539. 193(049.3)

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

Altmann S. L. Induced Representations in Crystals and Molecules: Point, Space and Nonrigid Molecule Groups.— London; New York; San Francisco: Academic Press, 1977.— 369 p.

Как известно, основой физических применений теории групп является решение задачи разложения представлений на неприводимые составляющие. Данная монография посвящена решению этой задачи на основе теории индуцированных представлений в конечных группах. В книге показывается, как эта теория существенно помогает в исследовании пространственных групп, а также структуры и симметрии нежестких молекул. Это первая достаточно полная монография на данную тему. Она содержит

как впервые публикуемый материал, так и оригинальный подход к изложению известных результатов. Изложенные методы исследования дают возможность специалистам в области физики твердого тела и молекулярной спектроскопии получать точные результаты, вытекающие из общих свойств явлений и не связанные с конкретной моделью. В книге много специально подобранных примеров, хорошо иллюстрирующих основные теоретические положения. Следует отметить также хорошо продуманную систему перекрестных ссылок и обозначений, заметно облегчающих чтение монографии.

Монография содержит 20 глав. Первые четыре главы содержат основы теории групп и представлений, в том числе определения операций симметрии (гл. 1), групп, классов, гомоморфизма и расширений (гл. 2), теоремы о свойствах представлений (гл. 3), рассмотрение произведений групп и базисов с целью изучения комбинированной симметрии (гл. 4). В гл. 5 даются определения смежных классов и теоремы, касающиеся их свойств. Гл. 6 посвящена описанию свойств проективных представлений, играющих фундаментальную роль в приведении пространственных групп. Здесь вводятся концепции фактор-системы, надгруппы, центрального расширения.

Гл. 7—9 посвящены рассмотрению пространственных групп и их представлений как практическому примеру проблемы, решаемой на основе общей теории. Здесь даются основные определения и описывается структура пространственных групп (гл. 7), рассматривается общая форма представлений группы трансляций и их базисов — Блоховских функций (гл. 8). В гл. 9 на примере линейной цепочки производится вывод неприводимых представлений пространственной группы, исходя из неприводимых представлений подгруппы последней — группы трансляций. Эта процедура, называемая индуцированием представления подгруппы в группе, возможна в общем случае, что доказывается в последующих главах.

В гл. 10 вводятся концепции основного представления группы и субэлемента, являющиеся основой для определения индуцированного представления в гл. 11. В гл. 11 рассматриваются ограниченные представления группы в подгруппе (или ограничение представления группы в подгруппе) и индуцированные представления подгруппы в группе. На нескольких примерах показывается, что из неприводимых представлений подгруппы могут быть получены все неприводимые представления группы. Гл. 12 содержит теоремы о частотах и эквивалентности индуцированных представлений. В гл. 13 доказываются теоремы Маккея о структуре и свойствах индуцированных представлений, которые необходимы для определения числа неприводимых представлений группы и разложения внутреннего прямого произведения представлений группы в сумму членов, получаемых из прямых произведений подгрупп.

В гл. 14 описывается математический аппарат, используемый для приведения индуцированных представлений. Совокупность всех неприводимых представлений подгруппы расчленяется на несвязанные между собой наборы (орбиты) так, что каждая орбита образуется всеми неэквивалентными представлениями погруппы, сопряженными данному, и соответствует единственному неприводимому представлению группы. Представления, сопряженные данному, но являющиеся эквивалентными выбранному, отбрасываются, а операции, соответствующие таким отброшенным представлениям, образуют малую группу. Неприводимые представления малой группы (малые представления) в сочетании с орбитами обеспечивают однозначное определение неприводимых представлений группы. Рассмотрены необходимые и достаточные условия существования допустимых малых представлений, т. е. индуцирующих неприводимые представления группы. Некоторые промежуточные теоремы, полезные для получения критерия неприводимости индуцированных представлений, содержатся в гл. 15.

Гл. 16 содержит самые важные результаты, касающиеся неприводимости и полноты индуцированных представлений. Здесь доказываются два фундаментальных результата. Первый состоит в том, что индуцированное малое представление в группе является неприводимым. Второй гласит, что индуцирование всех допустимых малых представлений всех малых групп в группе дает полную систему неприводимых представлений группы.

В гл. 17 рассматривается случай абелевой инвариантной подгруппы, являющейся прямым произведением циклических подгрупп. Этот случай реализуется в пространственной группе, инвариантной подгруппой которой является группа трансляций. Концепции орбиты и малой группы применяются для приведения пространственных групп. Рассмотрены сопряженные представления трансляций, суперзвезды векторов обратной решетки **k**, с помощью которых дается простое графическое изображение суперорбит, а также группы векторов **k** как малые группы. Дается определение области представлений, которая является единственной областью в зоне Бриллюэна, генерирующей все неприводимые представления пространственной группы и допускающей простое геометрическое построение. Приведена общая схема приведения группы, в том числе схема метода приведения несимморфных пространственных групп. В конце главы на конкретном примере гексагонального плотноупакованного кристалла пояснены все детали описанного метода приведения пространственной группы.

В гл. 18 описываются правила отбора в кристаллах. Здесь дается строгое решение проблемы переходов между различными состояниями в кристалле под действием

возмущения на основе использования только малых групп и соответствующих индуцированных представлений в полной группе. В качестве примера рассмотрена пространственная группа, включающая группу трансляции простой кубической решетки Браве и точечную группу тетраэдра.

Гл. 19 и 20 содержат оригинальные результаты автора, ранее не публиковавшиеся, которые касаются теории и приложений полупрямых произведений. В гл. 19 дается исчерпывающее описание полупрямых произведений, в том числе их групповые свойства, структура классов и метод приведения. Здесь доказывается, что все кристаллографические точечные группы могут быть представлены в виде полупрямых произведений. В качестве примера приведения находятся неприводимые представления октаэдрической группы O, являющейся полупрямым произведением групп T и C_2, исходя из неприводимых представлений тетраэдрической группы T. Описана упрощенная процедура приведения полупрямого произведения для абелевых групп.

В гл. 20 теория полупрямых произведений, развитая в гл. 19, применена для описания молекулярной структуры и групп симметрии нежестких молекул. Группы симметрии нежестких молекул рассматриваются как полупрямые произведения двух подгрупп, одна из которых является группой молекулярных граничных условий, а другая — собственной группой. Практический интерес представляет анализ структуры триметила бора, группа симметрии которого имеет порядок 324. Находятся классы и неприводимые представления данной группы, что ранее могло быть сделано лишь с помощью компьютера.

С. А. Пикин