

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУКФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

537.311.33

ЭЛЕКТРОННАЯ ТЕОРИЯ МЕТАЛЛОВ И ГЕОМЕТРИЯ

М. И. Каганов, И. М. Лифшиц

Поверхность Ферми. Энергетический спектр металлов.— Плоские сечения поверхности Ферми.— Электроны «прыгают» по поверхности Ферми.— Электроны с произвольным законом дисперсии и модель Харрисона.— «Поясок» на поверхности Ферми.— Электроны сталкиваются с границей.— Пересечение поверхности Ферми со своим сдвинутым аналогом. Особенности Мигдала — Кона.— Сечение и пояски изменяют топологию.— Медленные электроны.— Поверхность Ферми меняет свою геометрию.— Электроны переходят с одной орбиты на другую. Магнитный пробой.

Последние два-три десятилетия общепризнано считаются периодом успехов квантовой физики твердого тела, в частности, квантовой теории металлов. Даже если не касаться создания микроскопической теории сверхпроводимости (этот вопрос выходит за рамки настоящей статьи), то достижения несомненны.

Сравнительно давно был накоплен большой экспериментальный материал, демонстрирующий существенное отличие одного металла от другого: выяснилось, что сопротивление одних металлов при низких температурах во много раз возрастает с ростом магнитного поля, других — изменяется сравнительно немного; обнаружилось, что масштаб периодов магнитных осцилляций, скажем, в висмуте и в золоте отличается на много порядков. Эти примеры можно множить бесконечно. Лет двадцать назад в теории существовал «безликий» металл, свойства которого в общих чертах описывались вырожденным ферми-газом. Основное внимание уделялось (во всяком случае, при изложении электронной теории металлов, например, в учебниках Р. Пайерлса, Г. Бете и А. Зоммерфельда, А. Вильсона) тому, с чем теория умела справляться: температурным зависимостям — сопротивления, теплопроводности, теплоемкости...

Пожалуй, одно из главных достижений современной электронной теории металлов — ликвидация этого противоречия между теорией и экспериментом. Металл получил свое «лицо». Было понято, чем электроны одних металлов отличаются от электронов других металлов. «Лицом» металла, его «визитной карточкой» стала поверхность Ферми (ПФ) — изоэнергетическая поверхность, отделяющая занятые в пространстве квазиимпульсов состояние от свободных (при абсолютном нуле температуры). ПФ столь разнообразны и вычурны, что, казалось бы, рождены фантазией современного художника, а не есть удобный способ количественного описания свойств электронов проводимости.

Создание электронной теории металлов в ее сегодняшней форме, приведшей к конкретизации свойств электронов различных металлов, оказалось возможным благодаря внесению в теорию металлов геометрических образов и использованию геометрического языка. Современные работы по физике металлов пестрят терминами типа «гауссова кривизна», «экстремальное сечение», «опорная плоскость» и т. п.

Цель настоящего обзора привести большое число примеров, демонстрирующих пользу геометрической интерпретации. За годы развития электронной теории металлов выяснилось, что особую роль играют те свойства и явления, которые, во-первых, определяются выделенными группами электронов, расположенными на поверхностях, на линиях, в точках, а, во-вторых, связаны с качественными изменениями при внешних воздействиях геометрических фигур, играющих определяющую роль в электронных свойствах металлов (поверхностей, сечений, «поясков»). Им, естественно, будет уделено здесь много места.

1. ПОВЕРХНОСТЬ ФЕРМИ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР МЕТАЛЛОВ

Хотя строгое доказательство ниже приводимого утверждения отсутствует, но все уверены, что

вблизи основного состояния энергетический спектр любого кристалла может быть описан в терминах квазичастиц, причем состояние квазичастицы определяется квазиимпульсом \mathbf{p} из периодического \mathbf{p} -пространства со структурой, заданной геометрией кристалла. Все квазичастицы делятся на два класса — бозоны и фермионы, причем типов бозонов много (фононы, магноны, экситоны и т. д.), а фермионы — только электроны.

Квазичастицы — бозоны представляют собой почти идеальный газ, взаимодействие между частицами которого тем меньше, чем ниже температура T — попросту потому, что, чем ниже температура, тем меньше квазичастиц — бозонов (число фононов $\propto T^3$, магнонов в ферромагнетиках $\propto T^{3/2}$). Зависимость от температуры числа квазичастиц — бозонов, а тем самым температурный ход многих физических величин кристаллов связан с законом дисперсии квазичастиц, т. е. с зависимостью энергии квазичастицы ε от ее квазиимпульса \mathbf{p}

$$\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p}). \quad (1)$$

Это дает возможность в принципе использовать температурную зависимость экспериментальных характеристик твердого тела для восстановления бозевских ветвей его спектра (точнее — плотности состояний). Хотя этот метод получил математическое обоснование¹, наиболее продуктивными оказались методы, использующие взаимодействие проникающего излучения с бозонами. Так как бозоны могут рождаться по одиночке и вероятность рождения одного бозона, если оно не запрещено правилами отбора, превышает вероятность многоквазичастичного рождения, то по неупругому рассеянию (нейтронов, фотонов) или по резонансному поглощению*) (фотонов, фононов) удается определить законы дисперсии квазичастиц — бозонов.

Число электронов проводимости металла неизменно. Поэтому понижение температуры не уменьшает взаимодействия между электронами, которое того же порядка, что и взаимодействие с ионами решетки. Электроны проводимости металла — электронная жидкость, а построение

*) На языке квазичастиц резонансное поглощение — это превращение одной квазичастицы в другую (например, фотона в оптический фонон).

последовательной теории обеспечивается ее близостью к основному состоянию практически во всех интересных случаях (так $T \ll \epsilon_F$, где ϵ_F — энергия Ферми). Согласно теории ферми-жидкости (Л. Д. Ландау ²), основными характеристиками электронной подсистемы металла служат:

а) зависимость энергии квазичастиц от квазиимпульса $\epsilon = \epsilon(\mathbf{p})$, определяемая как вариационная производная от энергии электронов E по функции распределения $n(\mathbf{p})$:

$$\frac{\delta E}{\delta n(\mathbf{p})} = \epsilon(\mathbf{p}); \quad (2)$$

б) корреляционная функция (функция Ландау) $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$, определяющая изменение энергии квазичастицы $\epsilon(\mathbf{p})$ за счет изменения распределения электронов по \mathbf{p} -пространству:

$$\frac{\delta \epsilon(\mathbf{p})}{\delta n(\mathbf{p}')} = \frac{\delta^2 E}{\delta n(\mathbf{p}) \delta n(\mathbf{p}')} = f(\mathbf{p}, \mathbf{p}'). \quad (3)$$

В основном состоянии (при $T = 0$) квазичастицы — электроны занимают все состояния с энергией, меньшей энергии Ферми ϵ_F . Условие нормировки (число квазичастиц равно числу электронов в частично заполненных зонах ³) определяет объем занятой электронами части \mathbf{p} -пространства. Вырождение электронной жидкости приводит к выделению фермиевских электронов, так как при слабом возбуждении перераспределяются только электроны, расположенные вблизи ПФ,

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F. \quad (4)$$

Малое изменение энергии электрона определяется его скоростью

$$d\epsilon(\mathbf{p}) = v_F d\mathbf{p},$$

где v_F — скорость электрона на ПФ. Определение электронного энергетического спектра в рамках теории ферми-жидкости Ландау сводится к определению ПФ (4) и скоростей электронов на ней v_F . Полное описание электронов проводимости, кроме того, включает знание функций (точнее — матрицы) Ландау $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$.

Задача расшифровки электронного энергетического спектра металлов по экспериментальным данным (в основном по свойствам в сравнительно больших магнитных полях) формулировалась до построения теории ферми-жидкости. Естественно, при этом использовался «газовый» язык. Важно подчеркнуть, что подавляющее большинство методов, позволивших определить (и принципиально позволяющие определить) различные геометрические характеристики ПФ (см. ниже), оказались устойчивыми к «переводу» с «газового» на «жидкостный» язык. Это означает вот что:

а) определяются характеристики именно поверхности (4), где $\epsilon(\mathbf{p})$ — закон дисперсии квазичастицы (см. (2)), а не электрона, не взаимодействующего с другими электронами,

б) в формулы, связывающие экспериментально измеряемые величины с характеристиками закона дисперсии электронов во многих важных случаях не входит функция Ландау $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$.

Полностью исключить функцию Ландау из электронной теории металлов (переписать теорию на «газовом» языке), конечно, нельзя, так как в высокочастотные, нелинейные и др. характеристики металлов $f(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ входит непосредственно. Восстановление функции Ландау — отдельная сложная задача, успехов в решении которой значительно меньше, чем в реконструкции поверхностей Ферми.

Определение энергетического спектра макроскопических тел — этап в расчете характеристик этих тел. В идеале программа теорфизического понимания свойств твердых тел выглядит так: выясняются необходимые характеристики квазичастиц данного тела; по ним рассчитываются любые его макроскопические характеристики. Для расчета кинетических коэффициентов необходимо знание сечений рассеяния или длин пробегов квазичастиц. Если ограничиться линейным откликом металла, то круг задач

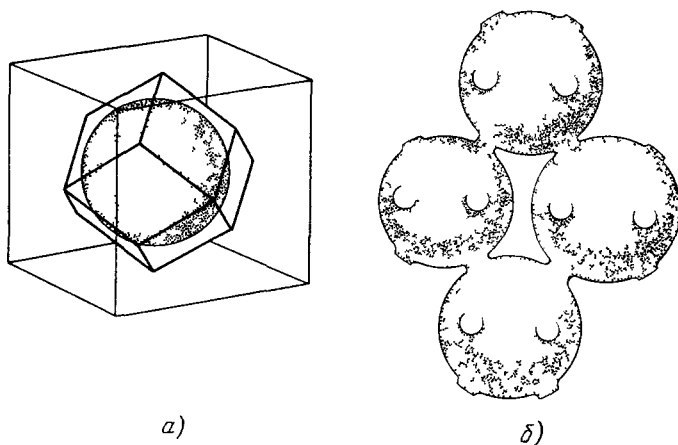


Рис. 1. Замкнутые и открытые поверхности Ферми (ПФ).

а) Замкнутая ПФ щелочного металла; б) открытая ПФ меди. ■

для которых достаточно газового описания, очень велик: во-первых, это все квазистатические задачи ($\omega\tau \ll 1$, ω — частота внешнего воздействия, τ — время релаксации; см. ⁴, § 23), а во-вторых, задачи типа аномального скин-эффекта ⁵, в которых функция распределения электронов имеет пик в малой области \mathbf{p} -пространства. Так как учет ферми-жидкостных эффектов связан с добавлением в энергию слагаемого, содержащего интегрирование по квазиимпульсу, то роль ферми-жидкостных эффектов в подобных задачах второстепенна.

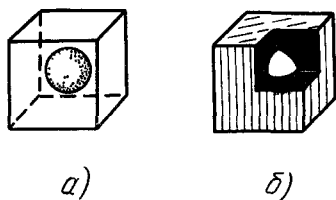


Рис. 2. Электронная (а) и дырочная (б) ПФ.

Состояния в \mathbf{p} -пространстве, занятые электронами, зачернены

Наконец, следует подчеркнуть еще одно важное обстоятельство, облегчающее решение многих задач. Электрон металла, естественно, предельно квантовый объект. Зонный характер энергетического спектра, понятия «квазиимпульс», «квазичастица», «вырождение», «энергия Ферми» и т. п. — следствие применения к электронам законов квантовой механики.

Но движение квазичастицы с квазиимпульсом \mathbf{p} и энергией $\epsilon(\mathbf{p})$ во внешних полях в большинстве случаев квазиклассично. Последнее обусловлено только тем, что внешние поля относительно малы по величине по сравнению с внутриатомными и изменяются на расстояниях, больших по сравнению с атомными. При этом (квази) классичность движения во внешних полях проявляется, прежде всего в том, что квазиимпульс можно считать обычным импульсом, а $\epsilon(\mathbf{p})$ — гамильтонианом «свободной» квазичастицы, что дает возможность детально проанализировать движение квазичастиц во внешних полях ⁶ и использовать результаты анализа для вычисления характеристик металла.

ПФ — ее форма, элементы симметрии, размеры — такая же характеристика твердого тела, как и его кристаллическая решетка. Периодичность p -пространства дает возможность рассматривать одну его ячейку, естественно полностью характеризующую ПФ. Однако, во многих случаях удобнее не ограничиваться одной ячейкой — пользоваться бесконечным p -пространством. Это позволяет отличать замкнутые ПФ, т. е. распадающиеся на периодически повторяющиеся полости (рис. 1, а), от открытых, т. е. непрерывно проходящих через все p -пространство (рис. 1, б). Одно-связные полости ПФ можно разделить на электронные (рис. 2, а) и дырочные (рис. 2, б), выделив в специальный класс скомпенсированные металлы с равными числами электронов n_1 и дырок n_2 *).

При расчете многих электронных характеристик важную роль играет локальная геометрия ПФ (геометрия в точке на поверхности): кроме

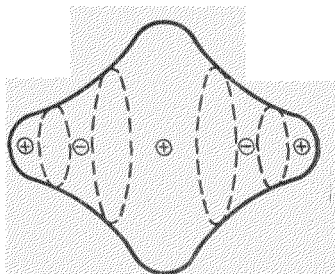


Рис. 3. Эллиптические, гиперболические и параболические точки на ПФ (на ПФ указан знак гауссовой кривизны K).

Штриховые линии — линии параболических точек, на которых $K = 0$.

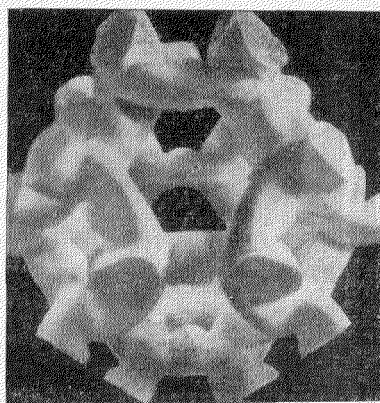


Рис. 4. Часть ПФ свинца (третья зона) — пример «монстра», сложной открытой ПФ.

скорости электрона $v(v = \nabla_p \epsilon$ — нормаль к ПФ), ее характеризует, как всякую поверхность, гауссова кривизна K . Все точки на ПФ можно разделить на

- эллиптические
- гиперболические (или седловые)
- параболические **).

Они показаны на рис. 3. Как будет ясно из дальнейшего, в зависимости от структуры ПФ параболические точки могут быть разными.

ПФ — пейзаж, на котором разыгрываются «драмы из жизни электронов». И так же, как жизнь горцев существенно отличается от жизни жителей долин, так свойства электронов Pb, у которого ПФ необычайно сложна (рис. 4), не похожи на свойства электронов Na, ПФ которого — сфера, более гладкая, чем бильярдный шар. Но, с другой стороны, и те и другие не лишены «общечеловеческих» черт электронов вырожденного фермиевского газа.

) n_1 — число занятых электронных состояний с положительной эффективной массой ($m^ > 0$), n_2 — число свободных состояний с $m^* < 0$ (см. (9)).

***) Существование параболической точки — следствие перемены знака одной из главных кривизн ПФ.

2. ПЛОСКИЕ СЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

а) Эффект де Гааза — ван Альфена

Стимулирующее влияние на постановку задачи о восстановлении электронного энергетического спектра металла по экспериментальным данным сыграла знаменитая работа Д. Шёнберга⁷ по исследованию осцилляционной зависимости магнитного момента \bar{M} от магнитного поля (эффекта де Гааза — ван Альфена). Она демонстрировала казалось бы, неограниченные возможности использования квантовых магнитных осцилляций для определения параметров, описывающих электронный газ металла. Для расшифровки экспериментальных данных Д. Шёнберг использовал выражения, получающиеся при рассмотрении осцилляционных свойств газа электронов с квадратичным анизотропным законом дисперсии (модель \bar{M} по Джонсу⁸). Общих формул, связывающих зависимость магнитного момента M от магнитного поля H с параметрами электронного энергетического спектра металла не было; не было даже ясности, какие черты эффекта де Гааза — ван Альфена наиболее существенны для решения спектроскопических задач. Сейчас трудно себе представить, сколько трудов было потрачено, например, на описание огибающей функции $M = M(H)$, сколько терминов было введено, чтобы систематизировать быстро накапливающийся материал по эффекту де Гааза — ван Альфена: работами кембриджских и харьковских физиков было показано (речь идет о 50-х годах), что эффект де Гааза — ван Альфена — общеметаллическое свойство.

Тогда же в теории появился термин: «электрон с произвольным законом дисперсии», т. е. с неконкретизируемой зависимостью энергии от импульса. Оказалось, что для многих расчетов в конкретизации нет необходимости. Так была рассчитана зависимость от магнитного поля магнитного момента электронов с произвольным законом дисперсии, построена теория де Гааза — ван Альфена⁹. Периоду развития физики металлов в 50—60-е годы отвечает определенный стиль теоретических работ, структуру которых можно охарактеризовать следующим образом:

1) Исследование классического движения электрона с произвольным законом дисперсии в магнитном поле на основании уравнений

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}], \quad \mathbf{v} = \frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{p}}. \quad (5)$$

2) Квазиклассическое квантование (когда это нужно) классического движения, исследованного в пункте 1.

3) Вычисление соответствующей экспериментально наблюдаемой характеристики изучаемого явления с использованием результатов п.п. 1, 2 и с учетом вырождения электронного газа.

4) Выяснение и подчеркивание спектроскопических возможностей явления, т. е. формулировка вывода о том, какие характеристики фермиевских электронов можно определить с помощью исследуемого явления.

Идеальный (но не достижимый практически) итог работы такого стиля авторы видели в полном подробном определении поверхности Ферми и скоростей фермиевских электронов. Многие поверхности Ферми получили «кличку» «монстр» — чудовище. Скорость — нормаль к поверхности — его «щетина». Итак, идеальный итог — «небритое чудовище», особенно страшное, если поверхность дырочная («щетина» направлена внутрь).

Вернемся к работе⁹:

1) Согласно (5) траектория электрона в \mathbf{p} -пространстве есть результат пересечения его изоэнергетической поверхности плоскостью $p_z =$

= const ($H_x = H_y = 0; H_z = H$):

$$\varepsilon(p_x, p_y, p_z) = \varepsilon_0, \quad p_z = p_{z0}. \quad (6)$$

2) Если траектория замкнута, то движение в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, квантуется, а зависимость энергии от p_z в n -й подзоне Ландау определяется условием квазиклассического квантования^{10,11}:

$$S(\varepsilon, p_z) = \frac{2\pi e \hbar H}{c} \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n \gg 1, \quad (7)$$

n — целые числа, а $S(\varepsilon, p_z)$ — площадь, заключенная внутри траектории (6).

3) Наличие корневых особенностей на границах подзон (с данным n) выделяет экстремальные (по p_z) сечения $S_{\text{extr}}(\varepsilon)$, а вырождение фиксирует энергию $\varepsilon = \varepsilon_F$. Применение формулы Пуассона позволяет записать термодинамический потенциал Ω , а, значит, и магнитный момент M в виде суммы осциллирующих слагаемых, каждое из которых связано с экстремальным (по p_z) сечением ПФ (рис. 5), причем период осцилляций Δ ($1/H$) обратно пропорционален площади экстремального сечения*):

$$\Delta \frac{1}{H} = \frac{2\pi e \hbar}{c S_{\text{extr}}(\varepsilon_F)}, \quad (8)$$

а функция, описывающая температурную зависимость амплитуды, содержит значение эффективной массы

$$m^*(\varepsilon_F, p_z^{\text{extr}}) = \frac{1}{2\pi} \left. \frac{\partial S(\varepsilon, p_z)}{\partial \varepsilon} \right|_{\substack{\varepsilon = \varepsilon_F \\ p_z = p_z^{\text{extr}}}}. \quad (9)$$

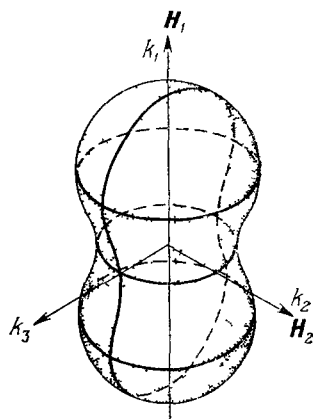


Рис. 5 Плоские сечения ПФ с экстремальными площадями

4) Изменяя направление магнитного поля, измеряя периоды и амплитуды и сравнивая экспериментальные результаты с выведенными формулами, можно восстановить как форму поверхности Ферми, так и скорость фермиевских электронов.

«Идеальная» программа завершилась геометрическим исследованием И. М. Лифшица и А. В. Погорелова¹², которые показали, что если поверхность имеет центральную симметрию**), то существует аналитическая процедура расчета ее формы по периодам и скоростей — по эффективным массам (см. формулы (17.7) и (17.8) в 4). Эта программа, несмотря на все трудности, была реально использована при расшифровке поверхностей Ферми Al и Pb¹³.

б) Размерные эффекты

Расчет осцилляций не требует знания движения электрона с произвольным законом дисперсии в \mathbf{r} -пространстве. Однако для решения большинства задач кинетики это необходимо, и здесь на помощь приходит

*) Осциллирующий характер Ω и M с периодом (8) — следствие периодической зависимости от $1/H$ плотности электронных состояний. Поэтому осциллирующей зависимостью от $1/H$ обладают практически все характеристики металла в условиях, пригодных для наблюдения эффекта де Гааза—ван Альфена ($\hbar\omega_c, T \ll \varepsilon_F$; $\omega_c = eH/m^*c$ — циклотронная частота)

**) Кроме того, надо, чтобы вектор \mathbf{p} , проведенный из центра поверхности, не пересекал ПФ более одного раза

геометрическая теорема — следствие уравнения (5): проекция г-траектории на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, получается из р-траектории поворотом на $\pi/2$ и изменением масштаба — переводной

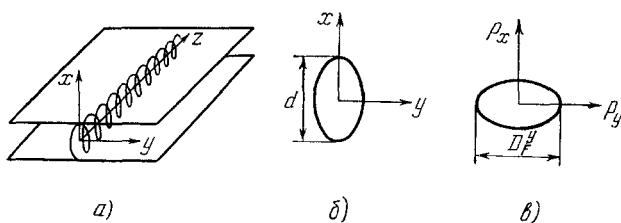


Рис. 6. Природа размерных эффектов основана на соответствии траекторий электронов в р- и г-пространствах.

а) Траектория в пластине толщины d , б) ее проекция на плоскость $z = \text{const}$, в) траектория в р-пространстве.

множитель равен $c/|e|H$. Движение вдоль оси z , т. е. вдоль магнитного поля, описывается функцией

$$v_z(t) \equiv v_z(p_x(t), p_y(t), p_z = p_{z0}).$$

В терминах г-траектории особенно наглядным делается условие квантования: траектория электрона навивается на поток магнитного поля Φ ,

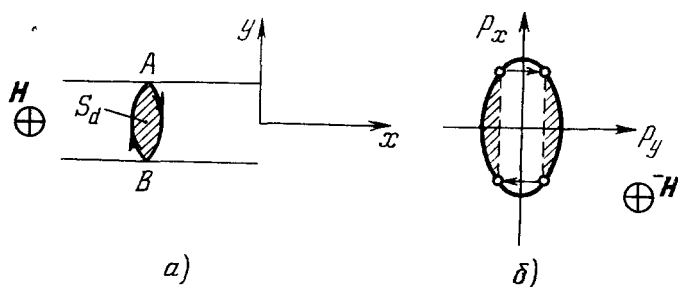


Рис. 7. а) Электрон, движущийся в магнитном поле, отражается от границ пластины в точках A и B ; б) изменению скорости электрона при отражениях соответствуют скачки в р-пространстве (обозначенные стрелками).

Согласно условию квантования поток магнитного поля, пронизывающий S_d , равен полуделому числу квантов потока.

равный полуделому числу квантов магнитного потока: $\Phi = \left(n + \frac{1}{2}\right) \Phi_0$, $\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar e}{e}$.

Однозначное соответствие между траекториями в р- и г-пространствах породило исследования формы ПФ, использующие разнообразные размерные эффекты.

Принципиальная основа размерных эффектов проста. Постановка задачи фиксирует электронные траектории определенного размера d , который известен (толщина пластины¹⁴, длина звуковой волны¹⁵ и т. п.). Равенство

$$\frac{cD_F}{eH} = d$$

где D_F — выделенный диаметр ПФ (например, экстремальный, как на рис. 6) показывает, что при $H = H_d = cD_F/ed$ должно нечто наблю-

даться. *Чтоб* — предсказывает теория (см. ¹⁶). Она же уточняет причину выделения диаметра D_F . Измерение H_d в размерном эффекте, таким образом, есть способ непосредственного измерения диаметра поверхности Ферми. Анизотропия эффекта (зависимость H_d от направления магнитного поля) — свидетельство анизотропии электронного спектра, а исследование анизотропии — метод непосредственного «прощупывания» формы ПФ.

Сочетание размерного эффекта и дегааз-ванальфеновских осцилляций — источник своеобразных явлений, также допускающих простую геометрическую интерпретацию. Рис. 7 показывает, что при зеркальном отражении от границы электрон «перепрыгивает» из одной точки поверхности Ферми в другую. В условии квантования (7) входит площадь S_d (см. рис. 7), что проявляется в зависимости периода (8) от толщины пластины. Сравнительно недавно это явление, предсказанное в 1953 г. (см. ¹⁷) было открыто на «усах» Sb ¹⁸.

в) Г а л ь в а н о м а г н и т н ы е я в л е н и я

Гальваномагнитные явления (зависимость сопротивления от магнитного поля, эффект Холла) существенно зависят от характера движения электрона в магнитном поле. Особенно отчетливо это проявляется в больших магнитных полях ($cd_F/eH \ll l$, l — длина свободного пробега электронов), когда электрон между столкновениями (на пути l) успевает

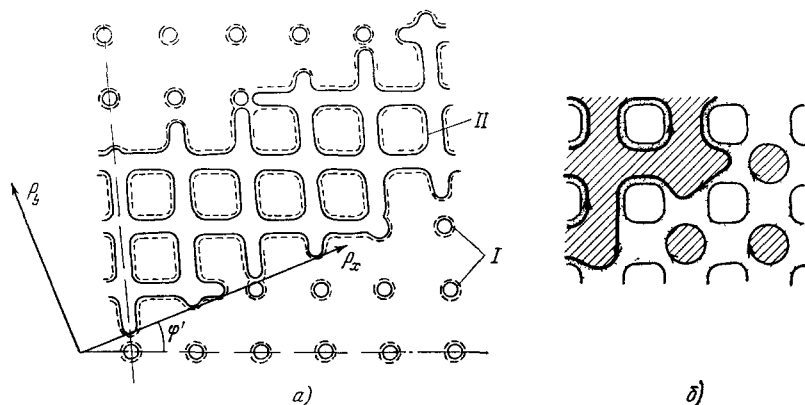


Рис. 8. а) Рисунок из работы ²⁶, показывающий происхождение открытых траекторий у таких металлов, как медь, золото, серебро (ПФ типа «монстр»); б) открытая траектория разделяет области дырочных и электронных орбит (схематическое изображение).

«почувствовать» форму траектории, по которой он движется. В обратном предельном случае ($cd_F/eH \gg l$) участок траектории электрона между столкновениями практически не отличается от прямой.

Траектории электронов в магнитном поле (6) допускают простую топологическую классификацию, основанную на свойствах симметрии закона дисперсии. Возможны два случая: при фиксированном направлении магнитного поля H траектория (6) может либо распадаться на замкнутые траектории, либо, если ПФ — открытая, уходить на бесконечность вдоль направления «открытости» (рис. 8). При избранных направлениях H и при фиксированных значениях p_z возможны траектории с самопересечениями (рис. 9) и даже двумерные сетки открытых самопересекающихся траекторий (рис. 10). Мы пока не будем останавливаться на этих сравнительно редких и мало изученных случаях.

Анализ, проведенный в ¹⁹⁻²¹, показал, что гальвагромагнитные явления — зависимость поперечного сопротивления от магнитного поля $\rho_{\perp} = \rho_{\perp}(H)$ и эффект Холла — дают возможность «увидеть» общие контуры

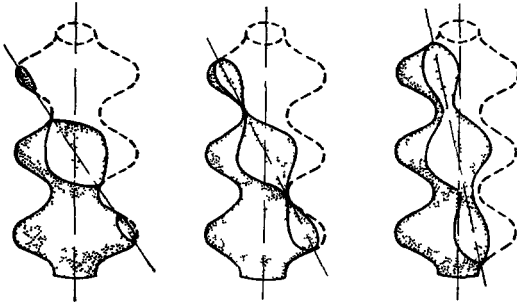


Рис. 9. Траектория с самопересечениями может возникнуть при сечении ПФ типа «гофрированный цилиндр».

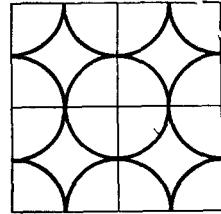


Рис. 10. Двумерная сетка открытых самопересекающихся траекторий.

ПФ — их топологию. Оказалось, что асимптотическое поведение компонент тензора сопротивлений $\rho_{\alpha\beta}(H)$ в больших полях (формально при $H \rightarrow \infty$), весьма чувствительно к геометрии ПФ.

Сопоставление геометрических характеристик с поведением в сильном поле сведено в табл. I и может служить рецептом для определения

Таблица I

Связь асимптотики поперечного электросопротивления со структурой энергетического спектра

Замкнутые ПФ		Открытые ПФ
$n_1 \neq n_2$	$n_1 = n_2$	
<p>θ — направление магнитного поля относительно кристаллографических осей, при $\theta = \theta_1$ слой открытых траекторий имеет максимальную толщину, при $\theta = \theta_2$ открытых траекторий нет.</p>		

топологии ПФ. Вся картина была бы более наглядной, если бы не усложнялась различной ролью электронов и дырок (см. рис. 2). Дело в том, что величины $\rho_{\alpha\beta}$ определяются не только компонентами симметричной

части тензора проводимости $\sigma_{\alpha\beta}$, но и антисимметричной. Первые описывают диссипативные процессы, а вторые — холл-эффект. В сильном магнитном поле

$$\sigma_{xy} = \frac{(n_1 - n_2) ec}{H} + \dots, \tag{10}$$

где $n_{1(2)}$ — число электронов (дырок) в единице объема ($n_{1(2)} = 2\Delta_{1(2)}/(2\pi\hbar)^3$, где $\Delta_{1(2)}$ — объем занятых (свободных) состояний с положительной (отрицательной) эффективной массой). Точки означают, что опущены следующие члены разложения по обратному магнитному полю. Видно, что при $n_1 = n_2$ разложение начинается с членов, пропорциональных $1/H^2$. Именно из-за этого для скомпенсированного металла (т. е. при равенстве чисел электронов и дырок) $\rho_{\perp} \propto H^2$.

Для пояснения роли открытости ПФ нет необходимости прибегать к расчетам, использующим кинетическое уравнение. Достаточно воспользоваться обобщением на случай вырожденной статистики соотношения Эйнштейна между проводимостью σ и коэффициентом диффузии \mathcal{D}

$$\sigma \approx \frac{ne^2 \mathcal{D}}{E_F}, \tag{11}$$

а для вычисления коэффициента диффузии — качественными представлениями кинетической теории.

Когда электрон движется в магнитном поле по замкнутой траектории, то диффузия в плоскости, перпендикулярной полю, совершается путем скачков на величину $\approx r_H \approx cD_F/eH$ (рис. 11) с частотой $\approx 1/\tau$ (τ — время релаксации). В этом случае $\mathcal{D} \approx r_H^2/\tau$, а

$$\sigma \approx \frac{\sigma_0}{(\omega_c \tau)^2}, \quad \omega_c = \frac{eH}{m^*c}, \tag{12}$$

σ_0 — проводимость при $H = 0$.

Если в p -пространстве траектория вдоль оси p_x — открытая, то в \mathbf{r} -пространстве движение вдоль оси y напоминает свободное и $\mathcal{D}_{yy} \approx v_F^2 \tau$, а вдоль оси x — практически не отличается от движения по замкнутой траектории, и $\mathcal{D}_{xx} \approx r_H^2/\tau$. Отсюда

$$\sigma_{xx} = \frac{\sigma_0}{(\omega_c \tau)^2}, \quad \sigma_{yy} \approx \sigma_0. \tag{13}$$

Существенное отличие асимптотик $\sigma_{xx}(H)$ и $\sigma_{yy}(H)$ — основа анизотропии гальваномагнитных свойств металлов с открытыми поверхностями Ферми (см. ¹⁹⁻²¹, а также ⁴, §§ 27, 28).

Понимание (путем геометрического анализа) характера движения электронов в магнитном поле позволяет в ряде случаев предсказать весьма необычные явления. К ним несомненно относится статический скин-эффект ²², согласно которому поверхностная проводимость в сильном магнитном поле может оказаться заметно больше объемной.

Пусть магнитное поле направлено параллельно поверхности образца. Зеркальное отражение электронов от поверхности делает их движение в приповерхностном слое ($\approx r_H$) в направлении, перпендикулярном магнитному полю, напоминающим движение вдоль открытой траектории.

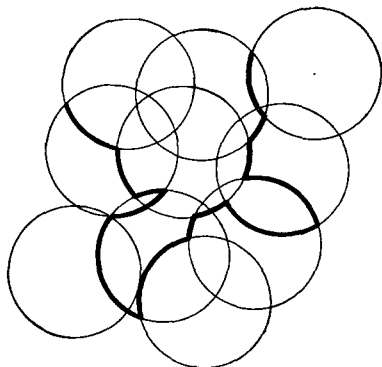


Рис. 11. Диффузия электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю.

Жирная линия — случайный диффузионный путь электрона.

(рис. 12, а), а следовательно, одну из компонент приповерхностной проводимости σ_{yy} в $(\omega_c \tau)^2$ больше объемной (для определенности считаем ПФ замкнутой). Диффузное рассеяние не ликвидирует этот эффект. В результате столкновений, частота которых $\approx \omega_c$, среднее перемещение электронов непосредственно на границе образца $\approx r_H$ и σ_{yy} ($z = d$) оказывается приблизительно равной $\sigma_0/\omega_c \tau$. На расстоянии $\approx r_H$ от границы положение существенно изменяется, так как магнитное поле «заставляет» все отразившиеся от границы электроны двигаться в одну сторону, из-за

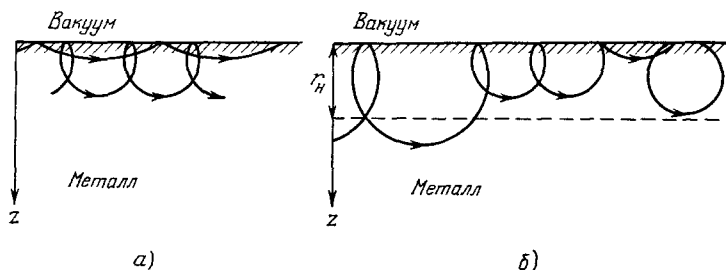


Рис. 12. Открытая траектория может возникнуть за счет отражения электрона от границы металла: а) зеркальное отражение), б) диффузное.

И в том и в другом случае все электроны «гонятся» магнитным полем в одну сторону, а дырки — в другую.

чего σ_{yy} «дорастает» до значения σ_0 (рис. 12, б). Как ясно из уже сказанного, статический скин-эффект не столь простое явление, как может показаться при изложении «на пальцах». Вывод формул требует решения кинетического уравнения в неоднородном случае и тщательного анализа конкретной ситуации — соотношения между толщиной пластины d , длиной пробега l и радиусом орбиты электрона r_H . Кроме того, важную роль играет спектр электронов: замкнута ПФ или открыта, скомпенсированный металл или нет. Далеко не все предсказанные теорией²³ черты статического скин-эффекта нашли уже свое экспериментальное подтверждение, но нет никаких сомнений, что в сильном магнитном поле проводимость вблизи границы образца может быть больше, чем в объеме металла.

Качественное изменение характера движения электрона проводимости в магнитном поле из-за неоднородности действующей на электрон силы Лоренца, легко понять на примере взаимодействия электрона с доменной стенкой²⁴ (180-градусной границей между доменами, рис. 13). Проводимость вдоль доменной стенки должна быть в $(\omega_c \tau)^2$ раз больше, чем поперек.

Рис. 13. Открытые траектории могут возникнуть вблизи границы доменов из-за того, что сила Лоренца меняет знак при переходе от домена к домену.

Этот беглый очерк теории гальваномагнитных явлений следует, как нам кажется, закончить некоторыми призывами к осторожности. Теория^{19,20} претендует на вывод асимптотического поведения $\rho_{ik}(H)$, исходя из анализа классического движения электронов с произвольным законом дисперсии в достаточно сильном магнитном поле — в таком, что частота столкновений $1/\tau$ значительно меньше частоты ларморовской прецессии ω_c ($\omega_c \tau \gg 1$ или $cD_F/eH \ll l$, см. выше).

Квантование движения электрона в плоскости, перпендикулярной магнитному полю, делает классический подход заведомо неточным. Квантование приводит к осцилляциям ρ_{ik} с обратным магнитным полем (эффект Шубникова — де Гааза²⁵). Природа эффекта Шубникова — де Гааза та же, что и эффекта де Гааза — ван Альфена²⁶, в частности, оба эффекта имеют одинаковые периоды и оба наблюдаются в условиях квазиклассического движения электронов в магнитном поле ($\hbar\omega_c \ll \epsilon_F$). Как правило, квантовая осциллирующая часть тензора сопротивлений $\rho_{ik}^{осп}$ заметно меньше классической монотонной части $\rho_{ik}(\mathbf{H})$: осцилляции накладываются на классическую монотонную зависимость $\rho_{ik} = \rho_{ik}^{мон}(\mathbf{H})$ в виде «ряби». Это, по существу, и позволяет пользоваться классической теорией.

Условие квазиклассичности ($\hbar\omega_c \ll \epsilon_F$) привносит еще одно облегчение: оператор столкновений \hat{W} , входящий в кинетическое уравнение Больцмана, служащее для расчета гальваномагнитных характеристик^{19, 20} в нулевом по $\hbar\omega_c/\epsilon_F$ порядке, не зависит от магнитного поля. Это обстоятельство — следствие того, что длина столкновения электрона в кристалле с примесями, играющими при низких температурах главную роль, порядка межатомного расстояния a , а условие $a \ll r_H \approx cD_F/eH$ сводится к условию $\hbar\omega_c \ll \epsilon_F$. Почти полное отсутствие зависимости \hat{W} от \mathbf{H} при рассеянии на фононах обеспечивается сравнительно слабым условием $\hbar\omega_c/T \ll v_F/s$ (s — скорость звука), означающим малость длины волны λ фонона с энергией $\hbar s/\lambda \approx T$ по сравнению *) с r_H . Независимость \hat{W} от \mathbf{H} , по сути дела, и позволяет, опираясь на анализ классической динамики электрона проводимости в магнитном поле, установить асимптотику $\rho_{ik}(\mathbf{H})$.

Эта сравнительно простая теория не исчерпывает всей ситуации. Она не может охватить области промежуточных полей. Произвольные поля требуют численного счета, ранее совершенно недоступного, а в последние годы постепенно вытесняющего аналитические методы (авторы говорят об этом с грустью). Но бывают ситуации, когда в промежуточных полях возможно аналитическое рассмотрение. Это означает, что среди характеристик металла есть дополнительный малый параметр (или параметры). Наиболее прост случай малой разности $\Delta n = n_1 - n_2$. Для таких металлов (Bi с примесями, например), насыщение сопротивления наблюдается только при $\omega_c \tau \gg n/\Delta n \gg 1$, а при $n/\Delta n \gg \omega_c \tau \gg 1$ сопротивление квадратично растет с полем, т. е. металл ведет себя как скомпенсированный^{27, 28}. Похожее явление должно иметь место и тогда, когда поверхность Ферми содержит узкий слой открытых траекторий²⁹.

Приведенные два параметра просты по сути. Магнитное поле «не вмешивается» ни в спектр электронов, ни в их столкновения. «Просто» для выделения ответственных за асимптотику электронов нужны большие поля, чем обычно, так как «ответственных» сравнительно мало. Но магнитное поле может не только выявлять «ответственные» электроны, но и создавать их. Об этом мы расскажем в разделе «Магнитный пробой».

И еще одно: детализация процессов столкновения позволяет установить «промежуточные» асимптотики, несомненно, представляющие значительный интерес. Рассмотрим грубый пример, только поясняющий суть дела (подробнее мы остановимся на этом вопросе в следующем разделе).

*) Необременительность последнего условия видна из того, что сопоставление с обязательным условием $\omega_c \tau \gg 1$ приводит к очень слабому условию на длину свободного пробега: $T(K)l(\text{см}) \gg 10^{-6}$. Условие малости $\rho_{ik}^{осп}$ по сравнению с $\rho_{ik}^{мон}$ тоже содержит температуру: $\hbar\omega_c \ll \sqrt{T\epsilon_F}$. При сверхнизких температурах оно может нарушиться, но, как и приведенное выше, не слишком жестко: $l^2(\text{см}) T(K) \gg 10^{-12}$.

Пусть есть две группы электронов с существенно отличающимися временами свободного пробега $\tau_1 \gg \tau_2$ и примерно равными массами m_1 и m_2 . Тогда в промежуточных полях

$$\frac{m_1 c}{e \tau_1} \ll H \ll \frac{m_2 c}{e \tau_2}$$

вторая группа ощущает магнитное поле как слабое, а первая — как сильное, что, естественно, проявляется в зависимости ρ_{ik} от H .

3. ЭЛЕКТРОНЫ «ПРЫГАЮТ» ПО ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

В стационарном состоянии электрон имеет определенное значение квазиимпульса \mathbf{p} — покоится в «своей» точке \mathbf{p} -пространства. Под воздействием внешних регулярных полей электрон движется по фазовым траекториям, которые особенно просты, если движущей силой служит постоянная и однородная сила Лоренца (5). При этом, как мы уже говорили, электрон с энергией, равной фермиевской, движется по ПФ. Но перемещение электронов в \mathbf{p} -пространстве не ограничивается движением

под воздействием регулярных полей. В «жизни» электронов важную роль играет рассеяние — их столкновения с примесями, с фононами, друг с другом. При столкновениях с примесями, с дислокациями, с другими статическими дефектами кристалла фермиевский электрон «перепрыгивает» из одной точки на ПФ в другую, так как энергия в таких столкновениях сохраняется.

Рассеяние частиц со сложным законом дисперсии обладает специфическими особенностями³⁰. О некоторых из них будет рассказано ниже. Если ПФ не обладает вмятинами, то каждому направлению движения

электрона $\mathbf{v} = \mathbf{v}/v$ соответствует одно значение квазиимпульса \mathbf{p} (оно определяется как точка касания с ПФ плоскости, перпендикулярной \mathbf{v} , рис. 14). Если ПФ имеет более сложную форму, то существуют такие направления, в которых направление движения не определяет однозначно значение квазиимпульса \mathbf{p}_v (см. рис. 14). Именно это обстоятельство отличает рассеяние частиц со сложным законом дисперсии от рассеяния частиц в свободном пространстве с $\epsilon = p^2/2m$. Особое место занимают точки уплощения на ПФ. Если направление рассеяния параллельно вектору нормали в параболической точке $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c$ (см. рис. 14), то два значения импульса рассеянных частиц совпадают, а волновая функция рассеянной частицы при $\mathbf{v} = \mathbf{v}_c$ затухает медленнее, чем при $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}_c$. Это мало изученное явление, как нам кажется, может играть важную роль при изучении ковалентного взаимодействия через электроны проводимости примесных атомов, локализованных спинов и т. п. Особенности рассеяния квазичастиц с произвольным законом дисперсии исследованы в³⁰ (см. также³¹).

При столкновениях электрона с фононами и другими бозонами (например, с магнонами в ферро- или антиферромагнетиках) важным

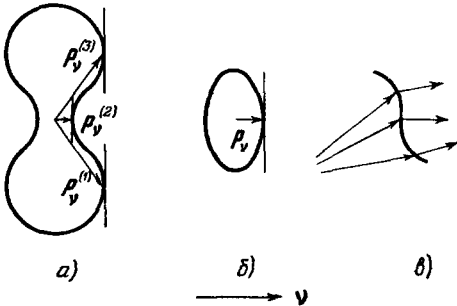


Рис. 14. а) Электроны, движущиеся в данном направлении \mathbf{v} , как правило, имеют разные значения квазиимпульса \mathbf{p}_v ; б) только при выпуклой ПФ любому направлению движения соответствует один квазиимпульс; в) направление, совпадающее [с направлением нормали к ПФ в параболической точке, является предельным: два значения квазиимпульса сливаются.

обстоятельством является следующее: энергия квазичастиц — бозонов, как правило, мала по сравнению с энергией Ферми, а их квазиимпульс может достигать значений порядка размеров ячейки \mathbf{p} -пространства. Наиболее вероятны однофононные (однобозонные) процессы: в результате «столкновения» электрон рождает или поглощает фонон. Ясно, что такой процесс носит почти упругий характер, а в результате рассеяния электрон, как и при упругом столкновении, «перепрыгивает» из одной точки на ПФ в другую.

При низких температурах $T \ll \theta$ (θ — температура Дебая, эта область наиболее интересна с точки зрения геометрических свойств электронного энергетического спектра) фононов (или других бозонов) с большими квазиимпульсами экспоненциально мало. Главную роль играют столкновения с теми бозонами, квазиимпульс которых значительно меньше средних линейных размеров ПФ. Движение по ПФ за счет таких столкновений может быть описано как диффузионный процесс. В частности, диффузионный подход позволяет на «пальцах» понять природу блоховской температурной зависимости транспортного времени свободного пробега τ_{tr} электрона при $T \ll \theta$. По смыслу τ_{tr} — время диффузии электрона на расстоянии $\approx D_F$, т. е. $\tau_{tr} \approx D_F^2 / \mathcal{D}_p$, где \mathcal{D}_p — коэффициент диффузии по ПФ. Но $\mathcal{D}_p \approx (\overline{\Delta p})^2 (1/\tau_{eph})$, где $\sqrt{(\overline{\Delta p})^2}$ — среднее изменение импульса электрона за счет столкновения с фононом — величина «скачка» по ПФ, а $1/\tau_{eph}$ — частота столкновений с фононами, пропорциональная числу фононов, которое при $T \ll \theta$ пропорционально T^3 . Так как средний импульс фонона $\approx D_F (T/\theta)$, то отсюда \mathcal{D}_p и $1/\tau_{tr}$ пропорциональны T^5 (закон Блоха).

Ситуация меняется, когда за проводимость «отвечают» электроны из малой области \mathbf{p} -пространства, например, электроны перемычки в сильном магнитном поле (см. с. 495 и рис. 15). Если размеры области таковы,

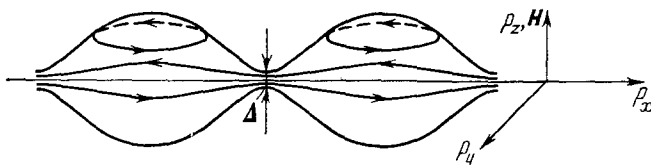


Рис. 15. В сильном магнитном поле за проводимость вдоль оси y ответственны электроны, траектории которых проходят через узкую перемычку толщины Δ , связывающую «почти замкнутые» полости ПФ.

что одного «скачка» достаточно, чтобы покинуть ее безвозвратно (вероятность попасть в малую область \mathbf{p} -пространства, естественно, мала), то $\tau_{tr}^{-1} \propto T^3$. Частота столкновений электронов, орбиты которых замкнуты, и проводимость за счет которых обратно пропорциональна H^2 , по-прежнему подчиняется закону Блоха (см. ²⁹).

Следует подчеркнуть, что частоты столкновений электронов с малым изменением импульса (малоугловое рассеяние) во многих случаях имеет значительную вероятность. Их роль часто занижается неэффективностью столкновения из-за того, что $\sqrt{(\overline{\Delta p})^2} \ll D_F$. Приведенный пример показывает возможность «избавиться» от неэффективности столкновения, что приводит к уменьшению τ_{tr} .

Эквивалентность состояний электронов, описываемых квазиимпульсами, отличающимися на вектор, кратный периоду \mathbf{p} -пространства, приводит к несохранению квазиимпульса при столкновениях. Столкновения, при которых начальный импульс квазичастиц отличается от конечного на

период p -пространства, называются столкновениями с перебросами или U -процессами³². Без U -процессов невозможно установление стационарного состояния в идеальном (бездефектном, бесконечном) проводнике, по которому течет ток.

Пользоваться бесконечным периодическим p -пространством значительно удобнее, чем ограничиваться одной его ячейкой, — особенно при решении динамических задач, требующих анализа движения электронов в p -пространстве. Однако необходимо помнить, что все неэквивалентные состояния содержатся в одной ячейке p -пространства, которая должна быть определенным образом выбрана. Если в результате столкновения электрон выходит за пределы избранной ячейки, его надо «перевосстановить» обратно (т. е. учесть несохранение квазиимпульса). Выбор определенной

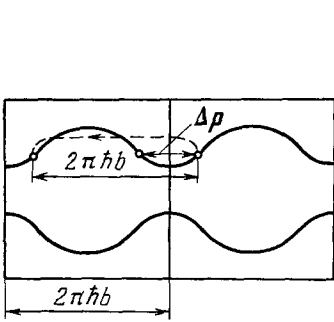


Рис. 16. Процесс переброса (обозначен штриховой стрелкой) может произойти при сколь угодно малом изменении квазиимпульса электрона.

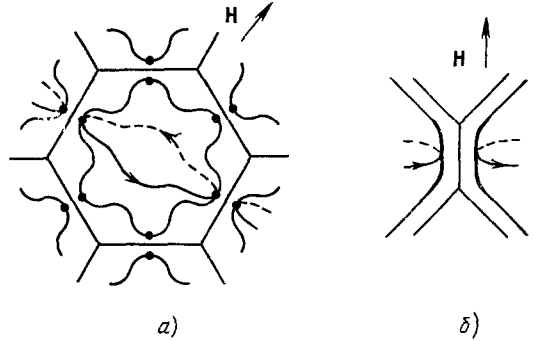


Рис. 17. а) Горячие точки на ПФ (движение в магнитном поле ускоряет попадание из одной горячей точки в другую); б) рассеяние с перебросом может привести к возникновению открытой траектории, если вероятность переброса достаточно велика из-за сближения сравнительно больших участков ПФ: вероятность «перепрыгнуть» в соседнюю ячейку больше, чем вероятность покинуть горячую область (отмечена на рисунке).

ячейки p -пространства произволен. В металлах удобно выбирать ячейку p -пространства, учитывая форму и положение ПФ. Например, в случае замкнутой ПФ удобно выбирать ячейку так, чтобы вся ПФ полностью в ней помещалась. Часто пользуются первой зоной Бриллюэна, но, например, для Bi , у которого три электронных эллипсоида пересекают границы первой зоны Бриллюэна, это не всегда удобно. Анализ возможности U -процессов — геометрическая задача, решаемая непосредственно для каждого металла. Благодаря сравнительно большим размерам ПФ U -процессы при электрон-электронных столкновениях происходят со сравнительно большой вероятностью, а в металлах с открытыми ПФ — могут происходить при бесконечно малом изменении импульса электрона (рис. 16).

Интересная картина возникает в сильном, но не предельно сильном магнитном поле в случае ПФ, сближающаяся со своим аналогом из соседней ячейки p -пространства. На рис. 17, а изображена подобная ситуация. Если расстояние между точками сближения значительно меньше размера ячейки обратной решетки, то за счет малоуглового рассеяния (например, на фононах или дислокациях) процессы переброса обладают значительной вероятностью³³. Точки сближения называют горячими точками поверхности Ферми³⁴. Роль магнитного поля сводится к полной или частичной замене движением по траектории диффузионного перемещения из одной горячей

точки в другую (рис. 17, б). Это, естественно, увеличивает роль процессов переброса. Приведенный пример демонстрирует «вмешательство» магнитного поля в процессы столкновения, хотя сам акт столкновения (его вероятность) от величины H не зависит. Особенно любопытно «вмешательство» магнитного поля в процессы рассеяния тогда, когда, благодаря процессам переброса в областях сближения ПФ со своим аналогом в соседней ячейке, движение электрона эффективно происходит по открытой траектории³⁵ (см. рис. 17, б). В достаточно сильном магнитном поле образование открытой траектории невозможно: электрон так быстро проходит участок ПФ вблизи горячей точки, что не успевает перескочить на соседнюю поверхность*).

Последний пример выводит нас из системы образов и представлений внутренней геометрии поверхности Ферми. В явлениях и свойствах, описанных до сих пор, относительное расположение полостей ПФ в r -пространстве не имело никакого значения. Интерес к взаимному расположению отдельных полостей ПФ начал проявляться сравнительно недавно в связи с исследованием магнитного пробоя (см. ниже), размерных эффектов, обусловленных междолинным рассеянием³⁶, и других, пока еще сравнительно мало изученных эффектов.

4. ЭЛЕКТРОНЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ЗАКОНОМ ДИСПЕРСИИ И МОДЕЛЬ ХАРРИСОНА

Работа по восстановлению контуров ПФ по экспериментальным данным сопровождалась, а иногда и опережалась, расчетами зонного спектра электронов проводимости, использующими те или другие модели металла. Как нам представляется, важную роль в популяризации расчетных методов сыграла модель Харрисона³⁷, согласно которой вычурные ПФ можно получить, «разрезав» периодически повторяющуюся сферу и соединив сферические сегменты в другом порядке.

Если периодическая потенциальная энергия $V(\mathbf{r})$, в поле которой движутся электроны, мала по сравнению с кинетической энергией электронов, то потенциальную энергию можно учитывать по теории возмущений (приближение почти свободных электронов, Бриллюэн, см. ³⁸). Схема построения ПФ по Харрисону такова:

1) Из плоских волн (исходное нулевое приближение) строится волновая функция электрона Ψ_p , удовлетворяющая условию Блоха,

$$\Psi_p(\mathbf{r} + \mathbf{a}) = e^{i\mathbf{p}\mathbf{a}/\hbar} \Psi_p(\mathbf{r}) \quad (14)$$

(\mathbf{a} — период решетки кристалла). Этот шаг эквивалентен «превращению импульса в квазиимпульс» (Ψ_p — автоматически периодическая функция \mathbf{r} : $\Psi_{\mathbf{p}+2\pi\hbar\mathbf{b}} = \Psi_p$, \mathbf{b} — вектор обратной решетки).

2) Радиусом ферми-сферы свободных электронов $p_F = (3\pi^2 n_v)^{1/3} \hbar$ (n_v — число валентных электронов в единице объема) из всех точек пространства квазиимпульсов данного кристалла, эквивалентных $\mathbf{p} = 0$, проводятся сферы. Если они не пересекаются, т. е. каждая сфера располагается внутри своей ячейки, то построение закончено: ПФ — сфера. Если же сферы пересекаются, то:

*) За подробностями о температурно-полевой зависимости кинетических коэффициентов чистых металлов, определяемой диффузией электрона по ПФ и скачками их между горячими точками, мы отсылаем читателей к цитированной работе Р. Н. Гуржи и А. И. Копелиовича³⁵. Это, по-видимому первая работа, в которой геометрия ПФ (ее структура) детально учтена при расчете качественных особенностей температурной зависимости кинетических коэффициентов.

3) требуется снять вырождение, воспользовавшись поправкой к энергии, учитывающей $V(r)$ в необходимом порядке теории возмущений. При этом локальном и сравнительно небольшом изменении энергии электрона форма ПФ изменяется кардинально;

4) заключительная стадия — «переселение» электронов из исходной сферы в новые полости ПФ (рис. 18).

Из сказанного ясно, что построение Харрисона — чисто геометрическая задача, скорее кристаллографическая, чем физическая.

Надо сказать, модель Харрисона с трудом воспринималась теми, кто привык мыслить в терминах произвольного закона дисперсии. Не столько обоснование³⁹ примирило с моделью, сколько ее успехи: построенные ПФ

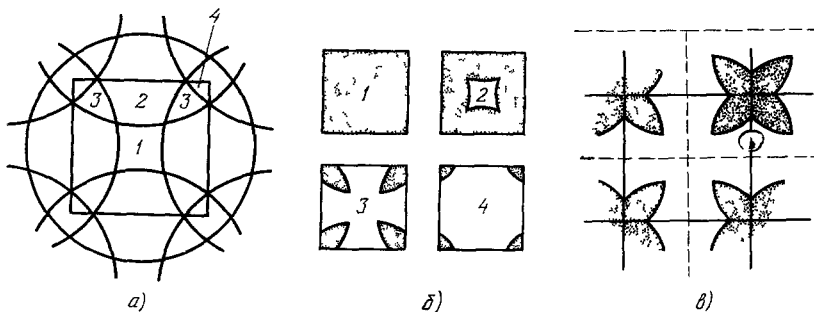


Рис 18 Построение Харрисона в двумерном случае.

а) Исходные круги (нулевое приближение), б) распределение электронов по зонам (по полостям ПФ) в зависимости от числа кругов, покрывающих область r -пространства: число покрытий определяет номер зоны (заполненные состояния заштрихованы), в) ПФ в третьей зоне, объединенная в одну замкнутую поверхность (для этой зоны удобно использовать ячейки, изображенные штриховой линией).

оказались похожими на те, которые воссоздавались при сравнении экспериментальных данных с теорией, не использующей какие-либо предположения о зависимости $\epsilon(p)$.

Развитие нескольких эффективных методов численных расчетов электронного энергетического спектра (метод псевдопотенциала, ОПВ, ППВ, ККР и т. д.) изменило подход к решению спектроскопических задач. Используя ту или иную модель, тот или иной метод расчета электронного энергетического спектра, определяют основные контуры или возможные варианты ПФ, выясняют границы допустимых изменений ПФ. Роль экспериментальных данных сводится к уточнению параметров модели. Родилась новая идеальная схема:

Модель \rightarrow сравнение с экспериментом \rightarrow уточнение модели и расчет «всего на свете» ... Если сегодня известны ПФ большинства простых металлов и многих интерметаллических соединений, то это — результат работы именно по такой схеме.

Все современные модели построения электронного энергетического спектра, по сути дела, развивают метод почти свободных электронов³⁸. Естественно, возникает вопрос: что же такое электрон проводимости? Почти свободный электрон, движение которого слегка возмущено периодическим полем решетки и внешними полями, или электрон со сложным законом дисперсии, движущейся под воздействием внешних полей? С этими вопросами, иногда заданными прямо, а иногда в завуалированной форме, приходится часто сталкиваться ... Ответ не зависит от нашего вкуса, а определяется во-первых, постановкой задачи, а, во-вторых, соотношением между полем ионной решетки и внешними полями. Естественно, решая задачу о вычислении закона дисперсии, необходимо использовать

более или менее адекватную модель — без этого не обойтись. А вот, если рассчитывать какую-либо характеристику металла — отклик его на внешнее воздействие, то возникает проблема, что брать за основу — газ свободных электронов с хорошо изученными реакциями на внешние поля, и «подправлять» результат учетом поля решетки, или наоборот: исходным считать газ или ферми-жидкость электронов со сложным законом дисперсии, исследовать движение частиц со сложным законом дисперсии во внешних полях и т. д.? Ответ на этот вопрос дает сравнение характерной энергии электронов $\epsilon_{\text{хар}}$ с энергией, являющейся мерой взаимодействия электрона с внешним полем (обозначим ее $\Delta\epsilon$). Если речь идет о постоянном магнитном поле, то $\Delta\epsilon = \hbar\omega_c$ — расстояние между магнитными уровнями Ландау, если — об электрическом, то $\Delta\epsilon = eEl$ — энергия, приобретаемая электроном на длине пробега l , если о высококачественном поле — источнике переходов, то $\Delta\epsilon = \hbar\omega$ (ω — частота поля). Если

$$\epsilon_{\text{хар}} \gg \Delta\epsilon, \quad (15)$$

то естественно рассматривать реакцию электронов с произвольным законом дисперсии.

Надо сказать, что «победное шествие» модели Харрисона, и вообще модельных расчетов, заставляет проявлять осторожность в оценке $\epsilon_{\text{хар}}$. Несколько десятков лет назад при всех оценках предполагалось, что $\epsilon_{\text{хар}} \approx \epsilon_F$, а масштаб энергии Ферми ϵ_F определяется плотностью электронов $n = z/a^3$, т. е. $\epsilon_F \approx \hbar^2 z^{2/3}/a^2 m \approx 10^{-12}$ эрг $\approx 10^{4 \pm 5}$ К (z — число валентных электронов на атом, a — параметр решетки). Другими словами, казалось, что пока внешние поля малы по сравнению с атомными, можно быть спокойным. Господствовало представление, что энергетическая структура металла — нечто грубое, не поддающееся или почти не поддающееся, воздействию. Исключение составляют элементы 5-й группы (Bi, Sb, P), но они почти полупроводники — полуметаллы. Постепенно было осознано (и в процессе познания сыграли важную роль и модельные расчеты, и экспериментальные исследования — особенно осцилляционных эффектов), что энергетическая структура металла — тонкое сооружение. Она сравнительно легко подвергается существенной перестройке путем внешнего воздействия (давлением, добавлением числа электронов путем введения примесей и т. п.). Небольшое изменение параметров модели или сдвигка энергии Ферми может заметно перестроить ПФ. Даже появление средней периодической намагниченности, сопровождающей переход из парамагнитного в геликоидальное состояние, может привести к локальной, но чувствительной перестройке ПФ⁴⁰. Изменение структуры электронного спектра сопровождается изменением связности ПФ и описывается (при $T = 0$) как своеобразный фазовый переход, который по номенклатуре Эренфеста должен трактоваться как фазовый переход 2¹/₂-го рода (см. ⁴¹ и ниже).

Осознание сложности структуры электронного спектра привело к тому, что оценка характерной энергии $\epsilon_{\text{хар}}$ существенно изменилась. Величиной $\epsilon_{\text{хар}}$ следует считать $|\epsilon_F - \epsilon_k|$, где ϵ_k — значение энергии, при которой изменяется топология изоэнергетических поверхностей⁴². Малость $\epsilon_{\text{хар}}$ по сравнению с ϵ_F означает близость особых точек p -пространства к ПФ.

Уточнение неравенства (15) может иметь весьма существенные последствия. Мы на них остановимся позднее (см. раздел 11, «Магнитный пробой»), а сейчас вернемся к понятию «электрон с произвольным законом дисперсии». Модельные расчеты лишили это понятие мистического ореола. Оказалось, что понять происхождение разнообразия ПФ не так сложно, как это представлялось лет двадцать назад. Например, существование малых групп электронов проводимости у большинства металлов, открытых путем

изучения осцилляционных эффектов, долго представлялось загадочным, а нашло простое объяснение в том, что у поливалентных металлов исходные для модели Харрисона сферы Ферми многократно пересекаются. В поддержку такого объяснения говорит тот факт, что ПФ металлов 1-й группы таблицы Менделеева просты.

Однако — подчеркнем — при описании многих электронных свойств металла (тепловых, магнитных, гальванических, термоэлектрических, радиочастотных, оптических и др.) следует исходить именно из представления об электроне проводимости как ферми-частице со сложным законом дисперсии: неравенство (15) даже при уточнении величины $\epsilon_{\text{хар}}$ в подавляющем числе случаев с запасом выполняется.

Итак, элементарным носителем заряда в металле служит электрон со сложным законом дисперсии, состояние которого определяется заданием квазиимпульса \mathbf{p} . О том, что \mathbf{p} -квазиимпульс, а не импульс, вспоминают, как правило, при расчете вероятности какого-либо события — надо не забывать о процессах переброса. В остальных случаях его «разжалуют» в импульсы, а энергию $\epsilon(\mathbf{p})$ воспринимают как кинетическую энергию «свободного» электрона.

5. «ПОЯСОК» НА ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ

Вырождение электронного газа металла ($T \ll \epsilon_F$) приводит к тому, что в электропроводности металла и во всех сопутствующих явлениях принимают участие только фермиевские электроны. Электроны из фермиевского подвала «выпадают», их роль сводится к «поддержке» электронов с $\epsilon = \epsilon_F$. Именно поэтому столь велико значение *поверхности* Ферми. В формулах предыдущих параграфов встречаются площади сечения ПФ S и даже (в формуле (10)) — объемы полостей ПФ $\Delta_{1(2)}$. Появление геометрических образов, связанных с «внутренностью» ПФ, имеет формально-математическую причину: контурный интеграл по траектории на ПФ $\oint \frac{dp_i}{v_{\perp}} (dp_i — \text{смещение вдоль траектории (6), } v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2})$, определяющий период обращения электрона, численно равен $[\partial S(\epsilon, p_z)/\partial \epsilon]_{\epsilon=\epsilon_F}$.

«Дискриминация» среди электронов не ограничивается исключением электронов фермиевского подвала. Из-за неравенства $l \gg r_H$ в проводимости металла в сильном магнитном поле практически не принимают участия электроны с замкнутыми траекториями, если ПФ содержит слой открытых траекторий. За эффект де Гааза — ван Альфена и родственные ему эффекты несут ответственность электроны, расположенные только на той траектории, площадь которой экстремальна по p_z .

Особенно отчетливо неэффективность большинства электронов проводимости проявляется в высокочастотных свойствах металлов.

а) Электронное затухание ультразвука

Бесстолкновительное взаимодействие металла с звуковыми волнами осуществляют электроны, скорость которых v удовлетворяет условию Черенкова (см. Л. Д. Ландау⁴³):

$$kv = \omega, \quad (16)$$

где \mathbf{k} и ω — волновой вектор и частота волны. Благодаря вырождению электронной жидкости в поглощении принимают участие только электроны с энергией равной фермиевской

$$\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_F. \quad (17)$$

Уравнение (16) совместно с уравнением (17) определяют линию на ПФ. За ней установилось название «поясок». Так как $\omega/k = s \approx 10^8$ см/с $\ll \ll v_F \approx 10^8$ см/с, то во многих случаях можно вовсе пренебречь фактом распространения звуковой волны и положить $s = 0$. Это означает, что условие бесстолкновительного взаимодействия отбирает электроны, двигающиеся перпендикулярно волновому вектору \mathbf{k} ($\mathbf{v} \perp \mathbf{k}$). Остальные электроны оказываются неэффективными (термин «неэффективные» по отношению к электронам введен Пиппардом ⁴⁴).

«Поясок» хорошо моделируется как граница света и тени, если «перенести» ПФ в обычное пространство, а параллельные лучи света направить по направлению волнового вектора \mathbf{k} (рис. 19). При квадратичном законе

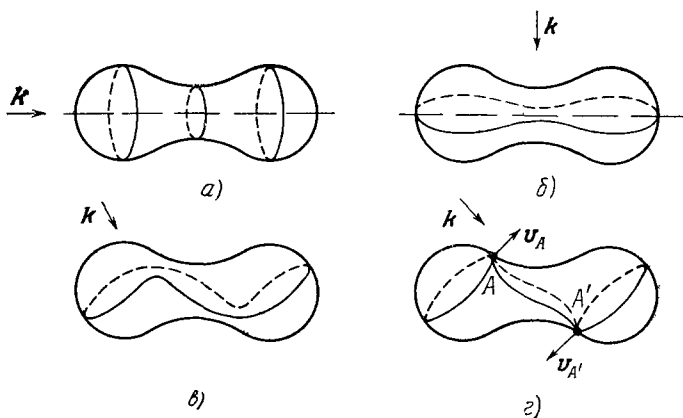


Рис. 19. «Пояски» на ПФ можно промоделировать границей света и тени: направление потока света совпадает с направлением волнового вектора \mathbf{k} звука (число поясков и их структура зависят от формы ПФ и направления \mathbf{k})

а) Вектор \mathbf{k} направлен по оси «гантели» — три пояска; б) \mathbf{k} перпендикулярен оси гантели — один поясок; в) поясок отнюдь не всегда плоская кривая; г) поясок может иметь точку самопересечения: $\mathbf{k} = \mathbf{k}_C$, $\mathbf{k}_C \perp \mathbf{v}_A$, \mathbf{v}_A' , точки A и A' расположены на линии параболических точек.

дисперсии $\epsilon(\mathbf{p}) = (1/2)(m^{-1})_{ik}p_i p_k$, $v_i = (m^{-1})_{ik}p_k$, где $(m^{-1})_{ik}$ — тензор обратных эффективных масс, и уравнение (16) — уравнение плоскости, а «поясок» представляет собой эллипс, оси которого и ориентация зависят от величины скорости звука и его направления $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$. Если положить $s = 0$, то плоскость (16) проходит через центр эллипсоида (когда ПФ — сфера, поясок при $s = 0$ совпадает с окружностью большого радиуса). Даже незначительное усложнение ПФ приводит к весьма существенному усложнению вида и структуры пояска. На рис. 19 изображены пояски на поверхности типа гантели при разных направлениях волнового вектора \mathbf{k} .

Приведем выражение (см. ^{45,46}) для коэффициента поглощения звука электронами металла при $kl \gg 1$

$$\Gamma_e = \frac{2\omega}{(2\pi\hbar)^3 \rho s} \oint_{(F)} |\Lambda|^2 \frac{dS}{v^2} \delta\left(\mathbf{n}\mathbf{v} - \frac{s}{v}\right), \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad (18)$$

здесь ρ — плотность металла, а Λ — определяемая поляризацией звука компонента перенормированного экранировкой деформационного потенциала ⁴⁶, δ -функция — предел решения кинетического уравнения при $kl \gg 1$. Видно, что условие бесстолкновительного поглощения $kl \gg 1$ дискриминирует все электроны, кроме электронов «пояска», движущихся в плоскости фазы звуковой волны.

б) Аномальный скин-эффект

В физике металлов «поясок» появился впервые в теории аномального скин-эффекта⁵, описывающей отражение электромагнитной волны металлом в условиях, когда глубина скин-слоя δ меньше или даже значительно меньше длины свободного пробега электронов l . При $\delta \ll l$ почти все электроны проводят в скин-слое — под воздействием электрического поля волны — незначительную часть своего времени свободного пробега. Исключения составляют электроны, которые движутся параллельно поверхности металла^{44, 47}; рис. 20). Именно они и принимают участие в отражении электромагнитной волны. Математическим выражением этого факта служит то, что поверхностный импеданс металла выражается формулой,

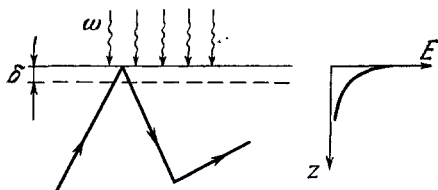


Рис. 20. При аномальном скин-эффекте ($l \gg \delta$) главную роль играют электроны, движущиеся вдоль границы металла ($v_z = 0$), так как только они все время свободного пробега взаимодействуют с электромагнитной волной.

в которой (как и в формуле (18)) интегрирование по ПФ сводится к интегрированию по «пояску» (16), (17).

Перемещая поясок по поверхности Ферми и измеряя величину поверхностного импеданса металла, можно исследовать структуру поверхности Ферми и, как следует из формулы для импеданса, непосредственно определить среднюю по «пояску» гауссову кривизну ПФ^{44, 47}. Вот только «перемещать» поясок трудно. Электромагнитная волна из-за большой оптической плотности металла распространяется всегда нормально к поверхности. Значит, единственная возможность — исследовать импеданс разных граней монокристалла. Это и сделал А. Пиппард, воспользовавшись монокристаллом Cu⁴⁸.

Спектроскопические возможности исследования электромагнитных свойств металлов, в частности, обусловлены тем, что заряд электрона проводимости равен заряду свободного электрона (в формулу для импеданса входят только геометрические характеристики ПФ). С ультразвуком хуже. Его связь с электронами, как мы видели, описывается деформационным потенциалом^{49, 50}, определение компонент которого — самостоятельная задача. Направивается метод определения именно компонент деформационного потенциала (усредненных по пояску) тех металлов, законы дисперсии электронов которых известны, используя измерения электронной части коэффициента поглощения звука Γ_e (формула (18)). По непонятной (нам) причине этот метод определения средних по пояску значений деформационного потенциала мало популярен (см., правда,⁵¹).

в) Циклотронный резонанс

Итак, волна или скин-эффект выделяют электроны пояска. Магнитное поле заставляет электроны двигаться по поверхности Ферми по траекториям (6), вообще говоря, пересекающим поясок под произвольным углом (рис. 21). Исследования высокочастотных свойств металлов в магнитном поле — неиссякаемый источник сведений об электронах проводимости. Несомненно, наиболее популярен циклотронный резонанс⁵², природа которого ясна из рис. 22: если электроны возвращаются на поясок — в скин-слой при магнитном поле, параллельном границе, через промежуток времени T_H , кратные периоду поля $T_\omega = 2\pi/\omega$, то условие резонансного взаимодействия между электронами и волной выполнено — проводимость при $\tau \rightarrow \infty$ должны обратиться в бесконечность, а импеданс, соот-

ветственно, в нуль. Правда, период обращения $T_H = 2\pi/\omega_c$ ($\omega_c = eH/m^*c$, $m^* = (1/2\pi) \partial S(\epsilon, p_z)/\partial \epsilon$) для разных электронов разный. Благодаря вырождению, эффект определяется фермиевскими электронами, т. е. «резонируют» электроны с $\epsilon = \epsilon_F$. Отбор электронов по p_z связан с существованием экстремумов в зависимости $m^* = m^*(\epsilon_F, p_z)$ от p_z . Вблизи экстремумов зависимость от продольной компоненты импульса менее существенна, чем при других значениях p_z . Экстремальные значения эффективной массы $m_j^* = m^*(\epsilon_F, p_{z,j}^{extr})$ и определяют условия резонанса:

$$\omega = n \frac{eH}{m_j^* c}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)$$

Таким образом, исследование циклотронного резонанса — метод непосредственного экспериментального определения экстремальных эффективных масс электронов проводимости. Циклотронный резонанс экспериментально был впервые обнаружен Фосеттом на Sn и Cu⁵³. Постепенно

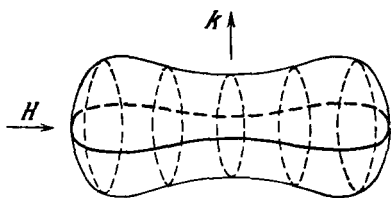


Рис. 21. Траектории электрона (штриховые линии) пересекают пояснок (жирная линия).

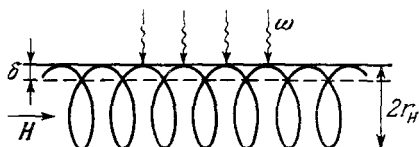


Рис. 22. Условие наблюдения циклотронного резонанса: когда постоянное магнитное поле параллельно поверхности металла, электроны возвращаются в скин-слой ($\delta \ll r_H \ll l$).

он превратился в устойчиво работающий метод измерения эффективных масс электронов проводимости⁵⁴ — необходимый этап в расшифровке электронного энергетического спектра.

Значение циклотронного резонанса не исчерпывается конкретными результатами. Он привлек внимание к электродинамике металла в магнитном поле. Действительно, всегда считали, что главное оптическое свойство металлов — отражать электромагнитные волны, а когда (при $H = 0$) он начинает пропускать электромагнитные волны, то не слишком отличается от диэлектрика: при частотах, больших плазменной частоты электронов металла, диэлектрическая проницаемость металла положительна, а поглощение — следствие межзонного внутреннего фотоэффекта.

Открытие циклотронного резонанса привело к коренной ломке наших представлений о взаимодействии электронов проводимости с электромагнитным полем. Оказалось, что достаточно сильное магнитное поле может существенно изменить характер распространения электромагнитных волн в металле, в какой-то мере «ликвидировать» скин-эффект, превратив колебания, амплитуда которых затухает на длине волны в $e^{2\pi}$ раз, в слабозатухающие волны с $\text{Im } k \ll \text{Re } k$. Слабозатухающих волн в металлах открыто много разных типов и отнюдь не только на кончике пера (см., например, обзорные статьи⁵⁵).

Многие волны не имеют прямого отношения к циклотронному резонансу. Ни обсуждение их свойств, ни даже их перечисление не входят в нашу задачу. Приведем только несколько простейших примеров, демонстрирующих роль магнитного поля.

г) Низкочастотная эллиптически поляризованная волна, или геликон

Геликон⁵⁶ может распространяться в металлах с неравными числами электронов и дырок ($n_1 \neq n_2$) вдоль достаточно сильного магнитного поля H .

Закон дисперсии спиральных волн есть

$$\omega = \frac{ck^2 H \cos \theta}{4\pi e (n_1 - n_2)}, \quad \omega\tau \ll 1, \quad (20)$$

где θ — угол между волновым вектором \mathbf{k} и магнитным полем H . Незатухающий характер волны обусловлен тем, что у металлов с $n_1 \neq n_2$ в сильном магнитном поле холловские компоненты проводимости значительно больше диссипативных (конечно, поперечных). Длина затухания спиральной волны либо определяется столкновительными механизмами (т. е. величинами σ_{xx} и σ_{yy}), либо — бесстолкновительными (опять поясок!).

д) Высокочастотная магнитоплазменная волна

Если $\omega\tau \gg 1$, а $kr_H \ll 1$, в скомпенсированных металлах ($n_1 = n_2$) в сильном магнитном поле ($\omega_c \gg \omega \gg 1/\tau$) может распространяться слабозатухающая магнитоплазменная волна⁵⁷. В простейшем случае закон дисперсии магнитоплазменной волны такой же, как у знаменитой альфеновской волны:

$$\omega = v_a k, \quad v_a = \frac{H}{\sqrt{4\pi n \tilde{m}^*}},$$

v_a — альфеновская скорость (\tilde{m}^* — комбинация эффективных масс электронов и дырок).

Закон дисперсии магнитоплазменной волны легко вывести «на пальцах», если заметить, что частота ω входит всегда в такой комбинации с τ : $\tau/(1 - i\omega\tau)$ и переход от $\omega = 0$ к $\omega\tau \gg 1$ означает замену τ на i/ω . Эффективная диэлектрическая проницаемость электронов металла $\epsilon = 4\pi i\sigma/\omega$, а закон дисперсии волны есть $\omega^2 = c^2 k^2/\epsilon$. При $H = 0$ $\sigma = ne^2\tau/m^*$, и замена $\tau \rightarrow i/\omega$ приводит к отрицательной диэлектрической проницаемости — волна распространяться не может ($\epsilon = -\omega_L^2/\omega^2 < 0$; $\omega_L = \sqrt{4\pi ne^2/m^*}$ — плазменная частота). При $\omega_c\tau \gg 1$ диссипативная поперечная проводимость $\sigma \approx (ne^2\tau/m^*)(\omega_c\tau)^{-2}$, и замена $\tau \rightarrow i/\omega$ приводит к положительной диэлектрической проницаемости, обеспечивающей возможность распространения волны*). Холловские компоненты тензора проводимости из-за равенства чисел электронов и дырок играют второстепенную роль.

е) Допплероны, циклотронные волны, анизотрон

Для обеих волн, которые мы рассмотрели выше, пространственная и временная дисперсия проводимости (зависимость $\hat{\sigma}$ от волнового вектора \mathbf{k} и частоты ω) не играют существенной роли. Рост длины свободного пробега при понижении температуры, уменьшение величины магнитного поля (т. е. возрастание $\omega\tau$, kl и (или) kr_H) приводят к тому, что пространственная и временная дисперсия проводимости оказываются определяющими

* Это, конечно, не случайность: при $H = 0$ частота поля ω больше резонансной частоты ω_R (в данном случае, равной нулю!), а при $H \neq 0$ частота поля ω меньше резонансной частоты ω_R , равной ω_c (см. выше). Начертив резонансную зависимость $\epsilon = \epsilon(\omega)$, легко увидеть причину различия двух предельных случаев.

ми факторами формирования зависимости $\omega = \omega(\mathbf{k})$ слабозатухающих волн в металлах (см. ⁵⁵). Так, геликоны и магнитоплазменные волны с ростом длины волнового вектора «превращаются» в доплероны ⁵⁶, циклотронные волны ⁵⁵, анизотроны ⁵⁹ и в др. наблюдаемые, а в ряде случаев тщательно изученные квазичастицы — бозоны. По терминологии электродинамики сред с пространственной дисперсией ⁶⁰ все они — дополнительные макроскопические волны, так как их длина значительно больше межатомного расстояния ($ka \ll 1$).

Следует подчеркнуть (в плане темы настоящего обзора), что предельные значения компонент тензора σ_{ik} при $k \rightarrow \infty$ существенно зависят от геометрии ПФ. Это отчетливо видно, например, по выражению для поперечных компонент σ_{ik} в нулевом магнитном поле при $kl \gg 1$ ($\omega\tau \ll 1$):

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{e^2}{8\pi^2\hbar^3k} \oint_{(F)} v_\alpha v_\beta \delta(\mathbf{nv}) dS, \quad (21)$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{v}}{v}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad n_z = 1, \quad \alpha, \beta = x, y.$$

Последнее выражение по своей структуре очень близко к выражению (18) для коэффициента поглощения коротковолнового звука.

Проводимость в отсутствие магнитного поля при $kl \gg 1$, как видно из приведенной формулы, определяют электроны, ответственные за бесстолкновительное затухание Ландау ($v\mathbf{n} = 0$). В магнитном поле ситуация существенно изменяется: слабозатухающие волны могут существовать только тогда, когда они попадают в «окна прозрачности», в которых бесстолкновительное затухание отсутствует. В подавляющем большинстве случаев слабозатухающие волны существуют вблизи границы затухания, на которой $\hat{\sigma}$ имеет особенность, причем именно эта близость делает вклад электронов в закон дисперсии волны особенно существенным (см. ⁶¹).

ж) Звук в магнитном поле

Влияние магнитного поля на электроны проводимости, конечно, сказывается на электронной части коэффициента затухания звука. Звук сравнительно легко проникает в металл. Поэтому исследование распространения звука в металлах играет важную роль в расшифровке электронного энергетического спектра металлов.

Приведем формулу, заменяющую формулу (18) и описывающую поглощение звука в магнитном поле, перпендикулярном волновому вектору звука, величина которого удовлетворяет условиям: $1 \ll \omega_c\tau \ll kl$. «Геометрия» взаимодействия электрона со звуковой волной особенно наглядна (см. рис. 24): чем чаще электрон пересекает поясok, тем коэффициент поглощения звука больше. Поэтому главное слагаемое в Γ_e имеет особенно простой вид ⁶²

$$\Gamma_e(\mathbf{H}) \approx \Gamma_e^{\text{МОН}} = \frac{2\omega}{(2\pi\hbar)^3 \rho_s} \oint_{(F)} 2\pi\omega_c\bar{\tau} |\Lambda|^2 \frac{dS}{v^2} \delta(\mathbf{nv}), \quad (22)$$

$\bar{\tau} = 1/\bar{\nu}$, $\bar{\nu}$ — средняя по периоду обращения в магнитном поле частота релаксации ($\nu = 1/\tau$).

Но, пожалуй, наибольший интерес представляет слагаемое в $\Gamma_e(\mathbf{H})$, формально в $\sqrt{\hbar r_H}$ раз меньшее, но содержащее периодическую зависимость от магнитного поля

$$\Gamma_e(H) = \Gamma_e^{\text{МОН}} + \Gamma_e^{\text{ОСЦ}}, \quad (23)$$

$$\Gamma_e^{\text{ОСЦ}} \approx \Gamma_e^{\text{МОН}} \frac{1}{\sqrt{\hbar r_H}} \sum_m \sin\left(\frac{ck}{eH} (\Delta p_y)_m \pm \frac{\pi}{4}\right).$$

Суммирование ведется по всем экстремальным диаметрам ПФ (рис. 23 и 6). Как видно, Γ_e — периодически зависит от обратного магнитного поля, причем периоды Δ ($1/H$) определяются экстремальными проекциями диаметров на направление, перпендикулярное \mathbf{k} и \mathbf{H} (напомним, что $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$, см. рис. 23):

$$\Delta \frac{1}{H} = \frac{2\pi e}{ck (\Delta p_y)_m}.$$

Происхождение периодической зависимости очевидно: ситуация повторяется, когда число волн, укладывающееся на диаметре орбиты, изменяется на единицу (23). Периодическая зависимость $\Gamma_e(H)$ получила название пиппардовского или геометрического резонанса. Амплитуду пиппардовского резонанса определяют электроны, расположенные вблизи точек пересечения траектории электрона, обладающей экстремальной проекцией опорного диаметра с «пояском» — остальные электроны оказываются неэффективными (см. рис. 23). Поворот магнитного поля \mathbf{H} и волнового вектора \mathbf{k} двигает эти точки по ПФ, позволяя детально исследовать ее геометрию.

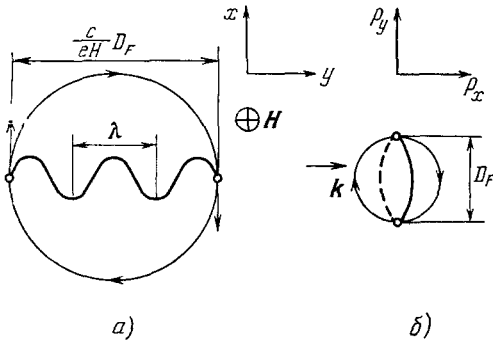


Рис. 23. Природа пиппардовских осцилляций коэффициента поглощения звука.

Величина амплитуды осцилляций зависит от электронов, расположенных вблизи концов экстремальных диаметров — там скорость электронов находится в плоскости равной фазы звуковой волны: а) картина взаимодействия в g -пространстве, б) картина взаимодействия в p -пространстве.

Взаимодействие электронов со звуковой волной в присутствии магнитного поля — источник многих резонансных явлений. Их так и называют — магнитоакустическими. Они существенно зависят от геометрии эксперимента и

геометрических свойств ПФ. Остановимся на одном из магнитоакустических резонансов, возникающем в металлах с открытыми ПФ⁶³.

Если период движения вдоль открытой траектории совпадает с длиной волны звука, то осуществляется резонансное взаимодействие между электронами и звуковой волной. Это приводит к периодической зависимости коэффициента поглощения звука от обратного магнитного поля. Условие резонанса легко выводится благодаря связи между траекториями в p - и g -пространствах. Если волна распространяется перпендикулярно магнитному полю \mathbf{H} ($H_x = H_y = 0$; $H_z = H$) и направлению открытости p_x , то период коэффициента поглощения равен

$$\Delta \frac{1}{H} = \frac{2\pi e}{ck} \frac{1}{2\pi \hbar b_x},$$

где b_x — наименьший период обратной решетки вдоль оси p_x .

6. ЭЛЕКТРОНЫ СТАЛКИВАЮТСЯ С ГРАНИЦЕЙ

Столкновения электронов с границей образца давно привлекают внимание занимающихся изучением электронных свойств металла. Еще в 1938 г. Фукс⁶³, теоретически исследуя зависимость сопротивления тонкой пластины от ее толщины, сформулировал феноменологическое граничное условие, описывающее частично зеркальное отражение электронов от границы. Долгое время казалось, что всякая граница металла для фермиевского электрона с длиной волны порядка межатомных размеров,

шероховата, т. е. напоминает мутное зеркало. Электрон на такой поверхности должен (так думали!) рассеиваться полностью диффузно.

При диффузном отражении электронов границами образца в проводимости такой пластины, если, конечно, ее толщина d значительно меньше длины свободного пробега l , принимают участие только электроны, движущиеся параллельно границам пластины. Они расположены на «пояске» $v_{Fn} = 0$, где \mathbf{n} — нормаль к поверхности пластины ⁶⁴. Интересно подчеркнуть, что удельная проводимость тонкой пластины $\sigma(d)$ при $d \ll l$ логарифмически растет с ростом объемной длины свободного пробега ($\sigma(d) \propto \ln(l/d)$). Это обстоятельство отличает статическую проводимость тонкой пластины от предельно аномального скин-эффекта ($\delta \ll l$), при котором импеданс определяется бесстолкновительным пределом тензора удельной электропроводности (21). Исключительная роль электронов «пояска», а, точнее, неэффективность всех остальных электронов, делает проводимость тонких пленок явлением «чувствительным» к геометрии ПФ.

Упоминание теоретических исследований проводимости тонких пластин и проволок позволяет отметить то обстоятельство, что выделение эффективных (ответственных за эффект) электронов не всегда столь наглядно, как это может показаться по приведенным примерам. Так, проводимость тонких цилиндрических проволок, радиус которых значительно

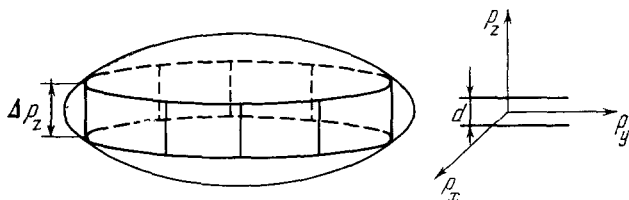


Рис. 24. Квантование хорд выделяет электроны, расположенные на линиях, проходящих по ПФ.

Изображены две линии, соответствующие одному квантовому значению длины хорды $\Delta\rho_z$, равной $n\pi\hbar/d$, d — толщина пластины, n — целое число.

меньше длины свободного пробега, а граница рассеивает диффузно, не определяется исключительно электронами, движущимися вдоль оси проволоки, — в проводимости принимают участие все фермиевские электроны ⁶⁵.

Постепенно под напором экспериментальных фактов выяснилось, что весьма часто электрон отражается от границы металла зеркально ⁶⁶. Для электрона с анизотропным законом дисперсии это означает, что при отражении сохраняются не только энергия, но и составляющая квазиимпульса вдоль поверхности $p_{||} = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{p}\mathbf{n})\mathbf{n}$ (\mathbf{n} — нормаль к поверхности), а нормальная составляющая скорости v_n меняет знак.

Взаимодействие электрона со сложным законом дисперсии с поверхностью образца приводит к своеобразному усложнению ряда привычных свойств. Например, хорошо известно, что в бесконечно глубокой потенциальной яме квантуются значения компонент импульса, а у электрона со сложным законом дисперсии квантуются хорды ⁶⁷ (рис. 24), что делает картину электронных энергетических подзон металлических пластин весьма вычурной. С открытием квантового размерного эффекта ⁶⁸ это явление перестает быть теоретической экзотикой.

Наиболее явным доказательством зеркального отражения электронов от границы несомненно служат открытые М. С. Хайкиным ⁶⁹ осцилляции, обязанные поверхностным уровням электронов в магнитном поле. Движение электрона в магнитном поле, зеркально отражающегося от границы

металла (см. рис. 12), есть сумма двух движений: инфинитного вдоль границы и финитного (периодического) вдоль нормали к поверхности металла. Последнее движение квантуется, возникают дискретные поверхностные уровни энергии, а, как их следствие, — осцилляции поверхностного импеданса при изменении приложенного магнитного поля. Полное теоретическое объяснение этого явления принадлежит Ни и Прангу ⁷⁰.

Для хайкинских осцилляций достаточно одной поверхности образца. При взаимодействии электронов с двумя поверхностями пластины толщины d (для этого необходимо, чтобы d и r_H были значительно меньше длины

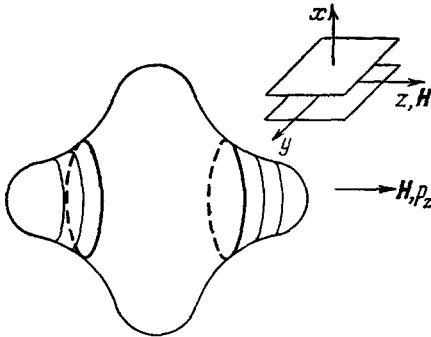


Рис. 25. Если $Dy_{\max} c/eH > d$, то в пластине толщины d помещаются орбиты меньше некоторой (граничной с $Dy_{\text{гран}} c/eH = d$, она изображена жирной линией; орбиты между граничными в пластине не помещаются вовсе).

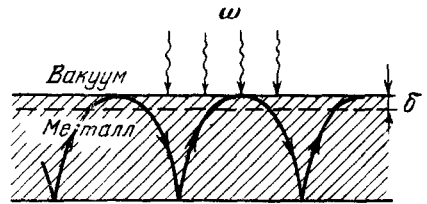


Рис. 26. Электрон возвращается в скин-слой, отразившись от «задней» границы образца — пластины (заштрихована).

пробега l) возможны своеобразные резонансные размерные эффекты, о которых легко рассказать геометрическим языком.

Пластина выделяет среди всех орбит ту, которая еще в ней помещается (рис. 25). На этой орбите должен наблюдаться резонанс ⁷¹, который был действительно обнаружен все на том же Bi ⁷². Он позволил исследовать неэкстремальное сечение ПФ — случай, достойный специального внимания.

В механизме возвращения электронов в скин-слой наряду с магнитным полем может принимать участие отражение от противоположной границы образца (рис. 26). Если $\delta \ll d$, $r_H \ll l$, то и на таких орбитах обнаруживается циклотронный резонанс ⁷³.

7. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ФЕРМИ СО СВОИМ СДВИНУТЫМ АНАЛОГОМ. ОСОБЕННОСТИ МИГДАЛА — КОНА

Особенность в зависимости энергии фонона от его квазиимпульса (особенность Мигдала — Кона ⁷⁴), возникающая из-за взаимодействия фононов с электронами металлов, обусловлена неоднородностью заполнения p -пространства электронами и имеет четко формулируемый геометрический смысл. Так как, благодаря соотношениям Крамерса — Кронига, особенности $\text{Re } \omega(\mathbf{q})$ вызывают особенности $\text{Im } \omega(\mathbf{q}) = \Gamma_{\mathbf{q}}$ и наоборот, а интегралы, содержащие δ -функцию, более наглядны, чем интегралы в смысле главного значения, то для построения геометрического места особых точек в фононном q -пространстве мы будем использовать выражения для обратного времени жизни фонона $\Gamma_{\mathbf{q}}$ (q — его квазиимпульс),

обусловленного электрон-фононными столкновениями

$$\Gamma_q = \int |M|^2 \{n_F(\epsilon_p) - n_F(\epsilon_p + \hbar\omega_q)\} \delta(\epsilon_p + \hbar\omega_q - \epsilon_{p+q}) d^3p; \quad (24)$$

здесь $n_F(\epsilon)$ — фермиевская функция, а в матричный элемент перехода M включены все множители. При абсолютном нуле температуры разность фермиевских функций выделяет в p -пространстве область, ограниченную поверхностями $\epsilon_p = \epsilon_F$ и $\epsilon_p = \epsilon_F - \hbar\omega_q$ (рис. 27, а). Особенности в зависимости Γ_q связаны с изменением структуры области интегрирования, заданной пересечением поверхности $\epsilon_p + \hbar\omega_q = \epsilon_{p+q}$ с поверхностями $\epsilon_p = \epsilon_F$ и $\epsilon_p = \epsilon_F - \hbar\omega_q$. Так как $\hbar\omega_q \ll \epsilon_F$, то раскладывая по степеням $\hbar\omega$, выражению (24) можно придать вид

$$\Gamma_q \approx \hbar\omega_q \int |M|^2 \delta(\epsilon_p - \epsilon_F) \delta(\epsilon_{p+q} - \epsilon_F) d^3p. \quad (25)$$

В δ -функции, описывающей закон сохранения энергии, мы опустили $\hbar\omega_q$ и заменили ϵ_p энергией ϵ_F . Область интегрирования в (25) есть линия пересечения ПФ с ее сдвинутым на $-q$ аналогом. Изменение топологии этой линии (в частности, ее исчезновение) вызывает особенность в зависимости Γ_q . Особенность Мигдала — Кона⁷⁴ — результат исчезновения линии пересечения при $q = D_F$ (рис. 27, б), а тип особенности зависит от характера касания поверхностей при $q = D_F$ (см. ⁷⁵, а также ⁷⁶; в последней работе предсказано усиление особенностей Мигдала — Кона для ПФ, содержащих конечные цилиндрические и плоские участки).

Если ПФ распадается на несколько полостей, то особенность должна наблюдаться и при том значении квазиимпульса фонона q , при котором одна полость сдвинутой на $-q$ ПФ касается другой полости неподвижной поверхности (рис. 27, в). При дальнейшем увеличении q , коэффициент поглощения скачком возрастает, а $\text{Re}\omega$ должна иметь особенность, обратную по знаку стандартной особенности Мигдала — Кона⁷⁴. Обнаружение подобных особенностей может позволить измерить расстояния между отдельными полостями поверхностей Ферми.

Для свободного электронного газа геометрическое место точек особенностей Мигдала — Кона — сфера радиуса $2r_F$. Но для реальных сферических ПФ (Na, K, Rb, Cs) дело должно обстоять сложнее:

возможность процессов переброса (или другими словами, периодичность Γ_q с периодом обратной решетки $\Gamma_{q+2\pi\hbar} = \Gamma_q$) приводит к тому, что у Γ_q появляются особенности при касании сдвинутой сферы со сферами в

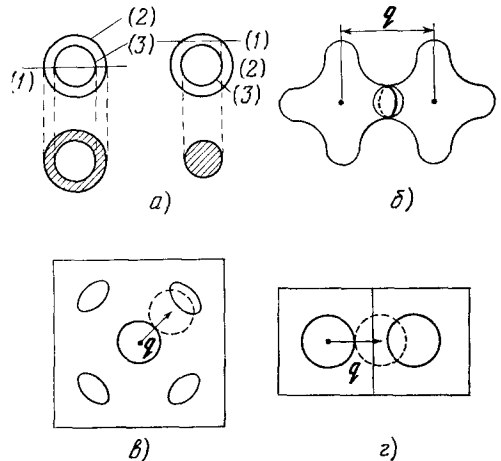


Рис. 27. а) В поглощении фононов принимают участие электроны на участке поверхности $\epsilon_p + \hbar\omega_q = \epsilon_{p+q}$ (1), расположенном между поверхностями $\epsilon_p = \epsilon_F$ (2) и $\epsilon_p = \epsilon_F - \hbar\omega_q$ (3), форма участка p -пространства, на котором находятся взаимодействующие с фононами электроны, зависит от величины q (для наглядности изображена сферическая ПФ). Приближенное рассмотрение: б) электроны поглощают фононы, если ПФ и ее сдвинутый на $-q$ аналог пересекаются (линия пересечения — жирная линия); в) при достаточно большом импульсе фонона q одна полость ПФ при сдвиге пересечет другую; г) ПФ пересекает свой аналог в соседней ячейке.

соседних ячейках (рис. 27, *з*). Это явление должно наблюдаться у металлов с ПФ любой формы и может быть полезным для фиксации ПФ в обратном пространстве.

8. СЕЧЕНИЕ И ПОЯСКИ ИЗМЕНЯЮТ ТОПОЛОГИЮ

Исследуя эффект де Гааза-ван Альфена на Cu , Д. Шенберг и И. М. Темпльтон⁷⁷ обнаружили, что при определенном направлении магнитного поля \mathbf{H} амплитуда осцилляций существенно возрастает. Возрастание амплитуды осцилляций объяснено авторами статьи так: при этом направлении магнитного поля вместе с $\partial S/\partial p_z$ обращается в нуль $\partial^2 S/\partial p_z^2$, разложение S по Δp_z начинается с члена четвертого порядка, что и приводит к возрастанию амплитуды. Малый множитель $\sqrt{\hbar\omega_c/\varepsilon_F}$ заменяется большим множителем $(\hbar\omega_c/\varepsilon_F)^{1/4}$. Очевидно, при этом направлении \mathbf{H} изменяется характер экстремума по p_z у сечения ПФ. На рис. 28, кроме

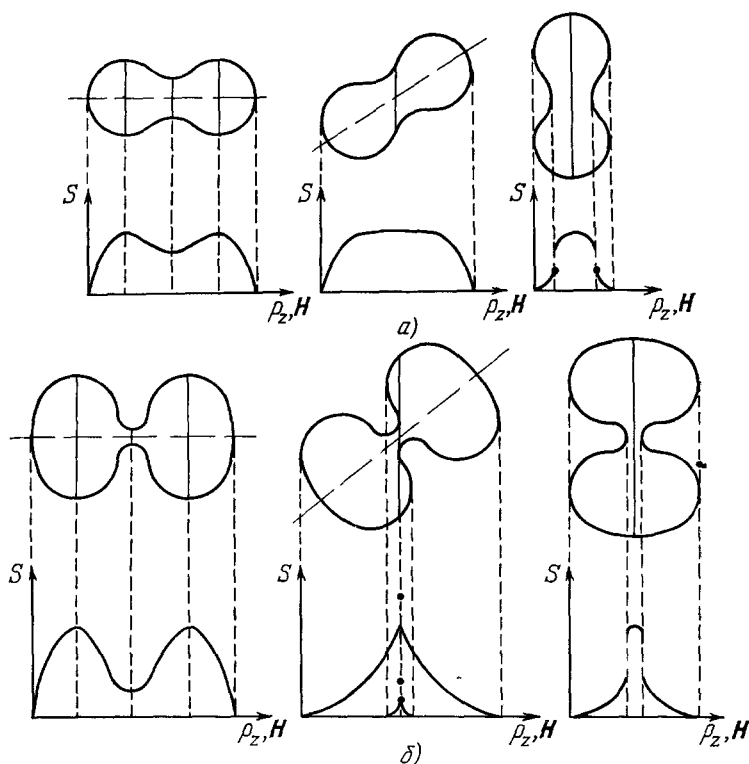


Рис. 28. Зависимость площади плоского сечения ПФ от p_z при разных направлениях магнитного поля.

а) Гантель с толстой перемычкой; б) гантель с тонкой перемычкой.

различных при разных направлениях \mathbf{H} зависимостей $S(\varepsilon_F, p_z)$, показано (на примере ПФ-гантели), как изменяются сечения (их число и расположение). Подобное изменение было бы невозможно, если бы ПФ была выпуклой.

Структура сечения может изменяться и не так просто, как показано на рис. 28, *а*. Если есть направление, когда одно из экстремальных сечений содержит точку самопересечения, то изменение структуры сечений, а значит, и спектра дегааза-ванальфеновских осцилляций происходит

более сложно (рис. 28, б), а амплитуда критической осцилляции (соответствующей сечению типа восьмерки) аномально мала. Однако этот вопрос еще мало изучен *).

Сравнительно недавно подробно исследовался вопрос об особенностях в фоновом спектре металлов, обусловленных топологическими изменениями структуры поясков ⁷⁹⁻⁸¹. Вернемся к рис. 19. Видно, что число поясков при разных направлениях волнового вектора различно. Это значит, есть такое направление $\mathbf{n} = \mathbf{n}_c$, при котором поясск изменяет свою структуру (на рис. 19 он содержит точку самопересечения). На рис. 29 изображен участок ПФ, напоминающий холмистую местность (когда-то мы называли такую поверхность гофрированной плоскостью ¹⁹). Есть двумерная область направлений, для которых пояска нет вовсе, а при направлениях вне этой области — поясок есть. Когда направление из области, где есть поясок, приближается к критическому $\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}_c$, поясок представляет собой небольшой эллипс, стягивающийся в точку при $\mathbf{n} = \mathbf{n}_c$. Если считать, что на пояске скорость электронов перпендикулярна направлению волнового вектора (пренебречь скоростью звука по сравнению с фермиевской скоростью), то критические точки **) расположены на линиях параболических точек, т. е. на линиях нулевой гауссовой кривизны K ПФ, которые, как мы говорили, есть обязательный атрибут поверхностей со вмятинами, перемычками и т. п.

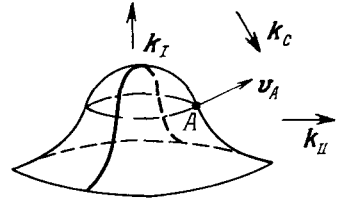


Рис. 29. Возникновение пояска в точке А, расположенной на линии параболических точек при $\mathbf{k} = \mathbf{k}_c \perp \mathbf{v}_A$ (ПФ типа «холмистая местность»). При $\mathbf{k} = \mathbf{k}_I$ пояска нет вовсе; поясок, соответствующий $\mathbf{k} = \mathbf{k}_{II}$, изображен жирной линией.

Анализ структуры поясков (16), (17) показывает, что гиперболические точки могут быть двух типов. Они названы точками O - и X -типов ⁷⁹. В точке O -типа поясок зарождается, а в точке X -типа поясок имеет самопересечение. Существование параболических точек на ПФ и, как следствие, критических направлений распространения звука должно приводить к особенностям в угловой зависимости коэффициента поглощения звука и других кинетических коэффициентов (например, тензора электропроводности в условиях большой пространственной дисперсии).

Описанное явление — довольно редкий случай, когда локальная геометрия ПФ (геометрия в точке) проявляется (или точнее, должна проявиться) в макроскопически наблюдаемых явлениях при $\mathbf{H} = 0$. Следует подчеркнуть: формула (18) устроена так, что вклад в Γ_e окрестности особой точки того же порядка или логарифмически больше (!), чем от остальной части поверхности ***)). На рис. 30 показана структура особенностей $\Gamma_e = \text{Im } \omega$ и $\text{Re } \omega$ для точек O - и X -типа. Существование пар близко расположенных особенностей связано с наличием у каждой особой точки точки-«антипода» с антипараллельной скоростью (следствие симметрии ПФ относительно замены \mathbf{p} на $-\mathbf{p}$). При $s/v_F \rightarrow 0$ критические направления, обязанные точкам-антиподам, совпадают. Особенности в $\text{Re } \omega$ погашают друг друга, а в $\text{Im } \omega$ — складываются.

*) В работе М. Азбеля ⁷⁸ исследованы осцилляции, обязанные неэкстремальным сечениям с самопересечением, и показано, что их амплитуда в $\epsilon_F/\hbar\omega_c$ раз меньше амплитуды, обязанной экстремальному сечению без самопересечения.

**) Точка самопересечения критического пояска на поверхности типа гантели (см. рис. 19); точка, в которую стягиваются пояски — эллипсы (см. рис. 29).

***) Формула для компонент тензора электропроводности (21) при $kl \gg 1$, как указывалось, аналогична по структуре формуле (18) (см. ^{44,47}).

Поглощение звука в магнитном поле в промежуточных полях $1 \ll \omega_{ст} \ll kl$ при $\mathbf{k} \perp \mathbf{H}$, описанное выше, тоже должно обладать особенностями, связанными с изменением топологии пояска. Что касается глав-

Тип точки	Локальная структура пояска	$\text{Im } \omega = \Gamma_e$	$\text{Re } \omega$
0			
X		$\frac{2s}{U_F}$ 	$\frac{2s}{U_F}$

Рис. 30. Характер угловых особенностей $\text{Im } \omega$ и $\text{Re } \omega$, обязанных точкам 0- и X-типа. Расстояния между парами особенностей $\approx 2s/v_F$.

ного (монотонно зависящего от \mathbf{H}) слагаемого, то непосредственное сравнение формул (18) и (22) показывает, что $\Gamma_e^{\text{мон}}$ имеет те же особенности, что и Γ_e при $\mathbf{H} = 0$. Интереснее обстоит дело с осциллирующей частью.

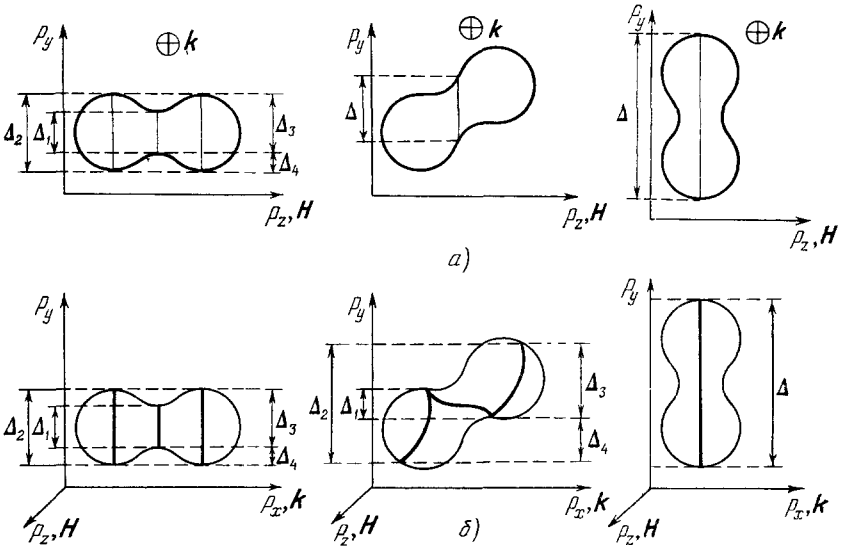


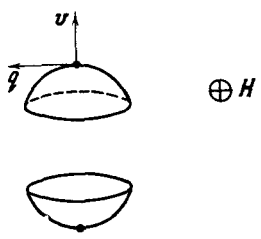
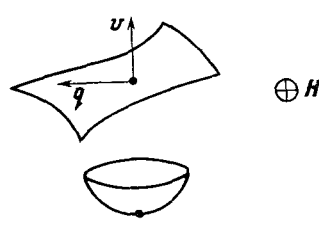
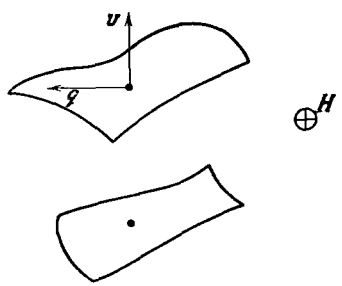
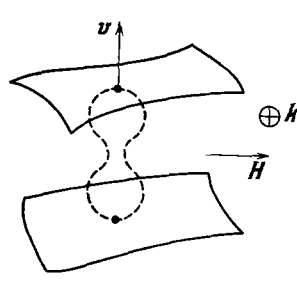
Рис. 31. При разных направлениях магнитного поля \mathbf{H} и волнового вектора \mathbf{k} спектр пишардовских осцилляций различен: частоты определяются величинами $\Delta p_{\text{yext}} \equiv \Delta_j$. а) При фиксированном \mathbf{k} поясок (жирная линия) не меняется, но спектр осцилляций меняется $\mathbf{H} \parallel p_z$; б) изменение топологии пояска при фиксированном \mathbf{H} также изменяет спектр осцилляций (экстремальные траектории изображены тонкими линиями).

Спектр осцилляций зависит от направления распространения звука и от направления магнитного поля, причем от направления зависят не только величины периодов, но и их число (рис. 31). При приближении к крити-

ческим направлениям, т. е. к таким, в которых спектр осцилляций перестраивается, должны появляться близкие периоды, сложение соответствующих гармоник будет восприниматься как биение. Кроме биений, на эксперименте, по-видимому, легче всего обнаружить возрастание амплитуды осцилляций, связанное с тем, что ответственные за величину

Таблица II

Зависимость амплитуды и фазы осциллирующей части $\Gamma_e(H)$ от типа точек пересечения «пояска» с экстремальной траекторией и геометрии эксперимента

Точки	Эллиптические (обе)	Одна эллиптическая, другая — параболическая X-типа
		
Амплитуда	$\Gamma_e \frac{\omega_c \tau}{(kr_H)^{1/2}}$	$\Gamma_e \frac{\omega_c \tau}{(kr_H)^{1/3}}$
Фаза	$+\frac{\pi}{4}$	0
Точки	Обе параболические X-типа	Обе параболические X-типа
		
Амплитуда	$\Gamma_e \frac{\omega_c \tau}{(kr_H)^{1/6}}$	$\Gamma_e \frac{\omega_c \tau}{(kr_H)^{1/4}}$
Фаза	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{8}$

амплитуды пишардовских осцилляций электроны оказываются разложенными вблизи точек уплощения на ПФ. Интересующие нас точки суть точки пересечения «пояска» с траекторией электрона, обладающей экстремальной проекцией опорного диаметра. Ясно, что совместить точку пересечения

с точкой уплощения можно, либо изменяя направление распространения звука, либо направление магнитного поля. Геометрию возможных экспериментов (направления \mathbf{H} и \mathbf{q}) и предсказания теории ^{79, 80} можно выяснить по табл. II.

9. МЕДЛЕННЫЕ ЭЛЕКТРОНЫ

Электроны проводимости — самые быстрые квазичастицы металла. Их скорость в тысячи раз превышает скорость фононов. Именно поэтому теплопроводность металлов значительно больше теплопроводности диэлектриков, а многие свойства металлов можно изучать, не вспоминая о том, что ионы движутся. Но, конечно, не все электроны металла, даже те, энергия которых равна ε_F , движутся с одинаковыми скоростями. Сложный характер закона дисперсии $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{p})$, его анизотропия, в частности, приводит к тому, что электроны, расположенные в разных точках на ПФ, имеют различные скорости.

Интересно отметить, что во многих свойствах металла медленные электроны играют особенно существенную роль, т. е. роль электронов тем больше, чем их скорость меньше. Это утверждение означает вот что. Как мы уже неоднократно говорили, большинство электронных характеристик металла выражается формулами, содержащими интеграл по ПФ.

Если этому интегралу удастся придать вид $\oint_{(F)} (ds/v^\alpha) F$, причем функция

F -точки на ПФ слабо зависит от v , то мерой участия медленных электронов может служить степень α ⁸². Так вот, оказывается, что во многих случаях $\alpha > 0$. В табл. III формулы, описывающие несколько эффектов, расположены в порядке возрастания степени α . Следует подчеркнуть: входящая в формулы длина пробега электронов l слабо зависит от скорости, что видно из ее качественной оценки (см. ⁸³ гл. VII):

при рассеянии на экранированных примесях

$$l^{-1} \approx N_{\text{пр}} s_a,$$

где $N_{\text{пр}}$ — число атомов примеси в единице объема, при рассеянии на фононах

$$l^{-1} \approx N s_a \frac{T}{M s^2} \left(\frac{T}{\theta} \right)^4 \int_0^{\theta/T} \frac{4z^4 dz}{e^z - 1},$$

N — число ионов металла в см^3 , M — масса иона, θ — температура Дебая, s_a по порядку величины совпадает с эффективным поперечником рассеяния на отдельном атоме ($s_a \approx a^2$). Последние формулы, как и формулы табл. III, справедливы при предельном вырождении электронного газа ($T \ll |\varepsilon_k - \varepsilon_k|$). Кроме того, адиабатическое приближение требует, чтобы скорости электронов, принимающих участие в рассматриваемых эффектах, были больше скорости звука s . Но на шкале электронных скоростей $\sqrt{T/m}$ и s столь малы, что приближение к ним означает весьма существенное увеличение (или уменьшение) эффекта.

В последней графе таблицы мы поместили выражение для акустоэлектрического тока J_A , возбуждаемого в металле потоком когерентных фононов мощности W с частотой $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Причиной возникновения акустоэлектрического тока служит то же взаимодействие фононов с электронами металла, которое обеспечивает затухание звука, описываемое формулами (18), (22), (23). При поглощении электронами фононов последние передают электронам свой импульс, что в конечном итоге приводит к акустоэлектрическому эффекту. Условие $kl \gg 1$, так всегда дискри-

минирует все электроны, кроме электронов «поясков» ⁸⁴, а множитель $\frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_n^2} = (m_n^*)^{-1} (m_n^* - \text{эффeктивная масса вдоль вектора } \mathbf{k} = k\mathbf{n}) - \text{следствие «превращения» переданного фононного импульса в изменение скорости электронов}$

$$\Delta v_i = \frac{\partial v_i}{\partial p_k} \Delta p_k = \hbar k \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_n^2}.$$

Аномально большая роль медленных электронов особенно отчетливо проявляется при рассмотрении вклада в различные свойства металлов

Таблица III

Роль медленных электронов в свойствах металлов

<p>Удельная электропроводность металла *):</p> $\sigma_{ik} = \frac{2e^2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{(F)} \ln n_k dS, \quad \alpha = 0$
<p>Плотность в единице объема электронных состояний на границе Ферми (определяет термодинамику электронного газа):</p> $\nu(\epsilon_F) \equiv \nu_F = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \oint_{(F)} \frac{dS}{v}, \quad \alpha = 1$
<p>Коэффициент поглощения звука электронами ($\mathbf{H} = 0$):</p> $\Gamma_e = \frac{2\omega}{(2\pi\hbar)^3 \rho_s} \oint_{(F)} l \Lambda ^2 \frac{dS}{v^2} F(\mathbf{n}\mathbf{v}), \quad \alpha = 2$
<p>Монотонная часть коэффициента поглощения звука в магнитном поле ($k l \gg \omega_{cT} \gg 1, \mathbf{k} \perp \mathbf{H}$):</p> $\Gamma_e^{\text{мон}} = \frac{4\pi\omega}{(2\pi\hbar)^3 \rho_s} \oint_{(F)} \omega_c l \Lambda ^2 \frac{dS}{v^3} \delta(\mathbf{n}\mathbf{v}), \quad \alpha = 3$
<p>Акустоэлектрический ток, обусловленный потоком когерентных фононов:</p> $J_A = \frac{2\pi e W \omega}{(2\pi\hbar)^3 \rho_s^3} \oint_{(F)} l \Lambda ^2 \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial p_n^2} \frac{dS}{v^3} \delta(\mathbf{n}\mathbf{v}), \quad \alpha = 3$
<p>*) В случае электронной теплопроводности и параметр α тоже равен нулю.</p>

электронов малой полости ПФ, форму которой для простоты будем считать сферической. Число электронов в полости примем равным n_a . Тогда, согласно табл. III:

$$\sigma, \kappa \propto n_a^{2/3}, \quad \nu_F \propto n_a^{1/3}, \quad \Gamma_e \propto \text{const}, \quad \Gamma_e^{\text{мон}}, \mathbf{H}, J_A \propto n_a^{-1/3}.$$

Во всех приведенных формулах, конечно, нельзя совершать предельный переход к $n_a \rightarrow 0$. Из условий $\epsilon_{Fa} \gg T$ и $\nu_F > s$ следует

$$n_a \gg \frac{1}{a^3} \left(\frac{T}{\epsilon_a} \right)^{3/2}, \quad \frac{1}{a^3} \frac{ms^2}{\epsilon_a}, \quad \epsilon_a = \frac{\hbar^2}{a^2 m}.$$

Но так как T и ms^2 очень малы по сравнению с ϵ_a , то рост акустоэлектрического тока и коэффициента поглощения звука в магнитном поле с уменьшением числа электронов в полости ПФ должен быть наблюдаем.

10. ПОВЕРХНОСТЬ ФЕРМИ МЕНЯЕТ СВОЮ ГЕОМЕТРИЮ

Под внешним воздействием или при изменении температуры кристаллические решетки металлов претерпевают изменения — происходят фазовые переходы. При этом изменяется и ПФ, а вместе с нею — все электронные свойства металлов. Среди многих фазовых переходов есть и такие, в которых электронная подсистема металла играет главную роль (например, переход в сверхпроводящее или ферромагнитное состояние, переход металл — диэлектрик). И в этих случаях ПФ, конечно «чувствует» переход: при переходе в сверхпроводящее состояние при $\epsilon \approx \epsilon_F$ возникает небольшая запрещенная энергетическая зона, делающая сверхпроводящее состояние устойчивым, а при переходе в ферромагнитное состояние ПФ расщепляется на две из-за снятия вырождения по спину электронов; при переходе металл — диэлектрик ПФ исчезает вовсе.

Фазовый переход (особенно второго рода) — сложное явление, сопровождающееся, как правило, изменением симметрии, ростом флуктуаций или гистерезисными и др. явлениями. Изменению геометрии ПФ и его

проявление в большинстве случаев вторично. Поэтому в плане нашего обзора естественно остановиться только на таких изменениях геометрии ПФ, которые не сопровождаются фазовыми переходами.

В металлах под давлением за счет изменения межатомных расстояний изменяется вся энергетическая структура металла. Но если не изменяется симметрия тела, или не происходит изоморфный фазовый переход, то вплоть до некоторого критического давления p_c все изменения носят количественный, но не качественный характер. Качественное изменение без фазового перехода возможно путем перестройки ПФ. В p -пространстве каждой электронной энергетической зоны есть точки $p = p_h$, в которых изменяется связность изоэнергетических поверхностей: либо появляется (исчезает) полость изоэнергетической поверхности, либо «рвется» (образуется) перемычка (рис. 32). При тех значениях энергии ϵ_h , при которых

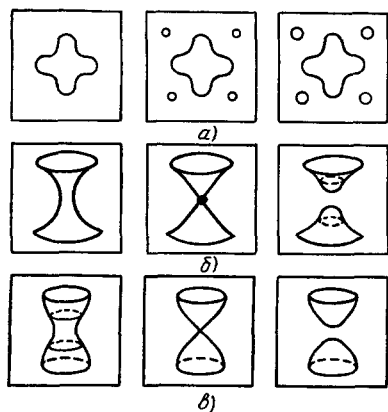


Рис. 32. Изменение связности ПФ при фазовом переходе $2^{1/2}$ -го рода: образование новой полости (а); разрыв перемычки, сопровождающийся либо появлением линий точек O -типа (б), либо исчезновением точек X -типа (в) (линии параболических точек штриховые).

изменяется связность изоэнергетических поверхностей, плотность электронных состояний $\nu(\epsilon)$ имеет корневую особенность — особенность Ван-Хова ⁴², так как поверхность $\epsilon(\mathbf{p}) = \epsilon_h$ содержит точку, в которой скорость обращается в нуль ($\mathbf{v}(\mathbf{p}_h) = 0$). В обычных условиях (при $P = 0$) энергия Ферми $\epsilon_F \neq \epsilon_h$, и существование особенности Ван-Хова проявляется только косвенно (например, в сложности ПФ ряда металлов, см. выше и следующий раздел). Путем приложения давления можно «вывести» Ван-Хововскую особенность на уровень Ферми. В результате ПФ при $P = P_h$ изменяет свою связность. Это проявляется в корневой особенности у плотности электронных состояний $\nu(\epsilon_F) \propto \sqrt{P - P_h}$, что при $T = 0$,

как мы уже говорили, по номенклатуре Эренфеста должно трактоваться как фазовый переход $2^{1/2}$ -го рода ⁴¹. Из сказанного ясно, что при $P = P_k$ ПФ содержит точку (или точки), в которых $v = 0$.

Наличие на критической ПФ (при $P = P_k$) медленных электронов с $v = 0$ приводит к аномалиям не только термодинамических, но и кинетических свойств. Формулы, приведенные в табл. III, показывают, что особенно чувствительными к изменению связности ПФ должны быть те свойства металла, которые обусловлены взаимодействием электронов со звуковой волной. Хотя перестройка ПФ происходит в отдельных точках p -пространства, макроскопический коэффициент звука имеет конечный скачок при образовании новой полости и даже логарифмической расходящуюся особенность (при $T = 0$ и $kl = \infty$) при разрыве перемычки ⁸⁵.

Изменение связности ПФ (разрыв или образование перемычки) сопровождается изменением локальной геометрии ПФ: при разрыве перемычки либо появляется линия точек O -типа, либо исчезает линия точек X -типа (см. рис. 32). Это означает, что при фазовом переходе $2^{1/2}$ -города, обусловленном разрывом перемычки, должно наблюдаться появление (или исчезновение) аномалий в зависимости Γ_e от направления распространения звука (см. рис. 30). Как показано в ⁸⁶, в данном случае эти аномалии особенно резко из-за близости линии параболических точек к конической точке p -пространства (в которой $v = 0$!).

Для появления или исчезновения линии параболических точек не обязательно изменять связность ПФ. Для этого достаточно создать на ПФ вмятину (рис. 33). В зависимости от характера точки уплощения ПФ появится либо кратер (рис. 33, а), либо «талиа» (рис. 33, б). Эти «события» обязательно сопровождаются возникновением (или исчезновением) угловых особенностей у Γ_e ⁸⁶ и многими другими аномалиями (изменением спектра пипшардовых частот в магнитном поле ⁸⁰, изменением спектра дегааз-ванальфеновских осцилляций ⁸⁷ и т. д.).

Последний абзац позволяет обобщить понятие топологического перехода (так иногда называют фазовый переход $2^{1/2}$ -го рода) на любое изменение геометрии ПФ, сопровождающееся качественными изменениями каких-либо характеристик металла.

И в заключение еще одно предсказание ⁸⁸: согласно формуле (22) коэффициент поглощения $\Gamma_e^{\text{МОН}}(H)$ в сравнительно сильном магнитном поле растет с ростом времени свободного пробега электронов τ . Как мы уже говорили, грубая оценка длины свободного пробега l показывает, что l слабо зависит от числа электронов. Это означает, что время релаксации $\tau = \frac{l}{v_F}$ должно возрастать при уменьшении размеров полости ПФ (перед ее исчезновением при $P = P_k$; см. рис. 32), приводя к росту $\Gamma_e^{\text{МОН}}(H)$. Конечно, в непосредственной близости к фазовому переходу $2^{1/2}$ -го рода рост прекращается, а $\Gamma_e^{\text{МОН}}(H)$ обращается в нуль: электрон, скорость которого меньше скорости звука, не может поглотить фотон.

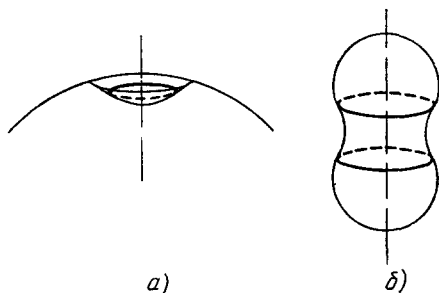


Рис. 33. Образование кратера (а) и перемычки (б) на ПФ сопровождается появлением (линий параболических точек (жирные линии).

Вокруг кратера располагается поясик, отвечающий направлению распространения звука, перпендикулярному оси ПФ.

11. ЭЛЕКТРОНЫ ПЕРЕХОДЯТ С ОДНОЙ ОРБИТЫ НА ДРУГУЮ. МАГНИТНЫЙ ПРОБОЙ

Во всех явлениях, описанных выше, электроны либо пребывали в определенной точке \mathbf{r} -пространства на ПФ, либо «прыгали» из-за рассеяния из одной точки в другую, либо, наконец, двигались по классическим траекториям в магнитном поле. Осознание сложности ПФ большинства металлов связано, в частности, с пониманием того, что классические траектории электронов в магнитном поле (в \mathbf{r} -пространстве) имеют точки сближения, благодаря чему возникает возможность туннельного перехода с одной траектории на другую. Это явление, получившее название магнитного пробоя⁸⁹, как оказалось, играет фундаментальную роль во многих свойствах металлов⁹⁰.

Для понимания природы и важности магнитного пробоя надо различать внутри- и межзонные переходы. Если ограничиться только ПФ, то внутризонные переходы возможны в узких интервалах значений ρ_z

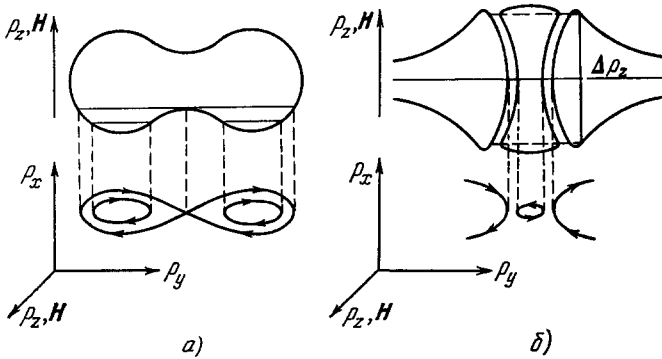


Рис. 34. Во внутризонном пробое принимают участие электроны из тонкого слоя вблизи траектории с самопересечением (а), а в межзонном — из слоя конечной толщины $\Delta\rho_z$ (б).

В обоих случаях изображены траектории в \mathbf{r} -пространстве.

(рис. 34, а), а межзонные — в широких, порядка \hbar/a (рис. 34, б). Магнитным пробоем называют круг явлений, связанных с межзонными переходами.

Не ставя себе целью сколько-нибудь подробно описывать свойства металлов в условиях магнитного пробоя, отметим несколько обстоятельств, допускающих простую геометрическую интерпретацию.

Область магнитного пробоя есть область сближения классических траекторий. Это означает, что электронное состояние на магнитопробойной конфигурации есть суперпозиция квазиклассических состояний. Именно поэтому возможно использовать геометрические образы при изучении магнитного пробоя, а физические величины, характеризующие металл при магнитном пробое, можно выразить в терминах закона дисперсии и унитарных \hat{s} -матриц второго ранга, описывающих двухканальное рассеяние на области магнитного пробоя*). Малость области магнитного пробоя по сравнению с размерами классических участков магнитопробойной конфигурации приводит к возможности вычислить \hat{s} -матрицу при произвольном значении магнитного поля, не нарушающем условия квазиклассичности движения между областями пробоя⁹² ($\hbar\omega_c \ll e_F$). При

*) Квадрат модуля недиагонального элемента \hat{s} -матрицы есть вероятность пробоя W , а квадрат модуля диагонального элемента — вероятность непробоя $1 - W$ (см. ⁹¹).

вероятности пробоя W , отличной от нуля и не равной единице ($0 < W < 1$) движение электрона носит квантовый характер, однако, с ростом магнитного поля $W \rightarrow 1$, и движение снова становится квазиклассическим. При этом, однако, электроны приобретают новые черты, которых не было в малых полях. Учитывая спектроскопический характер исследований в сильном магнитном поле, следует проявлять осторожность: изменения могут носить не только количественный, но и качественный характер. На рис. 35 показано, как вследствие магнитного пробоя изменяется топология плоского сечения — из открытого оно превращается в замкнутое.

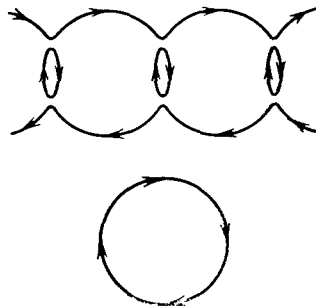


Рис. 35. Магнитным пробоем может измениться топология траекторий электронов.

В малом поле в отсутствие пробоя есть и открытые и замкнутые траектории; в большом поле траектория только замкнутая (она показана внизу).⁴⁴

Впервые явление, обусловленное магнитным пробоем, было экспериментально обнаружено Пристли⁹³ при наблюдении эффекта де Гааза — ван Альфена на Mg — были найдены периоды (замкнутые сечения), возникающие при преодолении электроном барьеров, разделяющих участки классических траекторий (рис. 36).

Магнитный пробой может быть источником своеобразных осцилляционных эффектов — не сводящихся к дегааз-ванальфеновским. Нередки случаи, когда две или даже три большие орбиты на ПФ связываются друг с другом благодаря магнитному пробоему через малую орбиту (рис. 37).

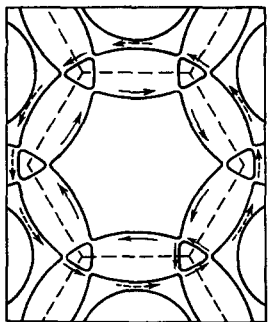


Рис. 36. Магнитопробойные траектории, обнаруженные при исследовании эффекта де Гааза — ван Альфена на магнии.

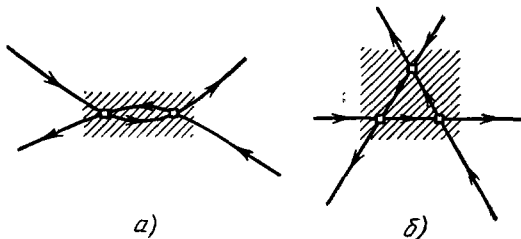


Рис. 37. Малые орбиты, благодаря магнитному пробоему, связывают большие.

Заштрихованные области могут служить эффективной областью магнитного пробоя.

Можно ввести понятие эффективной вероятности пробоя $W_{эфф}$ — вероятности того, что электрон перейдет с одного большого квазиклассического участка на другой. Эффективная вероятность $W_{эфф}$ — периодическая функция обратного магнитного поля, причем период определяется той же формулой (9), которая ответственна за эффект де Гааза — ван Альфена. Но природа периодической зависимости иная. Она обусловлена интерференцией отраженных от точек пробоя волн. Периодичность возникает по той же причине, что у коэффициента прозрачности диэлектрической пластины, в которой интерферируют электромагнитные волны. Осцилля-

ции $W_{\text{эфф}} = W_{\text{эфф}}(H)$ — причина гигантских осцилляций гальваномагнитных характеристик, в которых принимают участие основные группы

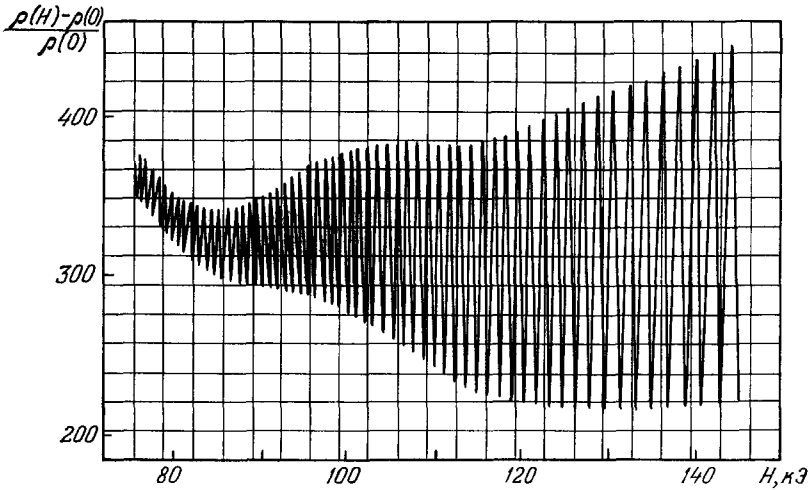


Рис. 38. Гигантские осцилляции магнитосопротивления бериллия, обусловленные магнитным пробоем.

(Измерения сделаны в Международной лаборатории сильных магнитных полей и низких температур, Вроцлав, Польша, 1972 г.)

электронов металла (рис. 38). Это явление можно назвать эффектом реле. Малая область работает как реле, которое благодаря магнитному пробоею, управляет движением электронов по большой траектории⁹⁴.

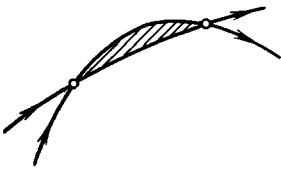


Рис. 39. Электроны, двигающиеся по близким траекториям, интерферируют, что приводит к осцилляциям кинетических характеристик.

Период в магнитном поле определяется заштрихованной областью. Кружки — область магнитного пробоя.

Интерференция электронных волн, [приходящих в определенную точку магнитопробойной конфигурации, тоже может быть причиной осцилляционных эффектов. Для этого два пути должны мало отличаться друг от друга (рис. 39). Период осцилляций по-прежнему определяется квантованием «площади». Слово «площадь» взято в кавычки, чтобы подчеркнуть: нет электрона, который эту площадь описывает. Подобная интерференция наблюдается только в кинетических явлениях⁹⁵, осциллирующая часть термодинамических характеристик определяется замкнутыми петлями.

Магнитный пробой открыт у многих металлов на многих свойствах. Его проявление разнообразно, а понимание магнитопробойных свойств существенно для расшифровки энергетического спектра металла, так как в процессе пробоя электрон оказывается в недоступной при классическом движении области p -пространства.

12. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

К современной геометрии наши построения не имеют отношения. Физики, занятые теорией металлов, не претендуют ни на какие (даже мелкие) открытия в геометрии. Геометрия используется в электронной теории металлов только для того, чтобы сделать многие выводы и результаты наглядными. Физикам «повезло» в том, что за многие свойства метал-

лов «отвечают» электроны, занимающие поверхность, что сечение этой поверхности, определенные линии и точки на ней имеют ясный физический смысл. Понимание природы металлического состояния достигло такого уровня, что мы научились строить эти поверхности, проводить на них линии и определять положение нужных точек, а с помощью этих простых геометрических образов — вычислять разнообразные физические характеристики.

Пользуемся случаем поблагодарить Л. П. Питаевского за полезные замечания, а также Т. Ю. Лисовскую и Ш. Т. Мевлюта за помощь при подготовке обзора к публикации.

Институт физических проблем
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Лифшиц И. М.— ЖЭТФ, 1954, т. 26, с. 551.
2. Ландау Л. Д. Собрание трудов. Т. 2.— М.: Наука, 1969, с. 328.
3. Ландау Л. Д., Luttinger T. M.— См. в книге: Абрикосов А. А., Горьков Л. П., Дзялошинский И. Е. Методы квантовой теории поля в статистической физике.— М.: Физматгиз, 1962.
4. Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И. Электронная теория металлов.— М.: Наука, 1971.
5. London H.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1940, v. 176, p. 522.
Pippard A. V.— Ibid., 1947, v. 191, p. 385.
Reuter G. E. H., Sondheimer E. H.— Ibid., 1948, v. 195, p. 336.
Лифшиц И. М., Каганов М. И.— УФН, 1959, т. 69, с. 49.
7. Shoenberg D.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1939, v. 170, p. 341.— В приложении этой статьи изложена теория эффекта де Гааза—ван Альфена — см.: Ландау Л. Д. Собр. трудов. Т. 1, — М.: Наука, 1969.
8. Jones H.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1936, v. 155, p. 653.
9. Лифшиц И. М., Косевич А. М.— ДАН СССР, 1954, т. 96, с. 963; ЖЭТФ, 1955, т. 29, с. 730.
10. Лифшиц И. М. Доклад на сессии АН УССР, Киев, 1950.
11. Onsager L.— Phil. Mag., 1952, v. 43, p. 1006.
12. Лифшиц И. М., Погорелов А. В.— ДАН СССР, 1954, т. 96, с. 1143.
13. Guppersen E. M.— Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1956, v. 249, p. 299.
Gold A. V.— Ibid., 1958, v. 251, p. 85.
14. Sondheimer E.— Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 401.
15. Pippard A. V.— Phil. Mag., 1957, v. 2, p. 1147.
16. Канер Э. А., Гантмахер В. Ф.— УФН, 1968, т. 94, с. 123.
17. Лифшиц И. М., Косевич А. М.— ДАН СССР, 1953, т. 91, с. 795.
18. Гайдуков Ю. П., Голыamina Е. М.— Письма ЖЭТФ, 1976, т. 29, с. 336.
19. Лифшиц И. М., Азбель М. Я., Каганов М. И.— ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 63.
20. Лифшиц И. М., Песчанский В. Г.— ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 1251.
21. Алексеевский Н. Е., Гайдуков Ю. П., Лифшиц И. М., Песчанский В. Г.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1204.
22. Азбель М. Я.— ЖЭТФ, 1963, т. 44, с. 983.
23. Азбель М. Я., Песчанский В. Г.— ЖЭТФ, 1965, т. 49, с. 572; 1968, т. 55, с. 1980.
24. Минц Р. Г.— Письма ЖЭТФ, 1969, т. 9, с. 629.
25. Шубникова А. В., де Гааз В.— Comm. Kamerling Onnes Lab. Univ. Leiden, 1930, v. 19, p. 207a.— На Ви.
Лазарев Б. Г., Нахимович Н. М., Парфенова Е. А.— ЖЭТФ, 1939, т. 9, с. 1169.— На Zn.
26. Titeica S.— Ann. d. Phys., 1935, Bd. 22, S. 128.
Ахнер А. И.— ЖЭТФ, 1939, т. 9, с. 426, Давыдов Б. И., Померанчук И. Я.— Ibid., с. 1294.
Зильберман Г. Е.— ЖЭТФ, 1955, т. 29, с. 762.
Лифшиц И. М.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 1509.
Лифшиц И. М., Косевич А. М.— ЖЭТФ, 1957, т. 38, с. 88.
- Adams E. N., Holstein T. D.— J. Phys. and Chem. Sol., 1959, v. 10, p. 254.
Косевич А. М., Андреев В. В.— ЖЭТФ, 1960, т. 38, с. 882.
27. Алексеевский Н. Е., Брандт Н. Б., Костина Т. И.— ДАН СССР, 1955, т. 105, с. 46.

28. Каганов М. И., Песчанский В. Г.— ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 1052.
29. Каганов М. И., Кадигробов А. М., Слудкин А. А.— ЖЭТФ, 1967, т. 53, с. 1135.
30. Лифшиц И. М.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, с. 1135.
31. Фикс В. Б.— ФТТ, 1963, т. 5, с. 2213.
- Каганов М. И., Лифшиц И. М., Фикс В. Б.— ФТТ, 1964, т. 6, с. 2723.
32. Пайерлс Р. Кваптовая теория твердых тел— М.: ИЛ, 1956.
33. Pippard A. B.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1968, v. 308, p. 291.
34. Joung R. A.— Phys. Rev., 1968, v. 175, p. 813.
35. Гуржи Р. Н., Копелиович А. И.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 635.
36. Рашба Э. И., Грибников Э. С., Кравченко В. Я.— УФН, 1976, т. 119, с. 3.
37. См., например: Харрисон У. Псевдопотенциал в теории металлов.— М.: Мир, 1968.
38. Brillouin L. Wave Propagation in Periodic Structures.— N. Y., 1976.
39. Хейне В., Коэн М., Уэйр Д. Теория псевдопотенциала.— М.: Мир, 1973.
40. Дзялошинский И. Е.— ЖЭТФ, 1964, т. 47, с. 336.
41. Лифшиц И. М.— ЖЭТФ, 1960, т. 30, с. 1569.
42. Van Hove L.— Phys. Rev., 1953, v. 89, p. 1189.
43. Ландау Л. Д. Сбор. трудов, Т. 2. М.: Наука, 1969.— С. 7.
44. Pippard A. B.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1947, v. 91, p. 385; 1954, v. 224, p. 273.
45. Pippard A. B.— Phil. Mag., 1955, v. 46, p. 1104.
46. Ахизер А. И., Каганов М. И., Любарский Г. Я.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 837.
47. Каганов М. И., Азбель М. Я.— ДАН СССР, 1955, т. 102, с. 149.
48. Pippard A. B.— Trans. Roy. Soc. Ser. A, 1957, v. 250, p. 325.
49. Ахизер А. И.— ЖЭТФ, 1938, т. 8, с. 1330.
50. Frölich H.— Phys. Rev., 1950, v. 79, p. 845.
51. Райн Дж., Джонс К. Затухание ультразвука в нормальных металлах и сверхпроводниках: эффекты поверхности Ферми — В кн. Физическая акустика. Т. VII.— М.: Мир, 1974.— С. 174.
52. Азбель М. Я., Канер Э. А.— ЖЭТФ, 1956, т. 30, с. 811; ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 896; Phys. Chem. Sol., 1958, v. 6, p. 113.
53. Fawcett E.— Phys. Rev., 1956, v. 103, p. 1582.
54. Хайкин М. С.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 27.
55. Канер Э. А., Скобов В. Г.— УФН, 1966, т. 89, с. 367; Adv. Phys., 1968, v. 17, No. 69.
56. Константинов О. В., Перель В. И.— ЖЭТФ, 1960, т. 38, с. 161. Agrain P.— In: Proc. of Intern. Conference on Semiconductor Physics.— Prague: 1964.— P. 224.
57. Buchsbaum S. J., Galt T. K.— Phys. Fluids, 1961, v. 4, p. 1514. Канер Э. А., Скобов В. Г.— ЖЭТФ, 1963, т. 45, с. 610. Хайкин М. С., Фальковский Л. А., Эдельман В. С., Мина Р. Т.— Ibid., с. 1704.
58. Overhauser A. W., Rodriguez S.— Phys. Rev., 1966, v. 141, p. 429. McGroddy J. C., Stanford J. R., Stern E. A.— Phys. Rev., 1966, v. 141, p. 437. Фишер Л. М., Лаврова В. В., Юдин В. А., Константинов О. В., Скобов В. Г.— ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 759. Скобов В. Г. Дополнение в книге: Платцман Ф., Вольф П. Волны и взаимодействия в плазме твердого тела.— М.: Мир, 1975.
59. Демиковский В. Я., Савинский С. С.— ФТТ, 1976, т. 18, с. 2262.
60. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Электродинамика сред с пространственной дисперсией.— М.: Наука, 1979.
61. Демиковский В. Я., Протагенов А. П.— УФН, 1976, т. 118, с. 101.
62. Гуревич В. Л.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 71.
63. Канер Э. А., Песчанский В. Г., Привороцкий И. А.— ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 214. Fuchs K.— Proc. Camb. Phil. Soc., 1938, v. 34, p. 100.
64. Азбель М. Я., Каганов М. И.— ЖЭТФ, 1954, т. 27, с. 762.
65. Александров Б. Н., Каганов М. И.— ЖЭТФ, 1961, т. 41, с. 1333.
66. См., например: Андреев А. Ф.— УФН, 1971, т. 105, с. 113.
67. Недозеров С. С.— ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 868.
68. Огрии Ю. Ф., Луцкий В. Н., Елинсон М. И.— Письма ЖЭТФ, 1966, т. 3, с. 114. Луцкий В. Н., Корнеев Д. Н., Елинсон М. И.— Ibid., 1966, т. 4, с. 267.
69. Хайкин М. С.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 212; 1968, т. 55, с. 1696; УФН, 1968, т. 96, с. 409.

70. Nee T. W., Prange R. E.— *Phys. Lett. Ser. A*, 1967, v. 25, p. 582.
71. Лурье М. А., Песчанский В. Г.— В кн. XVII Всесоюзное совещание по физике низких температур. Довецк, 1972.
Кириченко О. В., Лурье М. А., Песчанский В. Г.— *ЖЭТФ*, 1975, т. 70, с. 337.
72. Володин А. П., Хайкин М. С., Эдельман В. С.— *Письма ЖЭТФ*, 1973, т. 17, с. 491; *ЖЭТФ*, 1973, т. 65, с. 2105.
73. Хайкин М. С., Эдельман В. С.— *ЖЭТФ*, 1964, т. 47, с. 878.
Песчанский В. Г.— *Письма ЖЭТФ*, 1968, т. 7, с. 489.
Кириченко О. В., Лурье М. А., Песчанский В. Г.— *ФНТ*, 1976, т. 2, с. 858.
74. Мигдал А. Б.— *ЖЭТФ*, 1958, т. 34, с. 1438.
Kohn W.— *Phys. Rev. Lett.*, 1959, v. 3, p. 393.
75. Каганов М. И., Семенов А. И.— *ЖЭТФ*, 1966, т. 50, с. 630.
76. Афанасьев А. М., Каган Ю.— *ЖЭТФ*, 1962, т. 43, с. 1456.
77. Schoenberg D., Templeton I. M.— *Physica*, 1973, v. 69, p. 293.
78. Азбель М. Я.— *ЖЭТФ*, 1960, т. 39, с. 1276.
79. Аванесян Г. Т., Каганов М. И., Лисовская Т. Ю.— *Письма ЖЭТФ*, 1977, т. 25, с. 381; *ЖЭТФ*, 1978, т. 75, с. 1736.
80. Конторович В. М., Степанова Н. А.— *Письма ЖЭТФ*, 1973, т. 18, с. 381.
81. Конторович В. М., Степанова Н. А.— *ФТТ*, 1978, [т. 20, с. 245; *ЖЭТФ*, 1979, т. 76, с. 642.
82. Каганов М. И., Лисовская Т. Ю. Лекция на зимней школе по теоретической физике.— Карпач, Польша: 1979.
83. Займан Дж. Принципы теории твердого тела.— М.: Мир, 1974.
84. Заварицкий Н. В., Каганов М. И., Мевлют Ш. Т.— *Письма ЖЭТФ*, 1978, т. 28, с. 223.
85. Давыдов В. Н., Каганов М. И.— *Письма ЖЭТФ*, 1972, т. 16, с. 133.
86. Каганов М. И., Лобанова Т. Л.— *ЖЭТФ*, 1979, т. 77, с. 590.
87. Брандт Н. Б., Мощалков В. В., Чудинов С. М.— *Письма ЖЭТФ*, 1977, т. 25, с. 361; *ЖЭТФ*, 1978, т. 74, с. 1829.
88. Иванова Т. В., Каганов М. И.— *ФНТ*, 1979, т. 5, с. 158.
89. Cohen M. H., Falicov Z. M.— *Phys. Rev. Lett.*, 1961, v. 7, p. 231.
90. Stark R. W., Falicov L. M.— In: *Progress in Low Temperature Physics*, V. 5.— Amsterdam: North-Holland, 1967.— P. 235.
91. Слуцкий А. А.— *ЖЭТФ*, 1970, т. 58, с. 1098.
92. Blount E. T., *Phys. Rev.*, 1962, v. 126, p. 1636.
Слуцкий А. А.— *ЖЭТФ*, 1967, т. 53, с. 767.
93. Priestley M. G.— *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1963, v. 276, p. 258.
94. Falicov L. M., Pippard A. B., Sievert P. R.— *Phys. Rev.*, 1966, v. 151, p. 498.
Алексеевский Н. Е., Слуцкий А. А., Егоров В. С.— *J. Low Temp. Phys.*, 1971, v. 5, p. 377.
95. Stark R. W., Friedberg C. B.— *Phys. Rev. Lett.*, 1971, v. 26, p. 556.
Phys. Rev. Ser. B, 1972, v. 5, p. 2844; см. также⁹¹.