует отметить, что наличие алгоритмического подхода не исключает полезности эвристического метода, который для широкого класса интегралов требует значительно меньших затрат машинного времени. Кроме того, из-за серьезных технических трудностей пока не удалось реализовать на ЭВМ алгоритм Риша для случая, когда подынтегральное выражение содержит алгебраические функции (нецелые степени выражений).

Поэтому наиболее мощные средства интегрирования в современных САВ, такие, как программа SIN, а также недавно разработанная и внедряемая в новую версию системы REDUCE-2 еще более эффективная программа интегрирования<sup>129</sup> органично сочетают в себе оба подхода.

Программа SIN, например, реализует следующую стратегию взятия интеграла<sup>127</sup>.

**Г л а в н а я .** Делается попытка представить интеграл в виде

$$C \int f[u(x)] u'(x) dx,$$

где  $C$  — постоянная,  $u(x)$  — некоторая функция,  $u'(x)$  — ее производная, а  $f(u)$  — простая элементарная функция типа  $\sin u$ ,  $\cos u$ ,  $u^d$ ,  $e^u$ ,

$\ln u$ ,  $\arcsin u$  и т. д. или их сумма. Если это удастся, то интеграл берется подстановкой стандартных табличных интегралов. В противном случае процесс вычисления переходит в следующую стадию.

II. С т а д и я. В зависимости от структуры подынтегрального выражения используется 11 стандартных приемов, например:

- 1) подстановка  $t = \operatorname{tg}(x/2)$  для тригонометрических функций;
- 2) метод Чебышева для интегралов вида

$$\int x^r (C_1 + C_2 x^q)^p dx,$$

где  $p, q, r$  — рациональные числа;

3) метод Остроградского — Эрмита для рациональных функций и т. д. Если и на этой стадии интеграл не удастся взять, то реализуется последняя стадия вычислений.

III с т а д и я. Применяется алгоритм Риша, который позволяет ответить на вопрос, берется ли интеграл в элементарных функциях, и если берется, — находит его.

Алгоритм Риша опирается на результаты исследования структуры неопределенного интеграла, восходящие к началу XIX века. Анализируя интегралы от алгебраических функций (функция  $y(x)$  называется алгебраической, если она удовлетворяет уравнению  $P(x, y) = 0$ , где  $P$  — некоторый полином с целыми коэффициентами), Лаплас предположил, что интеграл содержит только те алгебраические функции, которые присутствуют в подынтегральном выражении. Позднее это предположение было доказано Абелем. Затем Лиувилль в ряде работ 30-х и 40-х годов XIX века исследовал форму интеграла от различных комбинаций элементарных функций.

Как итог своих исследований он высказал предположение, что если функция  $f(x)$  принадлежит некоторому полю  $F$  элементарных функций и интеграл от функции  $f(x)$  вновь является элементарной функцией, то он представим конечной суммой вида

$$\int f(x) dx = V_0(x) + \sum_{i=1}^k C_i \ln V_i(x), \quad (4.1)$$

в которой функции  $V_0(x)$  и  $V_i(x)$  принадлежат тому же полю  $F$ , что и подынтегральная функция, а  $C_i$  — постоянные.

Данное предположение, известное как теорема Лиувилля, было строго доказано Ришем в 1969 г.<sup>123</sup> и легло в основу разработанного им фундаментального алгоритма для интегрирования элементарных функций. Заметим, что логарифмические члены в формуле (4.1) появляются только тогда, когда подынтегральное выражение имеет дробную часть и определяются структурой ее знаменателя. Это легко видеть на примере интегралов от рациональных функций (образующих поле), для которых функции  $V_i(x)$  совпадают с линейными по  $x$  факторами знаменателя.

Мы не будем останавливаться на математических деталях алгоритма Риша, подробно описанных в работах<sup>123, 124, 127</sup>, и рассмотрим несколько упрощенную схему его недавней модификации<sup>130</sup>, позволившей значительно упростить процедуру вычисления интегралов от трансцендентных функций. Именно эта версия алгоритма Риша использована Харрингтоном в его программе<sup>129</sup>, написанной на языке REDUCE-2. Напомним, что реализация алгоритма Риша в случае алгебраических функций представляет собой отдельную проблему, которую мы не будем рассматривать.

Алгоритм Риша реализуется в следующей последовательности действий:



I. Подынтегральное выражение преобразуем к виду  $p/q$ , где функции  $p$  и  $q$  являются полиномами по независимым относительно полевых операций (т. е. сложения, умножения и деления) структурам таким, как  $x$ ,  $e^x$ ,  $\ln x$ , ... Чтобы упростить запись, обозначим такие структуры через  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_N$ ; здесь  $N$  — их число. Для дальнейшего необходимо различать переменные  $x_i$  логарифмического и экспоненциального типа.

II. В соответствии с теоремой Лиувилля (4.1) представим интеграл в виде

$$\int \frac{p}{q} dx = \frac{u(x_1, x_2, \dots, x_N)}{\hat{q}} + \sum_i C_i \ln q_i; \quad (4.2)$$

здесь  $u$  — неизвестный полином,  $C_i$  — постоянные, а полиномы  $q_i$  — неприводимые множители полинома  $q$ :

$$q = \prod_i q_i^{n_i}.$$

Полином  $\hat{q}$  выражается через факторы  $q_i$  следующим образом:

$$\hat{q} = \prod_i q_i^{n_i - 1},$$

за исключением случая, когда какой-либо из факторов  $q_i$  равен переменной  $x$  экспоненциального типа. В этом случае показатель степени при факторе  $q_i$  остается равным  $n_i$  (не уменьшается на единицу), причем соответствующий логарифмический член не появляется в выражении (4.2).

III. Дифференцируя равенство (4.2), получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка на неизвестный полином  $u$ .

IV. Подставляя полином  $u$ , представленный суммой вида

$$u(x_1, \dots, x_N) = \sum_{j_1, \dots, j_N} u_{j_1, \dots, j_N} x_1^{j_1} \dots x_N^{j_N} \quad (4.3)$$

в дифференциальное уравнение п. III, находим рекуррентные соотношения на коэффициенты  $u_{j_1, \dots, j_N}$ .

V. Используем рекуррентные соотношения п. IV, чтобы определить в сумме (4.3) слагаемое с наивысшей степенью  $j_1 + j_2 + \dots + j_N$ . После этого выделяем соответствующий член в правой части равенства (4.2) из исходного интеграла, в результате чего получаем новые рекуррентные соотношения на коэффициенты оставшейся части полинома  $u$ .

VI. Повторяем вычисления п. IV и V, последовательно понижая степень неизвестной части суммы (4.3) и используя, когда это необходимо, произвол в выборе параметров  $C_i$ . В конечном счете мы либо вычислим до конца полином  $u$  и параметры  $C_i$  формулы (4.2), т. е. возьмем исходный интеграл, либо на каком-то шаге придем к противоречию с результатами предыдущих вычислений. Такая ситуация означает, что исходный интеграл не представим в форме (4.2) и, следовательно, в силу теоремы Лиувилля, не выражается через элементарные функции. Но даже в этом случае проведенные выкладки оказываются полезными, поскольку позволяют выделить «неэлементарную» часть исходного интеграла.

С целью проиллюстрировать работу алгоритма Риша на конкретном примере рассмотрим интеграл

$$I = \int x^2 e^{x^2} dx$$

и попытаемся взять его по описанной выше алгоритмической схеме.

I. Ясно, что независимыми структурами в подынтегральном выражении являются  $x$  и  $e^{x^2}$ . Обозначая  $e^{x^2} = y$ , запишем подынтегральное выражение в виде  $x^2 y$ .

II. Поскольку подынтегральное выражение является полиномом (не содержит знаменателя), равенство (4.2) дает

$$I = u(x, y),$$

где  $u$  — неизвестный полином.

III. Дифференцируя, найдем

$$u'(x, y) = x^2 y.$$

IV. Полагая  $u(x, y) = \sum_{ij} u_{ij} x^i y^j$  и вычисляя производную

$$u'(x, y) = \sum_{ij} u_{ij} (ix^{i-1}y^j + 2jx^{i+1}y^{j-1}) = \sum_{ij} x^i y^j [(i+1)u_{i+1,j} + 2ju_{i-1,j}],$$

получим рекуррентные соотношения

$$(i+1)u_{i+1,j} + 2ju_{i-1,j} = \delta_{i,2}\delta_{j,1},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

V. Единственное рекуррентное соотношение с отличной от нуля правой частью есть

$$3u_{3,1} + 2u_{1,1} = 1.$$

Отсюда следует, что коэффициент полинома  $u(x, y)$  при максимальной степени  $x, y$  должен быть равен  $u_{1,1} = 1/2$ . В противном случае рекуррентные соотношения привели бы к отличным от нуля коэффициентам  $u_{2k+1,1}$  для всех  $k \geq 1$ , что противоречит конечности суммы (4.3), представляющей полином.

Таким образом, в правой части равенства (4.2) присутствует слагаемое  $xy/2$ . Выделяя соответствующий член из исходного интеграла, найдем

$$\int x^2 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x e^{x^2} - \int \frac{1}{2} e^{x^2} dx.$$

VI. Повторим вычисления п. IV и V для остаточного интеграла:

$$\int \frac{1}{2} e^{x^2} dx.$$

В результате придем к соотношению

$$u_{1,1} + 2u_{-1,1} = -\frac{1}{2}.$$

Коэффициент  $u_{-1,1}$  мы обязаны занулить, поскольку  $u(x, y)$  является полиномом. Но равенство  $u_{1,1} = -1/2$ , переопределяющее ранее полученный результат, недопустимо, поскольку остаточному интегралу должен соответствовать полином меньшей степени, чем исходному.

В итоге заключаем, что исходный интеграл в элементарных функциях не берется, и его представление, полученное в п. V, следует рассматривать как конечный результат.

К настоящему времени описанные выше мощные средства вычисления неопределенных интегралов имеются в системах MACSYMA, SCRATCHPAD и новой версии REDUCE-2, т. е. в универсальных САВ. Это, конечно, не случайно. Такие средства, и прежде всего алгоритм Риша, требуют для их реализации самых тонких методов аналитического программирования.

Следующий важный шаг состоит в реализации алгоритма Риша для алгебраических функций, использующего технику современной алгебраической геометрии. Эта проблема сейчас интенсивно исследуется<sup>130</sup> и, по-видимому, будет решена в ближайшем будущем. Другим важным направлением развития алгоритма Риша является его обобщение на случай специальных функций<sup>127, 131</sup>.

## б) Решение дифференциальных уравнений

Применению ЭВМ для аналитического решения дифференциальных уравнений (ДУ) посвящен целый ряд работ (см., например, ссылки <sup>122</sup>, <sup>132-134</sup>, <sup>136</sup>, причем в систему MACSYMA <sup>24</sup> встроен специальный блок ODE-2 <sup>137</sup>, позволяющий решать широкий класс обыкновенных ДУ первого и второго порядка.

В качестве примера рассмотрим метод решения ДУ первого порядка

$$f(x, y) y' + g(x, y) = 0, \quad (4.4)$$

реализованный в программе EULE, написанной Шмидтом <sup>134</sup> на алгоритмическом языке PL/1 <sup>4</sup>. Общего метода решения уравнения (4.4) в настоящее время не существует. Обычно с помощью замены переменных или домножением уравнения (4.4) на какое-либо выражение, пытаются свести его к уравнению с разделяющимися переменными, линейному или уравнению в полных дифференциалах.

Программа EULE основана на таком эвристическом подходе и ищет решение ДУ типа (4.4) в следующей последовательности:

I. Смотрит, не является ли это уравнение:

А) Уравнением с разделяющимися переменными, однородным или уравнением с линейными по  $x, y$  коэффициентами:

В) линейным  $f_0(x) y' + f_1(x) y + f_2(x) = 0$ , Бернулли  $f_0(x) y' + f_1(x) y + f_2(x) y^c = 0$ ,  $c = \text{const} \neq 1$ , Рикатти  $f_0(x) y' + f_1(x) y^2 + f_2(x) y + f_3(x) = 0$ , почти линейным  $f_0(x) h'(y) y' + f_1(x) h(y) + f_2(x) = 0$  либо уравнением вида

$$y' = ay^n + bx^{n/(1-n)}$$

или

$$y' = \frac{f^{1-n}(x) g'(x)}{(ag(x) + b)^n} y^n + \frac{f'(x)}{f(x)} y + f(x) g'(x).$$

Если уравнение является уравнением Рикатти, то программа пытается найти частное решение  $y_0(x)$  с помощью которого подстановкой  $\bar{y} = 1/(y - y_0)$  исходное уравнение сводится к линейному;

С) уравнением в полных дифференциалах. Для выяснения этого делается попытка найти интегрирующий множитель вида  $x^m y^n$  либо как функцию только от  $x$  или только от  $y$ .

II. Делает замену  $x \rightleftharpoons y$  и вновь производит тест I.

III. Подбирает замену переменных, которая определяется видом выражений, входящих в уравнение. Например, если имеются члены типа  $(\varphi(x, y))^c$ , где  $c$  — константа, то делается замена  $\bar{y} = \varphi(x, y)$ ,  $\bar{x} = x$ . Если же имеются члены вида  $F(\psi(y))$ , то производится замена  $\bar{y} = F(\psi(y))$ ,  $\bar{x} = x$ . В случае, когда  $F$  — тригонометрическая функция, предусматриваются подстановки

$$\bar{y} = \cos(\psi(y)), \quad \bar{y} = \text{tg}(\psi(y)), \quad \bar{y} = \text{tg}\left(\frac{\psi(y)}{2}\right).$$

После каждой замены повторяется анализ I шага.

IV. Делает замены  $\bar{y} = yx$ ,  $y = y/x$ , и после каждой из них вновь производится тест I.

V. Пытается подобрать интегрирующие множители в виде функций от переменных

$$x^i \pm y^j \quad \text{или} \quad x^i y^j \quad (i, j = 1, 2, 3).$$

Метод решения ДУ (4.4), реализованный в программе EULE, опирается на анализ таких уравнений, содержащийся в хорошо известном справочнике Камке <sup>138</sup>, а также книге Мёрфи <sup>139</sup>.

В качестве теста программы было рассмотрено 1245 уравнений из четырех сборников ДУ<sup>138-141</sup>. Результаты тестирования программы EULE на этом наборе уравнений содержатся в табл. V. При этом уравнение

Таблица V

Результаты тестирования программы EULE

Сборник уравнений	Число заданных уравнений	Из них решено	Сборник уравнений	Число заданных уравнений	Из них решено
Камке <sup>138</sup>	333	90%	Инса <sup>140</sup>	121	100%
Мёрфи <sup>139</sup>	715	95%	Шпигеля <sup>141</sup>	76	100%

Сборники Инса и Шпигеля являются задачками для студентов 2—3 курсов университетов.

считалось решенным, если программа находила метод решения в соответствии с процедурой, рассмотренной выше.

171 и 505 ДУ соответственно в книгах Камке и Мёрфи были решены элементарными методами, например разделением переменных и т. д. Программа EULE применила элементарные методы для решения этих же уравнений соответственно в 100% и 99,4% случаев.

18 (23) ДУ Рикатти в книгах Камке (Мёрфи) решались путем отыскания частного решения. Программа EULE решила эти уравнения таким же образом.

25 (71) ДУ Камке (Мёрфи) решали подбором интегрирующих множителей. Программа решила эти же уравнения таким способом в 92% (90%) случаев.

Часто заданное программе уравнение было решено методом, которым это уравнение ранее не решали. Причем иногда метод решения оказывался более изящным и экономичным, чем метод, использованный в литературе. Например, для решения уравнения Рикатти

$$xy' \ln x - y^2 \ln x - (2 \ln^2 x + 1)y - \ln^3 x = 0 \quad (4.5)$$

Камке делал замены  $y = u(s)$ ,  $s = \ln x$ , а после этого заменял  $y = -v'/v$ , что переводило уравнение (4.5) в уравнение второго порядка. Программа же нашла для этого уравнения частное решение  $y = -\ln x$ , после чего общее решение находится тривиально.

Если программа EULE могла решить заданное ей ДУ, то на его решение уходило, как правило, не более 15 с счетного времени на IBM-370/168 (табл. VI).

Таблица VI

Типичные примеры затрат машинного времени на решение ДУ из Камке<sup>138</sup> с помощью программы EULE

№ уравнения	1.348	1.164	1.33	1.313	1.293	1.120
Время счета, с	0,5	2,5	3,2	27,0	1,0	1,5

Те же ДУ, которые не удалось решить с помощью программы, можно разделить на следующие группы:

- 1) решаемые заменой переменных, которую программа не смогла найти;
- 2) решаемые с помощью серии последовательных подстановок;
- 3) решаемые методом, не запрограммированным в EULE.

### в) Анализ математических выражений

Очень часто и математикам и физикам приходится сталкиваться с задачей качественного анализа какого-либо математического выражения. При этом нужно знать ответы на ряд вопросов, например:

Является ли данное выражение вещественным, ограниченным, положительным, непрерывным, монотонным, дифференцируемым?

Есть ли сингулярности, нули, локальные экстремумы выражения и где они расположены? Каков их порядок?

Имеется ли простое асимптотическое представление, когда некоторые из аргументов стремятся к нулю или бесконечности?

Полностью ответить на такие вопросы, когда исследуемое математическое выражение достаточно громоздко, бывает трудно и требует больших затрат времени. Специально для анализа математических выражений Стоутемьер<sup>142</sup> разработал программу на языке системы MACSYMA<sup>24</sup>. Эта программа определяет нули и сингулярности данного выражения, его значение при стремлении какой-либо переменной к указанному пределу, экстремумы и экстремальные значения выражения, его верхнюю и нижнюю границы. Кроме того, программа Стоутемьера дает информацию о том, является ли заданное выражение на указанном интервале убывающим, возрастающим или постоянным, выпуклой функцией или вогнутой; четной или нечетной. Программа определяет также, не является ли рассматриваемое выражение периодическим по какой-то переменной и если является, то находит период.

Хотя в указанной программе реализованы далеко не все возможности системы MACSYMA для качественного и количественного анализа математических выражений, она, несомненно, в значительной степени облегчает и ускоряет эту работу.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Конечно, сфера применения САВ в физике и математике, насчитывающая более пятисот публикаций, далеко не исчерпывается рассмотренными выше примерами. Часть не рассмотренных нами работ освещена в обзорах<sup>40, 43, 59, 61-63, 92, 127</sup>. Кроме того, мы не касались приложений САВ в таких областях физики, как геофизика<sup>143</sup>, кристаллофизика<sup>144</sup>, физика атмосферы<sup>145</sup>, космология<sup>146</sup> и др.

Что касается приложений в математике, то наше рассмотрение тем более не полно. Отметим, в частности, применение САВ при решении интегральных<sup>147</sup>, разностных<sup>148</sup> и функциональных<sup>149</sup> уравнений, в теории коммутативных колец<sup>150</sup>, а также многочисленные приложения в теории групп<sup>135</sup>.

Хорошее представление о других областях применения САВ может дать знакомство с материалами ссылок<sup>39, 88, 133</sup>.

Нет сомнения в том, что круг задач, решаемых с помощью САВ, будет неуклонно расширяться. В немалой степени этому должно способствовать более широкое распространение САВ, что в свою очередь зависит от их мобильности (адаптивности к разным ЭВМ). В отличие от чис-

ленных программ, программы и системы для машинной аналитики обнаруживают сильную «привязанность» к внутренней структуре используемой ЭВМ. Поэтому их перенос с ЭВМ одного типа на другой сопряжен с серьезными трудностями, которые приходится решать по-разному в каждом конкретном случае (см., например, статью Фейтмана<sup>151</sup>, где обсуждаются проблемы переноса системы MACSYMA с DEC PDP-10 на CDC-6600/7600).

Из систем, приведенных в табл. I, несомненно, самой мобильной является REDUCE-2, получившая наиболее широкое распространение<sup>152</sup> из всех САВ. И, конечно же, массовое использование машинной аналитики невозможно без кардинального решения проблемы машинной памяти, обусловленной «разбуханием» промежуточных выражений. Это позволит реализовать мощные САВ на малых ЭВМ.

Другим источником расширения области применения САВ является использование их в численно-аналитических выкладках. Это особенно важно для таких задач, которые либо не могут быть решены аналитически, либо требуют непомерно больших машинных ресурсов для аналитического решения, но для которых обычный численный счет также не годится из-за недопустимо больших погрешностей вычисления. Примеры таких задач рассмотрены нами в разделе в) гл. 3 (вклад непланарных вершинных диаграмм 7-го порядка в аномальный магнитный момент электрона) и разделе г) гл. 3 (анализ устойчивости плазмы в установке «Токамак»).

Разумеется, каждая САВ имеет встроенный аппарат и для чисто численных расчетов, причем почти все системы могут работать с рациональными числами (см., например, табл. II) и позволяют выполнять арифметические операции над ними без каких-либо погрешностей (точная арифметика целых и рациональных чисел). Однако специфика реализации в ЭВМ приводит к значительной замедленности числовых выкладок в САВ по сравнению с обычными численными системами, такими, как FORTRAN или ALGOL. Это же обстоятельство сильно затрудняет взаимодействие аналитических и численных систем.

Таким образом, для эффективного использования ЭВМ в численно-аналитических расчетах необходимо развивать САВ в двух направлениях:

I. Расширение возможностей САВ по взаимодействию с языками численного программирования. Это не только повысит скорость выполнения многих расчетов, но и позволит использовать обширные библиотеки стандартных численных программ.

II. Совершенствование аппарата численных выкладок в самих САВ с целью повышения его быстродействия при точном решении какой-либо задачи. Как важное достижение в этом направлении отметим работу Сасаки<sup>153</sup>, создавшего новый пакет для точной арифметики в системе REDUCE-2.

Ясно, что гармоничное сочетание возможностей современных ЭВМ по отношению к численным и аналитическим выкладкам сделает их орудием решения чрезвычайно широкого круга задач различных областей знания.

## 6. ПРИМЕРЫ ПРОСТЫХ ПРОГРАММ НА ЯЗЫКАХ SCHOONSCHIP и REDUCE-2

С целью дать представление о практическом использовании САВ рассмотрим два простых примера:

а) Вычисление определителя третьего порядка с помощью системы SCHOONSCHIP.

Для вычислений используем формулу

$$\det \| a_{ij} \| = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{1j} a_{2k} a_{3l} \varepsilon_{jkl}; \quad (6.1)$$

здесь  $\varepsilon_{jkl}$  — тензор, полностью антисимметричный по своим индексам ( $\varepsilon_{123} = 1$ ). В системе SCHOONSCHIP ему соответствует встроенная функция  $DP(J, K, L)$ . Для выполнения процедуры суммирования используется системная функция  $DS$ . Программа, реализующая формулу (6.1)

```
PRINT NLIST
PRINT NSTAT
F A
Z DET3=DS(J,1,3,(DS(K,1,3,(DS(L,1,3,(A(1,J)*A(2,K)*A(3,L)
*DP(J,K,L))))))
*END
DET3=
+A(1,1)*A(2,2)*A(3,3)
-A(1,1)*A(2,3)*A(3,2)
-A(1,2)*A(2,1)*A(3,3)
+A(1,2)*A(2,3)*A(3,1)
+A(1,3)*A(2,1)*A(3,2)
-A(1,3)*A(2,2)*A(3,1)+0.
```

Рис. 5. Программа вычисления определителя 3-го порядка на языке SCHOONSCHIP.

на языке SCHOONSCHIP и машинная распечатка результата вычисления, приведены на рис. 5.

б) Генерация полиномов Лежандра с помощью системы REDUCE-2.

Для вычислений применим формулу Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]. \quad (6.2)$$

Программа генерации полиномов  $P_n(x)$  с  $n = 1 - 3$  по формуле (6.2),

```
ARRAY P(3);
FOR I:=1:3 DO BEGIN P(I):=(X**2-1)**I;
FOR J:=1:3 DO P(I):=DF(P(I),X)/(2*I);
WRITE P(I), ' = ', P(I) END;

P(1)=X

P(2)=(3*X^2-1)/2

P(3)=(X*(5*X^2-3))/2

END
```

Рис. 6. Программа вычисления полиномов Лежандра по формуле Родрига на языке REDUCE-2.

использующая встроенный в систему REDUCE-2 оператор дифференцирования  $DF(Q, x) \equiv dQ/dx$  и результаты вычислений показаны на рис. 6.

Авторы выражают благодарность М. Г. Мещерякову, Н. Н. Говору, В. А. Брумбергу, Д. П. Костомарову, В. А. Мещерякову, Э. А. Пе-

рельштейну, И. В. Потгосину, В. А. Ростовцеву, Р. Н. Федоровой и В. П. Ширикову за полезные обсуждения и ценные замечания, С. Ю. Славинову за консультации по системе SYMBAL, а также Э. Д. Крупникову за помощь в составлении библиографии к данному обзору.

Объединенный институт ядерных исследований,  
Дубна (Московская обл.)

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Morrison Ph., Morrison E. Charles Babbage and his Calculating Engines. — N.Y., 1961.
2. Kahrimanian H. G. Analytical Differentiation by a Digital Computer: M. A. Thesis. — Philadelphia: Temple Univ., 1953.
3. Nolan J. Analytical Differentiation on a Digital Computer: M.A. Thesis. — Cambridge: M.A. MIT, 1953.
4. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ. Т. 2. — М.: Мир, 1977.
5. Криницкий Н. А., Миронов Г. А., Фролов Г. Д. Программирование и алгоритмические языки. — М.: Наука, 1979.
6. Маурер У. Введение в программирование на языке ЛИСП. — М.: Мир, 1976.
7. Лавров С. С., Силагадзе Г. С. Автоматическая обработка данных: Язык ЛИСП и его реализация. — М.: Наука, 1978.
8. McCarthy J. — Comm. ACM, 1960, v. 3, p. 184.
9. Strubbe H. — Comp. Phys. Comm., 1974, v. 8, p. 1.
10. Collins G. E. — In: Proc. of the 2nd Symposium on Symbolic and Algebraic Manipulation. — N.Y.: ACM Headquarters, 1971. — P. 144.
11. Lurie D. — In: Computing as a Language of Physics. — Vienna, IAEA, 1972. — P. 529.
12. Hearn A. C., REDUCE User's Manual. — 2nd ed. — Univ. of Utah, 1973.
13. Hearn A. C. — In: Proc. of the 3rd Intern. Colloquium on Advanced Computing Methods in Theoretical Physics. — Marseilles: C.N.R.S., 1973 — v. 1, p. A-V-1.
14. Perisho R. C. ASHMEDAI User's Guide, U.S.A.E.C. Rept. No. COO-3066-44, 1975.
15. D'Inverno R. A. The ALAM Programmer's Manual. — London: King's College, 1969.
16. D'Inverno R. A., Russel-Clark R. A. The CLAM Programmer's Manual. Pt. 1 — London: King's College (1971); Pt. 2 — Cambridge: Univ. of Cambridge, Computer Laboratory, 1972.
17. Frick I. SHEEP User's guide, USIP Report 77-15. — Stockholm: Univ. of Stockholm, 1977.
18. Rom A. — Celest. Mech. 1969, v. 1, p. 301.
19. Брумберг В. А., Исакович Л. А. — В кн. Алгоритмы небесной механики, № 1. — Л.: ИТА АН СССР, 1974.
20. Fitch J. P. — CAMAL User's Manual. — Cambridge: Univ. of Cambridge. Computer Laboratory, 1975.
21. Арайс Е. А., Сибиряков Г. В. АВТО-АНАЛИТИК. — Новосибирск: Изд-во Новосибирск. ун-та, 1973.
22. Trufun N. A. Guide to FORMAC. — Toronto: Univ. of Toronto, 1970.
23. Brown W. S. ALTRAN User's Manual. — 3rd ed. — Bell Lab. 1973.
24. Engeli M. E. SYMBAL User's Manual. — Univ. of Texas, 1969.
25. Глушков В. М., Гринченко Т. А., Дородницына А. А., Драж А. М., Капитонова Ю. В., Клименко В. П., Крес Л. Н., Летищевский А. А., Погребинский С. Б., Савчук О. Н., Стогний А. А., Фишман Ю. С., Царюк Н. П. — Кибернетика, 1978, т. 5, с. 114.
26. Bogen R., Golden J., Genesereth M., Doohovskoy A. MACSYMA Reference Manual. — Version Nine. MIT Mathlab Group, Lab. for Computer Science, 1977.
27. Griesmer J. H., Jenks R. D., Yun D. Y. Y. SCRATCHPAD User's Manual. — IBM Research Rept. RA-70. — 1975.
28. Korpela J. — Helsinki Univ. of Technology Rept. No. 27. — 1976.
29. Канторович Л. В., Петрова Л. Т. — В кн. Труды третьего Всесоюзного математического съезда. — М.: Наука, 1956. — Т. 2, с. 151.
30. Канторович Л. В. — Изв. АН Арм.ССР, 1957, т. 10, № 2.
31. Канторович Л. В. — ДАН СССР, 1957, т. 113, с. 738.
32. Петрова Л. Т. — Изв. вузов. Сер. «Математика», 1958, т. 5, с. 95.
33. Булавский В. А. — Ibid., с. 5.



32. Смирнова Т. Н. Проведение на ЭВМ типа М-20 полиномиальных выкладок с помощью прорабов.— Л.: Наука, Ленингр. отд-ние, 1967.
33. Шурьгин В. А., Яненко Н. Н.— Проблемы кибернетики. Вып. 6.— М.: Физматгиз, 1961.
34. Аксельрод И. Р., Белоус Л. Ф. Входной язык системы автоматического программирования СИРИУС.— Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1969.
35. Бежанова М. М., Катков В. Л., Поттосин И. В.— Цитир. в <sup>38</sup> сб.— С. 18.  
Костюкова Н. И.— Ibid.— С. 38.
36. Сынах В. С., Препринт ВЦ СО АН СССР.— Новосибирск, 1965.
37. Верещуров В. С., Препринт ИТЭФ-54.— Москва, 1974.
38. Вычислительная математика и вычислительная техника. Вып. III. Харьков: ФТИНТ АН УССР, 1972.
39. Proceedings of the 1977 MACSYMA User's Conference Berkeley, California, July 27—29.— Washington: NASA Scientific and Technical Information Office, 1977.
40. Barton D., Fitch J. P. Rept Prog. Phys., 1972, v. 35, p. 235.
41. Davis M. S.— Astron. J., 1958, v. 63, p. 462.
42. Herget P., Musen P.— Ibid., 1959, v. 64, p. 11.
43. Jeffrys W. H.— Comm. ACM, 1971, v. 14, p. 538.
44. Delaunay C. Theorie du Mouvement de la Lune: Extraits des Mem. Acad. Sci.— Paris: Mallet-Bachelier, 1860.
45. Deprit A., Henrard J., Rom A.— Science, 1970, v. 168, p. 1569.
46. Брумберг В. А., Исакович Л. А.— Цитир. в <sup>17</sup> сб. № 4.— 1975.
47. Васильева А. В.— Ibid. № 7.— 1975.
48. Евдокимова Л. С.— Ibid. № 15.— 1977.
49. Anderson J. D., Lau E. L.— Цитир. в <sup>39</sup> сб.— Р. 395.
50. Fletcher J. G., Clements R. W., Matzner R. A., Thorne K. S., Zimmerman B. A.— Astrophys. J. Lett., 1967, v. 148, p. 91.
51. Bondi H., Van Der Burg M., Metzner A.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1962, v. 269, p. 21.
52. Harrison G. H.— J. Comp. Phys., 1969, v. 4, p. 594.
53. D'Inverno R. A., Russell-Clark R. A.— J. Math. Phys., 1971, v. 12, p. 1258.
54. Fitch J. P. Univ. of Cambridge Report.— Cambridge, 1971.
55. Петров А. З. Пространства Эйнштейна.— М.: Физматгиз, 1961.
56. Gibbons G. W., Russell-Clark R. A.— Phys. Rev. Lett., 1973, v. 30, p. 398.
57. Cohen H. I., J. Comp. Phys., 1976, v. 22, p. 396.
58. D'Inverno R. A.— Gen. Relat. and Gravit., 1975, v. 6, p. 567.
59. Cohen H. I., Leringe O., Sunblad Y.— Ibid., 1976, v. 7, p. 269.
60. Жидкова И. Е., Недялков И. П., Ростовцев В. А., Препринт ОИЯИ Р2-11589.— Дубна, 1978.
61. Hearn A. C.— In: Computing as a Language of Physics.— Vienna: IAEA, 1972.— Р. 567.
62. Campbell J. A.— Acta Phys. Austriaca, 1974, Suppl. XIII, p. 595.
63. Hearn A. C.— In: Proc. of the 1976 CERN School of Computing. La Grande Motte, France, 12—15 September.— Geneva: CERN 76—24, 1976.— Р. 201.
64. Hearn A. C.— В кн.: Труды Международного совещания по программированию и математическим методам решения физических задач. Дубна, 20—23 сентября 1977 г.— Дубна: ОИЯИ Д10.11-11264, 1978.— С. 96.
65. Гердт В. П.— Ibid.— С. 166.
66. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1976.
67. Ахизер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1969.
68. Бьёркен Д. Д., Дрелл С. Д. Релятивистская квантовая механика. Т. 2.— М.: Наука, 1978.
69. Campbell J. A., Hearn A. C.— J. Comp. Phys., 1970, v. 5, p. 280.
70. Calmet J., Perrottet M.— Ibid., 1971, v. 7, p. 191.
71. Perrottet M.— Цитир. в <sup>61</sup> сб.— Р. 555.
72. Sasaki T.— J. Comp. Phys., 1976, v. 22, p. 189.
73. Chisholm J. S.— Nuovo Cimento, 1963, v. 30, p. 426.
74. Kahane J.— J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 1732.
75. Боголюбов Н. Н., Парасюк О. С.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, т. 20, с. 585.  
Парасюк О. С.— Ibid., с. 843.  
Bogoliubov N. N., Parasiuk O. S.— Acta Math., 1957, v. 97, p. 227.
76. Кучерявый В. И. Препринт ИТФ-76-132Р.— Киев, 1976.
77. Calmet J.—SIGSAM Bulletin (ACM, N.Y.), 1974, No. 31, p. 74.

78. Tarasov O. V. JINR Preprint E2-11573.— Dubna, 1978.
79. Lautrup B. E.— In: Proc. of the 2nd Colloquium on Advanced Computing Methods in Theoretical Physics,— Marseilles, C.N.R.S., 1971.— V. 1. p. 1—58.
80. Levine M. J., Roskies R.— Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 9, p. 421.
81. Levine M. J., Perisho R. C., Roskies R.— Ibid., 1976, v. 13, p. 997.
82. Bender C. M., Keener R. W., Zippel R. E.— Ibid., 1977, v. 15, p. 1572.
83. Barbieri R., Mignago J. A., Remiddi E.— Nuovo Cimento. Ser. A, 1972, v. 11, p. 824.
84. Barbieri R., Remiddi E.— Nucl. Phys. Ser. B, 1975, v. 90, p. 233, Barbieri R., Caffo M., Remiddi E.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 57, p. 460.
85. Maisson D., Peterman A.— Comp. Phys. Comm., 1974, v. 7, p. 121.
86. Fox J. A., Hearn A. C.— J. Comp. Phys., 1974, v. 14, p. 301.
87. Бардин Д. Ю., Федоренко О. М., Шумейко Н. М. Препринт. ОИЯИ, P2-10114.— Дубна, 1976.
88. Linke V., Tränkle E., Bender I.— Nuovo Cimento. Ser. A. 1977, v. 42, p. 281.— Цитир. в <sup>88</sup> сб.— P. 133.
89. Proceedings of the 4th Intern. Colloquium on Advanced Computing Methods in Theoretical Physics.— Saint-Maximum, France, 1977.
90. Schwinger J.— Phys. Rev., 1948, v. 73, p. 416; 1949, v. 76, p. 790.
91. Peterman A.— Helv. Phys. Acta, 1957, v. 30, p. 407.
92. Sommerfeld C.— Ann. Phys. (N.Y.), 1958, v. 5, p. 26.
93. Calmet J.— Цитир. в <sup>11</sup> сб.— V. II, p. C-I-1.
94. Levine M. J., Remiddi E., Roskies R.— Цитир. в <sup>88</sup> сб.— P. 178.
95. Kinoshita T.— In: Proc. of the 19th Intern. Conference on High Energy Physics. Tokyo, August 23—30, 1978/Physical Society of Japan.— Printed by International Academic Printing Co., Japan, 1979.— P. 571.
96. Levine M. J., Wright J.— Phys. Rev., Ser. D, 1973, v. 8, p. 3171.
97. Van Dyck R. S., Jr., Schwinberg P. B., Dehmelt H. G.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 310.
98. Kinoshita T. Preprint Cornell Univ. CLNS-390.— N.Y., 1978.
99. Владимиров А. А., Тарасов О. В.— ЯФ, 1977, т. 25, с. 1104.
100. Egorian Ed., Tarasov O. V. JINR Preprint E2-11757.— Dubna, 1978.
101. Billoire A., Lacaze R., Morel A., Navalet H.— Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 78, p. 140.
102. Kupperts G., Pfirsch D., Tasso H.— In: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research.— Vienna IAEA, 1971.— V. 2, p. 529.
103. Kerner W., Steuerwald J.— Comp. Phys. Comm., 1975, v. 9, p. 337.
104. Kerner W., Max-Planck-Institut für Plasmaphysik Report.— München, 1978.
105. Rosen B.— J. Comp. Phys., 1974, v. 15, p. 98; 1976, v. 20, p. 22.
106. Karney C. F. F. Цитир. в <sup>39</sup> сб.— P. 377.
107. Kulp J. L.— Ibid.— P. 385.
108. Atherton R. W., Homsy G. M.— J. Comp. Phys., 1973, v. 13, p. 45.
109. Acrivos A., Barthes-Biesel D.— Ibid., v. 12, p. 403.
110. Chow S. K., How A. H., Landweber L. Westinghouse Research Laboratory Rept. 75-160-LANCH-P1.— Pittsburgh, 1975.
111. Chow S. K., How A. H., Landweber L.— J. Hydronautics, 1976, v. 10, p. 2.
112. Cohen H. I., Bark F. H.— Comp. Phys. Comm., 1978, v. 14, p. 319.
113. Bark F. H., Meijer P. S., Cohen H. I.— Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 531.
114. Nerbrant P.-O.— Comp. Phys. Comm., 1978, v. 14, p. 315.
115. Benesch R.— J. Phys. Ser. B, 1971, v. 4, p. 1403; Phys. Rev. Ser. A, 1972, v. 6, p. 573.
116. Rudnicki-Bujnowski G.— Comp. Phys. Comm., 1975, v. 10, p. 245.
117. Юцис А. П., Бандзайтис А. А. Теория момента количества движения в квантовой механике.— Вильнюс: Моклас, 1977.
118. Cohen H. I., Slavyanov S. Yu.— J. Comput. Phys., 1978, v. 29, p. 289.
119. Кондон Е., Шортли Г. Теория атомных спектров.— М.: ИЛ, 1949.
120. Fischer C. F., Prentice D. W. B.— Comp. Phys. Comm., 1973, v. 6, p. 157.
121. Golden L. B.— Ibid., 1978, v. 14, p. 255.
122. Slagle J. R.— J. ACM, 1963, v. 10, p. 507.
123. Moses J. Report MAC TR-47: Project MAC.— Cambridge: MIT, 1967.
124. Risch R.— Trans. AMS, 1969, v. 139, p. 167.
125. Risch R.— Bull. AMS, 1970, v. 76, p. 605.
126. Tobey R. Algorithms for Antidifferentiation of Rational Function: Ph. D. Thesis.— Cambridge: Harvard Univ., 1967.
127. Horowitz E.— Цитир. в <sup>8</sup> сб.— P. 441.
128. Moses J.— Comm. ACM, 1971, v. 14, p. 548.

128. Hearn A. C.—REDUCE Newslett. (Univ. of Utah.), 1978, No. 4, p. 12.
129. Harrington S. J. Univ. of Utah Report UCP-57.—Utah, 1978.
130. Norman A. C., Moore P. M. A.—Цитир. в <sup>88</sup> сб.—P. 99.
131. Caviness B. F.—Ibid.—P. 16.
132. Norman A. C.—Comp. J., 1975, v. 19, No. 1, p. 63.
133. Tasso H., Steuerwald J. Max-Planck-Institut für Plasmaphysik Preprint IPP 6/143.—1976.
134. Schmidt P.—Цитир. в <sup>135</sup> сб.—P. 114.
135. Proceedings of the 1976 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, Yorktown Heights.—N.Y., 1976.
136. Lafferty E. L.—Цитир. в <sup>39</sup> сб.—P. 347.
137. Golden J. P.—Ibid.—P. 1.
138. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.—М.: Наука, 1976.
139. Murphy G. M. Ordinary Differential Equations.—Princeton, N. J., 1960.
140. Ince E. L. Die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen.—Mannheim: Bibliogr. Inst., HTB Nr. 67, 1956.
141. Spiegel M. R. Applied Differential Equations.—Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1958.
142. Stoutemyer D.—Цитир. в <sup>135</sup> сб.—P. 97.
143. Hanson J. N.—J. Geophys. Res., 1973, v. 70, p. 3260.
144. Head R.—Цитир. в <sup>135</sup> сб.—P. 126.
145. Boyd J. P.—J. Atmos. Sci., 1978, v. 35, p. 2236.
146. Birrell M. D.—Proc. Roy. Soc. Ser. B, 1978, v. 361, p. 513.
147. Stoutemyer D. R.—ACM Trans. Math. Software, 1977, v. 3, No. 2, p. 128.
148. Ivie J.—Цитир. в <sup>39</sup> сб.—P. 317.
149. Гердт В. П. Препринт ОИЯИ, Р4-12064.—Дубна, 1978.
150. Spear D. A.—Цитир. в <sup>39</sup> сб.—P. 369.
151. Fateman R. J. SIGSAM Bulletin (ACM N.Y.), 1978, No. 47, p. 8.
152. REDUCE Newslett. (Univ. of Utah), 1978, No. 3, p. 20.
153. Sasaki T. Univ. of Utah Report.—Utah, 1978.