

**УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК**

539.12.01

**РЕНОРМАЛИЗАЦИОННАЯ ГРУППА И УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ АСИМПТОТИКИ****A. A. Владими́ров, D. B. Ширков****СОДЕРЖАНИЕ**

1. Введение . . . . .	407
2. Различные варианты ренормировочной процедуры . . . . .	408
а) Схема вычитаний (410). б) Схема размерной ренормировки (410). в) Схема обрезания (411).	
3. Мультиплекативная ренормировка функций Грина . . . . .	411
а) Схема обрезания (413). б) Схема вычитаний (414). в) Схема размерной ренормировки (414).	
4. Эффективный заряд и эффективная масса . . . . .	416
5. Ультрафиолетовая асимптотика функций Грина . . . . .	419
6. Формулы пересчета . . . . .	423
7. Одноизарядные модели . . . . .	426
а) Спинорная электродинамика (426). б) Скалярная модель с четверным взаимодействием (427). в) Модель с кубичной нелинейностью в шестимерном пространстве-времени (428). г) Скалярная модель в трехмерном пространстве-времени (428). д) Поле Янга — Миллса, взаимодействующее с фермионами (429). е) Суперсимметричные калибровочные модели (430).	
8. Многозарядные модели . . . . .	431
9. Высокоэнергетические асимптотики физических процессов . . . . .	436
Цитированная литература . . . . .	39

**1. ВВЕДЕНИЕ**

Метод ренормализационной группы (РГ) возник 25 лет назад, вслед за созданием аппарата ренормировок в квантовой теории поля (КТП). Было замечено<sup>1</sup>, что преобразования мультиплекативных ренормировок квантованных полей и констант связи образуют группу, причем наблюдаемые величины (матричные элементы S-матрицы) инвариантны относительно этих преобразований. Выяснилось также<sup>2-4</sup>, что это свойство КТП (ренорминвариантность) налагает определенные ограничения на вид зависимости квантовополевых функций Грина (ФГ) от своих аргументов, что, в ряде случаев позволяет явно найти некоторые характеристики этой зависимости (как правило, асимптотику функций Грина по импульсам). Эффективно применение метода РГ соответствует суммированию лидирующих асимптотик бесконечных подклассов диаграмм Фейнмана.

В настоящее время метод РГ широко используется как для чисто теоретических изысканий в области КТП (например, для нахождения ультрафиолетовых и инфракрасных асимптотик ФГ различных моделей, исследования проблемы динамического нарушения симметрии и т. д.), так и для изучения высокоэнергетического поведения ряда физических процессов: глубоконеупругих лептон-адронных реакций, электрон-позитронной аннигиляции в адроны и др. Модификация метода РГ, разра-

ботанная Вильсоном, была с успехом применена для описания критических явлений (фазовых переходов) в статистической физике<sup>5, 6</sup>.

Видимо, наиболее известной формулой, ассоциируемой с термином «ренормализационная группа», является выражение для эффективного заряда в приближении главных логарифмов,

$$\bar{g} \left( \frac{p^2}{\mu^2}, g \right) = \frac{g}{1 + ag \ln(p^2/\mu^2)}. \quad (1.1)$$

При  $a < 0$  (ситуация так называемого «нуля заряда»)  $\bar{g}$  имеет нефизический полюс, и соответствующая квантовополевая модель оказывается внутренне несогласованной. Если же  $a > 0$  («асимптотическая свобода»), то при росте импульса эффективная константа связи  $\bar{g}$  монотонно стремится к нулю, т. е. взаимодействие исчезает на малых расстояниях. Это позволяет использовать асимптотически свободные модели для описания лептон-адронных процессов с большой передачей импульса.

Выражение (1.1) для эффективного заряда является на сегодняшний день основой большинства приложений РГ к физике. Вместе с тем, метод РГ представляет собой последовательную схему вычисления поправок к этой формуле. Могут ли высшие поправки в случае нуля заряда как-то исправить ситуацию, а в случае асимптотической свободы — дать дополнительную полезную информацию о высокоэнергетических асимптотиках, улучшить согласие теории с экспериментом? Подробному анализу этих вопросов и посвящен, в значительной степени, наш обзор.

В основе всех квантовополевых приложений РГ лежат ренормгрупповые уравнения. В литературе можно встретить несколько различных способов записи уравнений РГ, что в значительной мере обусловлено многообразием возможных схем ренормировок в КТП. В силу свойства ренорминвариантности квантовополевых моделей все ренормировочные схемы, равно как и различные «версии» уравнений РГ, эквивалентны друг другу и приводят в конце концов к одинаковым результатам. Поэтому в первой части данного обзора (гл. 2—6) представлена наиболее экономная, по нашему мнению, процедура получения основных ренормгрупповых соотношений, позволяющая с единой точки зрения трактовать все ренормировочные схемы и включающая все известные версии РГ как частные случаи. Специальное вниманиеделено при этом сравнению вида уравнений РГ в различных схемах ренормировки. Подробно рассмотрен также переход к пределу ультрафиолетовой асимптотики.

Вторая часть (гл. 7—9) посвящена применению метода РГ в высокоэнергетической области. Она содержит сводку полученных к настоящему времени результатов конкретных расчетов асимптотик ФГ. Приведены все имеющиеся в литературе результаты по однозарядным моделям; из числа многозарядных теорий рассмотрены наиболее характерные и интересные с ренормгрупповой точки зрения. В гл. 9 дан краткий обзор приложений РГ к анализу амплитуд ряда физических процессов при больших импульсах.

Как видно уже из названия нашей статьи, мы не ставили своей целью описать весь круг применений метода РГ в задачах физики частиц. Поэтому многочисленные и весьма интересные примеры использования ренормгруппы, не относящиеся к проблеме высокоэнергетических асимптотик, нами не затронуты.

## 2. РАЗЛИЧНЫЕ ВАРИАНТЫ РЕНОРМИРОВОЧНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

В КТП задание лагранжиана не полностью характеризует количественные свойства соответствующей системы полей. Набор параметров, входящих в лагранжиан (массы исходных полей  $m_i$ , константы связи  $g_k$ ),

оказывается недостаточным для численного описания вероятностей переходов, масс физических частиц и т. п.

Причина такого своеобразного положения кроется в наличии ультрафиолетовых расходимостей (мы не касаемся сейчас более тонких вопросов, связанных со спонтанным нарушением симметрии или вырожденностью вакуума). В процессе их «обработки» и устранения возникают новые параметры, часть которых (такие, как импульсы обрезания) исчезает после снятия вспомогательной регуляризации, а часть (например, точки вычитания) остается и входит в окончательные, свободные от расходимостей, результаты вычислений по теории возмущений (ТВ). Поэтому, задавая лагранжиан той или иной модели КТП, мы, в сущности, фиксируем лишь качественные черты теории (типы частиц, правила отбора, топологию диаграмм, свойства симметрии). Для получения количественных результатов необходимо, дополнительно к лагранжиану, дать рецепт устранения бесконечностей.

Соответствующие правила формулируются неоднозначно<sup>4</sup> и содержат упоминавшиеся выше произвольные параметры  $z_1, \dots, z_N \equiv \{z\}$ , которые, в итоге, войдут в выражения для матричных элементов  $S$ -матрицы

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(\{p\}, \{g\}, \{m\}, \{z\}); \quad (2.1)$$

здесь  $\{p\}$  — совокупность импульсов частиц, участвующих в данном процессе.

Известно, что в ренормируемых теориях (т. е. в тех случаях, когда  $N$  — число произвольных параметров  $z_i$  — конечно), матричные элементы  $\mathcal{M}$  фактически зависят не от  $\{g\}$ ,  $\{m\}$  и  $\{z\}$  по-отдельности, а от некоторых их комбинаций  $\{g_{\text{физ}}(g, m, z)\}$  и  $\{m_{\text{физ}}(g, m, z)\}$

$$\mathcal{M} = \overline{\mathcal{M}}(\{p\}, \{g_{\text{физ}}\}, \{m_{\text{физ}}\}). \quad (2.2)$$

Поэтому произвол в параметрах  $\{z\}$  не оказывается на значениях  $\mathcal{M}$ , так как изменение этих параметров

$$\{z\} \rightarrow \{z'\} \quad (2.3)$$

всегда можно скомпенсировать таким изменением параметров лагранжиана (ренормировкой)

$$\{g\} \rightarrow \{g'\}, \quad \{m\} \rightarrow \{m'\}, \quad (2.4)$$

чтобы в итоге  $\{g_{\text{физ}}\}$  и  $\{m_{\text{физ}}\}$  не менялись. Численные значения «физических» констант  $\{g_{\text{физ}}\}$  и  $\{m_{\text{физ}}\}$  определяются из эксперимента. Знание явного вида функции  $\overline{\mathcal{M}}$  дает теперь однозначный рецепт вычисления матричных элементов в данной (ренормируемой) модели.

Преобразования параметров  $\{z\}$  (2.3) и компенсирующие преобразования зарядов и масс (2.4) образуют группу<sup>1</sup>, которая носит название группы ренормировок или ренормализационной группы (РГ). Основой построения всего аппарата РГ служит отмеченная выше фактическая независимость  $\mathcal{M}$  от  $\{z\}$ .

Как будет показано, инвариантность теории относительно преобразований РГ удается использовать для исследования поведения некоторых квантовополевых величин при однородном масштабном преобразовании всех импульсов. Для этих целей достаточно (и удобно) выделить из всей совокупности параметров  $\{z\}$  (число которых определяется количеством различных полевых структур в исходном лагранжиане) однопараметрическое семейство, конкретизируя тем самым схему ренормировки. Соответствующий параметр размерности массы оставляют в качестве дополнительного (на самом деле фиктивного) аргумента во всех выражениях и называют ренормировочным параметром. Различные схемы ренорми-

ровки, т. е. различные рецепты выделения однопараметрического семейства из  $\{z\}$ , эквивалентны в смысле вычислений физических величин, так как сводятся друг к другу преобразованием (2.3).

Приведем примеры наиболее широко используемых ренормировочных схем.

### а) Схема вычитаний

Весьма распространенной и удобной для практических вычислений матричных элементов и вероятностей является ренормировочная схема, основанная на вычитании расходящихся интегралов. Сначала вводится вспомогательный параметр, регуляризующий (т. е. делающий конечными) интегралы по внутренним импульсам диаграмм Фейнмана. Таким параметром может служить импульс обрезания  $\Lambda$  или масса  $M$  вспомогательного поля Паули — Вилларса (или параметр размерной регуляризации  $\varepsilon$ ; см. ниже). Из регуляризованных интегралов вычитываются их значения (в общем случае — несколько первых членов ряда Тейлора) при некоторых фиксированных импульсах  $p_i = \tilde{p}_i$ . Затем вспомогательную регуляризацию снимают (т. е. переходят к пределу  $\Lambda \rightarrow \infty, M \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$ ). В получившихся конечных выражениях остается зависимость от точек вычитания  $\{\tilde{p}\}$ .

Достоинством этого метода ренормировки является физическая наглядность, поскольку в ряде случаев удается так выбрать импульсы вычитания  $\{\tilde{p}\}$ , чтобы в качестве  $\{g\}$  и  $\{m\}$  можно было использовать известные из опыта значения зарядов и масс. Отметим, что в обычной формулировке РГ на основе схемы вычитаний<sup>4</sup> ренормировка масс вообще не включается в число ренормгрупповых преобразований. Это достигается наложением дополнительных ограничений на процедуру вычитаний и приводит к некоторым упрощениям ренормгрупповых уравнений.

Для того, чтобы иметь возможность работать с одним ренормировочным параметром (точкой вычитания, обозначаемой обычно  $\lambda^2$ ), надо положить  $\tilde{p}_i^2 = p_i \lambda^2$ . Коэффициенты  $\{\rho\}$  фиксированы и характеризуют конкретный выбор ренормировочной процедуры.

### б) Схема размерной ренормировки<sup>7</sup>

В последние годы приобрела большую популярность схема устремления расходимостей, основанная на размерной регуляризации (см. обзор<sup>8</sup>). Эта регуляризация представляет собой переход в формулах интегрирования по виртуальным импульсам от естественной физической размерности  $n = 4$  к  $n = 4 - 2\varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малый параметр, характеризующий отклонение размерности  $n$  от нормальной. При этом все интегралы оказываются (при  $\varepsilon \neq 0$ ) конечными, а расходимости проявляются в виде полюсов по  $\varepsilon$  (типа  $1/\varepsilon$ ,  $1/\varepsilon^2$  и т. д.).

Размерной ренормировкой называется вполне определенный способ вычитаний регуляризованных интегралов, состоящий в том, что вычитываются только полюсы по переменной  $\varepsilon$  (т. е. лишь сингулярные по  $\varepsilon$  члены разложения регуляризованного интеграла в ряд Лорана). Это означает, что контрчлены (если описывать вычитания посредством введения контрчленов в лагранжиан) в схеме размерной ренормировки являются произведениями рядов по обратным степеням  $\varepsilon$  и соответствующих операторов квантованных полей,

$$\left[ \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon^l} a_l(\{g\}, \{m\}) \right] \prod_i \Phi_i(x).$$

Коэффициенты  $a_l$  определяются однозначно, если потребовать, чтобы в выченных выражениях стал возможен предельный переход  $\epsilon \rightarrow 0$ , т. е. снятие регуляризации.

Ренормировочным параметром в данной схеме является параметр размерности массы, обозначаемый  $\mu$ , который обеспечивает безразмерность регуляризованного действия и вводится в лагранжиан в мультиплексивных комбинациях с константами связи типа  $g(\mu^2)^\epsilon$ .

К достоинствам схемы размерной ренормировки следует отнести ее экономность (только один новый параметр), сохранение свойств симметрии, простоту техники вычислений. Кроме того, схема размерной ренормировки принадлежит к разряду «безмассовых» схем, т. е. таких, где контрактены ренормировки волновых функций и безразмерных констант связи не зависят от масс<sup>9</sup>, т. е.  $a_l = a_l(\{g\})$ . Первый пример «безмассовой» ренормировочной схемы был предложен Вайнбергом<sup>10</sup>. В работе<sup>11</sup> показано, что такие ренормировочные схемы могут быть построены на основе любой регуляризации.

### в) Схема обрезания

Эта исторически первая и интуитивно естественная схема ренормировки, основанная на ультрафиолетовом обрезании, имеет две основные версии: «фейнмановское обрезание», при котором модифицируется свободный пропагатор по типу

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \Lambda^2} = \frac{-\Lambda^2}{k^2(k^2 - \Lambda^2)},$$

и обрезание импульсных интегралов по радиальной переменной (после так называемого викновского поворота оси интегрирования, приводящего к евклидовой метрике) на верхнем пределе  $\Lambda$ . Регуляризовав таким образом интегралы, можно, вместо того чтобы исключать параметр обрезания  $\Lambda$  из теории путем вычитаний, придать ему смысл ренормировочного параметра. Для этого следует отбросить в регуляризованных интегралах квадратичные (т. е. пропорциональные  $\Lambda^2$ ) расходимости, а также все слагаемые, содержащие множители вида  $(\Lambda^2)^{-N}$ ,  $N > 0$  (что соответствует переходу к асимптотическим, в смысле  $\Lambda^2 \rightarrow \infty$ , выражениям). Эта процедура приводит к еще одной «безмассовой» схеме ренормировки, которая, несмотря на некоторые свои недостатки, такие как отсутствие калибровочной инвариантности, оказывается полезной в скалярных теориях, так как обеспечивает замечательную простоту расчетов.

В КТП нашли применение и другие ренормировочные схемы (например, так называемая аналитическая ренормировка<sup>12</sup>), однако они нам в дальнейшем не понадобятся и мы их специально рассматривать не будем.

## 3. МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ РЕНОРМИРОВКА ФУНКЦИЙ ГРИНА

Важную роль в формализме КТП играют функции Грина (ФГ) — полные пропагаторы и сильно связные вершинные функции. В дальнейшем мы будем рассматривать лишь «обезразмеренные» ФГ (т. е. скалярные безразмерные множители при независимых лоренцевых и иных структурах, на которые разлагаются исходные функции Грина), обозначая их

$$\Gamma \left( \left\{ -\frac{p^2}{\mu^2} \right\}, \left\{ \frac{m^2}{\mu^2} \right\}, \{g\} \right)$$

(для пропагаторов будем иногда использовать специальное обозначение  $d$ ), где  $\mu^2$  — ренормировочный параметр. Условимся нормировать ФГ

так, чтобы вклад в них от соответствующих борновских диаграмм был равен единице (в нужных нам случаях это всегда можно сделать). Тогда

$$\Gamma \left( \left\{ -\frac{p^2}{\mu^2} \right\}, \left\{ \frac{m^2}{\mu^2} \right\}, \{0\} \right) = 1. \quad (3.1)$$

Здесь необходимо подчеркнуть, что под константами связи  $\{g\}$  мы понимаем либо коэффициенты при произведениях операторов полей в лагранжиане взаимодействия, либо квадраты этих коэффициентов, если именно они являются фактическими параметрами разложения ТВ. Например, в квантовой электродинамике в качестве константы связи  $g$  фигурирует квадрат заряда электрона  $e^2$ .

В ренормируемых теориях размерность констант связи в единицах массы может быть большей либо равной нулю. С точки зрения РГ безразмерные константы резко отличаются от размерных, причем структура ренормировок последних близка к ренормировке масс. В связи с этим мы не выделяем размерные константы связи в особую категорию, а рассматриваем их заодно с массами; все  $\{g\}$  при этом предполагаются безразмерными, что позволяет упростить изложение, практически не снижая его общности.

Преобразование РГ, т. е. замена  $\mu$  на  $\mu'$ , сопровождаемая надлежащим изменением зарядов и масс (2.4), приводит<sup>4</sup> к домножению функции Грина  $\Gamma$  на независящий от импульсов действительный множитель  $Z_\Gamma$

$$\begin{aligned} \Gamma \left( \left\{ \frac{-p^2}{\mu'^2} \right\}, \left\{ \frac{m'^2}{\mu'^2} \right\}, \{g'\} \right) &= Z_\Gamma \left( \frac{\mu'^2}{\mu^2}, \left\{ \frac{m^2}{\mu^2} \right\}, \{g\} \right) \times \\ &\quad \times \Gamma \left( \left\{ \frac{-p^2}{\mu^2} \right\}, \left\{ \frac{m^2}{\mu^2} \right\}, \{g\} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Величины  $\{g'\}$ ,  $\{m'\}$  и  $Z_\Gamma$  определены однозначно, зависят от набора аргументов  $(\mu'^2, \mu^2, \{m^2\}, \{g\})$  и могут быть вычислены по ТВ. Заметим, что в схеме размерной ренормировки (и вообще в «безмассовых» схемах)  $Z_\Gamma$  и  $\{g'\}$  не зависят от масс и выражаются лишь через  $\mu'^2/\mu^2$  и  $\{g\}$ .

Соотношение (3.2), выражающее мультиплекативный характер ренормировки ФГ, лежит в основе построения всего формализма ренормгрупповых уравнений. Обычно для этой цели существенно используются вспомогательные объекты  $\xi_g$ , называемые инвариантными зарядами и определяемые<sup>4</sup> как произведение заряда  $g$  на соответствующую вершинную функцию  $\Gamma_g$  и на квадратный корень из полного пропагатора для каждой внешней линии, входящей в эту вершину,

$$\xi_g = g \Gamma_g \prod_i V \bar{d}_i. \quad (3.3)$$

Можно показать<sup>4</sup>, что эта величина не меняется при преобразованиях РГ,

$$\xi_g \left( \left\{ \frac{-p^2}{\mu'^2} \right\}, \left\{ \frac{m'^2}{\mu'^2} \right\}, \{g'\} \right) = \xi_g \left( \left\{ \frac{-p^2}{\mu^2} \right\}, \left\{ \frac{m^2}{\mu^2} \right\}, \{g\} \right). \quad (3.4)$$

Поэтому ренормгрупповые уравнения для инвариантных зарядов оказываются проще, чем для ФГ; они решаются в первую очередь и используются для дальнейшего анализа модели. Ниже, однако, излагается другой возможный подход к построению ренормгруппового формализма. Функции инвариантных зарядов, как вспомогательных объектов, в этом подходе возьмут на себя другие величины — эффективные заряды и эффективные массы, характеризующие ренормировку зарядов и масс при преобразованиях РГ.

Поскольку в настоящее время в КТП широко применяются сразу несколько схем ренормировки, представляет большой интерес провести

их сравнительный анализ с точки зрения РГ. Для этой цели нам понадобится формула, связывающая ФГ разных схем

$$\Gamma \left( \left\{ \frac{-p^2}{\mu^2} \right\}, \left\{ \frac{m^2}{\mu^2} \right\}, \{g\} \right) = Z \left( \frac{\tilde{\mu}^2}{\mu^2}, \left\{ \frac{m^2}{\mu^2} \right\}, \{g\} \right) \times \\ \times \tilde{\Gamma} \left( \left\{ \frac{-p^2}{\tilde{\mu}^2} \right\}, \left\{ \frac{\tilde{m}^2}{\tilde{\mu}^2} \right\}, \{\tilde{g}\} \right). \quad (3.5)$$

Важно подчеркнуть, что переход от одной схемы к другой, являясь частным случаем общего ренормгруппового преобразования (2.3), (2.4), сопряжен не только в изменении аргументов  $\Phi\Gamma \mu \rightarrow \tilde{\mu}$ ,  $\{g\} \rightarrow \{\tilde{g}\}$ ,  $\{m\} \rightarrow \{\tilde{m}\}$ ,

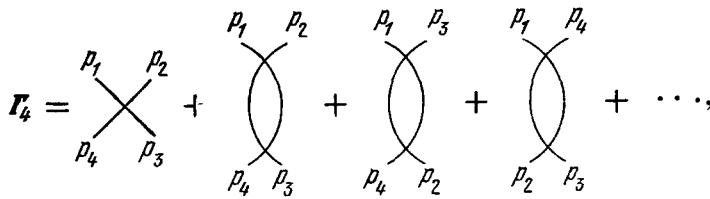


Рис. 1.

но и с вариацией формы самой функции, поскольку  $\tilde{\Gamma}$  и  $\Gamma$  в правой и левой частях (3.5), в отличие от (3.2), являются разными функциями своих аргументов.

Проиллюстрируем ренормировочные свойства ФГ на примере простой модели скалярного поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi - \frac{m^2}{2} \varphi^2 - \frac{16\pi^2}{4!} g \varphi^4. \quad (3.6)$$

Рассмотрим четыреххвостную ФГ  $\Gamma_4$ . Первые два члена ее разложения по  $g$  соответствуют диаграммам рис. 1 и имеют вид

$$\Gamma_4 = 1 + \frac{g}{2} [f(s) + f(t) + f(u)], \quad (3.7)$$

где

$$s = (p_1 + p_2)^2, \quad t = (p_1 + p_3)^2, \quad u = (p_1 + p_4)^2,$$

а функция  $f$  представляется логарифмически расходящимся интегралом

$$f(s) = \frac{i}{\pi^2} \int \frac{d^4 k}{(k^2 - m^2) [(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2]}. \quad (3.8)$$

Проведем вычисление интеграла (3.8), а тем самым и функции  $\Gamma_4$ , в трех различных ренормировочных схемах.

### a) Схема обрезания

Произведя в интеграле (3.8) виковский поворот оси интегрирования и перейдя к евклидовым импульсам,  $k = (k_0, \mathbf{k}) \rightarrow k_e = (\mathbf{k}, ik_0)$  обрежем этот интеграл сверху на некотором  $\Lambda$ ,

$$f^{(\Lambda)}(s) = -\frac{1}{\pi^2} \int_{|k_e| \leq \Lambda} \frac{d^4 k_e}{(k_e^2 + m^2) [(p_1 + p_2 - k_e)^2 + m^2]}$$

и, применяя формулы интегрирования из<sup>13</sup>, получим

$$f^{(\Lambda)}(s) = J \left( \frac{s}{m^2} \right) + \ln \frac{m^2}{\Lambda^2} + 1, \quad (3.9)$$

где функция

$$J(z) = \int_0^1 dx \ln [1 - zx(1-x)]$$

действительна при  $z \leq 4$ . Подстановка (3.9) в (3.7) дает выражение для  $\Gamma_4^{(\Lambda)}$

$$\Gamma_4^{(\Lambda)} = 1 + \frac{g}{2} \left[ J\left(\frac{s}{m^2}\right) + J\left(\frac{u}{m^2}\right) + J\left(\frac{t}{m^2}\right) + 3 \ln \frac{m^2 e}{\Lambda^2} \right] \quad (3.10)$$

( $e$  — основание неперовых логарифмов), причем видно, что изменение ренормировочного параметра  $\Lambda \rightarrow \Lambda'$  эквивалентно в данном порядке по  $g$  домножению  $\Gamma_4^{(\Lambda)}$  на множитель  $Z_4^{(\Lambda)}$

$$\Gamma_4^{(\Lambda')} = Z_4^{(\Lambda)} \Gamma_4^{(\Lambda)}, \quad Z_4^{(\Lambda)} = 1 - \frac{3g}{2} \ln \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2} + O(g^2). \quad (3.11)$$

Что касается ренормировок массы и заряда то, из-за отсутствия поправок первого порядка по  $g$  к пропагатору, масса в этом приближении не ренормируется

$$m' = m + O(g^2), \quad (3.12)$$

а для определения  $g'$  можно воспользоваться свойством инвариантности  $\xi_g$  (3.4), которое в нашем приближении выглядит как

$$g = g' Z_4 + O(g^3), \quad (3.13)$$

откуда

$$g' = g + \frac{3g^2}{2} \ln \frac{\Lambda'^2}{\Lambda^2} + O(g^3). \quad (3.14)$$

### б) Схема вычитаний

В этой схеме регуляризованные любым способом (например, с помощью обрезания) интегралы  $f$  вычитываются в точках  $s = \rho_s \lambda^2$ ,  $t = \rho_t \lambda^2$ ,  $u = \rho_u \lambda^2$

$$f^{(\lambda)}(s) = J\left(\frac{s}{m^2}\right) - J\left(\rho_s \frac{\lambda^2}{m^2}\right).$$

(Выбор точек вычитания ограничен требованием действительности контрчленов  $\rho \lambda^2 \leq 4m^2$ .) Подставляя это выражение в (3.7) получаем

$$\begin{aligned} \Gamma_4^{(\lambda)} = 1 + \frac{g}{2} & \left[ J\left(\frac{s}{m^2}\right) + J\left(\frac{u}{m^2}\right) + J\left(\frac{t}{m^2}\right) - J\left(\rho_s \frac{\lambda^2}{m^2}\right) - \right. \\ & \left. - J\left(\rho_u \frac{\lambda^2}{m^2}\right) - J\left(\rho_t \frac{\lambda^2}{m^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Отсюда находим выражение для ренормировочной константы  $Z_4^{(\lambda)}$ , отвечающей замене  $\lambda \rightarrow \lambda'$ ,

$$Z_4^{(\lambda)} = 1 - \frac{g}{2} \left\{ \left[ J\left(\rho_s \frac{\lambda'^2}{m^2}\right) - J\left(\rho_s \frac{\lambda^2}{m^2}\right) \right] + [t] + [u] \right\}. \quad (3.16)$$

Вид  $g'$  ясен из соотношения (3.13). Характерной для этой схемы является зависимость  $Z_4^{(\lambda)}$  (а, следовательно, и  $g'$ ) от коэффициентов  $\{\rho\}$ , фиксирующих точки вычитания.

### в) Схема размерной ренормировки

Используя для вычисления размерно регуляризованного интеграла

$$f_e^{(\mu)}(s) = \frac{i(\mu^2)^e}{\pi^2} \int \frac{d^{4-2e}k}{(k^2 - m^2) [(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2]}$$

Формулы, приведенные в <sup>14</sup>, получим

$$f_e^{(\mu)}(\varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon} + \ln \frac{m^2}{\mu^2} + J\left(\frac{s}{m^2}\right) + O(\varepsilon).$$

После вычитания сингулярного по  $\varepsilon$  слагаемого  $-1/\varepsilon$  и перехода к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получаем ренормированное выражение для  $f^{(\mu)}$ :

$$f^{(\mu)}(s) = \ln \frac{m^2}{\mu^2} + J\left(\frac{s}{m^2}\right),$$

которое дает

$$\Gamma_4^{(\mu)} = 1 + \frac{g}{2} \left[ J\left(\frac{s}{m^2}\right) + J\left(\frac{u}{m^2}\right) + J\left(\frac{t}{m^2}\right) + 3 \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right]. \quad (3.17)$$

Отсюда, производя в  $f^{(\mu)}$  замену  $\mu \rightarrow \mu'$ , находим

$$Z_4^{(\mu)} = 1 - \frac{3g}{2} \ln \frac{\mu'^2}{\mu^2}, \quad (3.18)$$

$$g' = g + \frac{3g^2}{2} \ln \frac{\mu'^2}{\mu^2}. \quad (3.19)$$

В рассмотренном приближении функции  $\Gamma_4$  во всех трех схемах имеют одинаковую зависимость от импульсов, задаваемую функцией  $J(z)$ , и отличаются друг от друга лишь на аддитивные постоянные. В этом приближении связь  $g$  с физическим значением константы связи  $g_{\text{физ}}$  также имеет простой вид. Так, например, если определить  $g_{\text{физ}}$  как значение  $\xi_g$  отвечающее симметричной точке

$$s = u = t = \frac{4}{3} m^2,$$

т. е. положить по определению

$$g_{\text{физ}} = g^{(i)} \Gamma_4^{(i)} \left( s = u = t = \frac{4}{3} m^2 \right), \quad (3.20)$$

то подставляя в правую часть (3.20) выражения (3.10), (3.15) и (3.17) и разрешая полученные соотношения относительно  $g^{(i)}$  получим

$$\left. \begin{aligned} g^{(\Lambda)} &= g_{\text{физ}} - \frac{3}{2} g_{\text{физ}}^2 \left[ J\left(\frac{4}{3}\right) + \ln \frac{m^2 e}{\Lambda^2} \right], \\ g^{(\lambda)} &= g_{\text{физ}} - \frac{1}{2} g_{\text{физ}}^2 \left[ 3J\left(\frac{4}{3}\right) - J\left(\rho_s \frac{\lambda^2}{m^2}\right) - J\left(\rho_u \frac{\lambda^2}{m^2}\right) - \right. \\ &\quad \left. - J\left(\rho_t \frac{\lambda^2}{m^2}\right) \right], \\ g^{(\mu)} &= g_{\text{физ}} - \frac{3}{2} g_{\text{физ}}^2 \left[ J\left(\frac{4}{3}\right) + \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

В более высоких порядках по  $g$  у ФГ разных схем будет иметь место различие также и в импульсной зависимости. Действительно, в диаграммах, имеющих несколько замкнутых петель и, следовательно, подразумевающих столько же интегрирований по внутренним импульсам, расхождение на константу, возникающее при первом из этих интегрирований, в результате всех последующих неизбежно превратится в расхождение на некоторую функцию от импульсов. При этом, согласно соотношению (3.5), такое несовпадение ФГ разных ренормировочных схем может быть полностью скомпенсировано переопределением зарядов и масс и домножением на общий, не зависящий от импульсов, множитель  $Z$ .

## 4. ЭФФЕКТИВНЫЙ ЗАРЯД И ЭФФЕКТИВНАЯ МАССА

Непосредственным следствием мультиплекативного характера ренормировок ФГ и констант связи являются функциональные уравнения РГ, которые могут быть получены из соотношения (3.2). Эти уравнения в ряде случаев могут быть проанализированы в общем виде, причем их решения записываются также в функциональной форме<sup>4, 15</sup>. Такая запись, однако, эквивалентна решениям дифференциальных уравнений РГ, которые выводятся и анализируются более просто. По этой причине мы не будем рассматривать функциональные уравнения РГ и примем схему изложения, основанную на дифференциальных уравнениях.

Для начала ограничимся случаем модели с одной безразмерной константой связи  $g$  и одной массой  $m$ . Соотношение (3.2) принимает вид

$$\Gamma\left(\left\{\frac{-p^2}{\mu'^2}\right\}, \frac{m'^2}{\mu'^2}, g'\right) = Z_\Gamma\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right) \Gamma\left(\left\{\frac{-p^2}{\mu^2}\right\}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right). \quad (4.1)$$

Дифференцируя (4.1) по  $\mu'^2$  и полагая затем  $\mu' = \mu$ , получаем уравнение для  $\Gamma$ :

$$\left[ \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta\left(\frac{m^2}{\mu^2}, g\right) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_m\left(\frac{m^2}{\mu^2}, g\right) m^2 \frac{\partial}{\partial m^2} - \gamma_\Gamma\left(\frac{m^2}{\mu^2}, g\right) \right] \times \\ \times \Gamma\left(\left\{\frac{-p^2}{\mu^2}\right\}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right) = 0, \quad (4.2)$$

где так называемые ренормгрупповые функции  $\beta$ ,  $\gamma_m$  и  $\gamma_\Gamma$  представляют собой логарифмические производные по  $\mu'^2$ , взятые в точке  $\mu' = \mu$ , от  $g'$ ,  $\ln m'^2$  и  $Z_\Gamma$  соответственно

$$\beta\left(\frac{m^2}{\mu^2}, g\right) = \mu'^2 \frac{\partial}{\partial \mu'^2} g'\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right) \Big|_{\mu'=\mu}, \quad (4.3a)$$

$$\gamma_m\left(\frac{m^2}{\mu^2}, g\right) = \frac{\mu'^2}{m'^2} \frac{\partial}{\partial \mu'^2} m'^2 (\mu'^2, \mu^2, m^2, g) \Big|_{\mu'=\mu}, \quad (4.3b)$$

$$\gamma_\Gamma\left(\frac{m^2}{\mu^2}, g\right) = \mu'^2 \frac{\partial}{\partial \mu'^2} \ln Z_\Gamma\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right) \Big|_{\mu'=\mu}. \quad (4.3c)$$

В схеме вычитаний уравнение (4.2) называется уравнением Овсянникова<sup>15</sup>. В литературе уравнение (4.2) часто называют также уравнением Каллана — Симанчика (по этому поводу см. конец гл. 6).

Функции  $\beta$ ,  $\gamma_m$  и  $\gamma_\Gamma$  играют исключительно важную роль в аппарате РГ. Их явное вычисление представляет собой основную задачу, возникающую в рамках ренормгруппового подхода к исследованию моделей КТП. Эффективные методы нахождения нескольких первых членов ряда ТВ для ренормгрупповых функций описаны в литературе<sup>16–19</sup>.

В рассмотренном выше примере модели  $\varphi^4$  в низшем (однопетлевом) приближении ренормгрупповые функции вычисляются весьма просто. Выполняя согласно (4.3) дифференцирование по штрихованному ренормировочному параметру в явных выражениях для  $Z_4$  и  $g'$ , получаем в схемах обрезания и размерной ренормировки

$$\gamma_\Gamma = -\frac{3}{2} g, \quad \beta = \frac{3}{2} g^2, \quad (4.4)$$

а в схеме вычитаний

$$\gamma_\Gamma = -\frac{g}{2} \left[ 3 - \left( \int_0^1 \frac{dx}{1 - \rho_s(\lambda^2/m^2) x (1-x)} \right) - (t) - (u) \right], \quad \beta = -g \gamma_\Gamma. \quad (4.5)$$

Отметим явную зависимость ренормгрупповых функций этой схемы от коэффициентов  $\{\rho\}$ . В данном приближении  $\gamma_m = 0$  для всех схем, что

является следствием (3.12). В схеме вычитаний  $\gamma_m \equiv 0$  во всех порядках по  $g$ , поскольку ренормировка массы здесь, как уже было сказано, не включается в число преобразований РГ<sup>4</sup>.

Как видно из (4.4), ренормгрупповые функции схем обрезания и размерной ренормировки оказались в данном порядке независящими от массы. Это свойство вытекает из «безмассности» упомянутых схем и может быть доказано для произвольного порядка ТВ<sup>9, 11</sup>.

Теперь, считая ренормгрупповые функции известными (на практике это означает, что они вычислены в каком-то приближении), найдем выражение для  $\Phi_\Gamma$ , удовлетворяющее (4.1), или, что эквивалентно, являющееся решением дифференциального ренормгруппового уравнения (4.2). Для этого сначала получим в явном виде зависимость  $g'$ ,  $m'$  и  $Z_\Gamma$  от  $\mu'$  и остальных аргументов ( $\mu$ ,  $m$  и  $g$ ). Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} \mu'^2/\mu^2 &= t, & m^2/\mu^2 &= y, \\ g' &= \bar{g}(t, y, g), & \frac{m'^2}{\mu'^2} &= \bar{y}(t, y, g). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Функции  $\bar{g}$  и  $\bar{y}$  называются эффективным зарядом и эффективной массой и описывают ренормировку  $g$  и  $m$  при ренормгрупповой замене  $\mu \rightarrow \mu'$ . Из (4.6) следуют соотношения нормировки для  $g$  и  $y$ :

$$\bar{g}(1, y, g) = g, \quad \bar{y}(1, y, g) = y. \quad (4.7)$$

Получим теперь дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет  $\bar{g}(t, y, g)$ . Представим преобразование РГ  $\mu \rightarrow \mu''$  как последовательный переход  $\mu \rightarrow \mu' \rightarrow \mu''$ . При этом  $g \rightarrow g' \rightarrow g'' = \bar{g}(t', y', g')$ , где  $t' = \mu''^2/\mu'^2$ . Следовательно,

$$g'' = \bar{g}(t', \bar{y}(t, y, g), \bar{g}(t, y, g)) = \bar{g}(tt', y, g). \quad (4.8)$$

Перепишем соотношение (4.3а) в обозначениях (4.6):

$$\beta(y, g) = t \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, y, g) \Big|_{t=1}. \quad (4.9)$$

Дифференцирование (4.8) по  $\ln t'$  в точке  $t' = 1$  с учетом (4.9) дает

$$t \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, y, g) = \beta(\bar{y}(t, y, g), \bar{g}(t, y, g)). \quad (4.10)$$

Аналогично выводится уравнение для  $\bar{y}$ ,

$$t \frac{\partial}{\partial t} \ln \bar{y}(t, y, g) = \gamma_m(\bar{y}(t, y, g), \bar{g}(t, y, g)) - 1, \quad (4.11)$$

и для  $Z_\Gamma$ ,

$$t \frac{\partial}{\partial t} \ln Z_\Gamma(t, y, g) = \gamma_\Gamma(\bar{y}(t, y, g), \bar{g}(t, y, g)), \quad (4.12)$$

с нормировочным условием

$$Z_\Gamma(1, y, g) = 1. \quad (4.13)$$

Отсюда находим

$$Z_\Gamma(t, y, g) = \exp \left[ \int_1^t \frac{du}{u} \gamma_\Gamma(\bar{y}(u, y, g), \bar{g}(u, y, g)) \right]. \quad (4.14)$$

Подставляя (4.6) и (4.14) в (4.1) и обозначая  $-p_i^2/\mu'^2$  через  $x_i$ , получаем решение уравнения РГ (4.2) в виде

$$\Gamma(\{xt\}, y, g) =$$

$$= \Gamma(\{x\}, \bar{y}(t, y, g), \bar{g}(t, y, g)) \exp \left[ - \int_1^t \frac{du}{u} \gamma_\Gamma(\bar{y}(u, y, g), \bar{g}(u, y, g)) \right]. \quad (4.15)$$

Это соотношение для ФГ  $\Gamma$ , в котором полностью учтены ее ренормгрупповые свойства, описывает эффект одновременного масштабного преобразования всех импульсных аргументов  $\Gamma$ ,  $\{x\} \rightarrow \{xt\}$ . Явный вид  $\bar{y}$  и  $\bar{g}$  должен быть определен из системы (4.10), (4.11) на основе имеющейся информации о  $\beta$  и  $\gamma_m$ . Некоторые качественные характеристики таких систем исследованы в литературе<sup>20</sup>, однако для точного их решения требуется знание ренормгрупповых функций во всех порядках ТВ. В реальных ситуациях мы знаем лишь несколько первых членов соответствующих разложений. Можно ли (и каким образом) получить на основе этих нескольких членов достоверную информацию о каких-либо свойствах полных ФГ — вот главный вопрос, который будет нас интересовать на всем протяжении данной статьи.

Вернемся теперь к модели  $\phi^4$ . В одноштлевом приближении система уравнений для  $\bar{g}$  и  $\bar{y}$  выглядит так (использовано выражение (4.4) для  $\beta$ )

$$t \frac{\partial}{\partial t} \bar{g} = \frac{3}{2} \bar{g}^2, \quad t \frac{\partial}{\partial t} \ln \bar{y} = -1. \quad (4.16)$$

Решая (4.16) с учетом нормировки (4.7), приходим к

$$\bar{g} = \frac{g}{1 - (3/2)g \ln t}, \quad \bar{y} = \frac{y}{t}. \quad (4.17)$$

Формула (4.17) для  $\bar{g}$  демонстрирует характерную и очень важную черту ренормгруппового подхода — присутствие в получающихся выражениях вкладов всех порядков по константе связи. Это обусловлено тем, что ФГ в любом конечном порядке по  $g$  не обладают должными ренормгрупповыми свойствами (мультиплективностью ренормировки). Поэтому решение уравнений РГ на основе функций  $\beta$ ,  $\gamma_m$  и  $\gamma_\Gamma$ , вычисленных в данном порядке ТВ, эквивалентно суммированию бесконечной последовательности вкладов диаграмм с произвольным числом замкнутых петель. Другими словами, от обычной ТВ по заряду  $g$  мы перешли, перегруппировав и частично просуммировав ее ряды, к новой ТВ по эффективному заряду  $\bar{g}$ .

Проведенный анализ ренормгрупповой структуры ФГ может быть обобщен на случай нескольких зарядов и масс, а также распространен на ситуацию, когда в теории присутствуют калибровочные поля. При этом появляются дополнительные эффективные величины, соответствующие новым константам связи, массам и калибровочным параметрам, а структура основных соотношений (4.10), (4.11) и (4.15) полностью сохраняется. В явном виде соответствующие многозарядные соотношения будут выписаны ниже, в связи с рассмотрением ультрафиолетовых асимптотик ФГ.

Интересно отметить, что в схеме вычитаний эффективный заряд  $\bar{g}(t, y, g)$  при  $t > 0$  совпадает с инвариантным зарядом  $\xi_g$ , определенным формулой (3.3). При  $t \leq 0$  заряд  $\bar{g}$ , в отличие от  $\xi_g$ , как правило, не определен, так как требование эрмитовости контрчленов обуславливает положительность отношения  $\mu'^2/\mu^2 \equiv t$ . В других ренормировочных схемах заряды  $g$  и  $\xi_g$  различаются.

## 5. УЛЬТРАФИОЛЕТОВАЯ АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ ГРИНА

Итоговое соотношение предыдущего параграфа (4.15) удается с успехом использовать для анализа ультрафиолетовых асимптотик ряда моделей КТП. Поскольку соотношение (4.15) описывает эффект однородного преобразования всех импульсных аргументов ФГ (о возможности исследовать методом РГ импульсные зависимости другого сорта, например, асимптотики амплитуд процессов на массовой поверхности, будет сказано в гл. 9), то можно с самого начала считать ФГ функцией одного импульсного аргумента  $p^2$ , а все  $p_i^2$  — ему пропорциональными,  $p_i^2 = \rho_i p^2$ . Коэффициенты  $\{\rho\}$  задают режим асимптотики и входят (неявно) в определение соответствующей ФГ. В частности, в схеме вычитаний ренормгрупповые функции зависят от выбора этих коэффициентов.

Естественно ожидать, что в ультрафиолетовом пределе, т. е. при  $|p^2|/m^2 \rightarrow \infty$ , зависимость ФГ от масс окажется несущественной. Рассмотрим сначала случай, когда ренормировочный параметр велик по сравнению с массой,  $\mu^2 \gg m^2$ . Поскольку в каждом порядке ТВ предельный переход  $m^2 \rightarrow 0$  регулярен<sup>21</sup>, то в области  $|p^2|$ ,  $\mu^2 \gg m^2$  массовые аргументы  $y = m^2/\mu^2$  и  $\bar{y}$  в (4.15) можно считать равными нулю. При этом соотношение (4.15) трансформируется в

$$\Gamma(xt, g) = \Gamma(x, \bar{g}(t, g)) \exp \left[ - \int_1^t \frac{du}{u} \gamma_\Gamma(\bar{g}(u, g)) \right], \quad (5.1)$$

где  $x$  считаем фиксированным,  $t \rightarrow +\infty$ , а двухаргументная функция  $\Gamma(x, g) \equiv \Gamma(x, 0, g)$  есть ФГ безмассовой теории.

В дальнейшем аргумент  $x$  будет, как правило, полагаться равным 1, что соответствует случаю пространственноподобных импульсов. Для исследования асимптотик во времениподобной области надо применять формулу (5.1) с  $x < 0$ .

Возвращаясь к общему случаю асимптотики  $\Gamma(t, y, g)$  при  $t \rightarrow \infty$  и произвольном фиксированном  $y$ , воспользуемся «безмассовой» ренормировочной схемой. Тогда, ввиду независимости ренормгрупповых функций (4.3) от массы, эффективный заряд, определяемый из

$$t \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, g) = \beta(\bar{g}(t, g)), \quad \bar{g}(1, g) = g, \quad (5.2)$$

вообще не содержит аргумента  $y$ , и (4.15) переходит при  $t \rightarrow \infty$  в (5.1), если

$$\bar{y}(t, y, g) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0. \quad (5.3)$$

Соотношение (5.3) выполняется при условии, что правая часть уравнения (4.11) оказывается меньшей нуля при  $t \rightarrow \infty$ , т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma_m(\bar{y}(t, y, g), \bar{g}(t, y, g)) < 1. \quad (5.4)$$

Это заведомо верно в схеме вычитаний, где  $\gamma_m \equiv 0$  и в асимптотически свободных теориях (см. ниже), в которых эффективный заряд  $\bar{g}$ , являющийся параметром разложения в левой части неравенства (5.4), стремится к нулю при больших  $t$ . В других случаях расчетов по ТВ недостаточно для проверки неравенства (5.4). Тем не менее, мы будем предполагать справедливость соотношения (5.3), возможно, ограничивая тем самым область применимости полученных ниже формул.

В других схемах (не «безмассовых») ренормгрупповые функции зависят от  $y$ , в результате чего асимптотика  $\Gamma(t, y, g)$  не совпадает с  $\Gamma(t, 0, g)$ .

Можно, однако, найти в явном виде связь между этими функциями, поскольку, переводя преобразованием РГ  $\mu$  из области  $\mu^2 \sim m^2$  в область  $\mu^2 \gg m^2$ , мы тем самым, ввиду (5.3), устремляем  $u$  к нулю. Подробно эта процедура и ее следствия описаны в гл. 6. В итоге мы приходим к следующему выводу: асимптотические выражения для ФГ идентичны получаемым в безмассовой теории с точностью до поправок  $\sim \bar{y}$  (так называемых массовых поправок). Если неравенство (5.4) выполняется строго, то эти поправки степенным

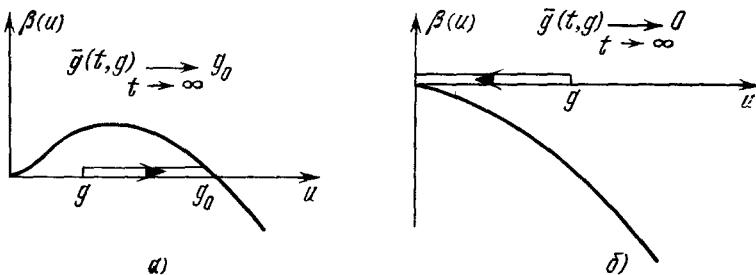


Рис. 2.

образом убывают с ростом  $t$ . Вычисление массовых поправок представляет собой отдельную проблему, которой мы в данном обзоре не касаемся.

Итак, за основу дальнейших рассуждений нам следует взять соотношения (5.1) и (5.2). Входящие в них ренормгрупповые функции  $\beta(g)$  и  $\gamma_g(g)$  часто называют соответственно функцией Гелл-Манна — Лоу и аномальной размерностью. Анализ асимптотики ФГ  $\Gamma(t, g)$  требует, как видно из (5.1), информации о поведении эффективного заряда  $\bar{g}(t, g)$  при  $t \rightarrow \infty$ , которое полностью определяется функцией  $\beta(g)$ .

Рассмотрим некоторые характерные возможности ультрафиолетового поведения  $\bar{g}(t, g)$  и  $\Gamma(t, g)$  (более подробное изложение см. в <sup>4</sup>). Уравнение (5.2) удобно записать в интегральной форме

$$\ln t = \int_g^{\bar{g}(t, g)} \frac{du}{\beta(u)}. \quad (5.5)$$

В ренормируемых теориях разложение  $\beta(u)$  в ряд по  $u$  начинается со второй степени  $u$ . Предположим сначала, что первый коэффициент этого ряда положителен, т. е.

$$\beta(u) = au^2 + O(u^3), \quad a > 0. \quad (5.6)$$

Это значит, что на некотором интервале  $(0, \delta)$  функция  $\beta(u)$  положительна. Пусть  $g$  лежит в этом интервале и пусть интеграл (5.5) расходится на верхнем пределе при  $\bar{g} = g_0 < \infty$ . Для этого функция  $\beta(u)$  должна иметь в точке  $u = g_0$  нуль не ниже первого порядка. Такая ситуация качественно изображена на рис. 2, а. Из уравнения (5.5) можно заключить, что  $\bar{g}(t, g) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} g_0$ . Такое поведение эффективного заряда  $\bar{g}$  соответствует конечной ренормировке заряда, а точка  $g_0$  называется ультрафиолетово-стабильной. Как видно из (5.1), асимптотика ФГ имеет в этом случае степенной вид

$$\Gamma(t, g) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Gamma(1, g_0) t^{-\gamma_g(g_0)}.$$

Если интеграл (5.5) расходится лишь при бесконечном значении верхнего предела, то  $\bar{g}(t, g) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \infty$ , т. е. имеет место бесконечная ренормировка заряда, а в случае сходимости интеграла (5.5) при  $\bar{g} \rightarrow \infty$ ,

$$\int_g^{\infty} \frac{du}{\beta(u)} = \ln t_0 < \infty,$$

у эффективного заряда возникает полюс в точке  $t_0$ ,  $\bar{g}(t_0, g) = \infty$  (ситуация, известная под названием «нуля-заряда», см. <sup>22</sup>), что указывает на внутреннюю несогласованность данной модели.

При вычислении функции  $\beta(u)$  (5.6) по ТВ с учетом нескольких первых членов ряда могут реализоваться две из рассмотренных возможностей: «нуль-заряда» (например, если ограничиться только первым членом, см. соотношение (4.17) для модели  $\Phi^4$ ) и конечная ренормировка, если  $\beta(u)$ , в данном случае полином конечного порядка, имеет нуль при  $u = g_0 \neq 0$ . Однако в любой из этих ситуаций из ТВ нельзя извлечь надежных заключений об асимптотике  $\Gamma(t, g)$ , так как, во-первых, для нахождения величины  $g_0$  необходим учет вкладов всех порядков по константе связи, а во-вторых, сам эффективный заряд  $\bar{g}(t, g)$  в случае (5.6) растет при  $t \rightarrow \infty$  и поэтому не может служить параметром разложения в (5.1). Другими словами, при  $t \rightarrow \infty$  происходит выход из области слабой связи и ТВ по эффективному заряду оказывается неприменимой.

Совсем иная картина имеет место при

$$\beta(u) = -bu^2 + O(u^3), \quad b > 0 \quad (5.7)$$

(рис. 2, б). Всегда найдется такая область значений  $u$  вблизи нуля  $0 < u < \delta$ , для которых в правой части (5.7) доминирует первое слагаемое. Подставляя  $\beta(u) = -bu^2$  в уравнение (5.5), получаем эффективный заряд в виде

$$\bar{g}(t, g) = \frac{g}{1 + bg \ln t},$$

т. е.  $\bar{g}(t, g) \sim 1/(b \ln t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Такой характер ультрафиолетового поведения  $\bar{g}(t, g)$  известен под названием асимптотической свободы (AC) <sup>23</sup>. Как будет показано ниже, AC типична для неабелевых калибровочных теорий.

Анализ отброшенных членов правой части (5.7) показывает, в предположении  $g < \delta$ , что

$$\bar{g}(t, g) = \frac{1}{b \ln t} + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln^2 t}\right). \quad (5.8)$$

В ренормируемых теориях разложение  $\gamma_F(g)$  в ряд по  $g$  имеет вид  $\gamma_F(g) = cg + O(g^2)$ , поэтому из (5.1) следует

$$\Gamma(t, g) = \text{const} \cdot (\ln t)^{-c/b} \left[ 1 + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right) \right]. \quad (5.9)$$

Из (5.8) и (5.9) мы видим, что в моделях с АС (и только в них, т. е. только при отрицательном знаке первого коэффициента разложения  $\beta(g)$  по  $g$ ) в высоконергетическом пределе можно пользоваться ТВ, поскольку эффективный заряд является здесь малым параметром «улучшенной» теории возмущений, а асимптотики ФГ определяются первыми членами ряда ТВ для ренормгрупповых функций  $\beta(g)$  и  $\gamma_F(g)$ .

Как известно, в безмассовой теории ФГ  $\Gamma(t, g)$  разлагается в двойной ряд по  $g$  и  $\ln t$

$$\Gamma(t, g) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n c_{nm} g^n \ln^m t.$$

Можно показать<sup>4</sup>, что разлагая в аналогичный ряд правую часть (5.1) с функциями  $\beta$ ,  $\gamma_\Gamma$  и  $\Gamma(1, g)$ , вычисленными в однопетлевом приближении, мы получим правильные коэффициенты при  $g^n \ln^n t$  для всех  $n$ . Учет двухпетлевых вкладов позволяет восстановить коэффициенты также при  $g^n \ln^{n-1} t$  и т. д. Это означает, что исходя из  $N$ -петлевых выражений для ренормгрупповых функций и для  $\Gamma(1, g)$ , мы имеем возможность суммировать методом РГ все старшие логарифмы ТВ (типа  $g^n \ln^n t$ ) и еще  $N - 1$  более низких степеней логарифмов, вплоть до  $g^n (\ln t)^{n-N+1}$ . Однако лишь в случае АС(5.7) такое суммирование оказывается полезным, поскольку здесь оно приводит к улучшенной ТВ с новым малым параметром — эффективным зарядом  $g$ .

При изучении ультрафиолетовых асимптотик конкретных моделей КТП нам неоднократно придется иметь дело с многозарядными теориями. Поэтому мы приведем ниже основные ренормгрупповые соотношения для этого случая. Все изменения в уравнениях РГ, происходящие при переходе от одного к нескольким зарядам, видны уже на примере двухзарядной модели. Рассмотрением такой теории, с константами связи  $g$  и  $h$ , мы и ограничимся.

В двухзарядном случае уравнение (5.2) заменяется системой уравнений для двух эффективных зарядов  $\bar{g}$  и  $\bar{h}$ :

$$\begin{aligned} t \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, g, h) &= \beta_g(\bar{g}, \bar{h}), & \bar{g}(1, g, h) &= g, \\ t \frac{\partial}{\partial t} \bar{h}(t, g, h) &= \beta_h(\bar{g}, \bar{h}), & \bar{h}(1, g, h) &= h. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Дифференциальное уравнение для ФГ, аналог (4.2), пользуясь безразмерностью  $\Gamma$ , можно записать в виде

$$\left[ x \frac{\partial}{\partial x} - \beta_g(g, h) \frac{\partial}{\partial g} - \beta_h(g, h) \frac{\partial}{\partial h} + \gamma_\Gamma(g, h) \right] \Gamma(x, g, h) = 0$$

(здесь  $x = -p^2/\mu^2$ ), а его решение есть

$$\Gamma(xt, g, h) = \Gamma(x, \bar{g}, \bar{h}) \exp \left[ - \int_1^t \frac{du}{u} \gamma_\Gamma(\bar{g}(u, g, h), \bar{h}(u, g, h)) \right]. \quad (5.11)$$

Исследование асимптотик ФГ требует в первую очередь анализа системы (5.10). Поскольку в правые части уравнений этой системы аргумент  $t$  явно не входит, решения можно изображать на фазовой плоскости эффективных зарядов  $\bar{g}$  и  $\bar{h}$  (для числа зарядов, большего двух — в фазовом пространстве) кривыми, показывающими перемещение точки  $(\bar{g}, \bar{h})$  при изменении  $t$ . В частности, конечной ренормировке здесь соответствует существование на фазовой плоскости ультрафиолетово-стабильной точки  $(g_0, h_0)$ , куда сходятся фазовые кривые,

$$\bar{g}(t, g, h) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} g_0 < \infty, \quad \bar{h}(t, g, h) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} h_0 < \infty. \quad (5.12)$$

В случае АС такой стабильной точкой является начало координат,

$$\bar{g} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0, \quad \bar{h} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

## 6. ФОРМУЛЫ ПЕРЕСЧЕТА

Выясним теперь, насколько существенной является зависимость ультрафиолетовых асимптотик  $\Phi\Gamma$  от используемой ренормировочной схемы. Для этого прежде всего найдем явную связь ренормгрупповых функций разных схем. Изменение  $\Phi\Gamma$  при переходе к другой ренормировочной схеме  $\Gamma \rightarrow \tilde{\Gamma}$ , описывается соотношением (3.5), которое в высоконергетическом пределе однозарядной теории принимает вид

$$\Gamma\left(\frac{-p^2}{\mu^2}, g\right) = Z\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{\mu^2}, g\right) \tilde{\Gamma}\left(\frac{-p^2}{\tilde{\mu}^2}, \tilde{g}\left(\frac{\tilde{\mu}^2}{\mu^2}, g\right)\right). \quad (6.1)$$

Полагая  $\tilde{\mu} = \mu$  и вводя обозначения

$$-\frac{p^2}{\mu^2} = x, \quad \tilde{g}(1, g) = q(g), \quad Z(1, g) = p(g),$$

получим соотношение, связывающее  $\Phi\Gamma$  разных схем:

$$\Gamma(x, g) = p(g) \tilde{\Gamma}(x, q(g)). \quad (6.2)$$

Дифференцируя (6.2) по  $x$  и пользуясь уравнением РГ

$$\left[ x \frac{\partial}{\partial x} - \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_\Gamma(g) \right] \Gamma(x, g) = 0 \quad (6.3)$$

и аналогичным уравнением для  $\tilde{\Gamma}$  (с заменой  $\beta \rightarrow \tilde{\beta}$ ,  $\gamma_\Gamma \rightarrow \tilde{\gamma}_\Gamma$ ), находим искомую связь ренормгрупповых функций <sup>14,24</sup>

$$\tilde{\beta}(q(g)) = \beta(g) \frac{dq(g)}{dg}, \quad (6.4)$$

$$\tilde{\gamma}_\Gamma(q(g)) = \gamma_\Gamma(g) - \beta(g) \frac{d \ln p(g)}{dg}. \quad (6.5)$$

Равенства (6.4) и (6.5) назовем формулами пересчета.

Вследствие того, что в низшем (борновском) приближении ТВ зависимость от схемы ренормировки не проявляется, разложение  $q(g)$  и  $p(g)$  в ряд по  $g$  имеет вид

$$q(g) = g + O(g^2), \quad p(g) = 1 + O(g).$$

Отсюда и из (6.4), (6.5) следует, что переход от  $\beta(g)$  к  $\tilde{\beta}(g)$  и от  $\gamma_\Gamma(g)$  к  $\tilde{\gamma}_\Gamma(g)$  в данном порядке по  $g$  требует знания пересчетных функций  $q(g)$  и  $p(g)$  лишь в более низких порядках. Поэтому в однопетлевом приближении ренормгрупповые функции всех схем одинаковы.

Любопытно, что равенство  $\beta(g) = \tilde{\beta}(g)$  сохраняется (в однозарядной теории) и в двухпетлевом приближении <sup>25</sup>. Действительно, подставляя первые члены рядов

$$q(g) = g + Ag^2 + Bg^3 + \dots,$$

$$\beta(g) = ag^2 + bg^3 + cg^4 + \dots,$$

$$\tilde{\beta}(g) = \tilde{a}g^2 + \tilde{b}g^3 + \tilde{c}g^4 + \dots$$

в (6.4) и приравнивая коэффициенты при  $g^2$ ,  $g^3$  и  $g^4$ , получаем

$$\tilde{a} = a, \quad \tilde{b} = b, \quad \tilde{c} = c - aA^2 + aB - bA. \quad (6.6)$$

Расхождение в функциях  $\beta$  и  $\tilde{\beta}$  началось лишь с трехпетлевого приближения. Здесь находит отражение тот факт, что по данным  $\beta(g)$  и  $\tilde{\beta}(g)$  функция  $q(g)$  определяется с точностью до одного произвольного параметра, поскольку из (6.4) вытекает соотношение

$$\tilde{\psi}(q(g)) = \psi(g) + \text{const}, \quad (6.7)$$

где  $\psi$  и  $\tilde{\psi}$  — неопределенные интегралы вида

$$\psi(g) = \int^g \frac{du}{\beta(u)}, \quad \tilde{\psi}(g) = \int^g \frac{du}{\tilde{\beta}(u)}.$$

Анализ формул пересчета с точки зрения разложений по ТВ, аналогичный проведенному выше для (6.4), показывает, что расхождение ренормгрупповых функций различных схем начинается, вообще говоря, на уровне двух петель. Так обстоит дело для функций  $\beta$  в многозарядных теориях, а для функций  $\gamma g$  — при любом числе констант связи. Многозарядные формулы пересчета в явном виде выписаны в работе <sup>24</sup>.

Обсудим теперь некоторые следствия полученных формул. Как отмечалось ранее, значения наблюдаемых величин (матричных элементов  $S$ -матрицы), вычисленные в рамках КТП, не зависят от использованной ренормировочной схемы. Из (6.2) видно, что то же утверждение справедливо и для ФГ с точностью до общего множителя  $p(g)$ . Действительно, опустив этот фактор, мы получаем, что  $\bar{\Gamma}$  отличается от  $\Gamma$  лишь заменой аргумента  $g$  на  $q(g)$ . Но именно такой ренормировкой константы связи сопровождается переход к другой ренормировочной схеме. С учетом этого переопределения заряда зависимость ФГ от  $x$  (т. е. от импульса) оказывается одной и той же для всех схем.

Для иллюстрации этого общего утверждения рассмотрим детальнее разложения типа (5.9) в асимптотически свободных теориях. Представим соотношение (5.1) в виде

$$\Gamma(xt, g) = \Gamma(x, \bar{g}(t, g)) \exp \left( - \int_g^{\bar{g}(t, g)} \frac{du \gamma_\Gamma(u)}{\beta(u)} \right), \quad (6.8)$$

а равенство (5.5) — в виде  $\ln t = \psi(\bar{g}(t, g)) - \psi(g)$ . Выберем в качестве нового параметра разложения величину  $L \equiv \ln t + \psi(g)$ . В литературе параметр  $L$  часто записывают в форме  $\ln(p^2/\Lambda^2)$ , чтобы подчеркнуть логарифмический характер зависимости  $L$  от импульса. При этом величина  $\Lambda^2(\mu^2, g)$ , вобравшая в себя всю зависимость от  $\mu$  и  $g$ , оказывается единственным параметром теории. Ввиду того, что эффективный заряд  $g$ , согласно (4.8), не меняется при ренормгрупповых преобразованиях  $\mu \rightarrow \mu'$ ,  $g \rightarrow g'(\mu'^2/\mu^2, g)$ , параметр  $L$  также является инвариантом РГ. Разрешая уравнение  $L = \psi(\bar{g})$  относительно  $\bar{g}$ , получаем

$$\bar{g}(L) = \frac{a}{L} + \frac{b \ln L}{L^2} + \frac{d}{L^2} + O\left(\frac{\ln^2 L}{L^3}\right). \quad (6.9)$$

Подставляя (6.9) в (6.8), приходим к

$$\Gamma(t, g) = f(g) L^{-A} \left[ 1 + \frac{B \ln L}{L} + \frac{C}{L} + O\left(\frac{\ln^2 L}{L^2}\right) \right], \quad (6.10)$$

где  $f$  — некоторая функция; числа  $a$  и  $A$  вычисляются по ТВ в однопетлевом приближении,  $b$ ,  $d$ ,  $B$  и  $C$  — в двухпетлевом и т. д.

Изменятся ли коэффициенты разложения (6.10) при переходе к другой ренормировочной схеме? Запишем (6.10) в виде  $\Gamma(t, g) = f(g) \Phi(L)$ . Тогда, согласно (6.2) и (6.7),

$$\Phi(L) = \Phi(\ln t + \psi(g)) = \tilde{\Phi}(\ln t + \tilde{\psi}(q(g))) = \tilde{\Phi}(L + \text{const}).$$

Следовательно, единственным эффектом изменения схемы ренормировки (не считая вариации общего множителя  $f(g)$ ) является сдвиг параметра

разложения  $L$  на константу. (Отметим, что определение  $L$  с самого начала допускало такой произвол, так как  $\psi(g)$  есть неопределенный интеграл.) Численное значение этой константы (обозначим ее  $\Delta$ ) можно найти из сравнения  $C$  и  $\tilde{C}$ :

$$\tilde{C} = C + A\Delta.$$

Для того, чтобы однозначно фиксировать способ определения  $L$  (и, тем самым, все коэффициенты разложения (6.10)), можно, например, потребовать выполнения условия  $C = \tilde{C} = 0$ . Наложив такого рода условие, мы обеспечим независимость всех коэффициентов (6.10) от схемы ренормировки.

Независимым от выбора ренормировочной схемы является и показатель степенной асимптотики  $\psi_\Gamma(g_0)$  в теориях с конечной ренормировкой заряда. Действительно, пусть  $\beta(g_0) = 0$ . Тогда, согласно (6.4), в другой схеме  $\tilde{\beta}(g_0) = 0$ , где  $\tilde{g}_0 = q(g_0)$  (если только величина  $dq(g)/dg|_{g=g_0}$  конечна), и из (6.5) вытекает искомое равенство  $\psi_\Gamma(\tilde{g}_0) = \psi_\Gamma(g_0)$ . Оно справедливо, однако, лишь в полной теории, а в любом конечном порядке ТВ нарушается, поскольку для нахождения величины  $\psi_\Gamma(g_0)$  надо учесть вклады диаграмм всех порядков по  $g$ . Обрывая ряд ТВ, мы получаем лишь некоторую аппроксимацию для  $\psi_\Gamma(g_0)$ , причем в разных схемах ренормировки аппроксимированные выражения для  $\psi_\Gamma(g_0)$  не обязаны совпадать.

В заключение этой главы применим формулы пересчета для исследования ультрафиолетовой асимптотики ФГ  $\Gamma(x, y, g)$  в случае  $y \neq 0$ . Как указывалось в гл. 5, для этого надо перейти от значений ренормировочного параметра  $\mu^2 \sim m^2$  к  $\mu'^2 \gg m^2$ . В силу (3.2)

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y, g) &\equiv \Gamma\left(\frac{-p^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right) = \\ &= Z_\Gamma\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right) \Gamma\left(\frac{-p^2}{\mu'^2}, \frac{m'^2}{\mu'^2}, g'\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right)\right). \end{aligned}$$

Это равенство, будучи верным при любых  $p^2$  и  $\mu'^2$ , справедливо и в асимптотической области  $|p^2|, \mu'^2 \gg m^2$ . Принимая во внимание (5.3), заключаем, что

$$\begin{aligned} \Gamma_{ac}(x, y, g) &\equiv \Gamma_{ac}\left(\frac{-p^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right) = \\ &= Z_{ac}\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right) \Gamma\left(\frac{-p^2}{\mu'^2}, 0, g'_{ac}\left(\frac{\mu'^2}{\mu^2}, \frac{m^2}{\mu^2}, g\right)\right), \quad (6.11) \end{aligned}$$

где отношение  $m^2/\mu^2 \equiv y$  считаем фиксированным, а асимптотические функции  $\Gamma_{ac}$ ,  $Z_{ac}$  и  $g'_{ac}$  получаются из  $\Gamma$ ,  $Z_\Gamma$  и  $g'$  отбрасыванием всех членов, стремящихся к нулю в пределе  $|p^2|/m^2 \rightarrow \infty$  или, соответственно,  $\mu'^2/m^2 \rightarrow \infty$ . При этом в функции  $\Gamma_{ac}(x, y, g)$  остается лишь логарифмическая зависимость от импульса. Сравнивая (6.11) с (6.1), приходим к выводу, что переход от  $\Gamma_{ac}(x, y, g)$ ,  $y = \text{const} \neq 0$ , к  $\Gamma(x, 0, g)$  аналогичен переходу от одной ренормировочной схемы к другой. Следовательно, ультрафиолетовая асимптотика  $\Gamma(x, y, g)$  дается, как и в случае  $\Gamma(x, 0, g)$ , соотношением (5.1), но уже с другими ренормгрупповыми функциями  $\beta(y, g)$  и  $\psi_\Gamma(y, g)$ , которые связаны с  $\beta(g) \equiv \beta(0, g)$  и  $\psi_\Gamma(g) \equiv \psi_\Gamma(0, g)$  формулами пересчета типа (6.4), (6.5).

Записанное в дифференциальном виде, уравнение РГ для  $\Gamma_{ac}$

$$\left[ x \frac{\partial}{\partial x} - \beta(y, g) \frac{\partial}{\partial g} + \gamma_\Gamma(y, g) \right] \Gamma_{ac}(x, y, g) = 0 \quad (6.12)$$

в схеме вычитаний при  $y = 1$  в точности совпадает с асимптотической формой известного уравнения Каллэна — Симанчика<sup>26</sup>. Взаимное соот-

вествие уравнения РГ (4.2) и уравнения Каллана — Симанчика изучалось в работах <sup>27</sup>. Распространение аргументации работ <sup>27</sup> на случай произвольной ренормировочной схемы приводит к выводу, что различие между этими двумя типами ренормгрупповых уравнений целиком обусловлено зависимостью ренормгрупповых функций от масс. В «безмассовых» схемах эти уравнения тождественны. Именно поэтому в «безмассовых» схемах, как было установлено в гл. 5, логарифмические асимптотики  $\Gamma(x, y, g)$  и  $\Gamma(x, 0, g)$  совпадают.

## 7. ОДНОЗАРЯДНЫЕ МОДЕЛИ

В этой главе мы приведем сводку полученных к настоящему времени результатов по ультрафиолетовым асимптотикам однозарядных квантово-полевых моделей, т. е. результатов вычислений соответствующих функций Гелл-Манна — Лоу, и обсудим вытекающие из них следствия.

а) Спиральная электродинамика (обычно именуемая квантовой электродинамикой):

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\hat{\partial}\psi - \frac{1}{4}f_{\mu\nu}f_{\mu\nu} + e\bar{\psi}\hat{A}\psi, \quad \frac{e^2}{4\pi} \equiv \alpha.$$

Вычисления  $\beta(\alpha)$  в схеме вычитаний проведены вплоть до трехпетлевого приближения <sup>28</sup>

$$\beta_{\text{выч}}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{3\pi} + \frac{\alpha^3}{4\pi^2} + \frac{\alpha^4}{8\pi^3} \left( \frac{8}{3} \zeta(3) - \frac{101}{36} \right), \quad (7.1)$$

где  $\zeta$  — дзета-функция Римана. Подставляя выражение (7.1) в (5.5), мы видим, что интеграл в правой части (5.5) сходится при бесконечном значении верхнего предела, т. е. ситуация качественно не изменилась по сравнению с однопетлевым приближением — по-прежнему имеет место «нуль заряда».

Однако надежность этого заключения может быть поставлена под сомнение хотя бы таким простым рассуждением <sup>4</sup>. Исходя из (7.1), разложим функцию  $1/\beta(\alpha)$  в ряд по  $\alpha$  и будем учитывать в этом разложении лишь три первых члена,

$$\frac{1}{\beta(\alpha)} = \frac{3\pi}{\alpha^2} \left[ 1 - \frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{\alpha^2}{\pi^2} \left( \frac{155}{96} - \zeta(3) \right) + \dots \right]. \quad (7.2)$$

Подстановка (7.2) в (5.5) приведет уже не к «нулю заряда», а к бесконечной ренормировке. Эта иллюстрация лишний раз подтверждает недостаточность одной ТВ для анализа высокоЕнергетической картины в моделях КТП, не обладающих свойством асимптотической свободы.

Любопытно сравнить результат (7.1) с выражениями для функции  $\beta(1, \alpha)$  из уравнения Каллана — Симанчика (6.12) и функции  $\beta_{\text{разм}}(\alpha)$ , вычисленной в схеме размерной ренормировки. В первом случае формула пересчета имеет вид <sup>29</sup>

$$\beta(1, \alpha) \frac{d\sigma(\alpha)}{d\alpha} = \beta_{\text{выч}}(q(\alpha)), \quad (7.3)$$

а пересчетная функция  $q(\alpha)$  выражается через полный фотонный пропагатор,

$$q(\alpha) = \alpha d_{ac}(1, 1, \alpha),$$

и в трехпетлевом приближении равна <sup>30</sup>

$$q(\alpha) = \alpha - \frac{5}{9} \frac{\alpha^2}{\pi} + \left[ \zeta(3) + \frac{65}{648} \right] \frac{\alpha^3}{\pi^2},$$

откуда с помощью (7.3) находим  $\beta(1, \alpha)$ :

$$\beta(1, \alpha) = \frac{\alpha^2}{3\pi} + \frac{\alpha^3}{4\pi^2} - \frac{121}{288} \frac{\alpha^4}{\pi^3}. \quad (7.4)$$

Для  $\beta_{\text{разм}}(\alpha)$  получается следующее выражение:

$$\beta_{\text{разм}}(\alpha) = \frac{\alpha^2}{3\pi} + \frac{\alpha^3}{4\pi^2} - \frac{31}{288} \frac{\alpha^4}{\pi^3}. \quad (7.5)$$

Отметим исчезновение  $\zeta(3)$  в (7.4) и (7.5), а также изменение знака коэффициента при  $\alpha^4$  по сравнению с (7.1).

**б) Скалярная модель счетверным взаимодействием**

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial_\mu \Phi - \frac{(4\pi)^2}{4!} g \Phi^4, \quad (7.6)$$

ввиду относительной простоты вычислений исследована наиболее полно. Расчеты по ТВ проведены вплоть до четырехпетлевого приближения<sup>17-19,31</sup>. В схеме вычитаний функция  $\beta(g)$  имеет вид<sup>19</sup>

$$\beta_{\text{выч}}(g) = \frac{3}{2} g^2 - \frac{17}{6} g^3 + 19,3 g^4 - 146 g^5, \quad (7.7a)$$

причем два последних коэффициента вычислены приближенно. В схеме обрезания четырехпетлевые расчеты удается выполнить аналитически<sup>18</sup>,

$$\begin{aligned} \beta_{\text{обр}}(g) &= \frac{3}{2} g^2 - \frac{17}{6} g^3 + \left[ \frac{109}{8} + 6\zeta(3) \right] g^4 - \\ &- \left[ 60\zeta(5) + 18\zeta(4) + \frac{69}{2}\zeta(3) + \frac{1115}{12} \right] g^5 \approx \\ &\approx 1,5g^2 - 2,83g^3 + 20,84g^4 - 216,09g^5. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Взаимное соответствие коэффициентов при  $g^4$  и  $g^5$  в (7.7a) и (7.76) проверено по формуле пересчета (6.4).

Приведем также результат для  $\beta(g)$ , полученный (совместно с Д. И. Казаковым) в схеме размерной ренормировки:

$$\begin{aligned} \beta_{\text{разм}}(g) &= \frac{3}{2} g^2 - \frac{17}{6} g^3 + \left[ \frac{145}{16} + 6\zeta(3) \right] g^4 - \\ &- \left[ 60\zeta(5) - 9\zeta(4) + 39\zeta(3) + \frac{3499}{96} \right] g^5 \approx \\ &\approx 1,5g^2 - 2,83g^3 + 16,27g^4 - 135,80g^5. \end{aligned} \quad (7.7b)$$

В отличие от случая (7.1), ряд ТВ для  $\beta(g)$  в модели  $\Phi^4$  оказывается знакопеременным, причем его коэффициенты быстро растут. (Вследствие этого обрыв ряда для  $\beta(g)$  на разных степенях  $g$  приводит поочередно то к ситуации «нуля-заряда», то к конечной ренормировке.) Здесь находит отражение тот факт, что асимптотика коэффициентов  $\beta_n$  разложения

$$\beta(g) = \sum_{n=2}^{\infty} (-g)^n \beta_n$$

при больших  $n$  содержит факториал. Например, в схеме вычитаний

$$\beta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \tilde{\beta}_n = 1,096 n^{7/2} n! \quad (7.8)$$

Формула (7.8) получена методом перевала для функционального интеграла<sup>32</sup>. Из нее следует, что степенное разложение для  $\beta(g)$  не имеет

области сходимости, представляя собой асимптотический ряд. Частичные суммы этого ряда, подобные (7.7), как показывает детальный анализ<sup>33</sup>, могут служить основой численных оценок функции  $\beta(g)$  в интервале значений  $g \in [0, 0,1]$ , в котором  $\beta(g)$  монотонно растет наподобие квадратной параболы и мало отличается от однопетлевого приближения  $(3/2)g^2$ . В то же время точные коэффициенты  $\beta_n$  ( $n = 2, 3, 4, 5$ ) значительно отличаются от соответствующих асимптотических приближений  $\tilde{\beta}_n$ , вследствие чего синтез данных ТВ с асимптотической информацией (7.8) не является простой задачей. Несмотря на различные попытки такого рода<sup>33,34</sup>, убедительных результатов пока еще нет. Не исключено, что для получения надежных сведений о поведении  $\beta(g)$  в области  $g \geq 1$  окажутся необходимыми методы анализа, не опирающиеся на ТВ, т. е. методы сильной связи.

Модель (7.6) становится асимптотически свободной<sup>35</sup> в результате смены знака константы связи,  $g \rightarrow -g$ ,

$$\mathcal{L}_- = \frac{1}{2} \partial_\mu \Phi \partial_\mu \Phi + \frac{(4\pi)^2}{4!} g \Phi^4, \quad g > 0, \quad (7.9)$$

поскольку при этом

$$\beta_-(g) = -\beta(-g),$$

где функция  $\beta(g)$  определяется формулами (7.7). Таким образом, ряд для  $\beta_-(g)$  оказывается знакостоенным, а сама функция  $\beta_-(g)$  — отрицательной, что как раз и соответствует случаю АС.

Однако классический гамильтониан модели (7.9) не ограничен снизу и возникает сомнение в существовании нижнего состояния в квантовом случае. Анализ, основанный на представлении континуального интеграла и процедуре функционального перевала<sup>36</sup>, показывает, что ФГ модели (7.9) в области  $g > 0$  имеют мнимую часть, пропорциональную  $\exp(-1/g)$ , отвечающую туннельному переходу из состояния вакуума свободного поля, который в присутствии взаимодействия  $g > 0$  перестает быть устойчивым нижним состоянием. Таким образом, модель (7.9) внутренне противоречива.

### в) Модель с кубичной нелинейностью в шестимерном пространстве-времени

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{g}{3!} \Phi_{(6)}^3, \quad (7.10)$$

представляет собой еще одну простую ренормируемую модель с безразмерной константой связи  $g^2$ . Вычисления проведены в двухпетлевом приближении<sup>37,38</sup>,

$$\beta(g^2) = -\frac{3}{4} \frac{g^4}{(4\pi)^3} - \frac{125}{144} \frac{g^6}{(4\pi)^6}. \quad (7.11)$$

Модель (7.10) обладает асимптотической свободой. Однако неясен вопрос о ее непротиворечивости и о существовании в ней вакуумного состояния.

### г) Скалярная модель в трехмерном пространстве-времени

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = -\frac{g}{6!} \Phi_{(3)}^6. \quad (7.12)$$

Вычисления в двухпетлевом приближении<sup>37</sup> приводят к

$$\beta(g) = \frac{10}{3} \frac{g^2}{(8\pi)^2} - 74,4 \frac{g^3}{(8\pi)^4}. \quad (7.13)$$

Смена знака заряда  $g \rightarrow -g$ , как и в модели  $\Phi^4$ , изменит нульзарядную ситуацию на асимптотически свободную, но при этом опять возникнет проблема отсутствия в теории нижнего состояния.

д) Поле Янга — Миллса, взаимодействующее с фермionами. Мы переходим к рассмотрению неабелевых калибровочных теорий<sup>39</sup>. В них, как правило, реализуется режим АС. Именно этим объясняется повсеместный интерес к неабелевым моделям и широко распространенное убеждение в том, что им суждено лечь в основу будущей теории сильных взаимодействий.

Рассмотрим модель неабелева калибровочного поля (поля Янга — Миллса), взаимодействующего с фермionами. (Если калибровочная группа  $G$  отождествляется с «цветовой» группой, а фермionы преобразуются по ее фундаментальному представлению, то такая модель известна под названием квантовой хромодинамики<sup>40</sup> или модели взаимодействия «цветных» кварков и глюонов.) Лагранжиан имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ям}} + i\bar{\psi}_i^A \hat{\mathcal{D}} \psi_i^A, \quad (7.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{ям}} &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_{\mu\nu}^a - \frac{1}{2\alpha} (\partial_\mu B_\mu^a)^2 - \partial_\mu \bar{\eta}^\alpha \partial_\mu \eta^\alpha + g f^{abc} \bar{\eta}^\alpha B_\mu^b \partial_\mu \eta^\alpha, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu B_\nu^a - \partial_\nu B_\mu^a + g f^{abc} B_\mu^b B_\nu^c, \\ \mathcal{D}_\mu \psi_i^A &= \partial_\mu \psi_i^A - ig B_\mu^a (R^a)_{ij} \psi_j^A, \end{aligned}$$

$\eta$  — фиктивные скалярные поля («дúхи» Фаддеева — Попова),  $\alpha$  — параметр калибровки,  $f^{abc}$  — антисимметричные структурные константы калибровочной группы. Индекс  $A = 1, \dots, N_f$  различает сорта фермionов, а индекс  $i$  или  $j$  — «цвет». Калибровочная группа  $G$  характеризуется значением оператора Казимира  $C_2(G)$ ,

$$f^{abc} f^{dbc} = C_2(G) \delta^{ad},$$

а матрицы  $R^a$  фермionного представления  $R$ , удовлетворяющие коммутационным соотношениям  $[R^a, R^b] = if^{abc} R^c$ , — числами  $C(R)$  и  $T(R)$ :

$$R^a R^a = C(R) I, \quad \text{Sp}(R^a R^b) = T(R) \delta^{ab},$$

где  $I$  — единичная матрица. В этих обозначениях функция Гелл-Манна — Лоу модели (7.14) в двухпетлевом приближении имеет вид<sup>41, 42</sup>

$$\begin{aligned} \beta(g^2) &= A \frac{g^4}{(4\pi)^2} + B \frac{g^6}{(4\pi)^4}, \\ A &= -\frac{11}{3} C_2(G) + \frac{4}{3} N_f T(R), \\ B &= -\frac{34}{3} C_2^2(G) + \frac{20}{3} C_2(G) N_f T(R) + 4C(R) N_f T(R). \end{aligned} \quad (7.15)$$

Если фермionы преобразуются по фундаментальному представлению группы  $SU(N_c)$  (квантовая хромодинамика с числом цветов  $N_c$ ), то, поскольку в этом случае

$$C_2(G) = N_c, \quad T(R) = \frac{1}{2}, \quad C(R) = -\frac{N_c^2 - 1}{2N_c},$$

для  $A$  и  $B$  получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{11}{3} N_c + \frac{2}{3} N_f, \\ B &= -\frac{34}{3} N_c^2 + N_f \left( \frac{13}{3} N_c - \frac{1}{N_c} \right). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Из (7.15) и (7.16) видно, что данная модель является асимптотически свободной как в случае чистого янг-миллсовского поля ( $N_f = 0$ ), так и при не слишком большом числе фермионных мультиплетов ( $N_f T(R) < < (11/4) C_2(G)$ ). Этот факт очень важен с точки зрения физики, поскольку

он обеспечивает возможность построения моделей с фермионами, обладающими АС. Отметим также, что коэффициенты  $A$  и  $B$  линейно растут с ростом  $N_f$ , причем  $B$  проходит через нуль и становится положительным раньше, чем  $A$ . Поэтому для любой калибровочной группы существуют такие значения  $N_f$ , для которых  $A$  мало и отрицательно, а  $B$  положительно. В этих условиях график функции  $\beta(g^2)$  имеет вид, изображенный на рис. 3. Как видно из этого рисунка и уравнения (5.5), точка  $g^2 = g^2_0$  является инфракрасно-стабильной, т. е. эффективный заряд  $g^2(t, g^2)$  стремится к  $g^2_0$  при  $t \rightarrow 0$ . При вычислении значений аномальных размерностей  $\gamma_F(g^2_0)$  в этой точке можно в качестве параметра разложения использовать малую величину  $A$ <sup>41</sup>.

Достоинством такого метода является независимость определенных по ТВ коэффициентов при степенях этого параметра от используемой ренормировочной схемы.

е) Суперсимметричные калибровочные модели. Простейшая модель этого класса характеризуется лагранжианом<sup>43</sup>

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ям}} + \frac{i}{2} \bar{\lambda}^\alpha \hat{\mathcal{D}} \lambda^\alpha + \sum_n \left\{ \frac{i}{2} \bar{\psi}_i^n \hat{\mathcal{D}} \psi_i^n + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu A_i^n)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu B_i^n)^2 - ig \bar{\lambda}^\alpha (R^\alpha)_{ij} [A_i^n + \gamma_5 B_i^n] \psi_j^n - \frac{g^2}{2} [(R^\alpha)_{ij} A_i^n B_j^n]^2 \right\}. \quad (7.17)$$

Благодаря высокой степени симметрии (калибровочная + суперсимметрия) в данной модели удалось с помощью одной константы  $g$  связать большое число полей разных типов: поле Янга — Миллса, майорановский (т. е. инвариантный относительно зарядового сопряжения) спинор  $\lambda^\alpha$  и  $N$  мультиплетов (индекс  $n = 1, \dots, N$ ), состоящих из скаляра  $A_i^n$ , псевдоскаляра  $B_i^n$  и майорановского спинора  $\psi_i^n$ . Поля  $\lambda^\alpha$  преобразуются по присоединенному представлению калибровочной группы  $G$ , откуда следует выражение для ковариантной производной

$$\mathcal{D}_\mu \lambda^\alpha = \partial_\mu \lambda^\alpha + g f^{\alpha\beta\gamma} B_\mu^\beta \lambda^\gamma, \quad (7.18)$$

а поля  $A_i^n$ ,  $B_i^n$  и  $\psi_i^n$  — по некоторому представлению  $R$

$$\mathcal{D}_\mu A_i^n = \partial_\mu A_i^n - ig (R^\alpha)_{ij} B_\mu^\alpha A_j^n,$$

и аналогично для  $B_i^n$  и  $\psi_i^n$ .

Вычисление  $\beta(g^2)$  для модели (7.17), выполненное в двухпетлевом приближении<sup>44</sup>, привело к следующему результату:

$$\begin{aligned} \beta(g^2) &= A \frac{g^4}{(4\pi)^2} + B \frac{g^6}{(4\pi)^4}, \\ A &= NT(R) - 3C_2(G), \\ B &= 4NT(R)C(R) + 2NT(R)C_2(G) - 6C_2^2(G). \end{aligned} \quad (7.19)$$

Выражение (7.19) отличается от случая предыдущей модели (7.15) одной интересной особенностью. А именно, нетрудно отыскать такие представления  $R$ , для которых коэффициент  $A$  обращается в нуль. Пусть, например,  $R$  — присоединенное представление группы  $SU(N_c)$ . При этом  $C_2(G) = C(R) = T(R) = N_c$  и  $A = N_c(N-3)$ ,  $B = 6N_c^2(N-1)$ .

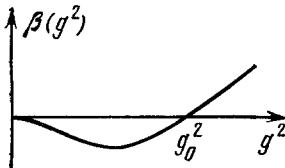


Рис. 3.

Полагая  $N = 3$ , получим  $A = 0$ ,  $B = 12N_c^2$ , т. е. ренормировки заряда в низшем приближении нет.

Анализ двухпетлевых диаграмм модели (7.17) показывает<sup>44</sup>, что для обращения в нуль одновременно с  $A$  и коэффициента  $B$ , в выражении (7.19) необходимо удвоить вклад юкавского взаимодействия. Именно это, как оказалось<sup>45</sup>, имеет место в другой суперсимметричной калибровочной модели, предложенной в работе<sup>46</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{ям}} + \frac{i}{2} \bar{\lambda}_k^a \hat{\mathcal{D}} \lambda_k^a + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu A_i^a)^2 + \frac{1}{2} (\mathcal{D}_\mu B_i^a)^2 - \\ & - \frac{g}{2} f^{abc} \bar{\lambda}_k^a [(\alpha^i)_{kl} A_i^b + (\beta^i)_{kl} \gamma_5 B_i^b] \lambda_l^c + \frac{g^2}{4} [(f^{abc} A_i^b A_j^c)^2 + \\ & + (f^{abc} B_i^b B_j^c)^2 + (f^{abc} A_i^b B_j^c)^2]. \end{aligned} \quad (7.20)$$

Калибровочной группой этой модели является группа  $SU(N_c)$ , причем все поля ( $\lambda$ ,  $A$  и  $B$ ) преобразуются по ее присоединенному представлению, поэтому ковариантные производные этих полей образуются согласно (7.18). Кроме того, модель (7.20) является  $SU(4)$ -суперсимметричной и содержит 3 мультиплета полей  $A$  и  $B$  (поля  $\psi$  и  $\lambda$  из (7.17) объединены в  $\lambda_k^a$ ). Индексы пробегают следующие значения:

$$a, b, c = 1, \dots, N_c^2 - 1, \quad k, l = 1, \dots, 4, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Шесть четырехрядных квадратных матриц  $\alpha^i$ ,  $\beta^i$  удовлетворяют соотношениям

$$[\alpha^i, \alpha^j]_+ = [\beta^i, \beta^j]_+ = -2\delta^{ij}, \quad [\alpha^i, \beta^j]_- = 0.$$

Расчеты показали<sup>45</sup>, что в этой модели двухпетлевой вклад юкавского взаимодействия в функцию  $\beta(g^2)$  вдвое больше, чем в случае (7.17), что приводит к обращению в нуль первых двух ее коэффициентов,  $A = B = 0$ . Поскольку при двухпетлевых вычислениях уже проявили себя практически все особенности модели (7.20) (четырехскалярное взаимодействие не дает в этом приближении непосредственного вклада в  $\beta(g^2)$ , однако его учет необходим для восстановления ренормгрупповой структуры  $\Phi\Gamma$ ), то равенство нулю коэффициентов  $A$  и  $B$  означает, весьма вероятно, не просто игру чисел, а отсутствие в этой теории ренормировки заряда. Однако никаких дополнительных аргументов в пользу этой возможности до настоящего времени не предложено.

## 8. МНОГОЗАРЯДНЫЕ МОДЕЛИ

Рассмотрение многозарядного случая мы начнем с двух моделей, для которых функции Гелл-Манна — Лоу вычислены в двухпетлевом приближении. Первая из них — скалярная электродинамика, т. е. теория взаимодействия электромагнитного ( $A_\mu$ ) и заряженного скалярного поля,

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu + ieA_\mu) \varphi^* (\partial_\mu - ieA_\mu) \varphi - \frac{h}{3!} (\varphi^* \varphi)^2. \quad (8.1)$$

Эта модель изучалась в работе<sup>47</sup> (в однопетлевом приближении); двухпетлевые расчеты выполнены в<sup>48</sup>. Приведем их результаты (использована схема размерной ренормировки)

$$\begin{aligned} \beta_e(e^2, h) = & \frac{1}{3} \frac{e^4}{(4\pi)^2} + 4 \frac{e^6}{(4\pi)^4}, \\ \beta_h(e^2, h) = & \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{5}{3} h^2 - 6he^2 + 18e^4 \right) + \\ & + \frac{1}{(4\pi)^4} \left( -\frac{10}{3} h^3 + \frac{28}{3} h^2 e^2 + \frac{158}{3} he^4 - 208e^6 \right). \end{aligned} \quad (8.2)$$

Поскольку зависимость  $\beta_e$  от  $h$  в данном порядке еще не проявляется, то и в уравнение для эффективного заряда  $\bar{e}^2$  второй заряд  $\bar{h}$  не входит. Следовательно, эффективная электромагнитная константа связи в скалярной электродинамике как в одно-, так и в двухпетлевом приближении, демонстрирует нульзарядное поведение при больших импульсах. Происходящий

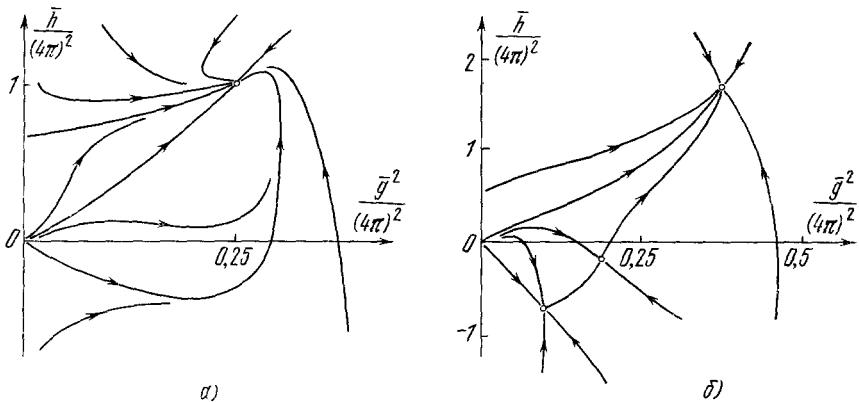


Рис. 4.

при этом выход из области слабой связи делает невозможным получение достоверной информации об асимптотиках модели (8.1) на основе аппроксимации (8.2).

Двухпетлевые вычисления проделаны также для нескольких моделей юкавского типа, т. е. для трилинейного взаимодействия фермионов с (псевдо) скалярами (однопетлевое приближение для модели Юкавы исследовалось в работе <sup>49</sup>). Рассмотрим простейший вариант такой теории

$$\mathcal{L}_{\text{Int}} = \bar{g}\bar{\Psi}\gamma_5\Psi - \frac{h}{4!}\varphi^4. \quad (8.3)$$

В схеме размерной ренормировки результат вычисления  $\beta_g$  и  $\beta_h$  имеет вид <sup>24</sup>

$$\begin{aligned} \beta_g(g^2, h) &= 5 \frac{g^4}{(4\pi)^2} + \frac{1}{(4\pi)^4} \left( \frac{h^2 g^2}{12} - 2g^4 h - \frac{57}{4} g^6 \right), \\ \beta_h(g^2, h) &= \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{3}{2} h^2 + 4g^2 h - 24g^4 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{(4\pi)^4} \left( -\frac{17}{6} h^3 - 6g^2 h^2 + 14g^4 h + 192g^6 \right). \end{aligned} \quad (8.4)$$

Подстановка (8.4) в систему уравнений (5.10) приводит к картине фазовой плоскости эффективных зарядов  $\bar{g}^2$  и  $\bar{h}$ , представленной на рис. 4, *a* (стрелки показывают направление возрастания импульсного аргумента  $t$ ).

Оказалось, что в данной модели существует (в приближении двух петель) ультрафиолетово-стабильная точка  $(g_0^2, h_0)$ , в которой обращаются в нуль функции  $\beta_g$  и  $\beta_h$

$$\begin{aligned} \beta_g(g_0^2, h_0) &= \beta_h(g_0^2, h_0) = 0, \\ \frac{g_0^2}{(4\pi)^2} &\approx \frac{1}{4}, \quad \frac{h_0}{(4\pi)^2} \approx 1. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Согласно (5.12), значения  $g_0^2$  и  $h_0$  являются высокоэнергетическими пределами эффективных зарядов  $\bar{g}^2$  и  $\bar{h}$ . Используя найденные в <sup>24</sup> двухпетлевые выражения для аномальных размерностей фермионного и бозонного

пропагаторов

$$\begin{aligned}\gamma_\psi(g^2, h) &= -\frac{1}{2} \frac{g^2}{(4\pi)^2} + \frac{13}{8} \frac{g^4}{(4\pi)^4}, \\ \gamma_\varphi(g^2, h) &= -2 \frac{g^2}{(4\pi)^2} + \frac{1}{(4\pi)^4} \left( 5g^4 - \frac{h^2}{12} \right),\end{aligned}\quad (8.6)$$

с помощью (5.11) и (8.5) получаем степенные асимптотики этих пропагаторов в виде

$$d_\psi(t, g^2, h) \sim_{t \rightarrow \infty} t^{0,02}, \quad d_\varphi(t, g^2, h) \sim_{t \rightarrow \infty} t^{0,27}. \quad (8.7)$$

Однако, как показывает рассмотренный выше пример модели  $\Phi^4$ , учет следующих поправок может резко изменить всю картину. Поэтому ни численные значения показателей степени в (8.7), ни сам факт существования в данной теории ультрафиолетово-стабильной точки, нельзя считать надежно установленными.

Модель (8.3) в двухпетлевом приближении изучалась также в работе<sup>25</sup>, где был использован формализм инвариантных зарядов или, что то же самое, эффективных зарядов схемы вычитаний. Присущая этой схеме зависимость ренормгрупповых функций от отношений внешних импульсов выражалась не только в изменении численных значений показателей степенных асимптотик ФГ, но и в изменении количества ультрафиолетово-стабильных точек на фазовой плоскости при переходе от одного набора фиксированных отношений импульсов  $\{\rho\}$  к другому. (Сравни, например, рис. 4, а с рис. 4, б, взятым из работы<sup>25</sup>.)

В работах<sup>50,51</sup> модель (8.3) обобщена на случай SU(2)- и SU(3)-симметрии юкавского взаимодействия, учтена также возможность одновременного присутствия в теории как скалярных, так и псевдоскалярных полей, и кроме того, майорановских спиноров. Результаты расчетов в двухпетлевом приближении не приводят к существенным отличиям от (8.4) и качественный вид фазовой плоскости (см. рис. 4) в основном сохраняется.

Проведенный выше анализ большого числа моделей подтвердил сделанный ранее общий вывод о недостаточности ТВ (даже в случае сравнительно малых численных значений аномальных размерностей, как в (8.7), а тем более в случае «нуля заряда») для определения ультрафиолетовых свойств теории, не обладающих АС. Переходя к рассмотрению многозарядных асимптотически свободных моделей, отметим, что построение модели, в которой все эффективные заряды стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$  и существует нижнее энергетическое состояние, невозможно в четырехмерном пространстве-времени без введения неабелевых калибровочных полей<sup>52</sup>. Кроме того, как нетрудно установить из анализа однопетлевых поправок к фотонному пропагатору, любая модель, включающая абелево калибровочное поле (фотон), не может быть асимптотически свободной.

Исходя из этих соображений, а также из потребности построения реалистических по набору полей и их свойствам моделей (например, для того, чтобы сделать неабелевы векторные поля массивными посредством механизма Хиггса, необходимо введение в теорию скалярных частиц), естественно подвергнуть исследованию достаточно общий лагранжиан, включающий наряду с неабелевыми калибровочными полями еще спинорные и скалярные поля, преобразующиеся по произвольным представлениям. Этот лагранжиан должен иметь несколько констант связи (калибровочную и вообще говоря, несколько независимых констант юкавского и четырехскалярного взаимодействий), и основной вопрос состоит в том, можно ли обеспечить одновременное стремление к нулю всех эффективных зарядов, т. е. можно ли найти асимптотически свободную модель такого типа. Эта

проблема исследовалась в ряде работ<sup>17,53</sup>, где был рассмотрен широкий класс калибровочных групп и различные их представления. Соответствующий анализ многозарядных уравнений РГ практически неизвестен, так как для разных групп и представлений существует разное количество независимых типов самодействия скалярных полей. Для иллюстрации основных закономерностей (они оказываются присущими большинству моделей) рассмотрим простейший случай теории, включающей неабелевы калибровочные, спинорные и псевдоскалярные поля и изученной в<sup>17</sup>. Формулы работы<sup>17</sup> применимы в тех случаях, когда существует только один тип четырехскалярного взаимодействия, т. е., в частности, для группы SU(2). Поэтому ниже мы рассмотрим случай, когда калибровочной группой является группа SU(2), скалярные поля преобразуются по ее присоединенному представлению, а спиноры — по некоторому представлению  $R$ ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ям}} + \bar{\psi}_i (i\partial + g\hat{B}^a (R^a)_{ij}) \psi_j + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^a + gf^{abc} B_\mu^b \varphi^c)^2 + \\ + \kappa \bar{\psi}_i \gamma_5 (R^a)_{ij} \psi_j \varphi^a - \frac{h}{8} (\varphi^\tau \varphi^a)^2. \quad (8.8)$$

В однопетлевом приближении система уравнений для эффективных зарядов  $\bar{g}^2$ ,  $\bar{\kappa}^2$  и  $\bar{h}$  имеет вид

$$t \frac{\partial \bar{g}^2}{\partial t} = -\frac{C}{(4\pi)^2} \bar{g}^4, \quad (8.9a)$$

$$t \frac{\partial \bar{\kappa}^2}{\partial t} = \frac{1}{(4\pi)^2} (A\bar{\kappa}^4 - B\bar{g}^2\bar{\kappa}^2), \quad (8.9b)$$

$$t \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \frac{1}{(4\pi)^2} (\alpha\bar{h}^2 - \gamma\bar{h}\bar{g}^2 + \sigma\bar{h}\bar{\kappa}^2 + \delta\bar{g}^4 - \rho\bar{\kappa}^4), \quad (8.9b)$$

также

$$C = 7 - \frac{4}{3} T(R), \quad A = 3C(R) + 2T(R) - 2,$$

$$B = 6C(R), \quad \alpha = \frac{11}{2}, \quad \gamma = 12, \quad \sigma = 4T(R),$$

$$\delta = 12, \quad \rho = \frac{8}{5} T(R) [3C(R) - 1].$$

Константы  $T(R)$  и  $C(R)$  могут быть выражены через изоспин  $j$ , характеризующий представление  $R$  группы SU(2):

$$T(R) = \frac{1}{3} j(j+1)(2j+1), \quad C(R) = j(j+1).$$

Рассмотрим сначала первые два уравнения системы (8.9), поскольку они независимы от третьего. Поведение  $\bar{g}^2$  и  $\bar{\kappa}^2$  как функций  $t$  видно из графика фазовой плоскости (рис. 5). Область стремления эффективных зарядов к нулю (т. е. область под сепаратрисой  $\bar{\kappa}^2 = kg^2$ ) существует в первом квадранте лишь при  $k = (B - C)/A > 0$ . Это условие выполнено для изоспина  $j \geq 1$ . Отметим две особенности фазовой плоскости рис. 5.

а) Особое решение  $\bar{\kappa}^2 = kg^2$  является асимптотически свободным, но неустойчивым, так как чтобы на нем «удержаться», надо зафиксировать строгую пропорциональность констант,  $\bar{\kappa}^2 = kg^2$ .

б) В области АС юкавская эффективная константа  $\bar{\kappa}^2$  стремится к нулю быстрее, чем  $\bar{g}^2$  и при  $t \rightarrow \infty$  становится пренебрежимо малой по сравнению с  $\bar{g}^2$ .

Поэтому дальнейший анализ существования асимптотически свободных решений системы (8.9), с учетом третьего уравнения, имеет смысл провести для двух случаев: 1) когда  $\bar{\chi}^2 \ll \bar{g}^2$  и 2) когда  $\bar{\chi}^2 = k\bar{g}^2$ . Рассмотрим первый случай.

Уравнение (8.9в) принимает вид

$$t \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} = \frac{1}{(4\pi)^2} (\alpha \bar{h}^2 - \gamma \bar{h} \bar{g}^2 + \delta \bar{g}^4) = \frac{1}{(4\pi)^2} \left( \frac{11}{2} \bar{h}^2 - 12 \bar{h} \bar{g}^2 + 12 \bar{g}^4 \right). \quad (8.10)$$

Правая часть (8.10) всегда больше нуля, заряд  $\bar{h}$  возрастает и режим АС невозможен.

Невозможен он и в случае изменения знака константы четвертого взаимодействия на обратный,  $h \rightarrow -h$ . Для чисто скалярной теории здесь,

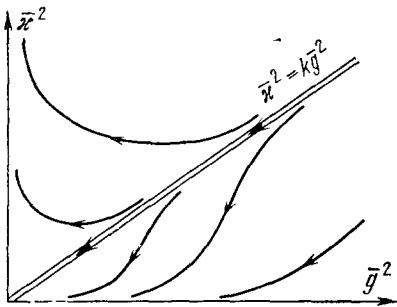


Рис. 5.

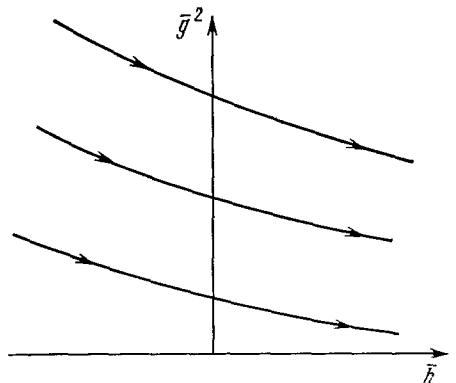


Рис. 6.

как отмечалось выше, была бы АС, а в нашем случае отрицательный понапачалу заряд  $\bar{h}$  возрастает с ростом  $t$ , проходит через нуль и уходит на бесконечность. Общая картина фазовой плоскости  $(\bar{g}^2, \bar{h})$  изображена на рис. 6.

Анализ большого числа групп и представлений<sup>53</sup> показал, что наблюденные выше свойства («вымирание» юкавской эффективной константы по сравнению с калибровочной и отсутствие устойчивых асимптотически свободных решений) характерны для большинства моделей, кроме некоторых, основанных на представлениях достаточно высоких размерностей, где возможен режим АС. В частности, придать, пользуясь эффектом Хиггса, массу всем векторным мезонам и одновременно сохранить АС не удается, если только мы не остаемся точно на сепаратрисе  $\bar{\chi}^2 = k\bar{g}^2$  фазовой плоскости уравнений (8.9а), (8.9б).

Обратимся теперь к рассмотрению этого особого решения,

$$\bar{\chi}^2 = k\bar{g}^2, \quad k = \frac{B-C}{A} = \frac{6C(R) + (4/3)T(R) - 7}{3C(R) + 2T(R) - 2}. \quad (8.11)$$

Неустойчивость решения (8.11) не будет помехой, если предположить, что требуемая связь между константами,  $\bar{\chi}^2 = k\bar{g}^2$ , выполняется точно. Тогда для эффективных зарядов  $\bar{\chi}^2$  и  $\bar{g}^2$  соотношение (8.11) имеет место при всех  $t$ , и на этом особом решении осуществляется режим АС. Однако необходимо еще обеспечить стремление к нулю заряда  $\bar{h}$ . Для этого примем, что  $\bar{h} = mg^2$ , т. е. мы ищем асимптотически свободное особое решение системы (8.9), на котором все три заряда пропорциональны друг другу. Коэффициент  $m$  определяется из квадратного уравнения, возникающего при подстановке

условия  $\bar{h} = mg^2$  в (8.9в) с учетом (8.9а) и (8.11). Требование положительности  $m$  не накладывает новых ограничений на выбор представления  $R$  по сравнению с условием  $k > 0$ , поскольку при любых значениях изоспина  $j \geq 1$  решение с  $m > 0$  существует (и является, как и решение (8.11), неустойчивым<sup>11</sup>).

Итак, режим АС может быть достигнут на неустойчивых особых решениях многозарядных уравнений РГ<sup>54</sup>. Учет высших поправок должен, вообще говоря, искривить прямолинейные особые решения<sup>11</sup>. При этом связь констант  $g^2$ ,  $\kappa^2$  и  $h$  будет задаваться некоторой функцией, разложимой в ряд ТВ, т. е. условия  $\kappa^2 = kg^2$ ,  $h = mg^2$  заменятся на  $\kappa^2 = f_1(g^2)$ ,  $h = f_2(g^2)$ , где

$$f_1(g^2) = kg^2 + O(g^4), \quad f_2(g^2) = mg^2 + O(g^4).$$

В такой асимптотически свободной модели коэффициентами при полевых структурах в лагранжиане являются достаточно сложные (и известные лишь в виде разложений по ТВ) функции одной константы  $g^2$ , т. е. мы здесь фактически имеем дело с однозарядной теорией.

Соотношения между константами связи типа (8.11) могут возникать естественным образом как следствие какой-либо симметрии лагранжиана<sup>55</sup>. Действительно, если симметрийные соображения связывают определенным образом коэффициенты при различных структурах в лагранжиане, то эти коэффициенты и ренормируются согласованным образом, что приводит к аналогичной связи между соответствующими эффективными зарядами, т. е. к особым решениям ренормгрупповых уравнений. Как правило, связи, налагаемые симметрией, оказываются очень простыми, типа  $\kappa = g$ ,  $h = g^2$ . Такая связь констант реализуется, например, в суперсимметричной модели (7.17). При учете высших порядков ТВ эти обусловленные симметрией соотношения, естественно, не меняются. Поэтому одним из способов отыскания новых симметрий в квантовополевых теориях может служить поиск особых решений уравнений РГ, не меняющихся при учете двухпетлевых поправок<sup>51</sup>.

Вопрос о существовании особых решений был исследован для широкого класса калибровочных моделей как с целью построения асимптотически свободных моделей, способных претендовать на описание взаимодействий адронов<sup>11, 56</sup>, так и с целью поиска новых симметрий<sup>51</sup>. В этой связи интересной представляется модель, основанная на группе SU(2), которая рассмотрена в работе<sup>11</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{ям}} + i \sum_{k=1}^{10} \bar{\Psi}_k \left( \hat{\partial} - ig \frac{\tau^a}{2} \hat{B}^a \right) \Psi_k + i\bar{\xi} \hat{\partial} \xi + \\ + \left| \left( \partial_\mu - ig \frac{\tau^a}{2} B_\mu^a \right) \varphi \right|^2 - \kappa (\bar{\Psi}_1 \xi \varphi + \varphi^+ \bar{\xi} \Psi_1) - \frac{h}{8} (\varphi^+ \varphi)^2, \end{aligned} \quad (8.12)$$

где  $\tau^a$  — изотопические матрицы Паули,  $\psi$  и  $\varphi$  — изодублеты, а  $\xi$  — изосинглет. Границей области АС в этой модели является особое решение  $h = g^2 = 2\kappa^2$ . Такая простая связь между константами наводит на мысль о наличии скрытой симметрии в лагранжиане (8.12). Двухпетлевые расчеты, которые в рамках данной модели до сих пор не предпринимались, могли бы в значительной мере способствовать разрешению этого вопроса.

## 9. ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСИМПТОТИКИ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Метод РГ, помимо рассмотренных выше применений к исследованию ультрафиолетовых свойств ФГ квантованных полей, имеет многочисленные приложения и к анализу высокоэнергетических асимптотик физических

процессов. Однако непосредственное использование формулы (4.15) здесь затруднено, так как у амплитуд реальных процессов, в отличие от ФГ, все их квадратичные импульсные аргументы,  $p_i^2$  и  $p_i p_j$ , не могут одновременно стремиться к бесконечности, поскольку часть из них остается на массовой поверхности. При этом некоторые из отношений типа  $p_i p_j / p_i^2$ , считавшиеся в (4.15) фиксированными, становятся теперь большими и дают вклад в логарифмическую асимптотику. А для суммирования таких вкладов одних ренормгрупповых методов недостаточно, ибо отношения  $p_i p_j / p_i^2$  масштабными преобразованиями РГ не затрагиваются.

Соотношение (4.15) модифицируется в рассматриваемом случае так:

$$F(\{xt\}, \{z\}, y, g) = t^{D/2} F\left(\{x\}, \left\{\frac{z}{t}\right\}, \bar{y}, \bar{g}\right) \exp\left[-\int_1^t \frac{du}{u} \gamma_F(\bar{y}, \bar{g})\right], \quad (9.1)$$

где  $D$  — размерность амплитуды  $F$  в единицах массы, а через  $\{z\}$  обозначены те аргументы  $F$ , которые лежат на массовой поверхности. Существенное отличие (9.1) от (4.15) состоит в том, что в правой части (9.1) импульсные аргументы  $\{z/t\}$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . Это может привести к появлению у функции  $F(\{x\}, \{z/t\}, \bar{y}, \bar{g})$  новых особенностей по переменной  $t$ , проявляющихся в разложении по ТВ в виде логарифмов. Эти «низкоэнергетические» логарифмы, в отличие от «ультрафиолетовых», входящих в  $F$  через эффективный заряд  $\bar{g}$ , оказываются, таким образом, непросуммироваными методом РГ, что означает неприменимость данного метода для изучения асимптотического поведения соответствующих амплитуд. Если же «низкоэнергетические» логарифмы подавлены и переход к пределу  $z/t \rightarrow 0$  в функции  $F(\{x\}, \{z/t\}, \bar{y}, \bar{g})$  является гладким, то к исследованию ультрафиолетовых асимптотик таких процессов весь развитый выше ренормгрупповой аппарат применим в полной мере.

Анализ диаграмм Фейнмана произвольного порядка ТВ показал, что подавление «низкоэнергетических» логарифмов в некоторых процессах действительно имеет место для ряда моделей КТП. А именно, была показана применимость РГ для нахождения асимптотик формфакторов<sup>57</sup> и амплитуд упругого рассеяния на фиксированный угол<sup>58</sup> в ренормируемых теориях без векторных полей. В векторных теориях, в частности, в квантовой хромодинамике, вклад «низкоэнергетических» логарифмов для большинства процессов не подавлен, и метод РГ здесь, как правило, не может быть применен.

В одном случае, при исследовании процесса  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны, применение ренормализационной группы не сталкивается с отмеченными выше трудностями. Действительно, сечение данного процесса (рис. 7) пропорционально спектральной плотности фотонного пропагатора<sup>59</sup>,

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow h}^{\text{tot}} = \frac{8\alpha^2 \pi^2}{p^2} \Pi(p^2),$$

$$d^{-1}(p^2) = 1 + 2\alpha p^2 \int_{4M^2}^{\infty} \frac{ds \Pi(s)}{s(s - p^2 - i0)},$$

т. е. зависит от одного импульсного аргумента  $p^2$ . В частности, в неабелевых теориях асимптотика сечения  $e^+e^-$ -аннигиляции имеет вид<sup>59, 60</sup>

$$\sigma_{e^+e^- \rightarrow h}^{\text{tot}} = \frac{4\pi\alpha^2}{3p^2} \left( \sum_i Q_i^2 \right) \left( 1 + \frac{c}{\ln(p^2/\mu^2)} + \dots \right), \quad (9.2)$$

где константа  $c$  определяется калибровочной группой и числом кварков, а  $Q_i$  — это электрические заряды кварков в единицах заряда электрона<sup>2</sup>.

Однако и здесь непосредственное применение формул РГ, приводящее к (9.2), не является вполне обоснованным, поскольку при этом игнорируются пороговые особенности и разрезы, характерные для фотонного propagatorа при  $p^2 > 0$ . Возможность перенесения результатов, установленных методом РГ для асимптотик в евклидовой области  $p^2 < 0$ , где ФГ

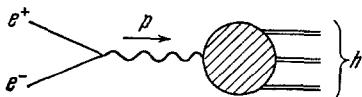


Рис. 7.

действительна, в область времениподобных импульсов требует специального анализа. В работе <sup>61</sup> предложен способ комбинирования renormгруппового и дисперсионного методов, позволяющий при анализе  $e^+e^-$ -аннигиляции в адроны обойтись без экстраполяции результатов РГ в область  $p^2 > 0$ , поскольку renormгрупповые уравнения здесь

записываются не для самих наблюдаемых величин, а для дисперсионных интегралов от них.

Наибольшим успехом ознаменовалось применение РГ совместно с техникой вильсоновских операторных разложений <sup>62</sup> к описанию глубоконеупругих лептон-адронных процессов на основе неабелевых калибровочных теорий. По этой тематике существует обширная литература (см., например, обзор <sup>23</sup>). Ниже мы, не вдаваясь в детали, отметим лишь основные моменты данного подхода и обсудим полученные результаты.

Процесс глубоконеупрого лептон-адронного рассеяния (рис. 8) характеризуется кинематическими переменными  $Q^2 = -q^2$  и  $x = Q^2/2pq$ , которые лежат в области  $Q^2 \gg M^2$ ,  $0 < x < 1$ , где  $M^2$  — квадрат адронной массы. Сечение процесса выражается через структурные функции  $F_i(x, Q^2)$ , связанные фурье-преобразованием с матричным элементом коммутатора электромагнитных токов в обкладках адронных состояний  $\langle p | [J(x), J(0)]_+ | p \rangle$ . Для моментов структурных функций  $M_n(Q^2) \equiv \int_0^1 dx x^{n-2} F(x, Q^2)$  выполняется соотношение

$$M_n(Q^2) = \sum_{\alpha} A_n^{\alpha} C_n^{\alpha}(Q^2), \quad (9.3)$$

где в терминах операторных разложений Вильсона <sup>62</sup>

$$J(x) J(0) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\alpha} \tilde{C}_n^{\alpha}(x^2) x_{v_1} \dots x_{v_n} O_{v_1 \dots v_n}^{\alpha} \quad (9.4)$$

константа  $A_n^{\alpha}$  связана с матричным элементом оператора  $\hat{O}^{\alpha}$ ,  $A_n^{\alpha} p_{v_1} \dots p_{v_n} \sim \langle p | \hat{O}_{v_1 \dots v_n}^{\alpha} | p \rangle$ , а  $C_n^{\alpha}(Q^2)$  есть фурье-образ коэффициентной функции  $\tilde{C}_n^{\alpha}(x^2)$ .

Оказалось, что поведение моментов  $M_n(Q^2)$  при больших  $Q^2$  можно исследовать renormгрупповыми методами <sup>63</sup>. Принимая во внимание зависимость функции  $C_n(Q^2)$  также от константы связи  $g$  и renormировочного параметра  $\mu$ , можно получить для нее дифференциальное уравнение РГ

$$\left( \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} + \beta(g) \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_n(g) \right) C_n \left( \frac{Q^2}{\mu^2}, g \right) = 0,$$

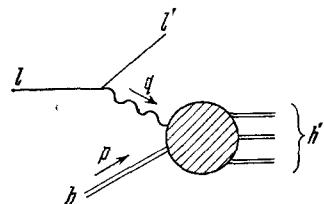


Рис. 8.

решение которого представляется в виде, аналогичном (6.8),

$$C_n(t, g) = C_n(1, \bar{g}(t, g)) \exp \left( - \int_g^{g(t, g)} du \frac{\gamma_n(u)}{\beta(u)} \right), \quad (9.5)$$

где  $t = \frac{Q^2}{\mu^2}$ . В асимптотически свободных моделях ведущая асимптотика  $C_n(t, g)$  определяется низшим порядком ТВ и имеет согласно (5.9), следующий вид<sup>64</sup>:

$$C_n(t, g) \sim (\ln t)^{c_n/b}, \quad (9.6)$$

где  $b < 0$  и  $c_n > 0$  — однопетлевые коэффициенты разложения  $\beta(g)$  и  $\gamma_n(g)$  в ряд по  $g^2$ . Подставляя этот результат в (9.3), получаем логарифмическое падение моментов  $M_n(Q^2)$  с ростом  $Q^2$ , т. е. логарифмическое нарушение бёйкеновского скейлинга (точному скейлингу соответствует независимость  $M_n$  от  $Q^2$  при больших  $Q^2$ ). Такое поведение  $M_n(Q^2)$  находится в хорошем согласии с экспериментом<sup>65</sup>.

В литературе имеются результаты вычисления поправок  $\sim \bar{g}^2$ , (т. е. типа (6.10)) к формуле (9.6), обусловленных как разложением  $C_n(1, \bar{g})$  в ряд по  $g^2$ <sup>66,67</sup>, так и учетом двухпетлевого коэффициента в  $\gamma_n(g)$ <sup>68,69</sup>. Все эти вычисления подкорректированы и собраны воедино в работах<sup>67,69</sup>. В итоге поправки  $\sim \bar{g}^2$  оказались достаточно малыми (несколько процентов от лидирующего вклада (9.6)), что еще раз свидетельствует в пользу применимости ТВ в асимптотически свободных теориях.

Отметим, что логарифмическое отклонение от скейлинга может иметь место и в теориях с конечной ренормировкой заряда<sup>70</sup>, например, в модели (8.8) при условии, что скалярная эффективная константа  $\bar{h}(t)$  стремится к конечному значению при  $t \rightarrow \infty$ .

Авторы глубоко признательны И. Ф. Гинзбургу, Б. В. Медведеву, А. В. Радюшкину и И. В. Тютину за многочисленные плодотворные обсуждения, а также Д. И. Казакову, П. П. Кулишу, В. А. Матвееву и О. В. Тарасову — за полезные замечания.

Объединенный институт ядерных исследований,  
Дубна (Московская обл.)

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Stueckelberg E. C. G., Petermann A.— Helv. Phys. Acta, 1953, v. 26, p. 499.
2. Gell-Mann M., Low F.— Phys. Rev., 1954, v. 95, p. 1300.
3. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В.— ДАН СССР, 1955, т. 103, с. 391.
4. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей.— М.: Наука, 1976.
5. Вильсон К., Когут Дж. Ренормализационная группа и  $\epsilon$ -разложение.— М.: Мир, 1975.
6. Паташинский А. З., Покровский В. Л.— УФН, 1977, т. 121, с. 55.
7. 'tHooft G.— Nucl. Phys. Ser. B, 1973, v. 61, p. 455.
8. Speer E. R.— J. Math. Phys., 1974, v. 15, p. 1.
9. Leibbrandt G.— Rev. Mod. Phys., 1975, v. 47, p. 849.
10. Collins J. C.— Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 80, p. 341.
11. Воронов Б. Л., Тютин И. В.— ЯФ, 1976, т. 23, с. 664.
12. Speer E. R.— J. Math. Phys., 1968, v. 9, p. 1404.
13. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика.— М.: Наука, 1969.— С. 496.
14. Collins J. C., Macfarlane A. J.— Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 10, p. 1201.
15. Овсянников Л. В.— ДАН СССР, 1956, т. 109, с. 1112.
- Shirkov D. V.— Nucl. Phys. Ser. B, 1973, v. 62, p. 194.

16. Rosner J. L.—Ann. Phys., 1967, v. 44, p. 11.
17. Белокуров В. В., Владими́ров А. А., Казаков Д. И., Славнов А. А., Ширков Д. В.—ТМФ, 1974, т. 19, с. 149.
18. Владими́ров А. А.—ТМФ, 1978, т. 36, с. 271.  
Vladimírov A. A. Preprint JINR E2-12248.—Dubna: 1979.
19. Диттес Ф. М., Кубышин Ю. А., Тарасов О. В.—ТМФ, 1978, т. 37, с. 66.
20. Wilson K. G.—Phys. Rev. Ser. D, 1971, v. 3, p. 1818.  
Ghika G., Visinescu M.—Nuovo Cimento Ser. A, 1975, v. 27, p. 183; v. 31, p. 294.
21. Kinoshita T.—J. Math. Phys., 1962, v. 3, p. 650.
22. Берестецкий В. Б.—УФН, 1976, т. 120, с. 439.
23. Politzer H. D.—Phys. Rept. Ser. C, 1974, v. 14, p. 129.
24. Владими́ров А. А.—ТМФ, 1975, т. 25, с. 335.
25. Авдеева Г. М., Белавин А. А., Протогенов А. П.—ЯФ, 1973, т. 18, с. 1309.
26. Callan C. G.—Phys. Rev. Ser. D, 1970, v. 2, p. 1541.  
Symanzik K.—Comm. Math. Phys., 1970, v. 18, p. 227.
27. Lowenstein J. H.—Ibid., 1971, v. 24, p. 1.  
Collins J. C.—Nuovo Cimento Ser. A, 1975, v. 25, p. 47.
28. Baker M., Johnson K.—Phys. Rev., 1969, v. 183, p. 1292.
29. Adler S. L.—Ibid. Ser. D, 1972, v. 5, p. 3021.
30. De Rafael E., Rosner J. L.—Ann. of Phys., 1974, v. 82, p. 369.
31. Авдеева Г. М., Белавин А. А.—Письма ЖЭТФ, 1973, т. 18, с. 611.  
Poggio E.—Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 8, p. 2431.  
Brezin E., Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.—Ibid., 1974, v. 9, p. 1121.
32. Липатов Л. Н.—ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 411.
33. Попов В. С., Елецкий В. Л., Турбинер А. В.—ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 445.  
Казаков Д. И., Тарасов О. В., Ширков Д. В.—ТМФ, 1979, т. 38, с. 15.
34. Kaiser H. J., Preprint PHE 76-9.—Berlin-Zeuthen: 1976.  
Shirkov D. V.—Lett. Nuovo Cimento, 1977, v. 18, p. 452.  
Parisi G.—Phys. Lett. Ser. B, 1977, v. 69, p. 329.  
Le Guillou J. C., Zinn-Justin J.—Phys. Rev. Lett., 1977, v. 39, p. 95.  
Eletsky V. L., Popov V. S.—Phys. Lett. Ser. B, 1978, v. 77, p. 411.  
Bonnie B.—Ibid., 1978, v. 78, p. 107.  
Tarasov O. V.—Lett. Math. Phys., 1979, v. 3, p. 143.
35. Symanzik K.—Lett. Nuovo Cimento, 1973, v. 6, p. 77.
36. Богомолов Е. В.—Phys. Lett. Ser. B, 1977, v. 67, p. 193.  
Dorfel B. D., Kazakov D. I., Shirkov D. V. Preprint JINR E2-10720.—Dubna: 1977.
37. Kazakov D. I., Lomidze L. R., Makhalidiani N. V., Vladimírov A. A. Preprint JINR E2-8085.—Dubna: 1974.
38. Macfarlane A. J., Woo G.—Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 77, p. 91; Errata: 1975, v. 86, p. 548.
39. Аберс Е. С., Ли Б. В.—В кн. Квантовая теория калибровочных полей.—М.: Мир, 1977.—С. 241.
40. Magciano W., Pagels H.—Phys. Rept. Ser. C, 1977, v. 36, p. 137.
41. Белавин А. А., Мигдал А. А.—Письма ЖЭТФ, 1974, т. 19, с. 317.
42. Caswell W. E.—Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 244.  
Jones D. R. T.—Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 75, p. 531.
43. Ferrara S., Zumino B.—Ibid., 1974, v. 79, p. 413.
44. Jones D. R. T.—Ibid., 1975, v. 87, p. 127.
45. Jones D. R. T.—Phys. Lett. Ser. B, 1977, v. 72, p. 199.  
Poggio E. C., Pendleton H. N.—Ibid., p. 200.
46. Gloracci F., Scherk J., Olive D.—Nucl. Phys. Ser. B, 1977, v. 122, p. 253.
47. Шахабазян В. А.—ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1789.
48. Vladimírov A. A. Preprint JINR E2-8649.—Dubna: 1975.  
Ритус В. И.—ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 807.
49. Гинзбург И. Ф.—ДАН СССР, 1956, т. 110, с. 535.
50. Bailin D., Love A., Spathis G.—Nucl. Phys. Ser. B, 1975, v. 93, p. 165.
51. Kazakov D. I., Shirkov D. V. Preprint JINR E2-8974.—Dubna: 1975.
52. Coleman S., Gross D.—Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 851.

53. Gross D., Wilczek F.—Phys. Rev. Ser. D, 1973, v. 8, p. 3633.  
 Cheng T. P., Eichten E., Li L.—F.—Ibid., 1974, v. 9, p. 2259.
54. Chang N. P.—Ibid., 1974, v. 10, p. 2706.
55. Suzuki M.—Nucl. Phys. Ser. B, 1974, v. 83, p. 269.
56. Fradkin E. S., Kalashnikov O. K.—Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 59, p. 159; 1976, v. 64, p. 177.
57. Marques G. C.—Phys. Rev. Ser. D, 1974, v. 9, p. 386.  
 Shei S. S.—Ibid., 1975, v. 11, p. 164.  
 Borenstein J. M.—Ibid., p. 2900.
58. Creutz M., Wang L. L.—Ibid., 1974, v. 10, p. 3749.  
 Tiktopoulos G.—Ibid., 1975, v. 11, p. 2252.  
 Callan C. G., Gross D. J.—Ibid., p. 2905.
59. Appelquist T., Georgi H.—Ibid., 1973, v. 8, p. 4000.
60. Zee A.—Ibid., p. 4038.
61. De Rujula A., Georgi H.—Ibid., 1976, v. 13, p. 1296.
62. Wilson K. G.—Phys. Rev., 1969, v. 179, p. 1499.
63. Christ N., Hasslacher B., Mueller A. H.—Ibid. Ser. D, 1972, v. 6, p. 3543.
64. Georgi H., Politzer H. D.—Ibid., 1974, v. 9, p. 416.  
 Gross D., Wilczek F.—Ibid., p. 980.
65. Buras A. J., Floratos E. G., Ross D. A., Sachrajda C. T.—Nucl. Phys. Ser. B, 1977, v. 131, p. 308.
66. De Rujula A., Georgi H., Politzer H. D.—Ann. Phys., 1977, v. 103, p. 315.  
 Calco M.—Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 15, p. 730.
67. Bardeen W. A., Buras A. J., Duke D. W., Muta T.—Ibid., 1978, v. 18, p. 3998.
68. Floratos E. G., Ross D. A., Sachrajda C. T.—Nucl. Phys. Ser. B, 1977, v. 129, p. 66; Errata: 1978, v. 139, p. 545.
69. Floratos E. G., Ross D. A., Sachrajda C. T.—Phys. Lett. Ser. B, 1979, v. 80, p. 269.
70. Goloskokov S. V., Mikhov S. G., Morozov P. T., Stamenov D. B., Preprint JINR E2-9329.—Dubna: 1975.  
 Морозов П. Т., Стаменов Д. Б.—ЯФ, 1978, т. 28, с. 808.