1979 г. Май Том 128, вып. 1

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.1

О ТЕОРЕМЕ ВИРИАЛА ДЛЯ СИСТЕМЫ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

В. Д. Шафранов

В заметке рассматривается связь между различными формулировками теоремы вириала. Отмечается неточность, допущенная в выводе и формулировке теоремы вириала для системы заряженных частиц в книге Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшица «Теория поля» и повторенная в других изданиях.

Теоремой вириала называют одно из интегральных следствий уравнения движения сплошной среды или системы взаимодействующих частиц. Эта теорема определяет «глобальные» условия удержания системы в конечной области пространства (или условия финитности движения частиц) без рассмотрения конкретной структуры системы. Для системы кулоновских взаимодействующих частиц, например, это условие удержания выражается формулой [1]

$$U = -2T, \tag{1}$$

т. е. средняя потенциальная энергия должна быть отрицательной (что возможно только при наличии частиц разноименных зарядов) и по абсолютной величине равняться удвоенной кинетической *). Для участка сплошной среды, например плазмы в объеме V, условие равновесия имеет вид [2]

$$\int\limits_V \left(\rho v^2+3p+\frac{H^2+E^2}{8\pi}\right)dV=$$

$$=\oint\left\{\left(p+\frac{H^2+E^2}{8\pi}\right)\mathbf{r}\,d\mathbf{S}+\rho\,(\mathbf{vr})\,(\mathbf{v}\,d\mathbf{S})-\frac{(\mathbf{Hr})\,(\mathbf{H}\,d\mathbf{S})+(\mathbf{Er})\,(\mathbf{E}\,d\mathbf{S})}{4\pi}\right\}, \tag{2}$$

где ρ — массовая плотность, $\mathbf{v}$ — локальная скорость жидкого элемента объема, p — газокинетическое давление, $\mathbf{H}$, $\mathbf{E}$ — магнитное и электрическое поля. Справа интеграл берется по поверхности, ограничивающей рассматриваемый объем. Для изолированной системы этот интеграл при распространении интегрирования на бесконечный объем обращается в нуль, и условие равновесия

$$\int\limits_V \left(\rho v^2+3p+\frac{H^2+E^2}{8\pi}\right)dV=0, \tag{3}$$

очевидно, не выполняется. Для больших (астрономических) масс вещества равновесие может поддерживаться гравитацией, которая дала бы в подынтегральное выражение отрицательное слагаемое $(-\nabla\Phi)^2/8\pi\gamma$, где Φ — гравитационный потенциал, γ — гравитационная постоянная [3]. Если же силами гравитации можно пренебречь, то удержание плазмы в ограниченном объеме требует внешних электромагнитных полей, а удержание электромагнитного поля в конечном объеме требует внешнего давления [2] p_e. В обоих случаях поверхностный интеграл в (2) не обратится в нуль, и условие (2) покажет, каковы должны быть эти внешние поля или давление p_e. Теорема, выражаемая формулой (2), существенна и для некоторых технических проблем. Например, из нее сразу следует отрицательный ответ на вопрос о возможности создания полностью бессиловой магнитной катушки.

*) По существу, условие типа (1) — основа для понимания на языке классической механики удержания не только планет или электронов в атоме, но и атомов в кристаллической решетке твердого тела.

Сравнение условий (1) и (3) показывает, что эти две формы теоремы вириала согласовать невозможно. Так, полагая в (3) $p=0$, и учитывая, что $\int \rho v^2\, dV = 2\overline{T}$, мы получим вместо (1) условие

$$\int \frac{\overline{E^2}+\overline{H^2}}{8\pi}\, dV = -2\overline{T}, \tag{4}$$

отличающееся тем, что в левой части равенства стоит заведомо положительная величина. Объясняется это тем, что в формулу (2) входит только среднее по элементу объема электромагнитное поле, не учитывающее парных взаимодействий, тогда как в (1) учтены, наоборот, только эти последние.

Естественно ожидать, что обобщением (1) и (2) должна служить теорема вириала для системы заряженных частиц, имеющая согласно [4] вид равенства нулю интеграла от суммы диагональных элементов суммарного тензора напряжения:

$$\int \overline{T}_{\alpha\alpha}\, dV = 0. \tag{5}$$

Из этого условия в [4] теорема вириала получена в виде

$$\mathscr{E} = \sum_a \overline{m_a c^2 \sqrt{1-\frac{v_a^2}{c^2}}}, \tag{6}$$

где m_a, v_a — масса и скорость a-й частицы, c — скорость света, $\mathscr{E}$ — энергия системы. Из вывода следует, что

$$\mathscr{E} = \int \frac{\overline{E^2}+\overline{H^2}}{8\pi}\, dV + \sum \overline{\frac{m_a c^2}{\sqrt{1-(v_a^2/c^2)}}}, \tag{7}$$

так что (6) эквивалентно условию

$$\int \frac{\overline{E^2}+\overline{H^2}}{8\pi}\, dV + \sum \overline{\frac{m_a v_a^2}{\sqrt{1-(v_a^2/c^2)}}} = 0, \tag{8}$$

имеющему вид невыполнимого условия (4). Вопреки ожиданию формулы (8) и (1) взаимно противоречивы. Причина этого противоречия — неточность, допущенная при выводе условия (5) для случая точечных зарядов. Для выяснения вопроса обратимся к выводу формул (1), (4), (8).

Уравнение (1) есть результат умножения уравнения движения a-й частицы

$$\frac{d\mathbf{p}_a}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_a) \tag{9}$$

на ее радиус-вектор $\mathbf{r}_a$, усреднения по времени и суммирования по частицам. При этом полагается, что $\mathbf{F}(\mathbf{r}_a) = -\partial U/\partial \mathbf{r}_a$. При получении же уравнений (2), (4) в уравнении движения жидкости

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla\mathbf{v} = -\nabla p + \mathbf{F}, \tag{10}$$

$$\mathbf{F} = \rho_E \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{H}], \tag{11}$$

сила $\mathbf{F}$ преобразуется с помощью уравнений Максвелла

$$4\pi\rho_E = \operatorname{div}\mathbf{E}, \qquad \frac{4\pi}{c}\mathbf{j} = -\frac{\partial \mathbf{E}}{c\,\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{H} \tag{12}$$

в дивергенцию тензора максвелловских напряжений. В результате с учетом уравнения непрерывности усредненное по времени уравнение переноса импульса приобретает вид

$$\frac{\partial \overline{T}_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = 0, \tag{13}$$

где

$$T_{\alpha\beta} = \left(p + \frac{H^2+F^2}{8\pi}\right)\delta_{\alpha\beta} + \rho v_\alpha v_\beta - \frac{H_\alpha H_\beta + E_\alpha E_\beta}{4\pi}. \tag{14}$$

Умножение на x_α и интегрирование по объему приводит к соотношениям типа (5), (2) и т. д.

Если под ρ_E и $\mathbf{j}$ понимать средние по элементу объема значения плотности электрического заряда и тока, то мы получаем непротиворечивое условие равновесия (2) сплошной среды, которое и не обязано согласовываться с (1), поскольку в уравнение движения в этом случае входит среднее по элементу объема электромагнитное поле, не учитывающее парные взаимодействия. Если же под ρ_E и $\mathbf{j}$ понимать микроскопические плотности

$$\rho_E = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a), \qquad \mathbf{j} = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a), \tag{15}$$

то следует принимать во внимание, что в точках $\mathbf{r}=\mathbf{r}_a$ электромагнитное поле имеет особенность, так что в выражении для $\mathbf{F}$ (11), которое приводит к (14) и как следствие к (8), содержится сила самодействия зарядов. Так как «расталкивающее» действие собственного поля на заряд в уравнениях ничем не компенсируется, то это и привело к невыполнимому условию удержания (8).

В действительности в уравнениях движения следует исключить действие собственного поля (за исключением силы реакции излучения; здесь мы отвлечемся от рассмотрения этого эффекта). В силу линейности уравнений Максвелла электромагнитное поле можно представить как сумму полей, создаваемых отдельными зарядами:

$$\mathbf{E} = \sum_a \mathbf{E}_a, \qquad \mathbf{H} = \sum_a \mathbf{H}_a, \tag{16}$$

так что на языке сплошной среды плотность силы самодействия

$$\mathbf{F}_c = \sum e_a \left(\mathbf{E}_a + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_a \mathbf{H}_a]\right) \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_a). \tag{17}$$

Среднее по времени от этой силы представится, очевидно, как дивергенция от $\sum_a (E_a^2 + H_a^2)/8\pi$. При этом вместо (8) получаем теорему вириала в виде

$$\int \frac{\overline{E^2}+\overline{H^2}}{8\pi} dV - \int \sum_a \frac{E_a^2+H_a^2}{8\pi} dV + \sum \overline{\frac{m_a v_a^2}{\sqrt{1-(v_a^2/c^2)}}} = 0. \tag{18}$$

Разность первых двух членов — полная электромагнитная энергия системы зарядов за вычетом собственной электромагнитной энергии точечных зарядов — в нерелятивистском пределе содержит энергию взаимодействия U, которая даже для разреженной плазмы является, как известно [5], отрицательной величиной $U = -TV/8\pi d^3$, (T — температура плазмы, d — дебаевский радиус). Непосредственно вычитательная процедура проделана, например, в [6].

Итак, неточность, допущенная в [4], состоит в том, что при переходе от сил к тензору напряжений неявно сохранена сила самодействия, приводящая к бесконечной энергии поля, которая в условии удержания, выражаемом теоремой вириала, ничем не скомпенсирована.

Для получения правильного результата в формулы книги [4] вместо $\mathscr{E}$ следует подставить перенормированную полную энергию

$$\mathscr{E}' = \int \frac{\overline{E^2}+\overline{H^2}}{8\pi} dV - \int \sum_a \frac{E_a^2+H_a^2}{8\pi} dV + \sum_a \overline{\frac{m_a c^2}{\sqrt{1-(v_a^2/c^2)}}}. \tag{19}$$

Переход к скалярному φ и векторному $\mathbf{A}$ потенциалам электромагнитного поля позволяет записать

$$\mathscr{E}' = \sum_a e_a \left[\varphi(r_a) + \frac{\mathbf{v}_a}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}_a)\right] + \sum_a \overline{\frac{m_a c^2}{\sqrt{1-(v_a^2/c^2)}}}, \tag{20}$$

где $\varphi(\mathbf{r}_a)$, $\mathbf{A}(\mathbf{r}_a)$ — потенциалы, порождаемые всеми зарядами кроме a-го. В таком виде теорема вириала (6) приобретает форму полностью соответствующую (1). В то же время она содержит, очевидно, и случай сплошной среды.

Отметим, что необходимая перенормировка энергии электромагнитного поля системы точечных частиц не сделана и в работе [7], где приводится обобщение теоремы вириала на случай инфинитного движения (сохранены производные по времени). Это упущение осталось незамеченным, потому что непосредственно теорема применялась в этой работе к световому волновому пакету, т. е. к области, не содежащей точечных частиц.

Институт атомной энергии
им. И. В. Курчатова

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика — М.: Физматгиз, 1958.— с. 36.
2. Шафранов В. Д.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 3; см. также в кн. Вопросы теории плазмы.— М.: Госатомиздат, 1963.— Т. 2, с. 95.
3. Chandrasekhar S., Fermi E.— Astrophys. J., 1953, v. 118, p. 116.
4. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М Теория поля.— М.: Физматгиз, 1962.— С. 106.— См. также издание 1948 г.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— М.; Л., 1951.— § 74.
6. Шафранов В. Д.— В кн. Вопросы теории плазмы.— М.: Госатомиздат, 1963.— Т. 3, с. 3, формула 14.9.
7. Rosenbluth M. N., Stuart G. W.— Phys. Fluids, 1963, v. 6, p. 453.