

[534.0+538.56]:530.18

**Л. И. МАНДЕЛЬШТАМ И СОВРЕМЕННАЯ ТЕОРИЯ
НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ И ВОЛН*****А. В. Гапонов-Грехов, М. И. Рабинович*****СОДЕРЖАНИЕ**

Введение	579
1. Осцилляторы	583
а) Шарик в желобе (582). б) Пружинный маятник и нелинейная оптика (584). в) Сложные движения простой системы (586). г) Осциллятор в пульсирующей потенциальной яме (588). д) Нелинейное затухание и усиление Ландау (589). е) Цепочки связанных нелинейных осцилляторов (591). ж) Солитоны как частицы (594).	
2. Автоколебания	595
а) Что это такое? (595). б) Простые и сложные аттракторы (597). в) Новый интерес к старым задачам. Автоколебания в пространстве (598). г) Сильная нелинейность. Еще раз о нелинейном резонансе (601). д) Генераторы шума (605). е) Порядок из беспорядка. Синергетика (606). ж) О возникновении турбулентности (610).	
3. Модуляция	610
а) Синусоида с переменной амплитудой и частотой (610). б) Бегущие решетки Мандельштама. Модуляция волн волнами (612). в) Восстановление модуляци и (615). г) Самомодуляция (615). д) Возвращаемость (618). е) Радиосолитоны (620). Цитированная литература	622

ВВЕДЕНИЕ

Судьба научных идей Леонида Исааковича Мандельштама сложилась очень счастливо. Особенно это относится к его идеям в области нелинейных колебаний и совсем молодого ее раздела — теории нелинейных волн (или, как иногда говорят, желая подчеркнуть неформальность подхода, — физики нелинейных волн). Практически во всех областях теории колебаний и волн Мандельштамом получены классические результаты, которые до сих пор цитируются в оригинальных научных статьях, а не только в учебниках и работах по истории науки. Леонид Исаакович воспитал «нелинейную школу физиков»¹, и его ученикам, и ученикам его учеников принадлежит большое число фундаментальных результатов в нелинейной оптике, нелинейной теории плазмы, радиофизике и других нелинейных науках. Этим, однако, не исчерпывается та роль, которую Мандельштам сыграл в создании теории нелинейных колебаний. Возможно, не менее важным, чем собственный научный вклад и воспитание учеников для развития этой теории, а затем, три десятка лет спустя, и теории нелинейных волн, явилось рожденное Мандельштамом новое «колебательное» мышление, которое он демонстрировал в своих работах и всю жизнь пропаган-

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1979.

дировал в лекциях и беседах. Конечно, очень трудно дать краткое изложение современной теории колебаний и волн такое, чтобы «мандельштамовость» этой сегодняшней науки была видна не только авторам, но и читателю: «С одной стороны способность единым взглядом охватить сложное многообразие разнородных явлений, с предельной четкостью усмотреть в них черты сходства и различия и воссоздать все существенное в простой и наглядной модели; с другой стороны острый интерес к конкретной индивидуальности физического явления...»². Именно попытку взглянуть на сегодняшнюю теорию нелинейных колебаний и волн глазами Мандельштама мы и предпринимаем в данной статье.

По словам самого Мандельштама, теория колебаний и волн — это наука, отличающаяся своим собственным подходом, опирающимся на построение и изучение основных элементарных колебательных или волновых моделей, владеющая собственным «универсальным» колебательным языком, отражающим основные колебательные явления (резонанс, модуляция, синхронизация, рассеяние и т. д.) и имеющая в своем распоряжении достаточно общие, приспособленные для анализа таких явлений, аналитические и качественные методы. Знание основных моделей и феноменов порождает особую колебательную интуицию, благодаря которой, например, «темные места в оптике освещаются, как прожектором, при изучении колебаний в механике»³. Стремление понять механизм того или иного явления на возможно простейшей модели, всестороннее осмысливание этой модели до полного понимания, на предмет ее включения в общий арсенал колебательных представлений, очень характерны для научного и педагогического творчества Леонида Исааковича. Лишь после того как эффект был обнаружен и до конца понят, Л. И. Мандельштам переходил от основной элементарной модели к конкретной физической теории со всеми присущими ей деталями.

Поэтому наша статья посвящена обсуждению основных моделей и явлений современной теории нелинейных колебаний и волн. Каковы же сегодняшние черты этой теории?

Теория нелинейных колебаний времен Мандельштама умела и знала очень много. Полностью был исследован нелинейный осциллятор, рассматривались связанные колебания таких осцилляторов, уже была в основном построена Андроновым и Ван-дер-Полем теория автоколебаний, открыты явления синхронизации и конкуренции и даже предпринята Биттом попытка построения теории автоколебаний распределенных систем. Однако теория нелинейных колебаний во времена Мандельштама это, за некоторыми исключениями, теория систем с *небольшим* числом степеней свободы, демонстрирующих *простое* периодическое или квазипериодическое поведение. Для современной же теории характерен острый интерес, если так можно сказать, к другим предельным случаям — рассматриваются в основном *сильнонелинейные* системы, исследуется *сложное* поведение (включая возникновение стохастичности) в *простых* динамических системах, анализируется отклик большого числа нелинейных осцилляторов на внешнее поле, т. е. исследуется *поведение ансамблей*. Для того чтобы эти сегодняшние черты проступили более явственно, каждый раздел статьи, разбитой на главы, («осцилляторы», «автоколебания» и «модуляция»), мы начинаем с обсуждения классических моделей и эффектов. По возможности модели теории колебаний и теории волн излагаются параллельно.

Говоря о близости теории нелинейных колебаний и волн в историческом плане, следует заметить, что еще сравнительно недавно (60-е годы) теория нелинейных волн в основном пользовалась уже сложившимся опытом классической теории колебаний и ее развитие напоминало раз-

витие теории нелинейных колебаний в 30-е годы. Характерно, что многие результаты той поры связаны с различными способами перехода к решениям, описываемым дифференциальными уравнениями в обычном фазовом пространстве. Сюда, в частности, относится анализ *стационарных волн* — солитоны, ударные волны и т. д., взаимодействие большого числа волн, но в узком спектральном интервале — *волны модуляции* и некоторые другие.

Это было время очень быстрого развития теории нелинейных волн — непрерывно открывались и «синтезировались» за счет расширения сферы деятельности новые эффекты, появлялись точные и приближенные методы. Пожалуй, даже не будет преувеличением сказать, что это было время сравнительно легкого добывания результатов. По окончании этого периода был достигнут уже довольно высокий уровень понимания экспериментальных результатов, выработана интуиция и появилась возможность объяснения большинства нелинейных явлений. Однако необходимо подчеркнуть, что ничего подобного той строгой качественной теории, которая была создана Пуанкаре и применена Л. И. Мандельштамом и его учениками для колебательных систем с малым числом степеней свободы, построить не удалось. Не исключено, что построить такую теорию вообще не удастся, слишком велики на этом пути математические трудности. На что же можно рассчитывать? Успехи в решении отдельных классов нестационарных задач с помощью точных методов, широкое распространение машинных экспериментов и получение с помощью машины строгих результатов, физические эксперименты и применение приближенных методов дают надежду на построение достаточной полной теории нелинейных волн, тоже качественной, но уже в другом смысле — в смысле совокупности достаточно наглядных и простых представлений, позволяющих для очень широкого класса явлений выбрать прозрачные модели и найти наиболее адекватный метод количественного анализа.

Говоря об аналогиях между колебаниями и волнами, следует заметить, что они очень глубоки и разнообразны. Достаточно упомянуть хорошо известную аналогию между пространственными биениями волн при их стационарном взаимодействии в пространстве и временными биениями колебаний. Столь же далеко идущей является аналогия с колебаниями у взаимодействующих во времени волн, пространственная структура которых задана. Имеются и более нетривиальные аналогии — между нестационарными волновыми эффектами (например, периодические волны модуляции) и процессами взаимодействия колебаний в ансамблях связанных нелинейных осцилляторов (возвращаемость, квазипериодичность и т. д.). Однако при обсуждении тех или иных аналогий возникает вопрос — почему и до каких пор волновой (распределенной) системе можно сопоставлять систему конечномерную (а точнее, маломерную), т. е. свести задачу к анализу фазового пространства небольшой размерности?

Ответ на этот вопрос, сейчас почти очевидный, по существу, стал ясен к началу 60-х годов^{8,32}, когда были рассмотрены и сопоставлены нелинейные волновые процессы в двух предельных «случаях» — в средах с *сильной дисперсией* и *малой нелинейностью* и в нелинейных средах со *слабой дисперсией*. При распространении волны, например, в сжимаемом газе или на поверхности мелкой воды (*нет дисперсии*) вершина волны движется быстрее ее основания, волна непрерывно искажается, и в некоторый момент происходит ее опрокидывание — профиль должен стать неоднозначным. Это произойдет с волной любой конечной амплитуды (т. е. даже при малой нелинейности). Такой процесс уже не опишешь конечномерной моделью. Причину этого удобно пояснить с помощью очень наглядного спектрального языка. В среде без дисперсии фазовая скорость малых

возмущений любой частоты одинакова. И поэтому все, даже слабые, появляющиеся из-за нелинейности гармоник резонансны с основной волной (*синхронизм*) и эффективно возбуждаются ею. Таким образом, если бы мы захотели описать процесс с помощью набора гармоник, нам бы пришлось учесть их *бесконечно* много.

Если же при слабой нелинейности дисперсия велика (как, например, для сред, используемых в нелинейной оптике), то в синхронизме — *временном и пространственном резонансе* — могут оказаться лишь несколько волн и проходят прямые аналогии с процессами в колебательных системах с небольшим числом степеней свободы.

Замечательно, что фактически эти же современные представления о влиянии дисперсии (для ограниченных систем — *неэквидистантности* спектра) на характер протекающей в нелинейной распределенной системе процессов высказывали Мандельштам и его ученики и сотрудники еще в середине 30-х годов. Речь, правда, шла об ограниченных распределенных системах с сосредоточенными нелинейностями, однако здесь это не очень принципиально. Этому вопросу довольно много внимания уделяется в их докладе, представленном конгрессу Международного радиотехнического союза (1935 г.) под названием «Новые исследования нелинейных систем». В частности, относительно систем с *сильной дисперсией*, у которых *распределение обертонов не гармонично* *), говорится: «В этом случае форма стационарных колебаний может быть близка к синусоидальной. При помощи теории, аналогичной теории малого параметра для систем с конечным числом степеней свободы, можно вычислить амплитуду, решить вопрос об устойчивости и т. д.»⁴. В другом предельном случае — *нет дисперсии*, т. е. имеется «*гармоническое распределение обертонов*» (задача, исследовавшаяся А. А. Виттом в связи с анализом возбуждения смычком скрипичной струны) — «стационарные колебания всегда *резко несинусоидальны*»⁴. Отмечается также, что в распределенных электронных (диодных) автогенераторах «возбуждающие силы малы и инерция играет существенную роль, поэтому и колебания имеют почти синусоидальную форму»⁴. Можно не сомневаться, что если бы в то время появились мощ-

ные источники когерентного излучения и возникла потребность в решении соответствующих нелинейных волновых задач, их было бы кому взять в свои руки!

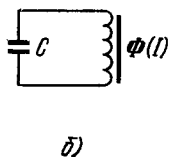
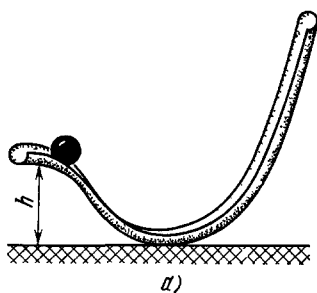


Рис. 1. Нелинейные осцилляторы.

1. ОСЦИЛЛЯТОРЫ

а) Шарик в желобе

Рассматривая нелинейный колебательный контур и шарик в желобе (рис. 1) как

первые примеры нелинейных колебательных систем, Л. И. Мандельштам в своих «Лекциях по колебаниям» (1930—1932 г.) замечает, что разумно «представить себе на основании самого дифференциального уравнения, не решая его, всю качественную картину движений»^{**}). Эта каче-

*) То есть собственные частоты системы не кратны друг другу.

**) В следующей лекции на ту же тему Л. И. Мандельштам замечает: «Иметь меру требуемой математической строгости — самое трудное для физика. Правильнее будет сказать так: ему необходимо уметь определять эту меру» (Лекции по колебаниям, 1972, с. 73).

ственная картина для нелинейного осциллятора (НО) — консервативной нелинейной системы с одной степенью свободы — предстает вся целиком из вида его фазового портрета (рис. 2). Движение НО полностью определяется начальной энергией. При малой энергии он совершает малые — гармонические колебания. С ростом энергии колебания становятся все более отличными от гармонических — в периодическом движении большую часть времени занимают «медленные» участки, соответствующие взбежанию шарика на вершину горки (см. рис. 1, а), и, наконец, при начальной

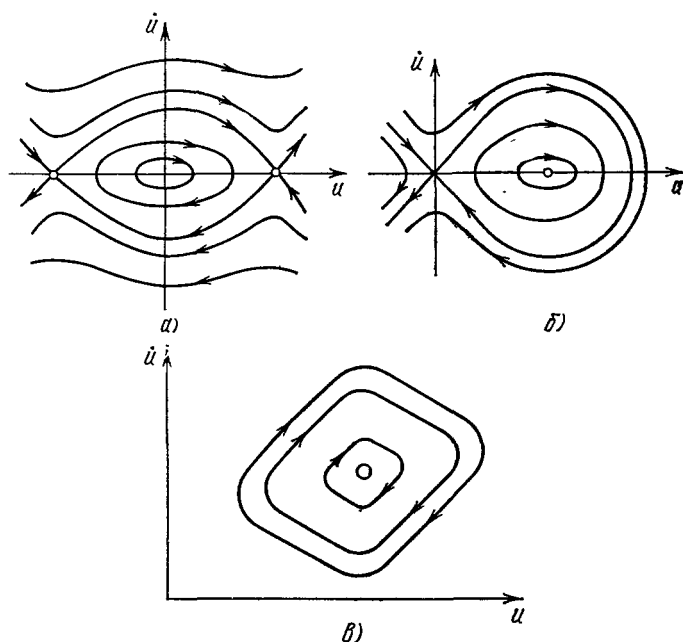


Рис. 2. Фазовые портреты типичных НО.

энергии, равной $E_0 = mgh$, движение шарика уже совсем не будет периодическим. На фазовой плоскости (см. рис. 2) оно изображается сепаратрисой, идущей из седла в седло. Таким образом, движение НО *неизохронно* — частота колебаний зависит от их амплитуды (или энергии). Для движений, не слишком близких к сепаратрисе, можно сказать, что $\omega = \omega(A^2)$.

Установить факт принадлежности той или иной динамической системы, фазовое пространство которой — плоскость, к классу НО, т. е. показать что она консервативна, совсем не всегда так просто, как, например, в случае НО, описываемого уравнением

$$\ddot{u} - u \left(1 - \frac{1}{2} u \right) = 0, \quad (1.1)$$

фазовая плоскость которого приведена на рис. 2, б. Действительно, интеграл (1.1) очевиден — это интеграл энергии $\dot{u}^2 - u^2 + u^3/3 = \text{const}$. А вот система

$$\dot{u}_1 = u_1 (v_1 - \rho_1 u_2), \quad \dot{u}_2 = -u_2 (v_2 - \rho_2 u_1), \quad (1.2)$$

описывающая экологическую задачу о взаимодействии двух биологических видов — вегетарианцев и хищников, на первый взгляд кажется неконсер-

вативной, а обнаруженный А. А. Виттом ⁵ интеграл, $\rho_2 u_1 + \rho_1 u_2 - v_2 \ln u_1 - v_1 \ln u_2 = \text{const}$, и вправду, выглядит нетривиально (фазовый портрет этого НО см. на рис. 2, в).

Обратим внимание на особое решение (1.1), которому на фазовой плоскости (см. рис. 2, б) соответствует петля сепаратрисы, двоякоасимптотическая к точке 0 траектория. Сейчас очень велик интерес к подобным решениям в теории нелинейных волн. Например, волны на поверхности «мелкой воды» приближенно можно описать популярным в последние 15 лет (хотя и открытым еще в 1895 г.) уравнением Кортевега-де Фриза

$$u_t + v_0 u_x + uu_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (1.3)$$

Если интересоваться только волнами, бегущими с постоянной скоростью и не меняющими своего профиля $u = u(x - Vt)$ (стационарными волнами), то при $V = V_0 + u$ мы получим из (1.3) уравнение НО, фазовая плоскость которого приведена на рис. 2, б. Двоякоасимптотическая траектория в этом случае соответствует солитону или уединенной волне, спадающей до нуля в плюс и минус бесконечности. Такие существенно не-синусоидальные волны были хорошо известны математикам еще в начале века, однако внимание физиков они привлекли лишь в последние десятилетия.

б) Пружинный маятник и нелинейная оптика

В 1931 г. после выхода статьи Э. Ферми ⁶ о спектрах комбинационного рассеяния молекулы CO_2 , где обсуждались внутренние резонансы этой молекулы, Л. И. Мандельштам предложил А. А. Витту и Г. С. Горелику

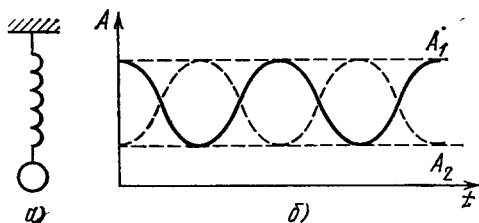


Рис. 3. Пружинный маятник; периодический обмен энергией между угловыми и вертикальными колебаниями.

исследовать эффекты резонансного взаимодействия нелинейно связанных колебаний в совсем уж простой модели — пружинном маятнике (рис. 3, а) ⁷, уравнения которого в пренебрежении трением имеют вид

$$\ddot{u}_1 + \frac{k}{m} u_1 = l \left(\dot{u}_2^2 - \frac{g}{2l} u_2^2 \right), \quad (1.4)$$

$$\ddot{u}_2 + \frac{g}{l} u_2 = -\frac{1}{l} \left(\frac{g}{l} u_1 u_2 + 2u_1 \ddot{u}_2 \right).$$

т. е. когда $\omega_{\text{верт}} \approx 2\omega_{\text{угл}}$, происходит периодическая перекачка энергии из угловых колебаний в вертикальные и наоборот, что и было тут же подтверждено экспериментально ⁷.

Спустя тридцать лет ученик Леонида Исааковича второго поколения Р. В. Хохлов, решая задачу о стационарном нелинейном режиме работы параметрического усилителя бегущей волны ⁸), нашел, что при распространении вдоль усилителя волна накачки $2\omega_0$ параметрически усиливает начальную волну ω_0 , передавая ей почти всю свою энергию ⁸. В процессе дальнейшего распространения происходит обратное — интенсивная волна ω_0 генерирует вторую гармонику, и затем вновь все повторяется сначала, т. е. наблюдается точно такое же явление периодического обмена энергией между гармониками, какое рассчитали и увидели А. А. Витт и Г. С. Го-

⁸) Такие усилители были предложены в 1958 г. П. Тьеном и Г. Сулом ⁹.

релик (только не во времени, а в пространстве) (см. рис. 3, б). Замечательно, что в том же 1961 г. генерация второй гармоники наблюдалась при распространении в оптически прозрачных нелинейных кристаллах световой волны от рубинового лазера (Франкен¹⁰). Эти эксперименты Франкена наряду с работой Хохлова с полным основанием считают началом развития современной нелинейной оптики.

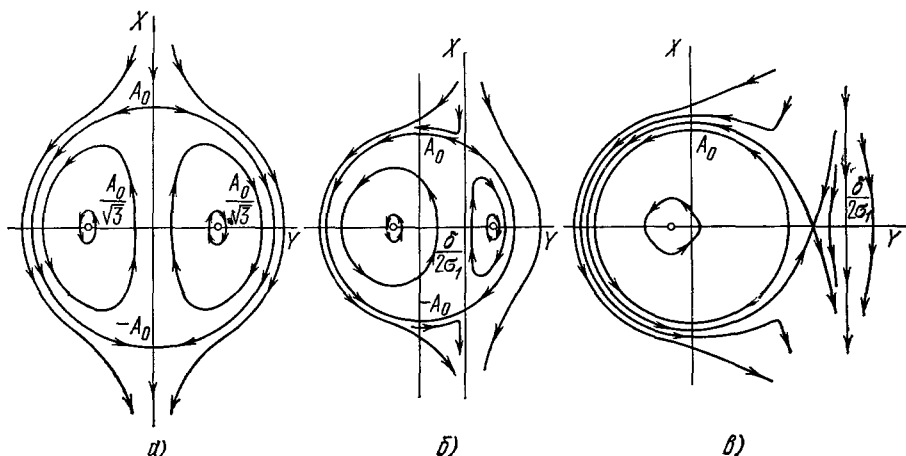


Рис. 4. Фазовые портреты НО, описывающего обмен энергией между гармониками в системе с квадратичной нелинейностью.

δ — расстройка. а) $\delta = 0$; б) $|\delta|/2\sigma_1 A_0 < 1$; в) $|\delta|/2\sigma_1 A_0 > 1$.

В предположении слабой нелинейности укороченные (усредненные) уравнения для амплитуд и фаз осцилляторов ω и 2ω , взаимодействующих во времени или в пространстве, записываются в виде⁸

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_1 &= -\sigma_1 A_1 A_2 \sin \Phi, \\ \dot{A}_2 &= \sigma_2 A_1^2 \sin \Phi, \\ \dot{\Phi} &= -\left(2\sigma_1 A_2 - \sigma_2 \frac{A_1^2}{A_2}\right) \cos \Phi - \delta \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

($\Phi = 2\varphi_1 - \varphi_2 - \delta t$, δ — расстройка от точного резонанса). Эти уравнения нетрудно свести к уравнению НО, если воспользоваться интегралом энергии $\sigma_2 A_1^3(t) + \sigma_1 A_2^2(t) = \text{const} = \sigma_1 A_0^2$ и ввести новые переменные $X = A_2 \sin \Phi$, $Y = A_2 \cos \Phi$. Фазовые портреты получившегося таким образом осциллятора при различных значениях расстройки δ приведены на рис. 4. Видно, что при сделанных предположениях о малости нелинейности (или, что то же самое, малости начальных энергий возбуждения) система из двух нелинейно связанных осцилляторов демонстрирует лишь очень простые — квазипериодические движения. С физической точки зрения отличия между разными такими движениями (см. рис. 4) заключаются лишь в различной глубине энергетических биений между осцилляторами и различном периоде этих биений. Как мы увидим, такое простое поведение присуще и многим очень сложным, на первый взгляд, нелинейным системам.

Генерация субгармоник — это вырожденный случай процесса взаимодействия трех резонансно связанных осцилляторов или волн:

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad \mathbf{k}(\omega_3) = \mathbf{k}(\omega_1) + \mathbf{k}(\omega_2), \quad (1.6)$$

где $k(\omega)$ характеризует закон дисперсии волн. Имея в виду квантовомеханическую аналогию, такой процесс часто называют *распадом* (условия резонанса частот и волновых чисел (1.6) можно рассматривать как законы сохранения энергии и импульса в элементарном акте слияния пары частиц в одну или распада одной на пару). Для волн этот процесс, соответствующий первой зоне параметрической неустойчивости, впервые использовали Тьен и Сул, предложившие распределенный параметрический усилитель на ферритах. Сейчас хорошо известен и другой волновой процесс, соответствующий второй зоне параметрической неустойчивости, — распад пары квантов

$$2\omega_3 = \omega_1 + \omega_2, \quad 2k(\omega_3) = k_1(\omega_1) + k_2(\omega_2), \quad (1.7)$$

находящихся в одном состоянии. Как правило, процессы типа (1.7) становятся существенными, когда запрещены (из-за невыполнения условия синхронизма) простые распады (1.6). Именно такая ситуация имеет место, например, для волн на поверхности глубокой жидкости¹¹ и для волн в плазме, обладающих нераспадным законом дисперсии¹².

Опираясь на квантовую аналогию, о свойствах резонансного взаимодействия осцилляторов можно многое сказать, по существу, не решая задачи. Так, например, процессы слияния квазичастиц возможны лишь в том случае, когда «есть с чем сливаться», т. е. число n_3 квантов ω_3 (или $2n_3$ для процесса (1.7)), получившихся в процессе слияния, будет в точности равно меньшему из чисел квантов n_1 или n_2 , которое имелось в начальный момент времени. Разница же $n_1(0) - n_2(0)$ останется неиспользованной и, следовательно, *сохранится* при любом t : $n_1(t) - n_2(t) = \text{const}$. Очевидно, неизменной должна быть и сумма уже родившихся к моменту t квантов n_3 и еще неистраченных к этому времени квантов n_2 , т. е. — $n_3(t) + n_2(t) = \text{const}$. В теории волн, где $n_j \sim |a_j|^2$ ⁷⁶, эти законы сохранения чисел квантов обычно называют *соотношениями Менли — Роу*. Поскольку квантовые осцилляторы при медленном изменении параметров системы не меняют свой квантовый номер, число квантов является *адиабатическим инвариантом*⁷⁴. Адиабатический инвариант нарушается, если осциллятор переходит с одного уровня на другой, что может быть связано, например, с резонансным поглощением осциллятором энергии внешнего поля частоты Ω . При подходящих условиях такой переход, т. е. нарушение адиабатической инвариантности, может происходить даже при высокой кратности резонанса: $\omega = m\Omega$, где $m \gg 1$, т. е. когда внешнее поле меняется очень медленно. Применительно к классическому осциллятору этот результат о нарушении адиабатического инварианта из-за резонанса впервые был получен Мандельштамом и его учениками Андроновым и Леонтовичем еще в 1928 г.⁸⁶

При распадах типа (1.6) или (1.7), как и при генерации субгармоники, с ростом амплитуд усиливаемых волн (осцилляторов) ω_1 и ω_2 становится существенной реакция на накачку ω_3 и процесс распада сменяется процессом слияния. Затем все повторяется — во времени для волн заданной пространственной структуры, или в пространстве — для стационарных гармонических волн. Таким образом, и система из трех слабонелинейных осцилляторов также демонстрирует лишь простое периодическое (или квазипериодическое) поведение.

в) Сложные движения простой системы

На основании рассмотренных примеров можно, казалось бы, утверждать, что система двух (и даже трех) связанных осцилляторов — это очень простая система, в том смысле, что никакого «непредвиденного» поведения она не демонстрирует. Однако не будем торопиться с выводами и рассмот-

рим, как ведет себя система из двух нелинейных, связанных осцилляторов,

$$\begin{aligned}\ddot{u}_1 + u_1 &= -\mu 2u_1 u_2, \\ \ddot{u}_2 + u_2(1 - \mu u_2) &= -\mu u_1^2,\end{aligned}\quad (1.8)$$

которая была исследована сравнительно недавно (в 1964 г.¹³) не с помощью методов усреднения, а детальным численным моделированием *). По форме она столь же проста, как и (1.4).

При $\mu \ll 1$, как нетрудно убедиться с помощью того же метода усреднения, осцилляторы демонстрируют простое, квазипериодическое поведение. Так же будет и при не малых μ ($\mu \sim 1$), но малых начальных энергиях возбуждения (см. рис. 5, где изображено сечение плоскостью $u_1 = 0$ траекторий в

трехмерном (u_1, u_2, \dot{u}_2) фазовом пространстве (1.8); трехмерным это пространство становится, если учесть интеграл энергии $-\left(\frac{1}{2} + u_2\right)u_1^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{u_2}{3}\right)u_2^2 + \frac{1}{2}(\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2) = E$ (при $\mu=1$). Видно, что все траектории как бы лежат на гладких по-

верхностях — торах, т. е. движение системы при любых начальных условиях условнопериодическое. Впечатление о простоте системы (1.8) как будто подтверждается! Но посмотрим, что произойдет, если мы будем увеличивать энергию колебаний

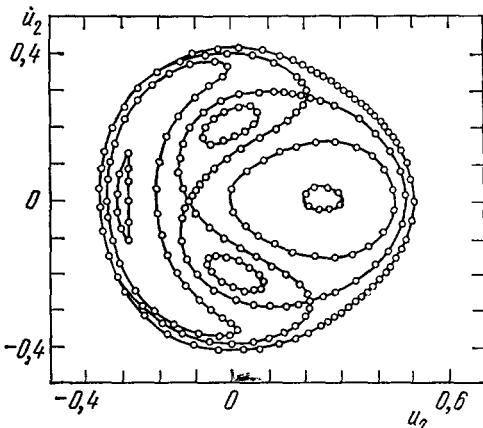


Рис. 5 Следы траекторий на сечущей плоскости $u_1 = 0$ фазового пространства системы (1.8) при $\mu=1$

Начальная энергия $E_0 < 1/12$.

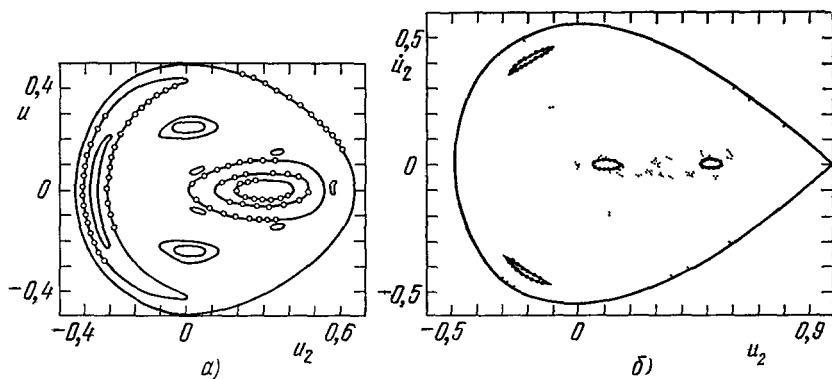


Рис. 6. Сложные движения системы двух НО (1.8).

а) $E_0 = 0,125$, б) $E_0 = 0,167$.

осцилляторов. Прежде всего движение второго осциллятора станет сильно нелинейным — появятся движения, близкие к сепаратрисе одиночного НО (ср. рис. 2, б), и благодаря наличию «внешней» силы $u_1^2(t)$,

*) Эта система интересна для астрофизики — она моделирует поведение звезды в поле галактики с потенциалом

$$U(u_1, u_2) = \frac{1}{2}u_1^2 + u_1^2 u_2 - \frac{1}{3}u_2^3 + \frac{1}{2}u_2^2.$$

уже нельзя сказать, останутся ли они квазипериодическими, или тип движения будет меняться от финитного внутри сепаратрисы до нефинитного вне ее.

Результаты численных экспериментов с двумя связанными НО (1.8) при начальных энергиях $E_0 > 1/12$ приведены на рис. 6. Видно, что при превышении начальной энергии $E_0 = 1/12$, еще соответствующей простым движениям, всего лишь на 0,004 фазовая траектория уже не наматывается ни на какую поверхность, а похоже, случайным образом бродит в ограниченной области фазового пространства! При дальнейшем увеличении E_0 область, занятая случайными движениями, расширяется, а занятая простыми — сужается (см. рис. 6, б). Итак, движение в простой модели двух связанных НО может быть очень сложным.

Откуда появляется эта сложность? Ответ на это мы и попытаемся сейчас получить, рассмотрев еще более простую, чем (1.8), модель — НО в периодическом поле.

г) Осциллятор в пульсирующей потенциальной яме

Будем в модели связанных НО считать движение одного из осцилляторов (u_1) заданным и гармоническим:

$$\ddot{u} - u + u^3 = \mu \sin t. \quad (1.9)$$

При $\mu = 0$ мы про этот осциллятор все знаем (см. рис. 2, б). Рассмотрим его поведение при $\mu \ll 1$. Физически кажется очевидным, что качественное отличие неавтономных движений от автономных появится в том случае,

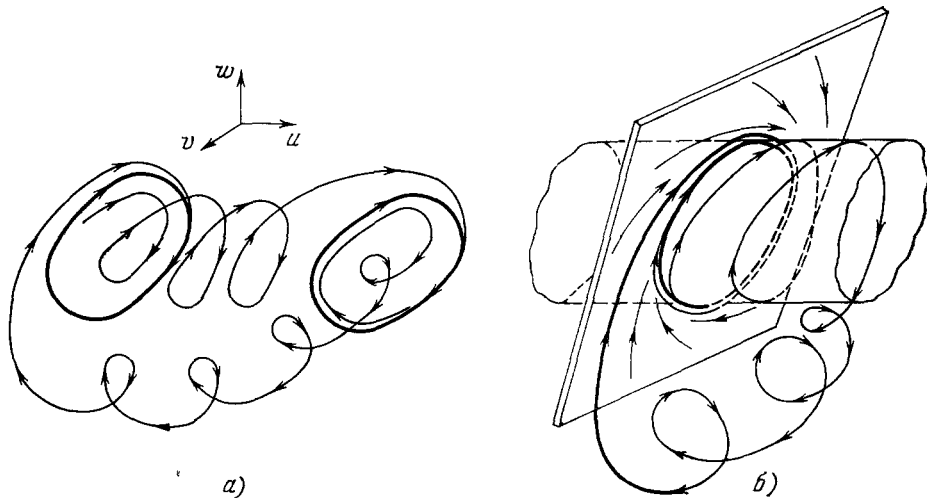


Рис. 7. Примеры седловых периодических траекторий:

а) два седловых цикла; б) пример гомоклинической траектории.

когда под действием внешней силы осциллятор в разные моменты времени попадает в области с разным поведением (на фазовой плоскости внутри или вне сепаратрисы). Проще всего это увидеть, если синусоиду в (1.9) заменить периодической последовательностью прямоугольных импульсов — два раза за период фазовый портрет рис. 2, б сдвигается то влево, то вправо на величину порядка μ . Для колебаний малой амплитуды (вблизи два ямы) эти пульсации пройдут почти незамеченными — движения оста-

нудятся простыми. Движения же, близкие к сепаратрисе, могут оказаться сложными¹⁴. Эта сложность связана с существованием в пространстве системы (1.9) гомоклинической структуры, открытой Пуанкаре в связи с исследованием задачи трех тел еще в 1889 г. *). Полное описание траекторий внутри этой структуры было дано сравнительно недавно^{49,69,90}. Было, в частности, выяснено, что такая структура содержит счетное множество неустойчивых (седловых) периодических траекторий, между которыми (при широком выборе начальных условий) и блуждает «осциллятор» (рис. 7).

д) Н е л и н е й н о е з а т у х а н и е и у с и л е н и е Л а н д а у

Задача о поведении большого числа осцилляторов, например осцилляторов в поле периодической волны, — очень старая. Еще в домаквелловские времена появилась теория дисперсии световых волн, опирающаяся

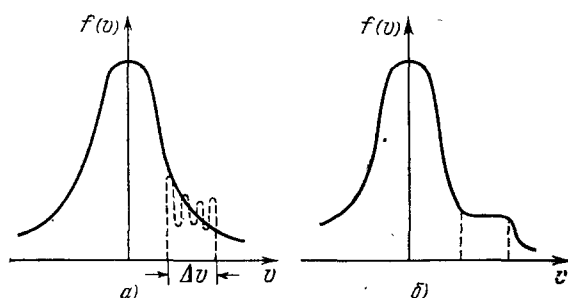


Рис. 8. Функции распределения электронов по скоростям:

а) появление осцилляций в поле периодической продольной волны; б) образование плато.

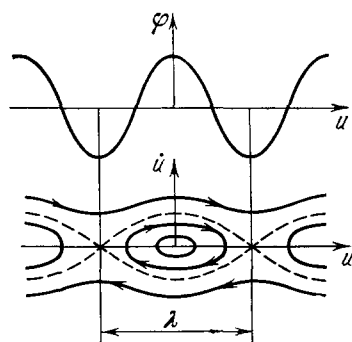


Рис. 9. Фазовый портрет НО, описывающего движения захваченных и пролетных частиц в поле волны.

на модель осцилляторов, вкрапленных в упругий эфир**). Затем появились классическая электронная теория¹⁷, теория дисперсии звуковых волн в газах и электромагнитных волн в ионосфере¹⁸. Этими вопросами очень интересовался и Л. И. Мандельштам; в частности, в 1941 г. он опубликовал работу о показателе преломления сред со связанными и свободными электронами. Но все это задачи о поведении ансамбля линейных осцилляторов. К чему приведет их нелинейность? Если даже два связанных НО могут вести себя весьма сложно, то каково же будет поведение ансамбля таких осцилляторов?

Первые задачи подобного рода появились примерно 20 лет назад в электронике¹⁹ и физике плазмы, в частности, в связи с проблемами ускорения и нагрева заряженных частиц. Рассмотрим такую задачу применительно к электронному потоку, функция распределения электронов по скоростям в котором приведена на рис. 8. В системе координат, связанной с синусоидальной волной $E(x, t) = \varphi_0 \cos(\omega t - kx)$, все частицы разделяются на захваченные и пролетные. Тем, у которых скорости лежат в интервале $\omega/k \pm \sqrt{e\varphi_0/m}$, не хватает энергии, чтобы преодолеть потенциальный барьер $e\varphi_0$, и они колеблются в «яме» волны, те же, у которых

*) Такая структура возникает в трехмерном пространстве в окрестности гомоклинической траектории (см. рис. 7, б).

**) Задача о распространении света в такой среде была решена Рэлеем в 1869 г. как ответ на вопрос, поставленный ему на экзамене Максвеллом (см. ¹⁶).

скорости лежат вне этого интервала, волну почти не замечают (рис. 9). Каждый i -й электрон в поле синусоидальной волны ведет себя как маятник:

$$\ddot{u}_i + \omega_0^2 \sin u_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad \omega_0^2 = \frac{k^2 e \varphi_0}{m}. \quad (1.10)$$

Захваченным электронам соответствуют колебания маятника, а пролетным — вращения (см. рис. 9). Таким образом, частицы в поле волны представляют собой ансамбль тождественных нелинейных осцилляторов, различающихся лишь начальными значениями энергий.

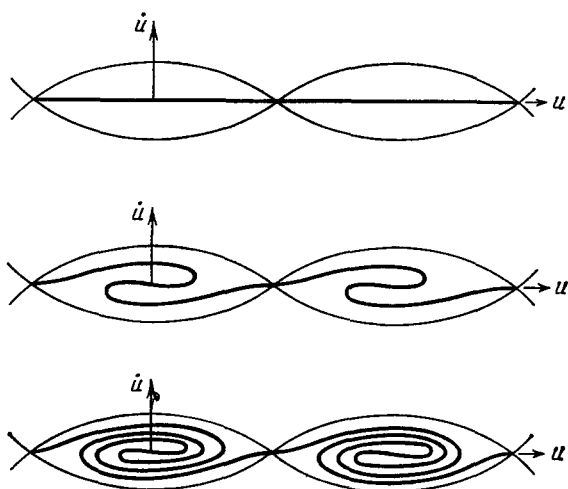


Рис. 10. Эволюция фазового объема в ансамбле не-взаимодействующих электронов — осцилляторов.

Как будет вести себя ансамбль во времени? Поскольку взаимодействие осцилляторов пока не учитывается, ответ на этот вопрос получить довольно просто, рассматривая движение осцилляторов на фазовой плоскости. Если $\left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{v=\frac{\omega}{k}} < 0$, то

при $t=0$ большая часть захваченных частиц располагается в нижней половине «кошачьих глаз» на фазовой плоскости (рис. 10). Со временем из-за неизохронности осцилляторов эта область превратится в закрученную спираль,

число витков которой непрерывно увеличивается. Следовательно, число частиц с разными скоростями будет непрерывно меняться и функция распределения $f(V)$ в интервале Δv начнет пульсировать, становясь все более и более изрезанной (см. рис. 8). Если достаточно долго подождать, то все осцилляторы должны снова собраться в начальный фазовый объем, поскольку движение консервативной системы (1.10) из N осцилляторов обратимо. Физически, однако, очевидно, что как бы долго мы не ждали, чуда не произойдет: из-за сколь угодно слабого взаимодействия частиц друг с другом и с волной частицы размешаются, т. е. равномерно заполнят всю область внутри сепаратрисы, а на функции распределения образуется плато. Поскольку средняя кинетическая энергия частиц при этом возрастает, синусоидальная волна, в которой колеблются частицы, теряет часть своей энергии на их ускорение. Такую потерю энергии монохроматической волной часто называют нелинейным затуханием Ландау²⁰.

Если функция распределения частиц по скоростям неравновесна, как, например, в системе электронный пучок — плазма, то возможен

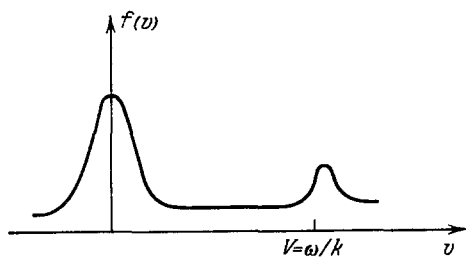


Рис. 11. Распределение электронов по скоростям в системе плазма — пучок.

и обратный процесс — усиление волны конечной амплитуды²¹. Когда фазовая скорость волны «попадает» на левый склон неравновесной функции распределения (рис. 11), то нарастающая в результате линейного усиления Ландау (медленных частиц, отбирающих у волны энергию, меньше, чем быстрых — отдающих) волна увеличивает свою амплитуду и захватывает пролетные частицы. Этот процесс усиления длится, очевидно, только до тех пор, пока числа быстрых и медленных частиц на левом склоне $f(V)$ не выравниваются — образуется плато и волна превратится в нелинейную стационарную (*квазилинейная релаксация*).

е) Цепочки связанных нелинейных осцилляторов

Они представляют собой пример ансамбля сильно взаимодействующих НО с упорядоченной структурой. Интерес к поведению таких ансамблей появился еще в начале века в связи с проблемой теплопроводности и теплоемкости кристаллических тел. При анализе тепловых колебаний кристаллов обычно предполагается, что на каждое нормальное колебание (моду) приходится энергия kT в классической теории или $h\nu/(e^{h\nu/kT} - 1)$ — в квантовой. Но почему при произвольных начальных условиях устанавливается такое универсальное распределение энергии по степеням свободы? Как происходит термализация? Эти вопросы волновали всех, кто интересовался теорией теплоемкости, и, конечно, Л. И. Мандельштама. Возможность термализации естественно связывалась с нелинейностью осцилляторов. Однако первая попытка подтвердить правильность этой общей точки зрения прямым численным счетом — экспериментом — была предпринята лишь в 1952 г. Ферми совместно с Паста и Уламом. Они исследовали на ЭВМ поведение «цепочки из 64 нелинейно связанных осцилляторов:

$$\ddot{u}_i + 2u_i = (u_{i+1} + u_{i-1}) + \alpha [(u_{i+1} - u_i)^n - (u_i - u_{i-1})^n], \quad i = 1, 2, \dots, 64, \quad (1.11)$$

где степень нелинейности n равнялась двум или трем, и обнаружили в поведении системы такие особенности, «которые с самого начала представлялись нам удивительными»²². Система не термализовалась! Вместо этого наблюдалась вначале перекачка энергии из первой интенсивно возбужденной моды в более высокие, но затем, с точностью более 1%, вся энергия вновь собиралась в первой моде — цепочка демонстрировала простое квазипериодическое поведение. Таким образом, стало ясно, что если термализация в цепочках типа (1.11) возможна, то время ее *аномально велико*. Такое «неповиновение» цепочки (1.11) сложившимся представлениям назвали парадоксом Ферми — Паста — Улама. Разгадка этого парадокса, т. е. ответ на вопрос: почему столь сложная система (а несколько позже были проведены численные эксперименты даже с 250 осцилляторами) демонстрирует лишь простое поведение, был найден сравнительно недавно (в 1965 г.²³). Он заключается в том, что по совершенно странному стечению обстоятельств цепочки типа (1.11) оказались близки к вполне интегрируемым системам — маленьким «островкам» в пространстве всех динамических систем*). То, что у вполне интегрируемой системы возможно лишь простое поведение, наглядно следует из сводимости ее (при исполь-

*) К сожалению, у нас нет возможности рассказать здесь об этом подробнее, но, несмотря на «малую мощность» множества интегрируемых систем, их роль в физике нелинейных волн исключительно велика — и как частных примеров, с помощью которых можно догадаться, каковы некоторые общие механизмы нелинейных явлений, и как «эталонных» систем, на базе известного решения которых можно строить приближенные решения «близких» — неинтегрируемых систем (см. гл. 3).

зовании $N-2$ из N интегралов) к фазовой плоскости НО, где все финитные движения периодические, либо приводят к равновесию. Это действительно, протия судьбы: даже два связанных НО при достаточной энергии возбуждения могут вести себя стохастически, а здесь целая цепочка вдруг оказывается близкой к интегрируемой системе.

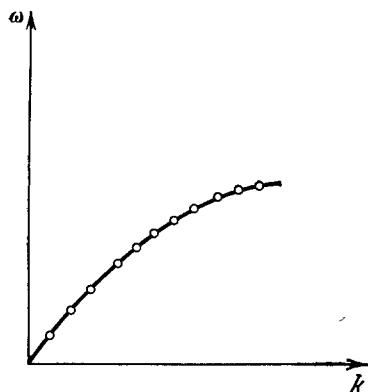


Рис. 12. Закон дисперсии волн в одномерной цепочке.

Теперь уже можно ответить и на вопрос: почему увеличение числа осцилляторов в цепочке практически не сказывается на характере ее поведения. На рис. 12 приведена дисперсионная характеристика одномерной цепочки. Число частиц определяет лишь плотность образующих эту характеристику точек (т. е. число нормальных колебаний цепочки), но никак не влияет на форму кривой — характер дисперсии остается неизменным. При возбуждении первой моды в более длинной цепочке, очевидно, возрастает лишь время возврата — начальная энергия должна успеть распределиться по большему числу нормальных осцилляторов, но характер обмена энергией между модами не изменится. Он не изменится даже, если заменить бесконечную квадратичную цепочку непрерывной средой с квадратичной нелинейностью и подходящим законом дисперсии (см. 12 *)):

$$u_{tt} - u_{xx} - (u^2)_{xx} - \beta u_{xxxx} = 0. \quad (1.13)$$

Недавно было показано ²⁴, что при периодических граничных условиях это уравнение имеет бесконечный набор независимых интегралов движения, т. е. выполняется *необходимое* условие полной интегрируемости, хотя доказать полную интегрируемость пока не удалось. Это удалось сделать (при произвольных граничных условиях) для одноволнового ана-

Как мы видели, обнаружить полную интегрируемость непросто даже для системы второго порядка (фазовое пространство — плоскость), для систем же типа нелинейных цепочек это тем более трудная задача. Сейчас известно, в частности, что вполне интегрируемой является также цепочка с экспоненциально спадающим потенциалом взаимодействия — цепочка Тода:

$$\ddot{u}_n = \exp(u_{n+1} - u_n) - \exp(u_n - u_{n-1}). \quad (1.12)$$

Априорных же признаков интегрируемости подобных систем, к сожалению, не существует.

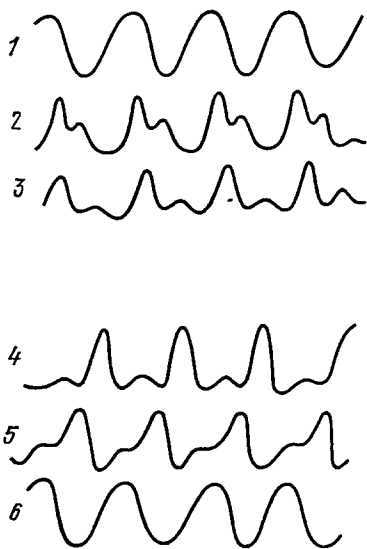


Рис. 13. Периодическая эволюция нелинейных волн в LC-цепочках.

*) Если цепочку заменить непрерывной «нелинейной струной» без дисперсии, мы придем к своеобразному варианту «ультрафиолетовой катастрофы»: ввиду неограниченности и эквидистантности спектра нормальных осцилляторов-мод такой струны запасенная в конечном числе мод начальная энергия будет непрерывно уходить вверх по спектру, и никакого периодического обмена энергией между модами быть не может.

лога (1.13) — уравнения Кортевега — де Фриза (КДВ) (см. (1.3)). Вполне интегрируемой системой оказывается и модифицированное уравнение КДВ, соответствующее цепочке (1.11) с кубичной нелинейностью:

$$u_t + u^2 u_x + \beta u_{xxx} = 0. \quad (1.14)$$

Даже со смешанной нелинейностью $(\alpha_1 u + \alpha_2 u^2) u_x$ уравнение КДВ оказалось вполне интегрируемым.

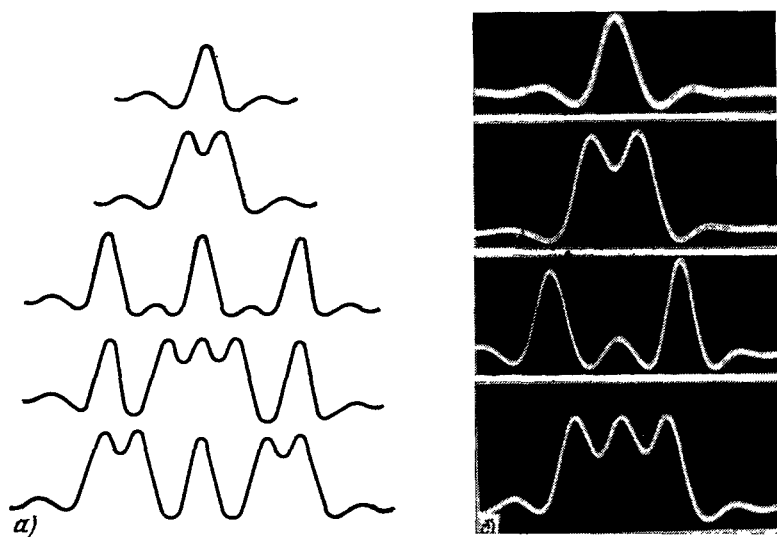


Рис. 14. Многосолитонные решения в нелинейных цепочках:
а) численный эксперимент; б) физический эксперимент.

На рис. 13 показаны результаты физических экспериментов с нелинейными LC -цепочками, которые приближенно описываются уравнениями (1.3) или (1.14). При их синусоидальном возбуждении на границе наблюдалась почти полная *возвращаемость* вдоль цепочки: синусоида трансформировалась в периодическую последовательность солитонов, т. е. возбуждалось большое число осцилляторов-гармоник, затем солитоны вновь превращались в синусоиду — все гармоники возвращали энергию первой.

По-видимому, интегрируемые системы составляют в пространстве систем дискретное множество, и «испортить» интегрируемую систему, превратив ее в систему со сложным или стохастическим поведением, довольно просто — нужно «пошевелить» закон дисперсии или нелинейность. Если, например, закон дисперсии в (1.14) сделать более крутым — заменить u_{xxx} на u_{xxxxx} , стохастичность обнаруживается во вновь получившейся одномерной среде даже в классе стационарных волн

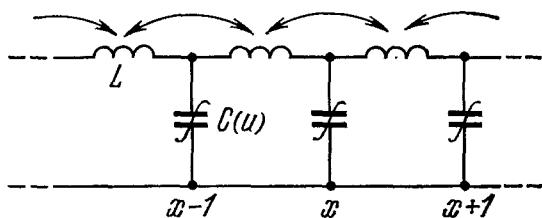


Рис. 15. Эквивалентная схема линии, в которой наблюдались нелинейные волны, представленные на рис. 14.

$u = u(\xi = x - Vt)$. Такие волны описываются уравнением

$$\ddot{u} + \alpha \dot{u} - Vu + u^2 = 0. \quad (1.15)$$

В фазовом пространстве этого НО, как показано в ²⁶, имеется область со сложным поведением (гомоклиническая структура). На рис. 14, а приведены полученные численно решения (1.15), а на рис. 14, б даны осциллограммы подобных волн, которые удалось наблюдать в нелинейной LC-цепочке с эквивалентной схемой, как на рис. 15.

ж) Солитоны как частицы

Кажется, что сами, будучи довольно сложными образованиями, солитоны и солитонные периодические решетки (кноидальные волны) при взаимодействии друг с другом должны вести себя очень сложно. Однако судя

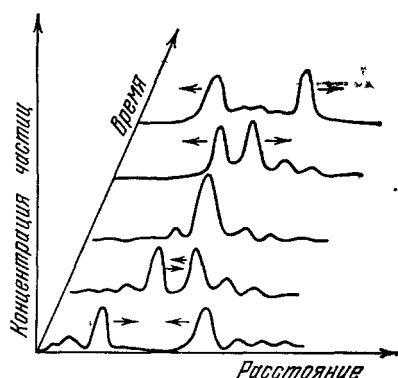


Рис. 16. Столкновение ионно-акустических солитонов ²⁶.

по многим физическим и численным экспериментам это впечатление не всегда верно. Зачастую, наоборот, солитоны при взаимодействии ведут себя на удивление просто — отталкиваются, притягиваются или колеблются друг относительно друга (рис. 16), совсем как классические частицы! Как недавно было установлено, эта внешняя аналогия оказывается довольно глубокой по отношению к слабо взаимодействующим солитонам (или кноидальным волнам). Если различие скоростей (или, что то же самое, энергий) солитонов мало и на протяжении всего процесса расстояние между их максимумами остается большим по сравнению с эффективной шириной, их взаимодействие в буквальном смысле аналогично взаимодействию

частиц и описывается уравнениями Ньютона. Солитон в поле хвоста другого солитона ведет себя как шарик в желобе. Например, для пары солитонов получается уравнение ²⁷

$$\frac{d^2u}{dt^2} - v_E f(v, u) = 0, \quad (1.16)$$

где u — расстояние между максимумами солитонов, $f(u)$ описывает силовое поле хвоста одного солитона в месте расположения другого, $v(E)$ — зависимость скорости солитона от энергии. Подобные (1.16) уравнения при малости взаимодействия выводятся из исходных уравнений для волн путем представления поля в окрестности каждого солитона (его параметры считаются медленно меняющимися) в виде асимптотического ряда и использованием затем требования ограниченности слагаемых этого ряда.

После того как аналогия «солитоны — частицы» установлена (т. е. получено уравнение (1.16)), для описания взаимодействия солитонов достаточно знать лишь вид силовой функции $f(u)$, т. е. характер хвостов солитонов. Если $f(u)$ — монотонна, то солитоны отталкиваются либо притягиваются (при сильном перекрытии их полей уравнение (1.16), конечно, уже не справедливо *). Если же солитоны имеют осциллирующие

*) Большинство найденных точных решений иллюстрирует отталкивание солитонов ²⁸.

хвосты, как, например, солитоны капиллярно-гравитационных волн на мелкой воде²⁹ или в нелинейной искусственной линии передачи с индуктивной связью между звеньями²⁷, то функция $f(u)$ знакопеременна и солитоны, то отталкиваются, то притягиваются, образуя осциллирующую пару (связанное состояние; рис. 17).

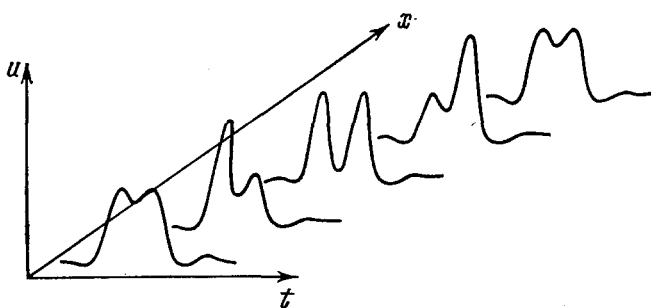


Рис. 17. Осциллирующая пара солитонов.

Аналогичным образом могут быть рассмотрены процессы взаимодействия и большого числа однотипных солитонов, поскольку характер хвостов не зависит от числа сидящих на нем солитонов.

Добавим, что эта аналогия между нелинейными волнами и колебаниями уже не столь тривиальна, как ставшие привычными сейчас модовые аналогии.

2. АВТОКОЛЕБАНИЯ

а) Что это такое?

По выражению Л. И. Мандельштама, когда речь идет о *генерации*, о *создании* колебаний, необходимо «устройство, которое делает возможным возникновение *устойчивых* незатухающих колебаний...»; «колебания их устойчивы в том смысле, что если вы запустите их из какого-либо, в широких пределах произвольного, состояния, то они колеблются с определенным периодом и с определенной амплитудой. Они имеют стремление, *независимо от начальных условий*, устанавливаться в определенном режиме»³⁰. Системы, обладающие таким свойством, А. А. Андронов, в то время аспирант Л. И. Мандельштама, назвал *автоколебательными* и впервые придал им четкое математическое определение, связав автоколебания с предельными циклами Пуанкаре³¹.

Первый «целенаправленный» автогенератор был изобретен и построен в 1657 г. Гюйгенсом, приспособившим к старым «догалилеевым» часам маятник, благодаря которому они превратились в точный инструмент с высокой стабильностью хода (теория таких часов была построена учеником А. А. Андропова Н. Н. Баутиным). Потом были исследованы автоколебания в системе регулирования с сухим трением^{33 *}), появились генера-

*) И для самого Л. И. Мандельштама, и для его учеников характерна исключительная строгость к фактам истории науки и проистекающая отсюда точность ссылок на предшественников. В частности, до 1931 г. Л. И. Мандельштам и А. А. Андронов думали, что первыми сопоставили генерацию с предельными циклами, однако, когда они обнаружили, что интуитивно это было сделано почти одновременно с открытием самих предельных циклов, они при каждом удобном случае напоминали об этом: «... Для того чтобы не извращать исторической перспективы, необходимо сделать предварительно следующее замечание. За десять лет до открытия радио француз-

торы электромагнитных колебаний радиодиапазона и, наконец, генератор на «трехэлектродной катодной трубке» — генератор Ван-дер-Поля³⁵ (рис. 18). Эта схема и описывающее ее уравнение Ван-дер-Поля

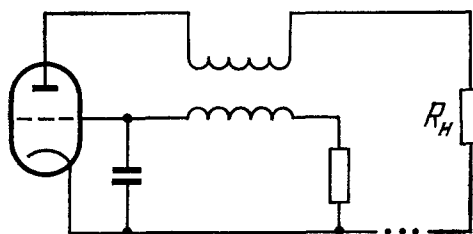


Рис. 18. Схема генератора Ван-дер-Поля.

$$\ddot{u} - \mu(1 - \alpha u^2)\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad (2.1)$$

и сейчас, спустя полвека, служат основной моделью автоколебаний в системах с одной степенью свободы. На рис. 19 приведены фазовые портреты (2.1) при разных значениях параметра нелинейности μ . При $\mu \ll 1$ колебания автогенератора близки к синусоидаль-

ным, нелинейное трение лишь «выбирает» амплитуду устойчивого предельного цикла. Приближенное (укороченное) уравнение для комплексной амплитуды генерируемых колебаний в этом случае имеет вид

$$\dot{a} = \mu \left(a - \frac{3}{4} \alpha |a|^2 a \right). \quad (2.2)$$

Устойчивому циклу соответствует устойчивое состояние равновесия

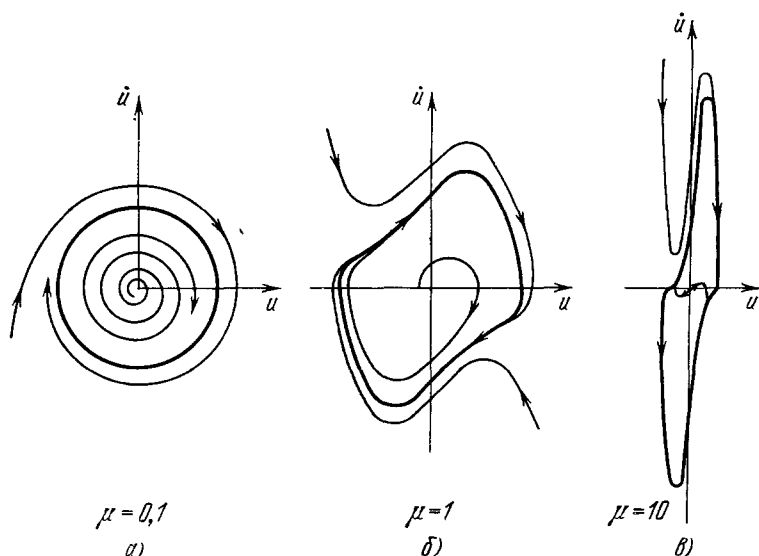


Рис. 19. Фазовые портреты генератора Ван-дер-Поля при различных значениях нелинейности:

а) квазигармонические колебания; б) сильно несинусоидальные; в) релаксационные

$|a_0|^2 = 4/3\alpha$. Мандельштам и Папалекси показали³⁶, что такое приближенное решение (2.1), т. е. $u(t) = |a_0| \cos(\omega_0 t + \varphi)$ оказывается близ-

ский инженер Леотэ (1885), изучая автоколебания в некотором устройстве автоматического регулирования, исследовал фазовое пространство этого устройства и вычертил для него интегральные кривые и предельные циклы (не давая им этого названия: он, по-видимому, не был знаком с опубликованной несколько раньше работой Пуанкаре, в которой предельные циклы впервые появились в математике). По причинам, о которых мы здесь не будем говорить, замечательные работы Леотэ были почти полностью забыты³⁴.

ким к неизвестному точному не только на ограниченном интервале времени $T \sim 1/\mu$, но и на бесконечном интервале, т. е. при $t \rightarrow \infty$ *).

Если же нелинейность не мала, колебания в генераторе будут существенно несинусоидальными, а при $\mu \gg 1$ — релаксационными, состоящими из участков *быстрых* и *медленных* движений. Для нахождения таких разрывных колебаний Мандельштам и Папалекси предложили использовать «*гипотезу скачка*», учитывающую, что при перескоках энергии меняется непрерывно. Реализация этой идеи позволила Андронову и Витту не только внести ясность в понимание релаксационных колебаний генератора Ван-дер-Поля, но и решить ряд новых задач, в частности, об импульсных колебаниях мультивибратора^{38 **)}.

Поскольку практически весь опыт классической теории (по крайней мере для систем с не малой нелинейностью) был связан с анализом автоколебаний на фазовой плоскости, возможность установления периодических движений, отвечающих предельному циклу, ассоциировалась исключительно с такими диссипативными системами, в которых незатухающие колебания совершались лишь за счет *непериодических* источников энергии. Еще несколько лет назад никто бы не решился назвать автогенератором нелинейный осциллятор с трением, находящийся под действием периодической силы:

$$\ddot{u} + \gamma \dot{u} - \alpha u (1 - u^2) = f \sin \omega t. \quad (2.3)$$

Однако это — автогенератор: такой НО демонстрирует незатухающие колебания, параметры которых (интенсивность, частота, а в более общем случае *спектр* и т. д.) *не зависят от конечного изменения начальных условий* и слабо зависят от изменения внешней силы. В частности, в неавтономном фазовом пространстве \ddot{u}, u, t (2.3) имеются устойчивые периодические движения, которым, если смотреть стробоскопически через период внешней силы, соответствуют (в отображении Пуанкаре) *устойчивые неподвижные точки*, как предельным циклам автономных систем.

Интенсивные исследования нелинейных диссипативных систем с трехмерным фазовым пространством позволили в последние годы обнаружить совершенно новый класс автоколебательных систем. Это автогенераторы *шума* — диссипативные системы, совершающие *незатухающие хаотические* колебания, колебания со *сплошным* спектром за счет энергии *нешумовых источников***)*. Замечательно, что даже столь привычный нам осциллятор (2.3) в широкой области параметров является автогенератором шума. Открытие стохастических автоколебаний — это, пожалуй, наиболее яркое достижение современной теории. Почему же оно появилось только сейчас?

б) Простые и сложные аттракторы

Дело в том, что со времен Пуанкаре до недавнего времени предельный цикл был единственным примером нетривиального притягивающего множества — *аттрактора* в фазовом пространстве нелинейных диссипатив-

*) Заметим, что использованный в этой работе нетривиальный физический подход к доказательству чисто математической проблемы оказался очень плодотворным, в частности, при обосновании аналогичных приближенных методов в теории нелинейных волн³⁷.

**) Аналогичные идеи затем использовались и при исследовании распределенных нелинейных систем, в частности при выводе граничных условий на разрыве в теории электромагнитных ударных волн³².

***)) Более строгое определение стохастических автоколебаний, подобно определению периодических автоколебаний (которое базируется на предельных циклах), требует соответствующего математического образа. Таким образом является странный аттрактор (см. ниже).

ных систем *). Правда, уже довольно давно были обнаружены сложные многопетлевые предельные циклы, соответствующие сложным периодическим автоколебаниям. Они, в частности, наблюдались экспериментально в системе авторегулирования температуры одним из аспирантов Андропова³⁹, работавшим по намеченной им программе «выхода с плоскости в трехмерное пространство». Позднее устойчивые многопериодические движения были обнаружены при исследовании синхронизации автогенераторов⁴⁰. По-видимому, обнаружение сложных предельных циклов, а затем и бифуркаций, показывающих дорогу к их дальнейшему усложнению, уже могло бы послужить причиной для расширения представлений об автоколебаниях. Однако фактически это произошло несколько позже, когда появились результаты численных экспериментов, доказывающих существование «непериодических фазовых потоков» в диссипативных неравновесных системах (Э. Лоренц, 1963 г.⁴¹). Практически в то же время в абстрактной теории динамических систем появились новые математические объекты — сложные аттракторы, названные Рюэлем и Такенсом «странными»⁴².

Примером странного аттрактора — притягивающего множества, на котором нет устойчивых траекторий и где все они ведут себя сложно и запутанно, — служит притягивающая структура из седловых циклов (когда все траектории, сматывающиеся с них, стремятся к циклам той же структуры). Подобное множество седловых циклов может быть «эволюционным остатком» гомоклинической структуры: сама «гомоклиника» в диссипативной системе «вещь» негрубая — при малом изменении параметров она исчезает, рожденная же ею стохастичность может остаться. Именно так рождается, в частности, странный аттрактор в фазовом пространстве неавтономного НО с трением (см. (2.3)).

Замечательно, что сейчас, когда сформировалась новая точка зрения на стохастические автоколебания (собственная сложная динамика неконсервативной системы, а не *усилитель флуктуаций!*), они обнаруживаются в очень простых, по существу, классических системах, например, таких, как связанные автогенераторы или релаксационный генератор с полутора степенями свободы^{43, 44}. Их находят потому, что теперь знают, что именно искать **). Мы еще вернемся к стохастическим автоколебаниям в связи с обсуждением конкретных моделей. А сейчас кратко остановимся на классических результатах.

в) Новый интерес к старым задачам. Автоколебания в пространстве

На рис. 20 показана схема двухконтурного лампового генератора, исследовавшегося Ван-дер-Полем и Андроновым и Виттом почти столетия назад. Уже тогда были обнаружены наиболее важные эффекты, характерные для взаимодействия «элементарных автогенераторов», например таких, как (2.2). Усредненные уравнения для комплексных амплитуд таких автоколебательных мод с независимыми частотами имеют вид

$$\dot{a}_j = \mu h_j [1 - \alpha_j (|a_j|^2 + \sum_i \rho_{ji} |a_i|^2)] a_j, \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (2.4)$$

Фазовые портреты этой системы при $N = 2$ и разных значениях параметров показаны на рис. 21. Они иллюстрируют классические эффекты

*) В неконсервативных системах только аттракторы отвечают долгоживущим колебаниям.

**) Это же было 30 лет назад с предельными циклами: после того как Андронов объявил за ними «охоту», они обнаружались в химии, биологии, экологии и других зачастую неожиданных областях и «от них не стало проходу».

конкуренции мод, затягивания и сосуществования колебаний. Ввиду специфики нелинейности в вандерполевском генераторе незамеченным в работах Андронова и Ван-дер-Поля остался лишь тривиальный, по существу, эффект одновременной генерации двух мод, возможный при их слабой связи (см. рис. 21, *г*) (случай типичный, например, для газового лазера с неоднородно уширенной линией активного вещества). Явление конкуренции, наблюдаемое при сильной связи мод, объясняется зависимостью нелинейного затухания одной из мод от амплитуды (энергии) другой. Если моды равноправны и связь взаимна, то устанавливается режим генерации той моды, которая преобладала вначале. Зависимость от начальных условий приводит к тому, что для перехода системы из одного режима в другой необходимо заметно изменить частоту одной из мод, т. е. изменить расстройку, причем значения расстройки при движении «туда» и «обратно» не совпадают (гистерезис). Интервал расстроек, в котором частота генерации зависит от предыстории, называют интервалом затягивания.

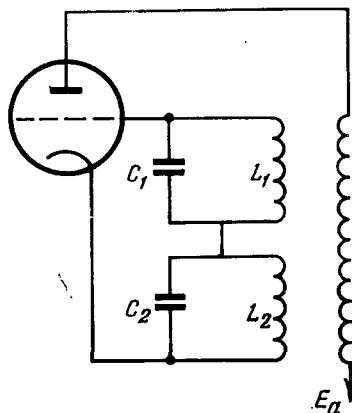


Рис. 20. Двухконтурные автогенераторы.

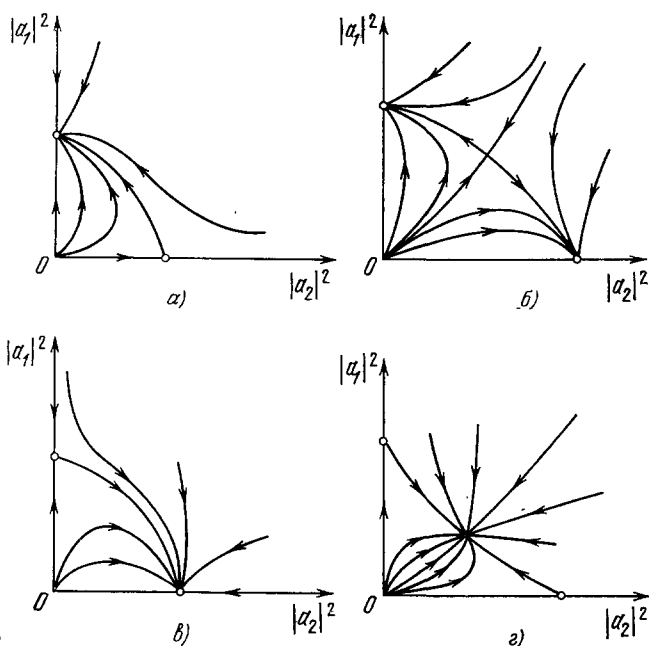


Рис. 21. Фазовые портреты системы (2.4), иллюстрирующие эффект конкуренции, затягивания и сосуществования колебаний ($N=2$).

В последние два десятилетия вновь возрос интерес к этим классическим и ставшим почти азбучными, благодаря школе Л. И. Мандельштама, эффектам. В первую очередь этот интерес связан с появлением активных распределенных систем (молекулярные и оптические квантовые генера-

торы, лазеры на циклотронном резонансе и т. д.), а также созданием систем с большим числом активных элементов. В тех случаях, когда активные приборы в целях сложения мощности или повышения к. п. д. объеди-

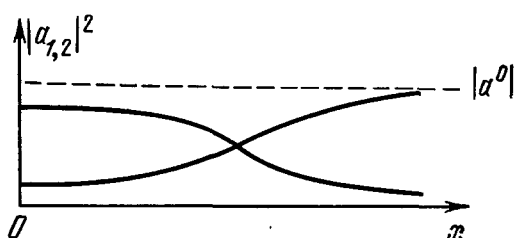


Рис. 22. Пространственная конкуренция волн.

няются в упорядоченные пространственные структуры, получившиеся системы становятся аналогичны распределенным. От способа объединения активных элементов (диодов Гана, ЛПД и др.) зависит лишь характер дисперсии получившейся «среды». Зачастую классические колебательные эффекты буквально переносятся на волны — ввиду уже упоминавшейся пространственно-временной аналогии между взаимодействием нормальных колебаний (мод) во времени и стационарным взаимодействием волн в пространстве. Для примера на рис. 22 приведена иллюстрация пространственного аналога эффекта конкуренции колебаний в активной нелинейной среде с вязкостью (высокочастотной или низкочастотной). Этот процесс описывается уравнениями (2.4), где t заменено на x . Основываясь на эффекте пространственной

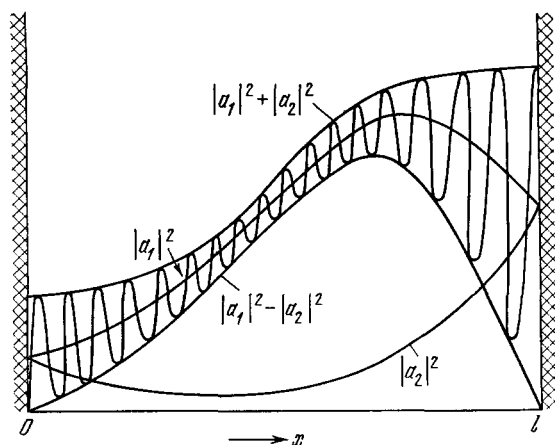


Рис. 23. Несимметричный пространственно-неоднородный режим в резонаторе с идеальным отражением, заполненном нелинейной средой.

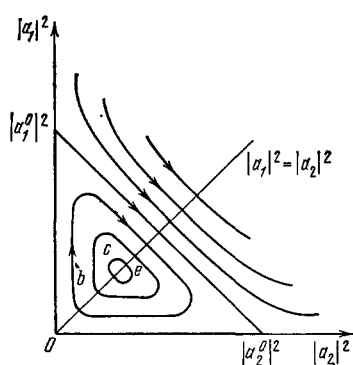


Рис. 24. Фазовый портрет системы (2.5)

конкуренции, можно построить, в частности, любопытные волновые приборы, выделяющие из двух или нескольких априори неизвестных квазигармонических сигналов один с максимальной (или минимальной) частотой⁴⁵.

Именно эффектом конкуренции волн объясняется и кажущееся совершенно удивительным установление в *пространственно-симметричном* распределенном автогенераторе (например, с идеальным отражением на границах) *несимметричных* вдоль координаты x стационарных распределений поля с преобладанием одной из встречных волн (рис. 23). Уравнение для амплитуд $a_{1,2}(x, t)$ этих волн при простейших идеализациях^{46, 47} записывается в виде

$$\frac{\partial a_{1,2}}{\partial t} \pm v \frac{\partial a_{1,2}}{\partial x} = \mu h [1 - \alpha (|a_{1,2}|^2 + 2 |a_{2,1}|^2)] a_{1,2} \quad (2.5)$$

с граничными условиями $|a_1(x, t)| = |a_2(x, t)|$, где l — длина резонатора. Распределение интенсивностей $|a_{1,2}(x)|^2$ в стационарном режиме легко восстановить по виду траекторий на фазовой плоскости (2.5) при $\partial/\partial t \equiv 0$ (рис. 24). В коротком резонаторе, где эффект конкуренции проявиться не успевает, возможен только банальный режим стоячей волны — на фазовой плоскости рис. 24 ему соответствует состояние равновесия на прямой $|a_1|^2 = |a_2|^2$. В длинном же резонаторе черпающие энергию из общего источника встречные волны подавляют одна другую в большей части резонатора, выравниваясь лишь вблизи отражающих стенок. В результате режим стоячей волны оказывается неустойчивым и устанавливается один из пространственно-неоднородных режимов, которым на рис. 24 отвечают траектории типа *ebc* или *ebc*.

г) Сильная нелинейность. Еще раз о нелинейном резонансе

Другая сторона возродившегося в последние годы интереса к классическим задачам теории автоколебаний связана с успехами в исследовании многих существенно нелинейных физически важных систем с трехмерным фазовым пространством. К их числу относится и упоминавшийся нелинейный осциллятор с трением, на который действует периодическая сила, и популярная сейчас в гидродинамике система Лоренца, описывающая термоконвекцию в подогреваемом снизу слое жидкости, и др.^{43, 48}.

Основа этих современных успехов была заложена почти полвека назад Л. И. Мандельштамом и его учениками, в первую очередь А. А. Андроновым. Надо сказать, что к тому времени, когда внимание Л. И. Мандельштама было привлечено к проблемам генерации несинусоидальных колебаний (примерно 1927 г.), в этом направлении были решены лишь единичные задачи, казавшиеся совершенно уникальными, если не казуистическими. Так, с помощью *метода приспособывания* (превращения системы в кусочно-линейную с последующим сопряжением постоянных интегрирования (для непрерывности решения и производных по t , или удовлетворения «условиям скачка»)) Н. Д. Папалекси решил задачу о сильно нелинейных колебаниях в выпрямителе (1911 г.), затем А. Зоммерфельд исследовал вынужденные колебания дуги (1914 г.), а в 1922 г. Н. Д. Папалекси рассмотрел периодические колебания в ламповом генераторе с кусочно-линейной характеристикой лампы. Однако наиболее принципиальный здесь вопрос об *устойчивости* найденных периодических движений даже не ставился. По-видимому, впервые, в частном случае релаксационного генератора, задача об устойчивости была решена Ван-дер-Полем с помощью графических построений на фазовой плоскости (1926 г.). В 1927 г. Л. И. Мандельштам предложил А. А. Андронову дать общий метод исследования устойчивости периодических движений, получаемых методом приспособывания и «попытаться подвести под этот метод математическую базу». Из этой задачи выросла замечательная работа А. А. Андропова «Предельные циклы Пуанкаре и теория автоколебаний», о которой мы уже говорили и оценивая которую Л. И. Мандельштам заметил: «...здесь мы имеем действительно адекватный нашим нелинейным задачам, не имеющих «линейных воспоминаний» математический аппарат... Опираясь на этот аппарат, можно будет создавать *новые понятия*, специфические для *нелинейных систем*, можно будет выработать *новые руководящие точки зрения*, которые позволят *мыслить нелинейно*». Продолжая эти работы Андронову и его сотрудникам с помощью метода точечных отображений Пуанкаре — Брауэра — Биркгофа, удалось решить несколько

сильно нелинейных задач об автоколебаниях в системах автоматического регулирования и одновременно получить ответ на поставленный Л.И. Мандельштамом вопрос об устойчивости периодических решений, найденных методом припасовывания. Как выразился сам Андронов, «весь этот цикл работ с некоторой точки зрения можно рассматривать как осуществление старой идеи Л. И. Мандельштама о математическом воспитании метода припасовывания».

Сформулированные тридцать с лишним лет назад (1944 г.) А. А. Андроновым общие соображения по применению теории точечных отображений к исследованию конкретных нелинейных систем вместе с введенной

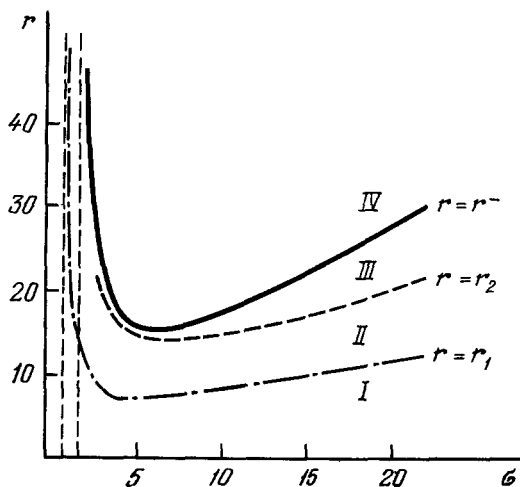


рис. 25. Бифуркационная диаграмма системы Лоренца.

и сейчас достаточно высок, чтобы использовать всю мощь современной математики для анализа конкретных систем. И, что особенно важно, этот уровень понимания позволяет осознанно пользоваться численным и аналоговым моделированием не просто для счета реализаций, а для полного, в том числе и «эмбриологического» исследования динамики системы с помощью машинного построения и анализа отображений. Такой подход позволяет получать даже вполне строгие результаты или, как иногда говорят, доказывать теоремы с помощью машины.

Таким образом, например, сейчас детально исследованы автоколебания в системе Лоренца:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u} &= -\sigma(u-v), \\ \dot{v} &= -v+ru-uw, \\ \dot{w} &= -bw+uv. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Бифуркационная диаграмма смены режимов этой системы приведена на рис. 25. Очень кратко опишем эти бифуркации*). Они исследованы с помощью машинного анализа отображения Пуанкаре точек секущей плоскости Σ , проходящей трансверсально к оси w через нетривиальные

*) О системе Лоренца и ее приложениях сейчас написано довольно много (см., например ⁴³); поэтому мы даже не обсуждаем возможный физический смысл переменных. Наша цель проиллюстрировать андроновскую идею об эволюционном подходе к исследованию динамической системы на данном совсем нетривиальном примере.

им в теорию колебаний идей исследования динамической системы «исторически» или «эмбриологически»⁵⁰ (т. е. исследование эволюции структуры фазового пространства при изменении параметров системы плюс использование теории Пуанкаре о точках бифуркаций и смене устойчивости), оказались чрезвычайно плодотворными. Современные успехи в понимании трехмерных динамических систем, в том числе и открытие странных аттракторов, опираются именно на эти идеи.

Конечно, уровень этого понимания сейчас еще очень далек от уровня понимания динамики двумерных систем (и неизвестно, догонит ли его), но он уже

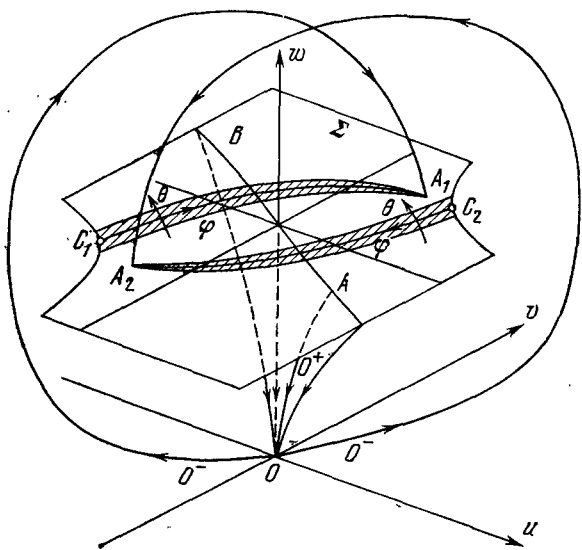


Рис. 26. Фазовое пространство системы Лоренца.

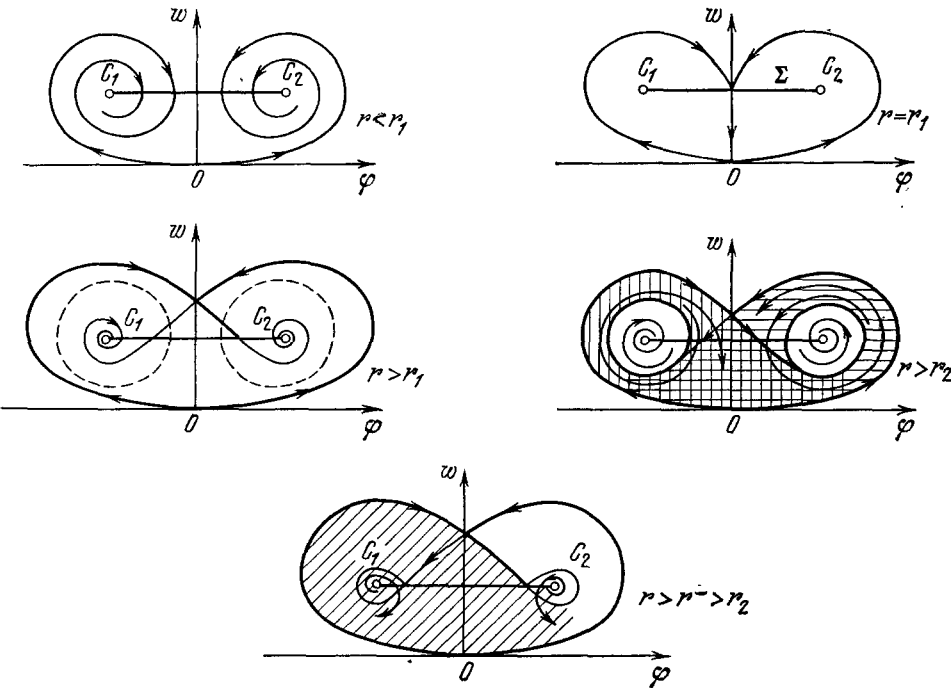


Рис. 27. Поведение неустойчивых сепаратрис в проекции на плоскость.

состояния равновесия $C_{1,2}$ (рис. 26). Это двумерное отображение оказывается сильно сжимающим в одном из направлений (θ на Σ ; см. рис. 26) и растягивающим в другом. В результате многократного применения отображения всякая ячейка на Σ превращается в «линии» (они имеют тонкую канторовскую структуру), и поэтому можно ограничиться анализом *одномерного* отображения линий в себя и друг в друга. На рис. 27 показано поведение неустойчивых сепаратрис нулевого состояния равновесия (седло — узел), определяющие свойства такого одномерного отображения.

При $r < r_1$ сепаратрисы описывают затухающие пульсации с сохранением начальной фазы колебаний, при $r = r_1$ неустойчивые сепаратрисы

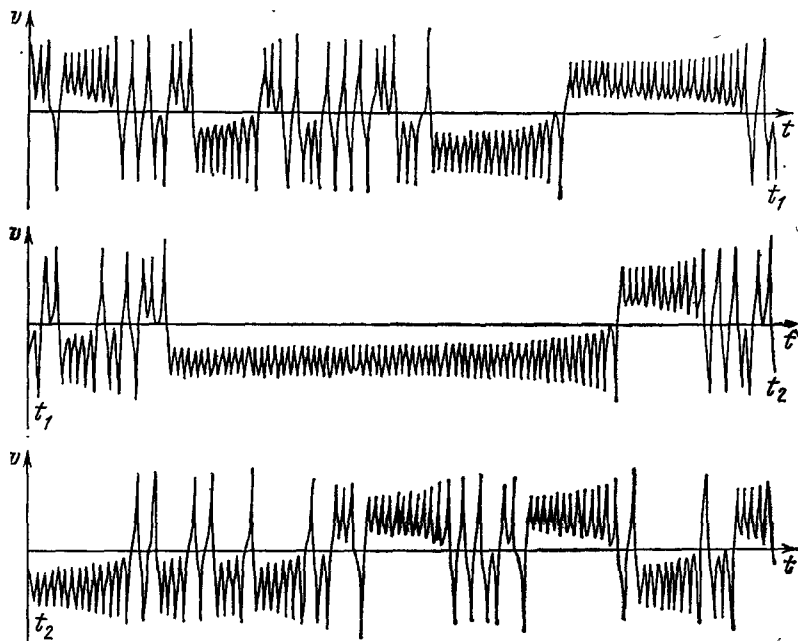


Рис. 28. Осциллограмма колебаний $v(t)$ в системе Лоренца.

касаются устойчивой двумерной сепаратрисы AB (см. рис. 26) и при $r > r_1$ уже переходят от своего устойчивого фокуса C_1 или C_2 к «чужому». Одновременно из петель сепаратрис рождаются два симметрично расположенных предельных цикла, которые, однако, неустойчивы. При $r > r_2$ сепаратрисы стремятся уже к этим вновь родившимся циклам, а не к состояниям равновесия C_1 и C_2 , которые по-прежнему остаются устойчивыми: это момент рождения еще одного (помимо $C_{1,2}$) аттрактора — *странныго*.

Внутри этого аттрактора, *ограниченного* неустойчивыми сепаратрисами и циклами, траектории ведут себя очень сложно (соответствующая осциллограмма $v(t)$ приведена на рис. 28). Эта сложность, в частности, связана с принадлежностью аттрактору счетного множества неустойчивых циклов (обязанных своим происхождением существовавшей в прошлом гомоклинической структуре) — траектория совершает несколько оборотов вблизи одного цикла, затем отбрасывается к другому, крутится возле него и так далее. Поскольку помимо *странного* аттрактора в этой области параметров имеется еще два «нестранных», установится ли в системе статический режим или режим стохастических пульсаций, зависит от начальных условий. С ростом $r > r_2$ радиус неустойчивых циклов

уменьшается и при $r = r^-$ они «влипают» в состояния равновесия C_1 и C_2 , передав им свою неустойчивость, т. е. в фазовом пространстве (2.6) остается лишь один аттрактор — странный.

Столь же подробно путем использования результатов качественной теории и машинного анализа точечных отображений удалось исследовать и автоколебания, возникающие при нелинейном резонансе (см. (2.3)).

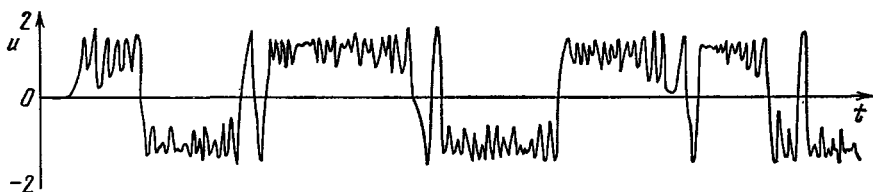


Рис. 29. Стохастические автоколебания в системе (2.3) (численный эксперимент)⁸⁷.

При малых трении и внешней силе здесь, как и в недиссипативном аналоге (1.9), используя метод Мельникова¹⁵, можно определить аналитически значение силы f , при которой касаются сепаратрисы седлового периодического движения и возникает гомоклиническая структура. Затем при увеличении f она исчезает, но счетное число периодических устойчивых и неустойчивых движений внутри аттрактора $|u| \leq f/\gamma$ (области, куда все траектории только входят) остается. Далее, после последовательности бифуркаций — удвоения устойчивых циклов, движение становится непериодическим. На рис. 29 показано поведение такого осциллятора во времени: видно, что движение непериодическое.

д) Генераторы шума

Сложившиеся представления о стохастических автоколебаниях позволили сконструировать собственно генератор шума в радиодиапазоне⁵¹. Он получается путем совсем небольших изменений в классической схеме вандерполевского генератора (рис. 30) — введением в сеточный контур нелинейного элемента с S-образной вольт-амперной характеристикой. Таким элементом может быть, например, туннельный диод. Уравнение этой схемы в пренебрежении нелинейностью характеристики лампы можно записать так:

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 - 2h\dot{u}_1 + u_1 &= -au_2, \\ \mu\dot{u}_2 &= \dot{u}_1 - f(u_2), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $u_1 = I/I_m$, $u_2 = V/V_m$, $t = t_{\text{разм}}/\sqrt{LC}$, $h = (MS - rC)/2\sqrt{LC}$ — инкремент нарастания колебаний в контуре, $a = V_m/\sqrt{L/C}I_m$ — характеризует влияние нелинейного элемента на эти колебания, $\mu = (V_m/I_m\sqrt{LC})$, $C_1 \ll 1$ — малый параметр, учитывающий паразитную емкость туннельного диода.

Качественно работу этого генератора можно описать таким образом. Пока ток I и напряжение u_1 малы, туннельный диод не оказывает существенного влияния на колебания в контуре, нарастающие за счет вносимого лампой отрицательного сопротивления. При этом напряжение на туннельном диоде, равное $V(I)$, определяется левой веткой характеристики

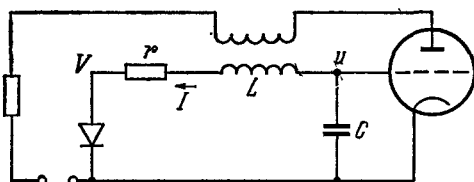


Рис. 30. Схема простого генератора шума⁵¹.

диода. Когда ток достигает значения I_m , происходит переключение диода и устанавливается напряжение V_m . Затем ток I уменьшается (при этом напряжение определяется правой веткой характеристики), и происходит обратное переключение диода (рис. 31).

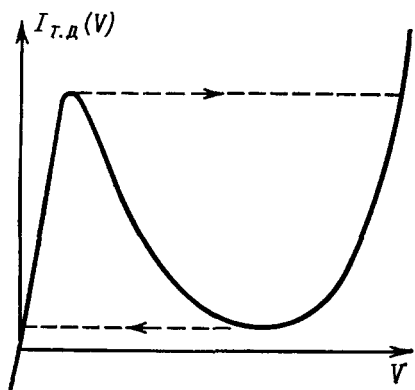


Рис. 31. Вольт-амперная характеристика туннельного диода.

Другими словами, когда амплитуда колебаний в контуре становится достаточно большой, скачком возрастают потери и амплитуда колебаний падает. Это означает, что генерируемый сигнал должен представлять последовательность цугов нарастающих колебаний, что и получается в эксперименте (рис. 32). Конечно, пользуясь лишь этими качественными соображениями, нельзя доказать, что колебания будут стохастическими. Здесь необходимо вернуться к математической модели (2.7) и анализу точечных отображений⁵¹. Вид функции отображения для типичных параметров реально работающего генератора приведен на рис. 33.



Рис. 32. Осциллограмма колебаний в схеме рис. 30.

В области, ограниченной тонкой линией (аттрактор), отображение растягивающее. Это означает, что все траектории на аттракторе неустойчивы *) и при $t \rightarrow \infty$ система забывает о начальных условиях — плотность вероятности иметь какое-либо значение u при многократном применении отображения стремится к *инвариантному* распределению, не зависящему от распределения плотности вероятностей начальных флуктуаций. Добавим, что статистические характеристики режима стационарной генерации устойчивы не только по отношению к начальным возмущениям, но и по отношению к внешним непрерывно действующим флуктуациям: Действительно, генератор шума!

е) Порядок из беспорядка.

Синергетика

Неупорядоченное поведение очень простой нелинейной системы (маятника в периодическом поле или дополненного нелинейным элементом ван-дерполевского генератора), конечно, совершенно поразительное явление,

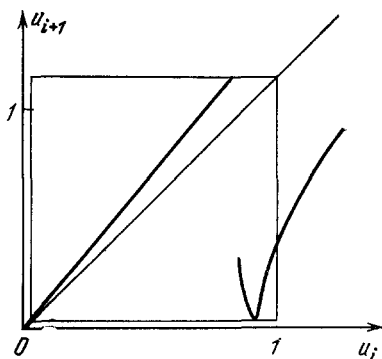


Рис. 33. Точечное отображение для системы (2.7) при $\mu = 0$.

*) Точнее, почти все, поскольку судьба периодических траекторий, опирающихся на «макушки», пока не выяснена. Однако даже если они устойчивы, область их притяжения столь мала, что из-за наличия флуктуаций в физической системе они не реализуются.

но не менее поразительно и обратное — регулярное, хорошо организованное поведение очень сложных неупорядоченных систем с большим и даже бесконечным числом степеней свободы. На рис. 34 показаны пространственные структуры, возникающие в плоском горизонтальном слое силиконового масла при его подогреве снизу — из *беспорядочных начальных возмущений*, независимо от размеров сосуда и геометрии его боковых стенок, возникает *упорядоченная структура* нетривиальной формы. Как такая макроскопическая структура могла появиться в однородной в среднем неравновесной среде, где в результате неустойчивости из флуктуаций вырастают возмущения самых различных и независимых масштабов? Аналогичный вопрос возникает и при попытке объяснения, например, спиральных галактик в астрофизике или ревербераторов — спиральных волн — в биологии и химии ⁵².

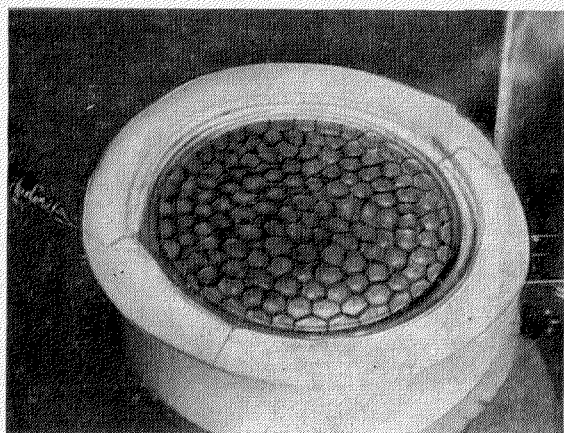


Рис. 34. Ячейки Бенара при термоконвекции.

Проблема образования упорядоченных временных и пространственных структур в сложных системах очень общая; она представляет интерес для физиков, биологов, социологов и даже медиков (волны эпидемий). Сейчас фактически возникла новая область науки — синергетика (от греческого «работающие вместе» *), занимающаяся в [общей постановке этой и близкими к ней проблемами существования, устойчивости и разрушения (возникновения турбулентности) высоко организованных структур в неравновесных системах различной природы. Однако вернемся к конвекции: чем объясняется возникновение структур (ячеек Бенара), форма и масштаб которых не зависят в конечных пределах от начальных и граничных условий? Двумя явлениями, впервые наиболее полно исследованными еще в довоенные годы А. А. Андроновым, — *взаимной синхронизацией и конкуренцией* различных мод. Проще всего это пояснить как раз для конвекции в силиконовом масле (см. рис. 34), для которого существенна зависимость вязкости от температуры $\nu(T)$. При малом превышении порога неустойчивости в слое масла возникают конвективные движения с характерным масштабом k_0 (рис. 35). Нарастанию возмущений с волновым вектором k_{01} соответствует установление простейшей пространственной структуры в виде конвективных валов. Однако в случае, когда вязкость зависит от температуры**, эта структура оказывается неустойчивой по отношению к возбуждению мод с другой ориентацией вектора k , например, валов, расположенных поперек исходных (сосуществование тех и других приводит к образованию прямоугольных структур). Обычно зависимость $\nu(T)$ можно считать квадратичной, при этом появляется резонансная связь между тремя модами одинакового масштаба $k_{01} \pm k_{02} = \pm k_{03}$ (рис. 36). Суперпозиция этих мод с

*) Первый Международный симпозиум по синергетике состоялся в 1972 г. ⁵³, с тех пор состоялись еще два — в 1974 и 1977 гг.

**) К аналогичным эффектам приводит и зависимость от температуры поверхностного натяжения или других диссипативных параметров.

равными амплитудами и синхронизованными в пространстве фазами $-v_z(x, y) \sim \cos \frac{k_0}{2}x \cdot \cos \frac{1}{4}(k_0x + \sqrt{3} k_0y) \cdot \cos \frac{1}{4}(\dots)$ как раз и соответствует нетривиальным пространственным структурам в виде шести-гранных ячеек Бенара (v_z — вертикальная компонента скорости жидкости) —

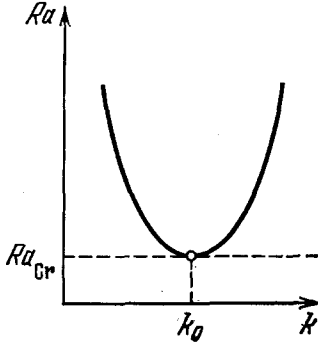


Рис. 35. Нейтральная кривая для термоконвекции в слое.

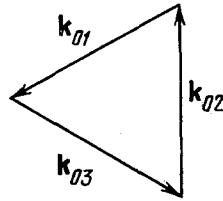


Рис. 36. Резонансная тройка мод.

жидкость поднимается в центре ячейки и опускается вблизи ее граней (или наоборот, если $\partial v / \partial T > 0$). Ориентация ячеек в пространстве произвольна и зависит от начальных условий. Конкуренция же мод разных масштабов обеспечивает устойчивость данной структуры по отношению к возникновению других.

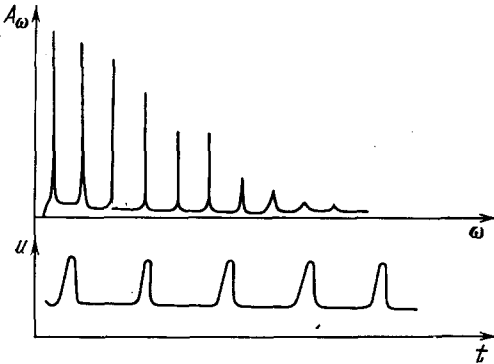


Рис. 37. Автоколебания в виде кноидальных волн (спектр и осциллограмма), наблюдавшиеся в активной линии с мнимой (диссипативной) дисперсией.

Приведем еще один пример, показывающий роль эффекта синхронизации мод в возникновении упорядоченных структур в неравновесной среде. Это — установление солитонов, в частности, в активной среде радиодиапазона, где одномерные волны описываются уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + v_0 \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^{2n+1} u}{\partial x^{2n+1}} = \\ = \alpha u^2 - v_1 u + v_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad (2.8) \end{aligned}$$

здесь β характеризует дисперсию, $v_{1,2}$ соответственно низкочастотную и высокочастотную диссипацию, α — активную нелинейность. При сильной дисперсии эволюцию возмущений в такой среде можно описать с помощью небольшого числа мод, например, с частотами ω и 2ω . Уравнения для их амплитуд и фаз, с точностью до слагаемых, ответственных за линейную диссипацию, получаются аналогичными (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{d\xi} = A_1 A_2 \cos \Phi - \delta_1 A_1, \quad \frac{dA_2}{d\xi} = \frac{1}{2} A_1^2 \cos \Phi - \delta_2 A_2, \\ \frac{d\Phi}{d\xi} = - \left(2A_2 + \frac{A_1^2}{2A_2} \right) \sin \Phi \quad (\Phi = \varphi_2 - 2\varphi_1), \end{aligned} \quad (2.9)$$

но с одним принципиальным отличием — знаки правых частей уравнений для A_1 и A_2 одинаковы. Физически это означает, что гармоники затухают

или нарастают одновременно, т. е. волны обмениваются энергией *не друг с другом*, а с неравновесной средой. При превышении порога неустойчи-

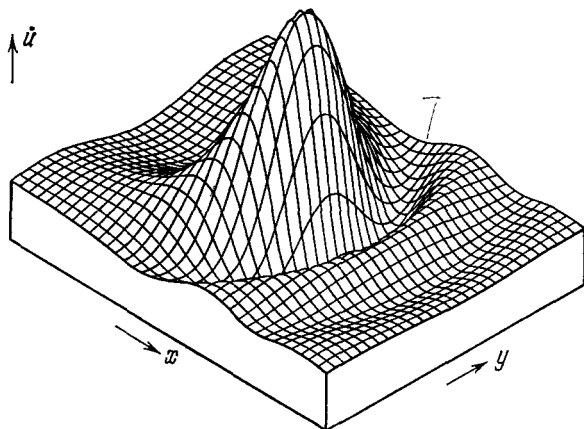


Рис. 38. Подковообразный солитон, полученный при численном решении уравнения (2.10) ⁵⁴.

вости и благоприятной разности фаз ($\Phi = 0, \pi$) амплитуды гармоник в рамках этой модели обращаются в бесконечность за конечное время (или на конечном расстоянии):

$A_{1,2} \sim 1/(t^0 - t)$ ($t^0 \sim 1/A_{1,2}(0)$) —

взрывная неустойчивость. Очень

важно, что при взрывной

неустойчивости происходит быст-

рая *взаимная синхронизация* фаз

взаимодействующих волн ⁴⁷. Такая

синхронизация при взаимодей-

ствии большого числа гармоник в

среде без дисперсии ($\beta = 0$) *)

приводит к установлению нелиней-

ных волн и, в частности, солито-

нов: $u(x, t) = (3v_1/\alpha) \operatorname{ch}^{-2} \times$

$\times [V v_1/2v_2 (x - v_0 t)]$, которые и

наблюдались экспериментально

(рис. 37). В отличие от «консерва-

тивных» солитонов (см. гл. 1), такие

солитоны распространяются лишь

со скоростью линейных возмуще-

ний v_0 . Фазовый портрет (2.8.)

при $\beta = 0$ для стационарных волн

$u = u(x - v_0 t)$ совпадает с рис.

2, б **).

Гораздо более сложная струк-

тура возникает в результате син-

хронизации мод в неоднородной

неравновесной среде — стекающей

плёнке жидкости. Для отклоне-

ния u поверхности плёнки от невозмущенного уровня можно написать

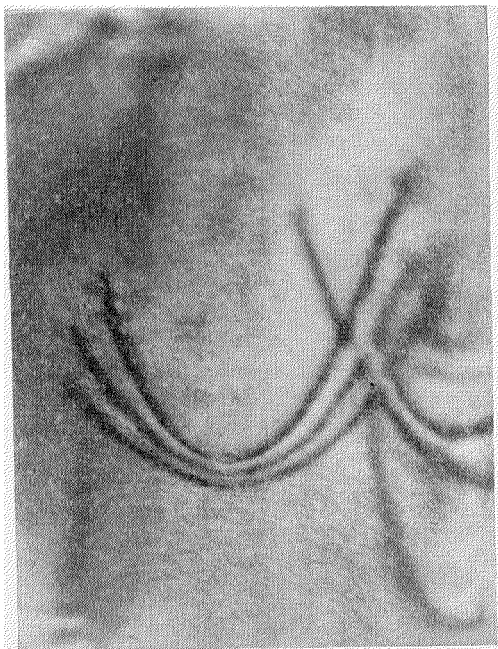


Рис. 39. Волны на стекающей плёнке.

*) Число взаимодействующих мод в этом случае лимитируется высокочастотным затуханием.

**) То, что фазовый портрет автоколебательной системы (для стационарных волн) совпадает с фазовым портретом консервативного осциллятора, на первый взгляд кажется

приближенное уравнение

$$u_t + 4uu_x + u_{xx} + \Delta_1^2 u - nu_{yy} = 0 \quad (2.10)$$

($n > 0$, $\Delta_1^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$). Численное решение этого уравнения при $u(x \rightarrow \pm\infty) = 0$ приведено на рис. 38; это подковообразный солитон с осциллирующим передним фронтом и монотонно спадающим задним. Самое удивительное в этом решении то, что оно довольно хорошо описывает экспериментально наблюдаемые волны на реально стекающей пленке (рис. 39).

Трудно предвидеть будущее синергетики, но уже сейчас видно, что довольно плотно перекрываясь с теорией нелинейных колебаний и волн в неравновесных средах, эта начинающаяся наука о самоорганизации является тем не менее совершенно самостоятельной, и, как в свое время классическая теория нелинейных колебаний, она привлекает к себе специалистов самых разных специальностей.

ж) О возникновении турбулентности

Антипод взаимной синхронизации генераторов — эффект их *взаимной стохастизации* — нов лишь применительно к системе из небольшого числа связанных автогенераторов ^{43, 44}. Для ансамблей же из большого числа генераторов, как уже говорилось, вызывал удивление скорее факт их синхронизации, хаотическое же, турбулентное их поведение, казалось естественным и почти очевидным. Поэтому вопрос о возникновении турбулентности — стохастических автоколебаний в сплошной среде *) почти исключительно связывался с возбуждением большого числа «автоколебательных» мод с несоизмеримыми частотами и независимыми фазами ⁵⁸. Сейчас, когда появились более четкие представления о стохастичности автоколебательных систем, стало ясно, что, с одной стороны, сам факт возбуждения большого числа степеней свободы еще недостаточен для объяснения возникновения турбулентности, а с другой, — турбулентность возникает и когда число возбужденных мод в среде невелико. Это важные и увлекательные проблемы, ими сейчас много занимаются, но говорить о них здесь подробно мы не можем и сошлемся на недавно опубликованные обзорные статьи ^{42, 43, 56}.

Добавим только, что, в отличие от классической теории колебаний времен Мандельштама, рассматривавшей лишь проблемы воздействия флуктуаций на нелинейные системы, т. е. *преобразование* флуктуаций, в современной теории колебаний очень велик интерес к процессу *рождения «статистики»* в нелинейных динамических системах.

3. МОДУЛЯЦИЯ

а) Синусоида с переменной амплитудой и частотой

«Приближенно простые» — медленно уклоняющиеся от синусоиды — колебания, обсуждались Рэлеем еще в 1892 г., однако потребность в широком исследовании таких колебаний появилась несколько позже, в связи с задачами приема и передачи радиосигналов. «Без модуляции нет сиг-

парадоксальным. Однако объясняется этот факт довольно просто — ввиду отсутствия дисперсии энергетический баланс процессов диссипация — активность в данном случае выполняется сразу для непрерывного множества финитных стационарных волн, бегущих со скоростью v_0 . Этим разным волнам и соответствует континуум траекторий на «консервативной» фазовой плоскости (см. рис. 2, б).

*) После появления модели Ландау ⁵⁸ наиболее ясно о связи автоколебаний с турбулентностью высказался ученик Л. И. Мандельштама Г. С. Горелик ⁵⁵.

нала... нет того, для чего создана радиотехника, нет передачи»^{57 *}). Как только начали интенсивно заниматься модуляцией, сразу же возникли вопросы: что такое модулированное колебание — «синусоида с переменной амплитудой и частотой» или набор синусоид с разными частотами и амплитудами? Другими словами: есть ли разница между временным (для волн — пространственно-временным) и спектральным (модовым) подходом? Именно эти вопросы фактически обсуждались полвека назад, когда возникла проблема «сужения» спектральной полосы частотно-модулированного сигнала, излучаемого радиостанцией, затем, чуть позже, при анализе спектра биений, возникающих при синхронизации автогенератора периодической внешней силой, и наконец, совсем недавно, в связи с анализом динамики многомодовых (распределенных) автоколебательных систем с узким спектром генерации — оптических квантовых генераторов. Эту проблему очень хорошо чувствовал Л. И. Мандельштам, еще в 1908 г. демонстрировавший на лекции в Страсбургском университете эксперимент, который доказывал реальность возникновения боковых частот при модуляции переменного тока (несущей). В своих лекциях Л. И. Мандельштам дал на эти вопросы такой ответ: «...Нужно знать, для чего требуется говорить об одном колебании с переменной амплитудой и частотой, что мы или природа собираемся делать с этим колебанием». Другими словами, правильный результат можно получить, используя и тот и другой подход, а какой адекватнее — зависит от задачи.

Радиотехнический термин «модуляция» был, по существу, введен в физику Мандельштамом. На языке модуляции он открыл и описал процесс рассеяния света на звуковых колебаниях решетки (рассеяние Мандельштама — Бриллюэна) или атомами или молекулами среды (комбинационное рассеяние). Как к пространственной модуляции подходил Л. И. Мандельштам к проблеме построения оптического изображения, и в то же время именно он поставил впервые задачу о частотной модуляции в автогенераторе **).

Л. И. Мандельштам понимал под модуляцией всякий процесс медленных изменений в высокочастотной колебательной системе, «при котором она успевает совершить много свободных колебаний прежде, чем их амплитуда, частота и фаза изменяется сколько-нибудь заметным образом»; т. е. модулированные колебания в классической теории — это квазипериодическое колебание с достаточно медленно меняющимися параметрами.

Отличается ли понимание модуляции в современной теории от классического? В главном — нет; это по-прежнему колебания или волны с медленно меняющимися параметрами. Но в современной теории модулированное колебание или волна — это совсем не обязательно «синусоида с медленно меняющейся амплитудой и частотой»; форма элементарного колебания или волны-заполнения, на которое накладывается модуляция, может быть в широких пределах произвольной (например, периодическая кноидальная***) или пилообразная волна); с известным правом о модуляции, как медленном изменении некоторых параметров движения, можно говорить даже когда «заполнение» не периодическое. И если анализ модулированных колебаний, близких к периодическим несинусоидальным, имеет корни в классической теории колебаний, то исследование медленно эволюционирующих непериодических колебаний или волн характерно

*) Сейчас бы мы сказали — без модуляции нет информации.

**) Эта задача была решена аспирантом Л. И. Мандельштама С. М. Рытовым⁶².

***) Кноидальная волна — периодическая последовательность тождественных солитонов — на фазовой плоскости (см. рис. 2) выражается замкнутой траекторией, близкой к сепаратрисе.

лишь для современной теории. Первая задача такого рода появилась в связи с рассмотрением поведения нелинейных волн в средах с медленно меняющимися параметрами. Здесь есть очень наглядный пример — развитие морских волн при приближении к берегу. Эта задача была решена с помощью рассмотрения «квазисолитонов» — волн, близких к уединенным стационарным, амплитуда которых медленно меняется из-за неоднородности среды (такая неоднородность вызвана переменной глубиной у берега).

Наиболее важной отличительной чертой современной теории является, по существу, расширение понятия модуляции, включающее не только процессы преобразования модуляции, но и процессы ее рождения — *самомодуляции*.

Как и колебания, модуляция может возникнуть в результате неустойчивости — автомодуляция, может быть вынужденной — модуляция переносится на несущую от внешнего источника, наконец, может быть заданной в начальный момент времени — аналог свободных колебаний. Добавим, что сейчас почти для всех нелинейных колебательных или волновых эффектов имеются модуляционные аналоги. Это относится к эффектам стохастизации и возвращаемости, нелинейным волнам модуляции и т. д. Некоторые эффекты в модуляции даже легко придумать, опираясь на прямые аналогии с колебаниями. Возможно, это будет казаться менее удивительным, если вспомнить, что во многих случаях превращения, которые происходят со спектром модуляции в нелинейной системе, отличаются от соответствующих изменений спектра самих колебаний (или волн) лишь тем, что происходят в более высокочастотной области (пересажены на частоту несущей). Л. И. Мандельштам придавал большое значение этим аналогиям и мастерски умел пользоваться общим модуляционным подходом: «Он мог делать и делал здесь совершенно замечательные вещи — от фундаментальных физических открытий до брошенных вскользь замечаний»⁵⁷.

б) Бегущие решетки Мандельштама. Модуляция волн волнами

Сейчас, когда говорят о модуляции волн волнами, образ периодической бегущей решетки, на которой дифрагирует — модулируется падающая волна, представляется настолько естественным, что мы не задумываемся над его происхождением. Впервые же этот классический образ появился у Л. И. Мандельштама. Еще в 1913 г., рассматривая рассеяние света на границе раздела двух сред, он, независимо от Эйнштейна и Дебая, «овеществил» слагаемые пространственного ряда Фурье, поставив им в соответствие реальные периодические решетки (так же, как несколько ранее он показал реальность спектральных сателлитов при временной модуляции переменного тока). Но это еще были неподвижные решетки. Бегущие появились пять лет спустя. К этому времени уже широко распространилась теория тепломкости твердых тел Дебая, в которой «хранителями» энергии теплового движения предполагались упругие (акустические) волны, и Л. И. Мандельштам первый заметил, что свет, рассеиваемый тепловыми флуктуациями, должен быть промодулирован по частоте бегущей акустической волной (решеткой) и нашел частоты сателлитов ν_{\pm} : $(\nu_{\pm} - \nu) = \pm 2\nu_c (C_{\text{зв}}/C) \sin(\theta/2)$ (ν частота падающего света, $C_{\text{зв}}$ и C скорость звука и света, θ — угол рассеяния). Это было предсказание рассеяния электромагнитных волн на акустических (рассеяние Мандельштама — Бриллюэна)^{*}) — первый пример широко исследуемого сейчас в различных областях процесса рассеяния волн на волнах.

^{*}) К этому времени часть результатов по рассеянию света на звуке уже была опубликована Л. Бриллюэном.

Спустя десять лет (1928 г.) Л. И. Мандельштам вместе с Г. С. Ландсбергом, исследуя рассеяние света в кристаллах, пытались наблюдать спектральные сателлиты, вызванные модуляцией света звуком. Однако обнаружили они гораздо большее расщепление, которое объяснили модуляцией света инфракрасными колебаниями молекул. Так было открыто комбинационное рассеяние света — рассеяние волн осцилляторами *). Рассеяние же света на звуке было экспериментально обнаружено лишь в 1932 г. во Франции и Америке **). Рассеяние Мандельштама — Бриллюэна (РМБ) и комбинационное рассеяние (КР) — это модуляция, как понимал ее Л. И. Мандельштам: «...Подобно тому, как вы вносите свою речь в излучение радиостанции посредством модуляции, так атомы, колеблющиеся в молекуле или кристаллической решетке, рассказывают нам о своих инфракрасных колебаниях, пользуясь частотой излучаемого света, как несущей». Такую модуляцию падающей волны заданными источниками обычно называют *спонтанным* рассеянием.

В современной нелинейной теории основное внимание привлекают открытые в начале 60-х годов процессы *вынужденного* рассеяния на колебаниях (ВКР — 1962 г.) и на волнах (ВРМБ — 1964 г.)⁶³⁻⁶⁵. При вынужденном рассеянии падающая волна сама усиливает источники модуляции — колебания атомов или молекул при КР или звуковую волну при РМБ. Эти процессы есть одно из проявлений уже обсуждавшейся нами параметрической неустойчивости — распада падающей волны на резонансную пару волн, или на волну и колебания (при КР).

При взаимодействии волн может происходить как рождение модуляции, так и пересаживание ее с одной волны на другую. Фактически первый эффект такого рода наблюдался еще в 1930 г., когда Тележен (Люксембург) и Лбов (Горький) при настройке приемников на частоту местной радиостанции принимали передачу (модуляцию) мощной радиостанции, работающей совсем на другой частоте — *кросс-модуляция*. Люксембург — Горьковский эффект объясняется довольно просто (1934⁶⁰): при прохождении мощной модулированной волны (накачки) через объем ионосферной плазмы, в соответствии с заданным ею законом модуляции, меняется и коэффициент поглощения для проходящей здесь же слабой волны. Таким образом, модуляция накачки переносится на другую несущую.

Пересаживание модуляции возможно не только с интенсивной волны (накачки), но и со слабой (сигнальной) в присутствии немодулированной накачки. Одна из таких возможностей, как известно, реализуется в супергетеродинном приемнике — основное усиление модуляции происходит на промежуточной частоте. Такой же «супергетеродинный» процесс можно реализовать и для волн в нелинейной среде с усилением на «промежуточной» частоте⁶¹. Уравнения для амплитуд параметрически связанных волн $\omega_3 = \omega_1 + \omega_0$ в такой среде при заданном поле накачки — гетеродина $a_0 = \sqrt{\text{const}}$ записываются в виде (a_3 — амплитуда сигнала)

$$\frac{\partial a_1}{\partial x} = i\sigma_1 a_0^* a_3 + \gamma a_1, \quad \frac{\partial a_3}{\partial x} = i\sigma_3 a_0 a_1. \quad (3.1)$$

Рассматриваемый механизм представляет интерес, конечно, лишь в случае, когда достаточно велико усиление промежуточной волны — $\gamma \gg \Gamma =$

*) К этому времени уже было известно об оптической — борновской ветви дисперсионной кривой, однако Л. И. Мандельштам и его сотрудники об этих работах не знали: еще не был налажен обмен информацией после прошедшей войны. Они идентифицировали эту ветвь независимо (М. А. Леонтович⁸⁸).

**) Одновременно с Мандельштамом и Ландсбергом комбинационное рассеяние было обнаружено Рамааном и Кришнаном.

$= |a_0| \sqrt{\sigma_1 \sigma_2}$. При этом эволюция сигнальной и промежуточной волн вдоль «приемника» описываются таким решением (3.1.):

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= a_3(0, t) \frac{i\sigma_1 a_0^*}{\gamma} (e^{\gamma x} - 1), \\ a_3(x, t) &= a_3(0, t) (1 - \delta e^{\gamma x}) \quad \left(\delta = \frac{\Gamma^2}{\gamma^2} \right); \end{aligned} \quad (3.2)$$

здесь $a_3(0, t)$ — модулированная сигнальная волна на входе ($x = 0$) нелинейной среды ($a_2(0, t) \equiv 0$). Процесс усиления сигнала в волновом супергетеродинном приемнике выглядит следующим образом. Вначале незначительно усиливается промежуточная волна a_1 , на которую переносится имевшаяся на границе модуляция с сигнальной волны — интервал $0 < x \leq 1/\gamma$; затем существенно усиливается несущая модуляцию сигнальной промежуточная волна — интервал $1/\gamma \leq x \leq x_0 = \ln(1/\delta)/\gamma$, и наконец, усиленная модуляция переносится на сигнальную волну: $x > x_0$. Такой процесс, очевидно, возможен и при низкочастотной накачке.

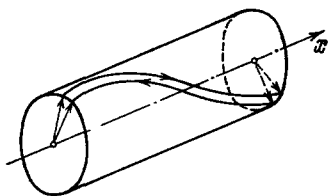


Рис. 40. Поворот поляризаций при нелинейном взаимодействии встречных волн.

Модуляция волн волнами не всегда проявляется в таких привычных формах, как медленное изменение амплитуд или фаз волн. Так, например, даже в изотропной нелинейной среде при взаимодействии встречных волн может изменяться и их вид поляризации — плоскость линейно поляризованных волн может вращаться, линейная поляризация может переходить в эллиптическую и т. д. Проиллюстрируем один из подобных эффектов частным примером — рассмотрим взаимодействие во времени пространственно-однородных встречных волн одной частоты в оптически активной среде (ОКГ). Пусть вначале угол между векторами поля этих линейно поляризованных волн был очень мал. Что произойдет с ними в дальнейшем? Плоскости поляризации встречных волн будут поворачиваться в противоположные стороны. Возможный механизм здесь таков. Каждая из волн высвечивает активные частицы, дипольный момент которых повернут по ее полю; поэтому составляющая встречной волны точно той же поляризации распространяется уже без усиления — усиливаются лишь те компоненты встречной волны, которые имеют несколько отличную поляризацию. В результате такой своеобразной конкуренции встречных волн и будет происходить «отталкивание поляризаций». Совершенно иным оказывается эффект поворота поляризаций в стационарном случае (рис. 40). Векторы поляризации встречных волн здесь вращаются в одну сторону⁶⁶. Это уже принципиально пространственный эффект. Действительно, при прохождении встречных волн в среде возникает периодическая решетка, от которой составляющие каждой волны со взаимно ортогональной поляризацией отражаются по-разному. Из-за этого различия и происходит поворот векторов поляризации встречных волн.

Для резонансной изотропной активной среды эффект вращения поляризаций встречных волн был экспериментально подтвержден еще в 1970 г.⁶⁷. Сейчас он обнаружен в самых разнообразных изотропных средах. Поскольку величина эффекта — угол поворота, или эллиптичность поляризации встречных волн очень тонко зависит от свойств нелинейных сред, этот эффект оказался удобен для их диагностики — нелинейная поляризационная спектроскопия⁶⁸.

в) Восстановление модуляции

Уже в первых экспериментах по ВРМБ и ВКР в оптике было замечено, что рассеянный назад пучок примерно повторяет эволюцию пучка накачки в обратном направлении во времени. Затем выяснилось, что во многих экспериментальных ситуациях рассеянная волна точно *воспроизводит* комплексно-сопряженную падающую волну, сильно промодулированную в поперечном направлении⁷⁰. Повторение рассеянной назад (стоксовой) волной в обратном направлении оптического маршрута, пройденного накачкой, означает, что ограниченная область, в которой происходит рассеяние, ведет себя как *зеркало*. Но зеркало не обычное — отраженная волна при прямом ходе времени повторяет оптический путь падающей лишь тогда, когда ее фазовый фронт оказывается сопряженным с накачкой, т. е. $a_p(r) \sim a_0^*(r)$. При этом полная фаза волны $\exp[i\omega t - ikx + i\phi]$ при распространении в $-x$ -направлении меняется, как у падающей при обратном ходе времени. Именно поэтому эффекты воспроизведения поперечной модуляции пучка накачки в излучении вынужденного рассеяния получили название «*обращения волнового фронта*».

То, что рассеивающий объем действует как нетривиальное зеркало, связано с избирательным характером усиления стоксовой волны (нарастающей из шумов) в поле изрезанной по r накачки. Если фазовый фронт накачки немодулирован, то в ее поле одинаково усиливаются стоксовы волны с произвольной поперечной структурой; если же фронт волны накачки достаточно сильно изрезан, то стоксова волна, промодулированная по r таким образом, что ее максимумы попадают на минимумы накачки и наоборот, усиливается хуже, чем та, которая повторяет профиль накачки. Формально это можно пояснить так: полная (усредненная поперек пучка) мощность рассеянной назад волны описывается уравнением⁷¹ $dP/dx = -g(x)P(x)$, где коэффициент усиления вдоль направления распространения равен

$$g(x) = \frac{G \int a_0(r) a_0^*(r) a_p(r) a_p^*(r) d^2r}{\int |a_p(r)|^2 d^2r}. \quad (3.3)$$

Если при условии, что $a_0(r)$ быстро меняется, интенсивности накачки и начального шума по r некоррелированы, то коэффициент усиления $g = G \langle |a_0(r)|^2 \rangle$ (четверные корреляции распадаются на парные). Если же $|a_p(r)|^2 \sim |a_0(r)|^2$, то инкремент будет вдвое больше. Поскольку эта двойка находится в показателе экспоненты, а общий коэффициент усиления вдоль x достаточно велик, можно быть уверенным, что из рассеиваемого назад шумового фона будет выделена волна именно с обращенным волновым фронтом. Подобные эффекты широко обсуждаются сейчас в нелинейной оптике в связи с возможностью самокорректирующейся транспортировки мощного лазерного излучения на большие расстояния — *адаптивная нелинейная оптика*^{71, 72}.

г) Самомодуляция

Поставим простой эксперимент — на границу LC-линии передачи или цепочки осцилляторов с кубической нелинейностью (см. (1.14.)) подадим синусоидальное колебание, частота которого лежит в области сильной дисперсии $\omega(k)$ (например, на загибе дисперсионной кривой рис. 12), и поэтому возникающие из-за нелинейности гармоники не находятся в синхронизме с основной волной (следовательно, не нарастают). Какое колебание мы будем наблюдать на другом конце линии? Ответ в виде осциллограмм

представлен на рис. 41 — колебания оказываются модулированными! Для нас это выглядит неожиданным, так как интуитивно мы связываем появление модуляции (в узком смысле слова) лишь с переносом информации о низкочастотном сигнале на высокочастотную несущую. Физическая природа такого процесса, как мы уже видели, может быть очень разной, но источник-то модуляции должен быть! В нашем же эксперименте его не видно. Этот пример иллюстрирует явление *само модуляции* — модуляция возникает в результате развития вдоль линии параметрической неустойчивости, которая в данном случае приводит к появлению волн

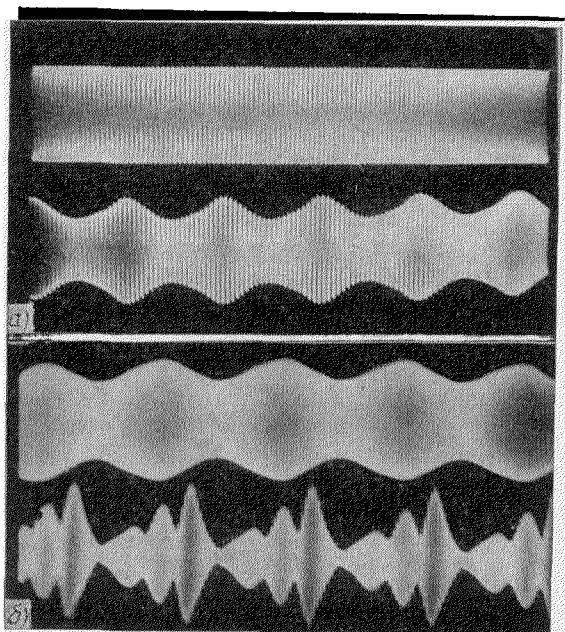


Рис. 41. Само модуляция волны в нелинейной линии передачи:

а) возникновение модуляции; б) эволюция синусоидальной волны модуляции.

спутников с близкими к ω_0 частотами ω_1 и ω_2 , где $\omega_1 + \omega_2 = 2\omega_0$ (ср. с распадом пары квантов, находящихся в одном состоянии (1.7.)). Такую разновидность параметрической неустойчивости в теории нелинейных волн называют *модуляционной неустойчивостью* ^{76, 83}.

Чтобы описать это и связанные с ним явления подробнее, нам придется обратиться к основному уравнению теории модулированных волн в нелинейных средах — нелинейному параболическому уравнению или *нелинейному уравнению Шрёдингера* ⁷³:

$$\left(\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} \right) - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} - \frac{i}{2k} \Delta_{\perp} a = i \epsilon_n (|a|^2) a; \quad (3.4)$$

здесь a — комплексная амплитуда $\exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$ волны, \mathbf{k} — ее волновое число,

а ϵ_n характеризует величину нелинейности среды; например, для световых волн $\sqrt{\epsilon_n}$ — это нелинейная добавка к показателю преломления. Для более простого случая плоских волн вместо (3.4) можно записать

$$\left(\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} \right) - \frac{i}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \frac{\partial^2 a}{\partial x^2} + i \alpha |a|^2 a = 0; \quad (3.5)$$

слагаемые в круглых скобках описывают волны модуляции, бегущие в линейной среде без дисперсии с групповой скоростью; параболическое слагаемое $\sim d^2 \omega / dk^2$ ответственно за дисперсионное распывание, а α — за величину и знак нелинейности *). Модуляционная неустойчивость, как мы сейчас увидим, возможна только при определенном соотношении знаков нелинейности и дисперсии групповой скорости — $\alpha d^2 \omega / dk^2 < 0$ ⁷⁵. Понять физический механизм этого ограничения (обычно называемого условием Лайтхилла) проще всего, если рассматривать эффект само модуляции не на пространственно-временном языке, т. е. не из анализа (3.5),

*) Впервые параболическое уравнение, описывающее дифракцию пучков, было получено в 1944 г. М. А. Леонтовичем.

а на спектральном, ограничиваясь анализом взаимодействия лишь трех волн-осцилляторов, образующих волну с синусоидальной модуляцией.

Для комплексных амплитуд сателлитов ω_{\pm} и несущей ω_0 из (3.5) получаются уравнения, аналогичные (1.5):

$$\dot{a}_0 + i \frac{\alpha}{2} |a_0|^2 a_0 = 0, \quad \dot{a}_{\pm} + i \left(\alpha |a_0|^2 + \frac{1}{4} \frac{d^2 \omega}{dk^2} k^2 \right) a_{\pm} = -i \alpha a_0^2 a_{\mp}^*; \quad (3.6)$$

здесь учтено, что ввиду спектральной близости сателлитов, расстройка $\delta = 2\omega_0 - \omega(k_0 + k) - \omega(k_0 - k) \approx (d^2 \omega / dk^2) k^2$. Параметрический инкремент γ , с которым нарастает амплитуда сателлитов в заданном поле несущей, равен

$$\text{Re } \gamma = \pm k \sqrt{-\frac{d^2 \omega}{dk^2} \alpha |a_0|^2 - \frac{k^2}{4} \left(\frac{d^2 \omega}{dk^2} \right)^2}. \quad (3.7)$$

Поскольку пространственный масштаб модуляции может быть произволен, необходимое (а при $k \rightarrow 0$ и достаточное) условие модуляционной неустойчивости — это $\alpha \omega_{kk} < 0$. Теперь ясен и его физический смысл: чтобы неустойчивость появилась, нелинейная расстройка $\sim \alpha |a_0|^2$ должна компенсировать линейную $\sim (d^2 \omega / dk^2) k^2$. Зависимость инкремента от масштаба модуляции приведена на рис. 42: для коротковолновой модуляции, когда $\Lambda^2 < \pi^2 / \alpha |a_0|^2 \cdot d^2 \omega / dk^2$, нелинейная расстройка уже не в состоянии компенсировать дисперсионное расплывание, и углубления модуляции не происходит (инкремент становится мнимым). Эффект самомодуляции был предсказан в 1965 г. ⁷⁵ и спустя год наблюдался экспериментально для волн на поверхности жидкости ¹¹. Этот эффект, как полагают ⁷⁶, имеет отношение к объяснению явления «девятого вала».

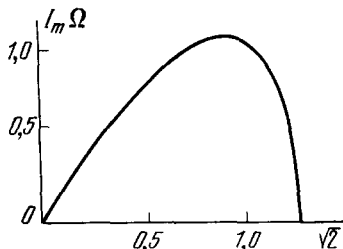


Рис. 42. Зависимость инкремента от масштаба модуляции.

Вернемся к анализу эволюции волн модуляции в рамках линеаризованного уравнения (3.4.). Для них получается закон дисперсии $\Omega(k, k_{\perp}) = vk \pm$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{v}{2k_0} k_{\perp}^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} k^2 \right) \left(2\alpha |a_0|^2 + \frac{v_0}{2k_0} k_{\perp}^2 + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} k^2 \right)}, \quad (3.8)$$

из которого, в частности, для одномерных волн $k_{\perp} \equiv 0$ сразу получается уже известный нам инкремент модуляционной неустойчивости (3.7.). А что произойдет в рамках нашей основной модели (3.4.) с малыми *неодномерными* возмущениями?

Полагая для простоты в (3.8) $k \equiv 0$, обнаруживаем, что при $k_{\perp}^2 < 4\alpha |a_0|^2 k_0 / v$ величина $\Omega(k_{\perp})$ оказывается чисто мнимой — нарастают *неодномерные* возмущения с частотой, равной частоте заполнения! Физически это проявляется следующим образом. Если на границу нелинейной среды, диэлектрическая проницаемость которой растет с ростом интенсивности поля, подать плоскую волну частоты ω_0 , то в процессе распространения волна превращается в периодическую (в поперечном направлении) систему пучков — *самофокусируется* ⁷⁷. Это — стационарный пространственный вариант параметрической неустойчивости или распада пары квантов, находящихся в одном состоянии $2\mathbf{k}_0 \rightarrow \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \Delta\mathbf{k}$ ($|a_0|^2$) (рис. 43).

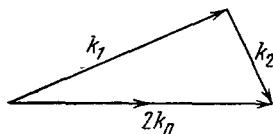


Рис. 43. Распад пары квантов, находящихся в одном состоянии.

д) Возвращаемость

Нелинейная стадия развития модуляционной неустойчивости зависит от асимптотики начального возмущения при $|x| \rightarrow \infty$. Если возмущение периодическое в пространстве, то нарастающие в результате модуляционной неустойчивости синусоидальные волны модуляции будут нелинейным образом искажаться — на периоде волны образуются один или несколько солитонов, но затем солитоны сглаживаются и волна вновь приходит в начальное состояние, потом все повторяется и т. д. Именно так ведут

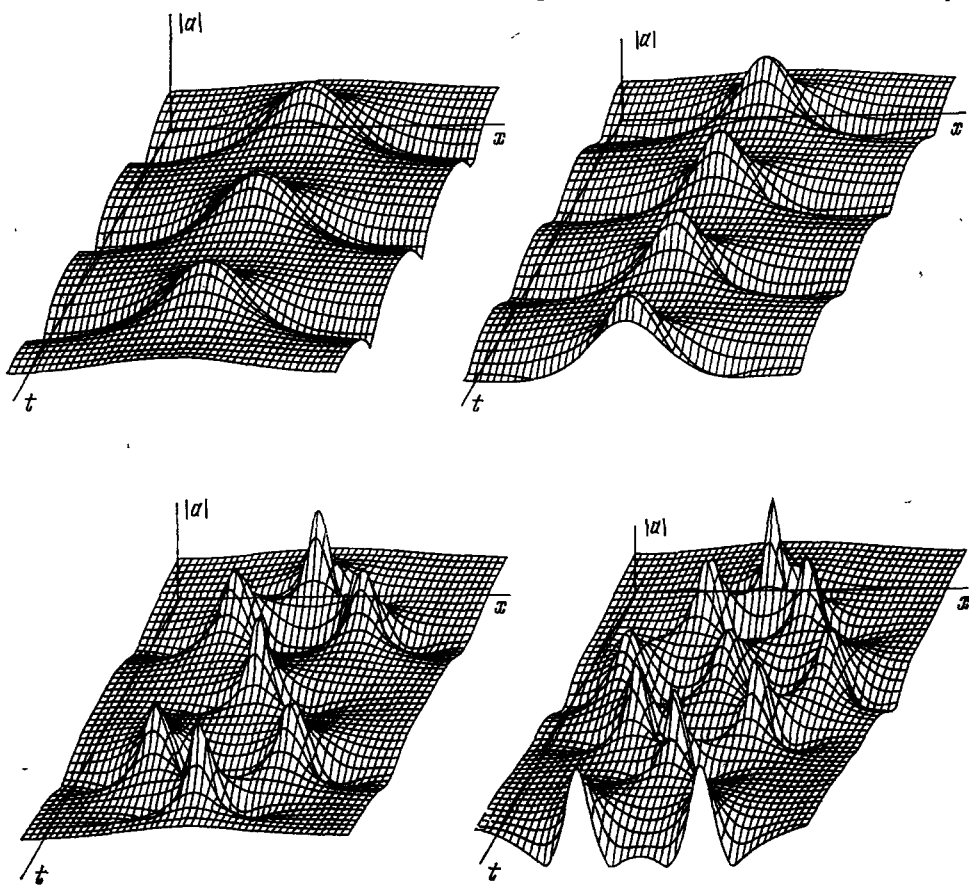


Рис. 44. Стационарные волны и возвращаемость для волн модуляции на поверхности глубокой жидкости⁸⁸.

себя волны модуляции на поверхности глубокой жидкости (рис. 44). Замечательное и удивительное явление! И мы действительно бы удивились, если бы у нас не было «нелинейного опыта» и мы уже не наблюдали чего-то очень похожего: вспомним рис. 13, иллюстрирующий поведение периодического возмущения в нелинейной цепочке или одномерной «среде». Точно то же самое — синусоида обращается в периодическую последовательность солитонов — кноидальную волну, которая затем вновь эволюционирует в синусоиду и т. д., т. е. наблюдается эффект возвращаемости. Такая похожесть физически объясняется довольно просто. Как для «волн без заполнения» — волн самого поля, так и для волн модуляции характер нелинейной эволюции определяется двумя конкурирующими эффектами — нелинейным сжатием и дисперсионным расплыванием. Надо специально

подбирать форму и другие параметры периодической волны модуляции, чтобы эти эффекты *во всем пространстве* точно уравнивали друг друга. Такие особые волны модуляции есть; это — стационарные волны модуляции, впервые исследованные в 1966 г.⁷⁸ Но это исключение. Для всех же других периодических возмущений эффекты «сжатия» и «расплывания» поочередно преобладают, сменяя друг друга, как при колебаниях маятника кинетическая энергия переходит в потенциальную и наоборот.

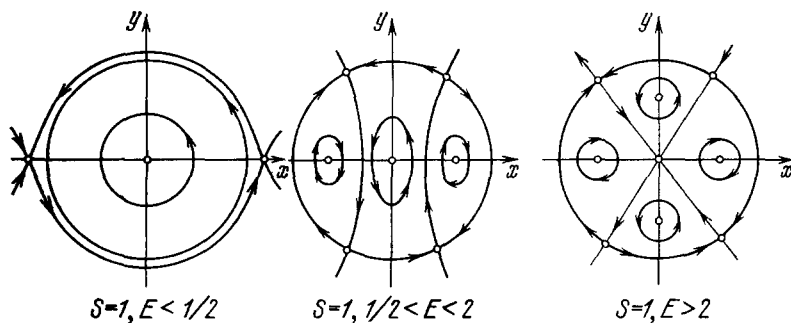


Рис. 45. Фазовые портреты системы (3.9).

Это и определяет периодическую эволюцию развивающегося в результате модуляционной неустойчивости возмущения с периодическими граничными условиями.

Формально математически эффект возвращаемости волн модуляции в самофокусирующих средах (или средах с модуляционной неустойчивостью) следует из факта полной интегрируемости нелинейного уравнения Шрёдингера с периодическими граничными условиями⁷⁹. Нелинейная волна в этом случае имеет дискретный спектр (благодаря дисперсии гармоники с высшими номерами можно считать нерезонансными и поэтому спектр — ограниченным), и для более детального понимания механизма возвращаемости можно воспользоваться модовым описанием. В простейшем случае модуляционная неустойчивость приводит к резонансному взаимодействию лишь трех мод — несущей и симметричных относительно нее сателлитов. Уравнения для их интенсивностей A_0 и $A_1 = A_2$ очень напоминают укороченные уравнения пружинного маятника (ср. (1.5)):

$$\left. \begin{aligned} \dot{A}_0 &= 2A_0A_1 \sin \Phi, \\ \dot{A}_1 &= -A_0A_1 \sin \Phi, \\ \dot{\Phi} &= S + A_1 - A_0 + (2A_1 - A_0) \cos \Phi, \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

$$\Phi = \left[\Delta \omega t + 2 \arg \left(\frac{a_0}{a_1} \right) \right] \operatorname{sign} \alpha, \quad S = \operatorname{sign} \Delta \omega \cdot \alpha.$$

Фазовые портреты частично проинтегрированной системы (3.9) в переменных $x = \sqrt{2A_0} \cos \left(\frac{\Phi}{2} \right)$, $Y = \sqrt{2A_0} \sin \left(\frac{\Phi}{2} \right)$ изображены на рис. 45: почти все движения периодические, что соответствует периодическому обмену энергии между сателлитами и несущей.

В менее тривиальном случае, когда в результате модуляционной неустойчивости нарастает сразу много сателлитов, по существу, все обстоит аналогично, только форма нелинейной волны на промежуточной стадии может быть довольно сложной (см. рис. 46).

е) Радиосолитоны

Аналогия, которую мы установили между поведением периодических волн поля и волн модуляции в нелинейных средах, может быть распространена и на непериодические волны, в частности, солитоны. Как мы сейчас увидим, солитоны нелинейного уравнения Шрёдингера — *радиосолитоны* — ведут себя подобно видеосолитонам, в частности солитонам КДВ *). Как показывают эксперименты с радиосолитонами на глубокой воде⁸⁰: при столкновении и обгоне параметры солитонов не

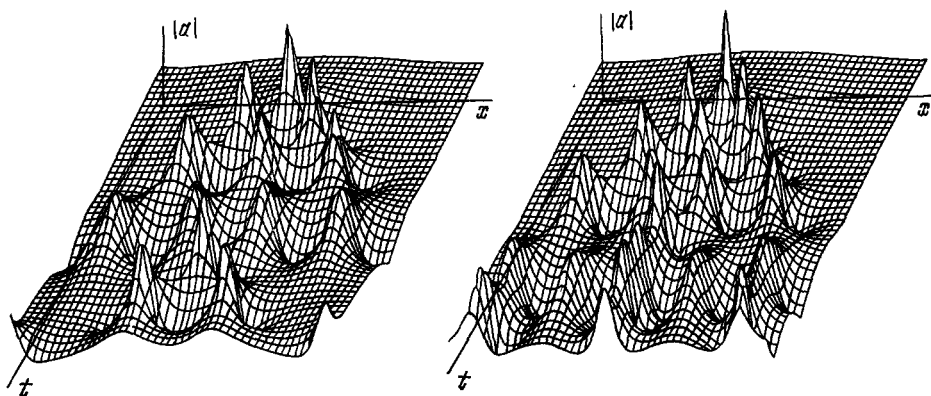


Рис. 46. Радиосолитоны на глубокой воде.

меняются, лишь фаза заполнения испытывает скачок. В рамках одномерной теории радиосолитоны оказываются устойчивым образованием.

Однако по отношению к неоднородным возмущениям большинство солитонов модуляции, как и солитонов поля (см.⁸¹), оказываются неустойчивыми.

Неустойчив, в частности, волноводный канал бесконечной длины и стационарный пакет с бесконечными размерами фронта, имеющий конечную длину вдоль направления распространения. Поясним это весьма наглядными, хотя и не совсем строгими энергетическими соображениями⁸³. Пусть в (3.4.) $\varepsilon_n (|a|^2) a = \alpha |a|^2 a$; тогда рассматриваемое нами поле характеризуется энергией

$$H = \int dr \left[\frac{iv}{2} (a^* \nabla a - a \nabla a^*) + \frac{1}{2} \frac{d^2 \omega}{dk^2} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 + \frac{v}{2k} |\nabla_{\perp} a|^2 + \alpha |a|^4 \right]; \quad (3.10)$$

кроме того, (3.4.) имеет еще один интеграл $-N = \int |a|^2 dr$, имеющий смысл числа квазичастиц (квантов) в волне. Пусть волновой пакет характеризуется размером l и числом частиц $N = \int |a|^2 dr \approx (a)^2 l^m$, где m — размерность пакета. Тогда, учитывая, что число частиц в пакете сохраняется, для его амплитуды будем иметь $a(t) \approx \sqrt{N} l(t)^{-m/2}$, а для энергии $H \approx (d^2 \omega / dk^2) (N / l^2) - (\alpha N^2 / l^m)$. Здесь первое слагаемое ответ-

*) Практически все эффекты, известные в теории нелинейных «волн без заполнения» наблюдаются и для волн модуляции. Кроме тех, которые мы сейчас обсуждаем, необходимо упомянуть еще простые и ударные волны модуляции^{82,1}.

ственно за дифракционное *расплывание* пакета, а второе — за его нелинейное *сжатие*. Из этого выражения видно, что в одномерном случае существует масштаб $l_0 = (d^2\omega/dk^2) 2/\alpha N$, для которого энергия пакета будет минимальна ($\partial H/\partial l|_{l_0} = 0$), и можно надеяться, что солитон с такими параметрами должен быть устойчив. Поведение двумерного импульса $m = 2$, очевидно, зависит от начальных условий: если $\omega'' > \alpha N \approx \alpha |a|^2/l^2$, то минимум энергии достигается при $l \rightarrow \infty$: импульс расплывается; если же $\omega'' < \alpha |a|^2/l^2$, энергия оказывается минимальной при $l \rightarrow 0$ — солитон сжимается в точку или *коллапсирует*. Коллапсом должна завершаться эволюция и трехмерного солитона: при $m = 3$ нелинейное сжатие преобладает над дифракционным распылением.

Имея в виду устойчивость радиосолитонов в одномерных системах, естественно такие солитоны использовать в качестве невозмущенного — немодулированного решения для исследования широкого круга моделей, близких к «эталонной», — нелинейному уравнению Шрёдингера. Исследуем здесь поведение одной из таких моделей, а именно:

$$a_t - \frac{i}{2} a_{xx} - |a|^2 a = \gamma (a + a_{xx}) - \rho |a|^2 a, \quad (3.11)$$

описывающей нелинейную эволюцию модулированных волн в неравновесных средах (слагаемое $\sim \gamma$ описывает спектрально узкий инкремент волн, а $\rho |a|^2 a$ — их нелинейное затухание). В приближении малого затухания и спектрально узкого инкремента уравнение (3.11) сейчас выведено для волн Толлмина — Шлихтинга в пограничном слое, лэнгмюровских волн, возбуждаемых пучком электронов, волн концентрации химических реакций и т. д. (см., например, ⁸⁴).

Как и эталонная консервативная модель, (3.11.) имеет решение в виде немодулированной гармонической волны с амплитудой $a = \sqrt{\gamma/\rho} \exp(i\gamma t/\rho)$. При $\gamma\rho < 1$ эта волна неустойчива по отношению к периодическим возмущениям с волновыми числами $k < \sqrt{2\gamma(1 - \gamma\rho)/\rho(1 + \gamma^2)}$. При очень малом усилении и затухании ($\gamma, \rho \ll 1$) развитие этой неустойчивости должно привести, как и в невозмущенной модели (при достаточно быстро спадающих на бесконечности начальных возмущениях), к установившемуся решению в виде последовательности солитонов

$$u(x, t) = \frac{A \exp\{(iA^2/2)t + iV^2(t/4) + V[(x - Vt)/2]\}}{\operatorname{ch}[A(x - Vt)/\sqrt{2}]}, \quad (3.12)$$

амплитуда и скорость которых теперь уже будут меняться во времени. Найдем уравнения для параметров таких «модулированных» радиосолитонов. Для этого определим скорость изменения числа частиц $N_3 = \int |a|^2 dx$ и квазиимпульса $P = \int i(a_x a^* - a^* a_x) dx$ — интегралов консервативной модели, после чего найдем, воспользовавшись (3.12), уравнения для $A(t)$ и $V(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= 2\gamma A \left(1 - \frac{A^2}{6} - \frac{V^2}{4}\right) - 4\rho \frac{A^3}{3}, \\ \frac{dV}{dt} &= -2\gamma A^2 \frac{V}{3}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Видно, что при $t \rightarrow \infty$ все солитоны останавливаются и выравниваются по амплитуде $A \rightarrow A_0 = \sqrt{6/[1 + (4\rho/\gamma)]}$. Таким образом, начальное

периодическое возмущение эволюционизирует в решетку из солитонов модуляции *).

Если усиление и затухание не слишком малы ($\gamma, \rho \sim 1$), то характер эволюции начального возмущения оказывается совсем иным: в результате развития модуляционной неустойчивости возникает сложное поведение ⁸⁵.

Мы уже сталкивались с тем, что появление в динамической системе простого или сложного поведения связано с «расстоянием» от нее до ближайшей вполне интегрируемой системы. Для (3.11) такой системой является нелинейное уравнение Шрёдингера с периодическими граничными условиями **). В частности, при $\gamma \ll \rho \ll 1$ расстояние между (3.5) и (3.11.) мало и поведение (3.11) — простое, но при увеличении расстояния ($\gamma, \rho \sim 1$), как показывают результаты численного моделирования ⁸⁴, в системе (3.11) с периодическими граничными условиями возникает стохастичность.

* * *

Данный обзор современной теории нелинейных колебаний и волн и ее связей с творчеством Л. И. Мандельштама, конечно, не полон. Многие аспекты этой связи остались незатронутыми или затронутыми только вскользь. Однако мы надеемся, что уже из приведенного материала видно, сколь значителен и плодотворен тот вклад, который Л. И. Мандельштам внес в науку о колебаниях и волнах.

Авторы признательны Я. Б. Зельдовичу, М. Л. Левину, С. М. Рытову, М. М. Сузику и В. И. Таланову за полезные обсуждения.

Институт прикладной физики
АН СССР, Горький

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Папалекси Н. Д. О Л. И. Мандельштаме. — В Собрании трудов Л. И. Мандельштама. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1947. — Т. 1, с. 5.
2. Тамм И. Е. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1945, т. 11, с. 56.
3. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике. — М.: Наука, 1972.
4. Мандельштам Л. И. Собрание трудов. — М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950. — Т. 3, с. 119.
5. Гаузе Г. Ф., Витт А. А. — Изв. АН СССР, 1936, т. 7, с. 1551.
6. Fermi E. — Zs. Phys., 1931, Bd. 71, S. 250.
7. Витт А. А., Горелик Г. С. — ЖТФ, 1933, т. 3, с. 294.
8. Хохлов Р. В. — Радиотехн. и электрон., 1961, т. 6, с. 1116.
9. Tien P. K., Suhl H. — Proc. IRE, 1958, v. 46, p. 700.
10. Franken P. et al. — Phys. Rev. Lett., 1961, v. 7, p. 118.
11. Benjamin T. B., Feir J. E. — J. Fluid Mech., 1967, v. 27, p. 417.
12. Захаров В. Е. — ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 1107.
13. Nepon M., Heiles C. — Astron. J., 1964, v. 69, p. 73.
14. Заславский Г. М., Чириков Б. В. — УФН, 1971, т. 105, с. 3.
15. Мельников В. К. — Труды Моск. матем. об-ва, 1963, т. 12, с. 3.
16. См. ³, с. 301.
17. Беккер Р. Электронная теория. — М.; Л.: Гостехиздат, 1941.
18. Гинзбург В. Л. Теория распространения радиоволн в ионосфере. — М.: Гостехиздат, 1949.
19. Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлпатов В. К. — Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1967, т. 10, с. 1414.

*) Если учесть взаимодействие солитонов за счет экспоненциально спадающих хвостов, результат эволюции будет неоднозначен. В частности, в случае $\gamma \ll \rho$ удастся показать, что уравнение (3.17) с периодическими граничными условиями имеет конечное число асимптотически устойчивых периодических решений. Периодическая решетка солитонов — простейшее из них.

**) Интегрируемость (3.5) при произвольных граничных условиях пока не доказана.

20. Кадомцев Б. Б. Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
21. Шапиро В. Д., Шевченко В. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1976, т. 19, с. 767.
22. Fermi E., Pasta J., Ulam S.— В кн.: Ферми Э. Научные труды.— М.: Наука, 1972.— Т. 2, с. 643.
23. Kruskal M. D., Zabusky N. J.— Phys. Rev. Lett., 1965, v. 15, p. 240.— См. также гл. 5 в кн.: Кунин И. А. Теория упругих сред с микроструктурой.— М.: Наука, 1975.
24. Захаров В. Е., ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 219.
25. Ikezi H.— In: Solitons in Action/Ed. K. Lonngren, A. Scott.— N. Y.: Academic Press, 1978.— P. 153.
26. Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В., Пиковский А. С.— Phys. Lett. (в печати).
27. Горшков К. А., Островский Л. А., Папко В. В.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 585.
28. Лэкс П. Д.— Математика (сб. переводов), 1969, т. 13, с. 128.
29. Kawahara T.— J. Phys. Soc. Japan., 1972, v. 33, p. 260.
30. См.⁴, с. 61.
31. Андронов А. А. Собрание трудов.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.— С. 32.
32. Гапонов А. В., Фрейдман Г. И.— ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 957.
33. Leaute H.— J. l'Ecole Polytechn., 1885, t. 55, p. 1.
34. Андронов А. А. и др.— УФН, 1947, т. 33, с. 343.
35. Van der Pol B.— Phil. Mag., 1927, v. 3, p. 65.
36. Мандельштам Л. И., Папалекси Н. Д.— См.¹.
37. Рабинович М. И., Розенблюм А. А.— ДАН СССР, 1973, т. 213, с. 1276.
38. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний.— М.: Гостехиздат, 1957.
39. Алексеев А. С.— В Сборнике памяти А. А. Андропова.— М.: Изд-во АН СССР, 1955.
40. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах.— М.: Мир, 1968.
41. Lorenz E.— J. Atmos. Sci., 1963, v. 20, p. 130.
42. Ruelle D., Takens F.— Comm. Math. Phys., 1971, v. 20, p. 167.
43. Рабинович М. И.— УФН, 1978, т. 125, с. 123.
44. Gollub J. P., Brunner T. O., Danly B. G.— Science, 1978, v. 200, p. 48.
45. Кияшко С. В., Рабинович М. И.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1972, т. 15, с. 1807.
46. Островский Л. А., Якубович Е. И.— Ibid., 1965, т. 8, с. 91.
47. Рабинович М. И.— Ibid., 1974, т. 17, с. 477.
48. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1976.
49. Смейл С.— Математика, 1967, т. 11, с. 88.
50. Горелик Г. С.— УФН, 1953, т. 49, с. 449.
51. Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И.— Радиотехн. и электрон., 1979, т. 18, № 10.
52. Жаботинский А. М. Концентрационные автоколебания.— М.: Наука, 1974.
53. Sinergetics: a Workshop/Ed. Haken — N.Y.: Springer-Verlag, 1977.
54. Петвиашвили В. И., Цвелодуб О. Ю.— ДАН СССР, 1978, т. 238, с. 1321.
55. Рытов С. М.— УФН, 1971, т. 62, с. 493.
56. Монин А. С.— УФН, 1978, т. 125, с. 97.
57. Рытов С. М.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1945, т. 9, с. 77.
58. Ландау Л. Д.— ДАН СССР, 1944, т. 44, с. 339.
59. Фабелинский И. Л.— УФН, 1978, т. 126, т. 124.
60. Bailly V. A., Martin P. F.— Phil. Mag., 1934, v. 18, p. 369.
61. Гуляев Ю. В., Зильберман П. Е.— ФТП, 1971, т. 5, с. 126.
62. Рытов С. М.— Тр. ФИАН СССР, 1940, т. 2, с. 4).
63. Ахманов С. И., Хохлов Р. В. Проблемы нелинейной оптики.— М.: ВИНТИ, 1964.— (Итоги науки).
64. Бломберген Л. Нелинейная оптика.— М.: Мир, 1966.
65. Цытович В. Н. Нелинейные эффекты в плазме.— М.: Наука, 1970.
66. Якубович Е. И.— ЖЭТФ, 1969, т. 56, с. 676.
67. Берштейн И. Л., Рогачев В. А.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1970, т. 13, с. 33.
68. Hänsch T. W.— Phys. Today, 1977, v. 30, p. 34.
69. Шильников Л. П.— Мат. сб., 1967, т. 74, с. 378.

70. Зельдович Б. Я. и др.—Письма ЖЭТФ, 1972, т. 15, с. 160.
71. Зельдович Б. Я. и др.—Вестн. Моск. ун-та. Сер. физ., астроф., 1978, № 4, с. 137.
72. Беспалов В. И., Бетин А. А., Пасманик Г. А.—Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1978, т. 21, с. 961.
73. Литвак А. Г., Таланов В. И.—Ibid., 1967, т. 10, с. 539.
74. Парадоксов П.—УФН, 1966, т. 89, с. 707.
75. Lighthill M. J.—J. Inst. Math. Appl., 1965, v. 1, p. 269.
76. Кадомцев Б. Б., Карпман В. И.—УФН, 1971, т. 103, с. 193.
77. Таланов В. И. Письма ЖЭТФ, 1965, т. 2, с. 218.
78. Островский Л. А.—ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 1189.
79. Захаров В. Е., Манаков С. В.—ТМФ, 1974, т. 19, с. 332.
80. Yuen H. C., Lake V. M.—Phys. Fluids, 1975, v. 18, p. 956.
81. Захаров В. Е., Рубенчик А. М.—ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 997.
82. Гапонов А. В., Островский Л. А., Рабинович М. И.—Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1970, т. 13, с. 163.
83. Галеев А. А. и др.—Физ. плазмы, 1975, т. 1, с. 10.
84. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.—ЖЭТФ, 1979, т. 77, с. 617.
85. Kuramoto Y., Yamada T.—Prog. Theor. Phys., 1976, v. 56, p. 679.
86. См.³¹, с. 34.
87. Halmes P. A Nonlinear Oscillator with a Strange Attractor: Preprint.—Ithaca: Cornell University, 1978.
88. Леонтович М. А.—УФН, 1978, т. 126, с. 673.
89. Yuen H. C., Ferguson W. E.—Phys. Fluids, 1978, v. 21, p. 1275.
90. Неймарк Ю. И. Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний.—М.: Наука, 1972.