

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

533.9

УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ПОПЕРЕЧНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ*А. Л. Великович, М. А. Либерман*

СОДЕРЖАНИЕ

I. Введение	377
II. Поперечные ионизирующие ударные волны	379
1. Граничные условия, ионизационная устойчивость (379). 2. О структуре фронта ударной волны (384). 3. Роль излучения в образовании структуры ионизирующих фронтов (386). 4. Ударная адиабата. Структура фронта и ионизационная релаксация (388).	
III. Поперечные ударные волны в плазме	391
5. Постановка задачи. Граничные условия (391). 6. Ударные волны в замагниченной плазме (393). 7. Ударные волны в незамагниченной плазме (399).	
IV. Заключение	403
Цитированная литература	404

I. ВВЕДЕНИЕ

Большое число астрофизических приложений и прикладных задач аэродинамики, разнообразные лабораторные эксперименты и установки, в которых возникают ударные волны в магнитном поле, стимулируют как теоретическое, так и экспериментальное исследование этой проблемы.

Ударные волны возникают при взрывах новых звезд, столкновении галактик и т. д. Ударные волны в магнитном поле Земли образуются при разряде молнии, вхождении спутников и метеоритов в ионосферу.

В лабораториях ударные волны в магнитном поле возникают в z-пинчах, θ -пинчах, обратных пинчах, электромагнитных ударных трубах, установках типа «плазменный фокус», при пробое газа электрическим разрядом, при облучении мишени или пробое газа сфокусированным пучком лазерного света.

Сильные ударные волны ионизуют и нагревают газ. Привлекательным, с точки зрения проблемы создания горячей плазмы для управляемого термоядерного синтеза, является тот факт, что в столкновительных ударных волнах в плотной плазме основная диссипация энергии происходит в ионной компоненте. При этом не возникает вопрос о передаче энергии от электронов к ионам, которая затруднена при высоких температурах, как это имеет место в традиционных установках с токовым нагревом.

В последнее время достигнуты большие успехи в создании плотной горячей плазмы с помощью ударного нагрева^{1, 2}. Водородная плазма, получающаяся посредством фокусировки ударных волн в электромагнитных ударных трубах с поперечным магнитным полем, имеет характерные параметры: $T_i \sim 1-2$ кэВ, $T_e \sim 100$ эВ, $N \sim 10^{16}-10^{17}$ см⁻³.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1979.

Скорость фронта ударной волны до $5 \cdot 10^8$ см/с, начальное давление и температура газа $p_1 = 0,05$ торр, $T_1 = 293$ К. Звуковое число Маха при этом около 3000, альвеновское число Маха составляет десятки единиц. Поперечное магнитное поле в установках существенно не только для термоизоляции, но и позволяет получать существенно более узкие фронты ударных волн, что дает возможность строить более компактные установки³⁻⁵.

В настоящее время в литературе имеется ряд обзоров, посвященных столкновительным ударным волнам в магнитных полях^{6, 7}. Со времени написания этих обзоров получено много новых экспериментальных и теоретических результатов, позволивших более полно понять физику взаимодействия ударной волны с магнитным полем.

Круг вопросов, связанных с взаимодействием ударных волн с магнитным полем, чрезвычайно широк. Это проблемы ударного нагрева и удержания плазмы, динамики МГД-течений в каналах, взаимодействия ударных волн с неоднородностями среды и т. д.⁸⁻¹⁷. Для решения такого рода задач необходимо ясное понимание физики ударной волны в магнитном поле, в частности, роли тех или иных физических процессов, влияющих на структуру фронта, возможности образования тех или иных структур. Систематическое исследование ударных волн в магнитном поле проводится, начиная с конца 50-х годов, когда были построены первые мощные электромагнитные ударные трубы¹⁸⁻²⁰. Принцип действия электромагнитной ударной трубы в основном аналогичен принципу действия обычной ударной трубы. Сильноточный разряд на одном конце трубы вызывает быстрый омический нагрев газа, что приводит к резкому, как при взрыве, повышению давления. Образующаяся в результате ударная волна распространяется к другому концу трубы. Наиболее перспективными являются модификации такой системы — ударные трубы с магнитным поршнем, где перепад давления увеличивается благодаря использованию давления магнитного поля разрядного тока. Давление магнитного поля в таких установках достигает сотен атмосфер при мегаамперных токах.

Подчеркнем, что именно в плазме, особенно в лабораторной плазме, знание структуры фронта ударной волны существенно для описания ее поведения. В обычном газе ударная волна (в отсутствие медленных релаксационных процессов) с достаточной точностью может считаться разрывом, поскольку ширина ее фронта, имеющая порядок длины пробега атома или молекулы газа, как правило, много меньше всех характерных размеров задачи, а состояния газа по обе стороны фронта однозначным образом связаны соотношениями Ренкина — Гюгонно. В плазме дело обстоит сложнее. Даже при наличии полного термодинамического равновесия по обе стороны фронта ударной волны законы сохранения, из которых выводятся соотношения Ренкина — Гюгонно, уже не позволяют определить скачки всех величин во фронте. Например, в законах сохранения не содержится информации о двухжидкостной природе плазмы, о возможности разделения зарядов во фронте и возникновения вследствие этого аксиального электрического поля. В столкновительных ударных волнах разделение зарядов обычно невелико, и плазму в первом приближении можно считать квазинейтральной (как это делается всюду ниже, где не оговорено противное). Однако скачок электрического потенциала через фронт, связанный с аксиальным полем, оказывается конечной величиной, которая не определяется законами сохранения, а зависит от структуры фронта ударной волны. К тому же, в условиях эксперимента состояние полного равновесия за фронтом зачастую не достигается: либо не успевает произойти температурная или ионизационная

релаксация, либо неравновесная плазма за фронтом начинает взаимодействовать с магнитным поршнем, и т. п. Для ионизирующих ударных волн, сами условия Ренкина — Гюгонно не могут быть выписаны без каких-либо сведений о структуре (см. ниже). Таким образом, то, что наблюдается в эксперименте, имеет мало общего с узким разрывом в идеальном газе — это скорее широкая (соизмеримая с размерами установки) переходная область, «толстая» ударная волна. И для интерпретации такого эксперимента прежде всего необходимо понимание того, какие именно физические механизмы ответственны за формирование структуры фронта ударной волны. Естественный путь ответа на этот вопрос — исследование сформировавшихся, стационарных структур, о чем и будет идти речь ниже.

В настоящем обзоре излагаются результаты теоретических и экспериментальных исследований физики поперечных ударных волн, т. е. таких ударных волн, для которых напряженность внешнего магнитного поля параллельна плоскости фронта волны. В первой части статьи рассматриваются поперечные ионизирующие ударные волны. Обсуждается проблема постановки граничных условий для ионизирующей ударной волны в магнитном поле. Показано, что помимо граничных условий, следующих из законов сохранения, существует дополнительное граничное условие, являющееся следствием требования ионизационной устойчивости невозмущенного нейтрального газа перед фронтом ударной волны. Дается качественный анализ и излагаются результаты вычислений структуры фронта для поперечных ионизирующих волн. Обсуждаются эксперименты по исследованию структуры ионизирующих волн.

Во второй части статьи рассматриваются поперечные ударные волны в полностью ионизованной плазме. Обсуждается роль различных физических процессов в формировании структуры фронта ударной волны. Рассмотрены результаты имеющихся экспериментов с сильными ударными волнами в плазме.

II. ПОПЕРЕЧНЫЕ ИОНИЗИРУЮЩИЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

1. Г р а н и ч н ы е у с л о в и я , и о н и з а ц и о н н а я у с т о й ч и в о с т ь

Структура фронта ударной волны описывается системой дифференциальных уравнений. Первый вопрос, который возникает, — это вопрос о том, какие стационарные решения допускает исходная система уравнений. Если представить фронт ударной волны как поверхность разрыва нулевой толщины, то стационарные решения (особые точки системы дифференциальных уравнений) будут связаны так называемыми соотношениями Гюгонно — Ренкина, представляющими не что иное как граничные условия на поверхности разрыва. Структура фронта ударной волны зависит от граничных условий на поверхности разрыва, допускаемых исходными уравнениями. Вопрос о граничных условиях для поперечной ионизирующей ударной волны представляет особый интерес, поскольку уравнений сохранения и непрерывности в данном случае недостаточно для постановки граничных условий, в отличие от случая ударных волн без магнитного поля. Действительно, непроводящий газ перед фронтом ударной волны не взаимодействует с магнитным полем, в то время как возникновение конечной проводимости во фронте волны включает это взаимодействие. Очевидно, что величина магнитного поля за фронтом волны зависит от того, становится ли это взаимодействие существенным в начале или в конце ударного фронта. В первом случае большая энергия волны

тратится на сжатие магнитного поля и, следовательно, в конечном состоянии за фронтом будут ниже температура, плотность газа и т. д. Таким образом, значения магнитного поля, температуры и плотности газа за фронтом ударной волны не определяются однозначно законами сохранения, как это имеет место в ударных волнах без магнитного поля, а зависят от структуры фронта волны. Последняя в свою очередь зависит от граничных условий. Помимо граничных условий, даваемых уравнениями сохранения энергии, импульса и уравнением непрерывности, должно существовать еще одно алгебраическое соотношение, связывающее переменные, характеризующие течение по обе стороны фронта ударной волны. Действительно, поскольку поперечные ионизирующие ударные волны существуют в природе, следовательно, решение соответствующих уравнений должно быть устойчиво или, что почти то же самое, ударная волна должна быть эволюционна²¹. Для эволюционности необходимо, чтобы общее число расходящихся от фронта волн малой амплитуды было на единицу меньше числа граничных условий²¹, или, как можно показать, число независимых алгебраических соотношений на поверхности разрыва должно равняться числу независимых переменных, характеризующих течение. В данном случае это плотность ρ , скорость v , температура T и магнитное поле H .

В ряде работ²²⁻²⁵ предпринимались попытки получить дополнительное граничное условие из рассмотрения структуры фронта ударной волны. При этом авторы ограничивались уравнениями магнитной гидродинамики, предполагая газ термодинамически равновесным и не принимая в рассмотрение уравнение ионизации. Хотя такой подход в принципе и может быть правомочен, но имеет весьма ограниченную область применимости.

Запишем уравнения для поперечной ионизирующей ударной волны в системе координат, где фронт ударной волны покоится. Тогда для плоской стационарной волны, распространяющейся вдоль оси x в идеальном газе ($\gamma = 5/3$) с магнитным полем $\mathbf{H} = \{0, 0, H\}$, имеем

$$\frac{dH}{dx} = \frac{4\pi\sigma}{c} \left(\frac{vH}{c} - E_y \right), \quad \frac{dE_y}{dx} = 0, \quad (1.1)$$

$$\frac{dnv}{dx} = q_1 - q_r, \quad (1.2)$$

$$Nv = C, \quad (1.3)$$

$$MNv^2 + NT + nT_e + \frac{H^2}{8\pi} = P, \quad (1.4)$$

$$\frac{1}{2} MNv^3 + \frac{5}{2} NTv + \frac{5}{2} nT_e v + \frac{c}{4\pi} E_y H + Jnv = S, \quad (1.5)$$

$$\frac{3}{2} nv \frac{dT_e}{dx} + nT_e \frac{dv}{dx} = \frac{c^2}{16\pi^2\sigma} \left(\frac{dH}{dx} \right)^2 - \left(J + \frac{3}{2} T_e \right) \frac{dnv}{dx} + Q_\Delta \quad (1.6)$$

Уравнения (1.1) — (1.6) есть соответственно уравнения Максвелла, уравнение ионизации, непрерывности, уравнения сохранения потока импульса и энергии для всего газа в целом (электроны, ионы и атомы) и уравнение переноса тепла для электронов. Здесь σ — проводимость, M — масса атома и иона, N_a и n — плотность атомов и электронов (ионов) соответственно, $N = n + N_a$, J — потенциал ионизации, Q_Δ — тепло, передаваемое электронам при упругих столкновениях с атомами и ионами, q_1, q_r — число актов рождения и гибели электронов, C, P, S — постоянные интегрирования.

В сопутствующей системе координат мы имеем поток нейтрального газа, втекающий от $x = -\infty$ (особая точка 1 системы уравнений (1.1) — (1.6)) со скоростью v_1 , температурой T_1 , плотностью N_1 , магнитным полем

H_1 . За фронтом ударной волны при $x = +\infty$ (особая точка 2) вытекает поток ионизованного газа, имеющий скорость v_2 , плотность N_2 , температуру T_2 и т. д.

Поскольку газ за фронтом ударной волны имеет конечную проводимость σ_2 , то из условия равенства нулю поперечного тока и, следовательно, электрического поля в системе газа, и учитывая (1.1), имеем

$$E_{y1} = E_{y2} = \frac{v_2 H_2}{c}. \quad (1.7)$$

Результаты работ ²²⁻²⁵, в которых рассматривалась так называемая T^* -модель, сводятся к следующему. Если перейти к переменным $\omega = v/v_2$, и $h = H/H_2$, и исключить плотность и температуру из уравнений (1.3) — (1.5), получим некоторую функцию $\Phi(h, \omega) = 0$. Очевидно, сингулярные точки 1 и 2 принадлежат кривой $\Phi(h, \omega) = 0$, изображенной на плоскости (h, ω) на рис. 1. Вместе с тем, конечное состояние — точка 2, имеющая в этих переменных координаты $h = 1$, $\omega = 1$, есть пересечение кривой $\Phi(h, \omega) = 0$ и гиперболы $h\omega = 1$. (Вторая точка пересечения гиперболы с $\Phi(h, \omega) = 0$ соответствует магнитогидродинамической (МГД) ударной волне с нулевым электрическим полем перед фронтом волны, так как при этом $v_1 H_1 = v_2 H_2$.) Положим теперь, что $T = T^*$ — значение температуры, такое, что $\sigma(T < T^*) = 0$, а при $T > T^*$ проводимость имеет конечное значение. Тогда мы можем в принципе двигаться по интегральной кривой вспять от точки 2 до пересечения с изотермой $T = T^*$, в соответствии с уравнением (1.1). Выше изотермы $T = T^*$ интегральная кривая идет вертикально до пересечения с кривой $\Phi(h, \omega) = 0$, поскольку здесь $\sigma(T < T^*) = 0$ (см. рис. 1).

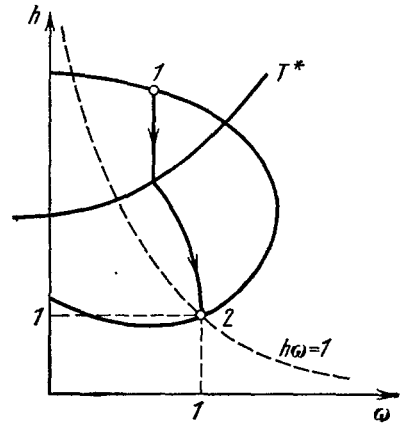


Рис. 1. Интегральная кривая, иллюстрирующая структуру ударной волны ²³.

В принципе такая модель позволяет посредством численного интегрирования методом проб найти точку 1. Из рассмотренной модели, как видно из рис. 1, следует, что фронт всякой ионизирующей ударной волны (исключая случай МГД-ударной волны) начинается с газодинамического разрыва, вслед за которым следует область сжатия магнитного поля. Вместе с тем, для сжатия магнитного поля в такой модели (для изменения магнитного поля на расстояниях, порядка ширины газодинамического разрыва) необходимо выполнение условия

$$Rm_a = \frac{4\pi\sigma v_1 \Delta}{c^2} \gg 1,$$

где $\Delta \sim l_a$ — ширина вязкого разрыва. Это условие, вместе с требованием равновесной ионизации в ударной волне $\Delta_{\text{ion}} \ll c^2/4\pi\sigma v_1$, приводит к весьма жесткому ограничению на область применимости модели. Для звукового числа Маха из этих неравенств получаем

$$1 \ll M_1 < \sqrt{\frac{M}{m} \frac{\sigma_{\text{ion}}}{\sigma_{\text{aa}}}},$$

где σ_{ion} и σ_{aa} — сечение ионизации и сечение атом-атомных столкновений. Именно с ограничением $Rm_a \gg 1$, практически не имеющим области применимости, связан казавшийся парадоксальным результат, полу-

ченный Хоффертом ²⁶, который в соответствии с выводами из модели T^* , на основании численного интегрирования реалистической системы уравнений пришел к выводу о возможности лишь тривиальных магнитных структур без сжатия магнитного поля.

Позже Леонард, проведший исчерпывающее исследование модели ионизирующих ударных волн, начинающихся с газодинамического разрыва ¹⁰⁸, показал, что при $Rm < 1$ возможна только тривиальная магнитная структура для поперечной ударной волны ¹⁰⁹.

Структура фронта поперечной ионизирующей волны ²⁷⁻²⁹ экспериментально изучалась в работах Власеса ²⁷⁻²⁹, Стеббинса и Власеса ³⁰, а также Патрика и Пью ³¹. Наиболее детальные исследования были выполнены Власесом ²⁷⁻³⁰, который использовал обратный пинч с внешним магнитным полем, направленным по оси пинча. Принцип действия установки чрезвычайно прост: иницированный вблизи оси пинча разряд образует цилиндрическую токовую оболочку, которая с большой скоростью устремляется по радиусу от оси под действием магнитного давления обратного тока, проходящего по центральному проводу по оси пинча. Такая токовая оболочка играет роль поршня, перед которым и образуется ударная волна. Скорость движения токовой оболочки поршня и фронта ударной волны практически постоянны при линейном нарастании разрядного тока. Обратный пинч имеет ряд преимуществ по сравнению с другими установками для исследования ударных волн. Помимо устойчивости образующихся фронтов и хорошей воспроизводимости результатов, в обратном пинче азимутальное магнитное H_θ и электрическое E_z поля токовой оболочки магнитного поршня ортогональны сжимаемому ударной волной полю H_z и генерируемому фронтом электрическому полю E_y . В результате фронт ударной волны и токовая оболочка поршня всегда хорошо разрешаются при электрических и магнитных измерениях. Работа Стеббинса и Власеса ³⁰ была произведена специально с целью изучения магнитной структуры поперечной ионизирующей ударной волны и проверки T^* -модели. Обратный пинч в их опытах имел внешний диаметр трубы 45 см, диаметр внутреннего электрода — 2,5 см, высоту — 15 см. Напряжение на электродах до 30 кВ, время разрядного тока 10 мкс, внешнее магнитное поле $H_1 = 0-4$ кЭ. В качестве исследуемого газа был выбран водород при давлении 0,25 и 0,1 Торр. В предыдущих опытах ²⁷⁻²⁹ Власес использовал также аргон. Измеряя с помощью магнитных зондов сжатие магнитного поля через фронт ударной волны при различных скоростях фронта, авторы ³⁰ пришли к выводу о качественном согласии с выводами T^* -модели. Действительно, при малых скоростях фронта $v_1 = (4-5) \times 10^6$ см/с не наблюдалось сжатия магнитного поля, т. е. $H_2/H_1 = 1$, а при больших скоростях $v_1 \geq 8 \cdot 10^6$ см/с, сжатие соответствовало МГД-ударной волне, т. е. $H_2/H_1 = \rho_2/\rho_1$. Само по себе такое качественное сравнение результатов измерений с T^* -моделью является тривиальным и не подтверждает теории, поскольку при малых скоростях фронта в экспериментах Стеббинса и Власеса магнитное число Рейнольдса $Rm \leq 1$ и, следовательно, $H_2/H_1 = 1$, а при больших скоростях фронта энергия ионизации газа пренебрежимо мала в энергобалансе ударной волны и структура ее заведомо магнитогидродинамическая (МГД). Авторами настоящей статьи было обращено внимание на то, что во всех осциллограммах, приведенных в работе Стеббинса и Власеса, сжатие магнитного поля предшествует импульсу давления (импульс давления измерялся пьезодатчиками), что прямо противоречит выводам о возможных структурах фронта, следующих из теории T^* -модели.

Для объяснения наблюдаемого в ³⁰ сжатия магнитного поля и получения дополнительного граничного условия в явном виде в ³² был пред-

ложен принцип ионизационной устойчивости газа перед фронтом волны. Поскольку электрическое поле в системе фронта волны есть (1.7), то переходя в лабораторную систему координат, найдем для электрического поля в нейтральном газе перед фронтом ударной волны

$$E_y^* = \frac{1}{c} (v_1 H_1 - v_2 H_2). \quad (1.8)$$

Из (1.3) — (1.5) следует (см. также рис. 1), что сжатие магнитного поля в ударной волне возможно от значения $H_2 = H_1$ до $H_2 = (v_1/v_2) H_1$. Электрическое поле перед фронтом волны при этом меняется от максимального значения $E_y^* = (v_1 - v_2) H_1/c$ до нуля при максимальном сжатии магнитного поля $v_2 H_2 = v_1 H_1$ (МГД-волна). Очевидно, что нейтральный газ перед фронтом ударной волны не может выдерживать любое по величине электрическое поле. При достаточно большом поле наступит электрический пробой и проводимость газа за конечное время возрастет, т. е. такое течение будет неустойчиво. Устойчивым движение ионизирующего фронта будет при таком значении электрического поля перед фронтом ударной волны, которое обеспечивает в этой области неизменную проводимость газа.

Уравнения (1.2) и (1.6) в покоящемся газе перед фронтом ударной волны можно записать в виде

$$\sigma E^{*2} = n v_{\text{ion}} (T_e) \left(J + \frac{3}{2} T_e \right) + \delta n_e v_{\text{ea}} (T_e - T_a), \quad (1.9)$$

$$\frac{d\alpha}{dx} = \alpha (1 - \alpha) \Psi (T_e, N), \quad (1.10)$$

где v_{ion} , v_{ea} — частоты ионизации и упругих столкновений электронов с атомами, $\alpha = n/N$ — степень ионизации, $\Psi (T_e, N)$ — скорость рождения электронов, причем

$$\Psi (T_e) > 0 \quad \text{при} \quad T_e > T_k,$$

$$\Psi (T_e) = 0 \quad \text{при} \quad T_e = T_k,$$

$$\Psi (T_e) < 0 \quad \text{при} \quad T_e < T_k.$$

Из (1.10) следует, что постоянное значение проводимости перед фронтом волны при $x = -\infty$, обеспечивается при $T_e = T_k$. Соответствующее $T_e = T_k$ значение электрического поля, даваемое уравнением (1.9), есть ни что иное, как пороговое поле электрического пробоя газа E_∞ . Таким образом, искомое дополнительное граничное условие можно записать в виде³²

$$v_1 H_1 - v_2 H_2 = c E_\infty. \quad (1.11)$$

В том случае, когда максимальное значение поля перед фронтом, т. е.

$$v_1 H_1 \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right) \frac{1}{c} \sim \frac{3}{4} \frac{v_1 H_1}{c} < E_\infty,$$

следует положить $\alpha = 0$ всюду вплоть до газодинамического разрыва, и, следовательно, в этом случае вместо (1.11) имеем

$$H_2 = H_1. \quad (1.11a)$$

Отметим, что газ перед фронтом волны следует считать непроводящим при $Rm_1 = 4\pi\sigma v_1 L/c^2 \ll 1$, где L — характерная длина в потоке перед фронтом. Поэтому, в частности, для идеализированной задачи об ударной волне с бесконечным плоским фронтом, распространяющейся в газе без линейных по n потерь электронов, единственное граничное условие — это $E_\infty = 0$, т. е. $v_1 H_1 = v_2 H_2$.

В реальных условиях значение E_∞ следует вычислять с учетом как диффузионных потерь электронов на стенки ударной трубы, так и конечности времени прохождения ударного фронта через установку. На рис. 2 из ³² представлены измеренные в ³⁰ и вычисленные по (1.14) значения величины $v_2 H_2 / v_1 H_1$. Для иллюстрации были выбраны экспериментальные

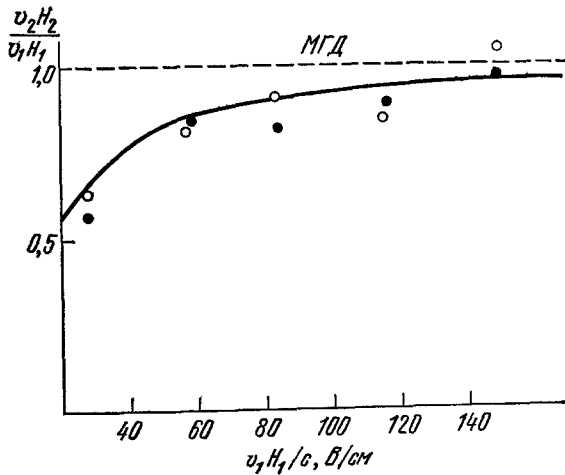


Рис. 2. Величина $v_2 H_2 / v_1 H_1$ как функция $v_1 H_1 / c$ в ионизирующей ударной волне.

результаты из ³⁰, соответствующие постоянной скорости фронта v_1 , величина $v_1 H_1$ растет за счет изменения H_1 , причем температура за фронтом волны (значение T_2 вычислено по измеренной в ³⁰ величине сжатия поля) даже уменьшается по мере приближения к МГД-граничному условию.

Непосредственно пробой газа перед фронтом ударной волны в поперечном магнитном поле наблюдался в ³³. Установка представляла собой взрывную ударную трубу; в качестве рабочего газа использовался аргон при начальном давлении 5 Торр. Начальное поле перед фронтом

$E^* \approx v_1 H_1 / c \approx 150$ В/см быстро падало при движении фронта до 50 В/см. Авторы ³³ отмечают, что пробой наблюдался не в области максимальной концентрации фотоэлектронов, а на значительном удалении от фронта волны.

Таким образом, оказывается, что решение задачи о граничных условиях, традиционно ставившейся в рамках магнитной гидродинамики, требует выхода за ее пределы: учета рождения фотоэлектронов перед фронтом и размножения их в поперечном электрическом поле, иначе говоря, рассмотрения кинетической по своему существу задачи о нестационарном пробое газа индуцированным электрическим полем в реальной геометрии ударной трубы и при наличии источника электронов — ионизирующего излучения («несамостоятельный» пробой). Отметим здесь также неожиданно обнаруженную тесную связь между двумя весьма различными по постановке экспериментами с ионизирующими ударными волнами: измерением сжатия поперечного магнитного поля и наблюдением пробоя газа индуцированным электрическим полем.

2. О структуре фронта ударной волны

Для качественного анализа магнитной структуры фронта поперечной ионизирующей ударной волны перейдем в уравнениях (1.4) — (1.6) к безразмерным переменным:

$$\omega = \frac{v}{v_1}, \quad h = \frac{H}{H_1}, \quad \theta = \frac{T}{T_1}, \quad s_\infty = \frac{cE_\infty}{v_1 H_1}, \quad (2.1)$$

где v_1 , H_1 , T_1 — значения скорости, магнитного поля и температуры перед фронтом волны.

Вводя звуковое $M_1 = v_1 / c_{s1}$ и альвеновское $M_{a1} = v_1 / c_{a1}$ — числа Маха в набегающем потоке, и исключив из (1.3) — (1.5) плотность и тем-

пературу, находим уравнение кривой, на которой лежат начальное и конечное состояния:

$$\Phi(h, \omega) = 4\omega^2 - \omega \left[5 + \frac{3}{M_1^2} - \frac{5(h^2 - 1)}{2M_{a1}^2} \right] + 1 + \frac{3}{M_1^2} - 2(1 - s_\infty) \frac{h - 1}{M_{a1}^2} = 0. \quad (2.2)$$

Состояние перед фронтом в переменных (2.1) имеет координаты $\omega = 1$, $h = 1$, а состояние за фронтом является пересечением кривой (2.2) с гиперболой нулевого электрического поля в собственной системе координат газа

$$h\omega = 1 - s_\infty. \quad (2.3)$$

Если ввести местное по течению звуковое число Маха, то можно показать, что из (2.2) следует соотношение:

$$\frac{dh}{d\omega} = \frac{3M_{a1}^2 \omega}{5h\omega - 2(1 - s_\infty)} \left(\frac{1}{M^2} - 1 \right). \quad (2.4)$$

На рис. 3 на плоскости (h, ω) изображена кривая (2.2), стрелками на которой указано направление движения, отвечающее возрастанию энтропии, штриховой линией — парабола $M^2 = 1$. Как видно из рис. 3, сначала во фронте ударной волны происходит сжатие магнитного поля, участок 1—3, которое сменяется газодинамическим ($\Delta H = 0$) разрывом (участок 3—2 на рис. 3), если звуковое число Маха за фронтом меньше единицы. Более детальные вычисления с учетом энергии ионизации газа дают ³⁴

$$M_{2кр}^2 = 1 - 4 \left[\frac{15(1 + \alpha_2)(2 - \alpha_2)}{\alpha_2(1 - \alpha_2)(J/T_2)^2} + 10 \left(1 + \frac{3T_2}{2J} \right)^2 \right]^{-1}, \quad (2.5)$$

где α_2 и J — соответственно степень ионизации газа за фронтом и потенциал ионизации газа.

При $M_2 > M_{2кр}$ структура ударной волны целиком определяется омическими (джоулевыми) диссипациями, а при $M_2 < M_{2кр}$ непрерывный переход из 1 в 2 за счет одних лишь омических диссипаций невозможен, и внутри фронта возникает изомагнитный разрыв скорости, плотности и температуры. Возникновение внутреннего изомагнитного разрыва в ударных волнах большой интенсивности связано с тем, что плотность энергии, диссипируемая током, не может превышать ограниченную величину порядка $H_2^2/8\lambda$.

По-видимому, косвенным наблюдением изомагнитного разрыва в ионизирующей ударной волне являются измерения электрического поля за фронтом волны в работе Стеббинса и Власеса ³⁰. Величина электрического поля за фронтом волны в неподвижной системе координат есть

$$E_2^* = \frac{v_1 H_1}{c} \left(\frac{v_1}{v_2} - 1 \right) \frac{H_2}{H_1}. \quad (2.6)$$

Измерение электрического поля в ³⁰ осуществлялось электрическим зондом, представляющим собой два металлических штыря в азимутальной

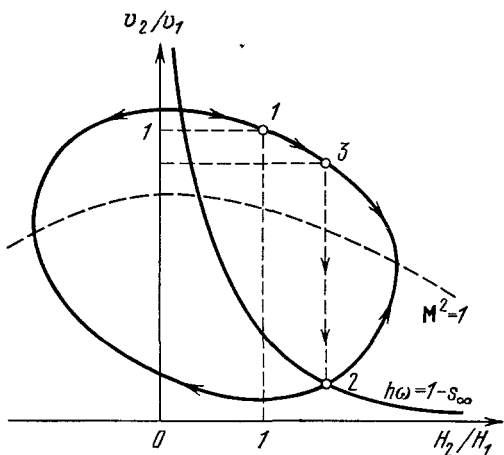


Рис. 3. Структура ударной волны на плоскости $h = H_2/H_1$, $\omega = v_2/v_1$ с граничным условием (1.11).

плоскости пинча. Согласно закону Фарадея

$$2\pi r \cdot E_{\theta} = -\frac{2\pi}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^r H r' dr'.$$

При малой ширине ионизирующего фронта отсюда следует соотношение (2.6). Измеренные в ³⁰ величины E_{θ}^* оказались в несколько раз меньше, чем вычисленные по формуле (2.6) с значением H_2 , измеренным магнитными зондами или же вычисленными по измеренному скачку плотности газа через фронт волны (если принять справедливой МГД-теорию, то $H_2 = H_1 \rho_2 / \rho_1$). Возможное объяснение столь сильного расхождения заключается в том, что показания электрических зондов снимались не в области за всем фронтом волны, а за широкой областью сжатия магнитного поля (1—3 на рис. 3), перед изомагнитным разрывом. В этом случае, если основной скачок скорости в ударной волне сосредоточен в изомагнитном разрыве (участок 3—2 на рис. 3), то величина электрического поля перед ним существенно меньше, чем сзади него. Электрическое поле в точке 3 перед изомагнитным скачком будет

$$|E_{\theta}^*| = \frac{v_1 H_1}{c} \left(1 - \frac{v_3}{v_1} \right) \frac{H_2}{H_1}. \quad (2.7)$$

Вычисления, проведенные в ³⁴ согласно формуле (2.7), действительно дают хорошее согласие с измеренными значениями электрического поля.

В этом эксперименте мы как раз имеем дело с «толстой» ударной волной, широкой зоной сжатия магнитного поля. Это и естественно: как показывают оценки, величина ионизации, возникающей перед вязким скачком за счет взаимодействия фотоэлектронов с индуцированным электрическим полем (см. п. 2) невелика, поэтому длина диффузии магнитного поля благодаря низкой проводимости соизмерима с размерами установки. На этой длине и совершается все сжатие магнитного поля, к концу которого величина электрического поля в лабораторной системе достигает значения (2.7).

3. Роль излучения в образовании структуры ионизирующих фронтов

Как известно ³⁵, плотность энергии и давление теплового излучения становятся сравнимыми с энергией и давлением газа в ударных волнах либо очень большой интенсивности, либо при крайне низкой плотности газа. Как правило, излучение почти не влияет на параметры газа за фронтом волны и потому его можно не принимать во внимание. Совсем иначе обстоит дело с ионизирующими ударными волнами в магнитном поле. Фотоионизация газа перед фронтом ионизирующей ударной волны является определяющей при образовании магнитной структуры фронта ^{34, 36, 37}.

Само по себе образование прекурсора (precursor — предвестник), т. е. ионизация холодного газа перед фронтом ударной волны, обязанная своим происхождением либо диффузии электронов из горячего газа за фронтом, либо фотоионизации опережающим излучением ударно нагретого газа, изучалось в работах ³⁸⁻⁵⁰. Поскольку диффузия электронов в поперечном магнитном поле затруднена, образование прекурсора в поперечной ударной волне связано в основном с фотоионизацией газа излучением. Во многих случаях интенсивности излучения даже умеренно сильной ударной волны достаточно для создания перед фронтом концентрации фотоэлектронов, необходимой для образования стационарной магнитной структуры ³⁴.

Задача об эволюции начального разрыва и образовании магнитной структуры поперечной ионизирующей волны рассматривалась в работе ³⁷. Если вдвигать поршень в трубу или каким-либо другим образом создать в начальный момент времени газодинамическую ударную волну, бегущую поперек магнитного поля, то при $t = 0$ все параметры, характеризующие газ на фронте ударной волны, терпят разрыв, кроме магнитного поля, поскольку магнитное число Рейнольдса в вязком разрыве всегда мало. Таким образом, электрическое поле в газе перед фронтом волны при $t = 0$ максимально и равно

$$E_{y1}^* = \frac{v_1 H_1}{c} \left(1 - \frac{v_2}{v_1} \right).$$

Рассмотрим эволюцию фронта поперечной ионизирующей ударной волны с учетом как фотоионизации нейтрального газа излучением ударно нагретого газа за фронтом, так и ударной ионизации в индукционном поле $E_{y1}^* > E_\infty$. Конкретный вид спектральной плотности излучения из-за фронта ударной волны и коэффициента ионизации электронным ударом зависят от рода газа, поэтому количественно задача об эволюции может быть решена лишь численно. Мы изложим здесь качественную теорию такой эволюции, достаточно полно отражающую все детали процесса³⁷.

Положим излучение горячего газа за фронтом ударной волны с температурой $T_2 \ll J$ близким к излучению черного тела, что подтверждается экспериментальными результатами. Тогда для плотности потока ионизирующих квантов с $\hbar\omega \geq J$, с точностью до малых членов порядка $T_2/J \ll 1$, имеем

$$S_p = \frac{J^2 T_2}{4\pi^2 c^2 \hbar^3} e^{-J/T}, \quad (3.1)$$

Плотность электронов перед фронтом ударной волны, создаваемая потоком ионизирующего излучения (3.1), будет

$$n = \frac{S_p}{v_1} e^{x/l_p},$$

где $l_p = 1/N_1 \sigma_p$ — длина пробега ионизирующих фотонов, σ_p — сечение фотоионизации.

Рассмотрим линеаризованное уравнение баланса частиц в набегающем потоке перед фронтом ударной волны.

Для степени ионизации $\alpha \ll 1$ имеем

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = v_1 \frac{\alpha}{\Delta_{\text{ion}}(T_{e1})} + v_1 \frac{\alpha_0}{l_p} e^{x/l_p}; \quad (3.2)$$

здесь $\Delta_{\text{ion}}(T_{e1})$ — характерный масштаб ионизации электронным ударом с температурой электронов T_{e1} , которую они приобретают в электрическом поле E_{y1}^* перед фронтом.

Решение уравнения (3.2) с начальным условием $\alpha(x, 0) = 0$ есть

$$\alpha(x, t) = \frac{\alpha_0}{[l_p/\Delta_{\text{ion}}(T_{e1})] - 1} \exp\left(\frac{x}{l_p}\right) \left\{ \exp\left[v_1 \left(\frac{1}{\Delta_{\text{ion}}(T_{e1})} - \frac{1}{l_p} \right) t \right] - 1 \right\}. \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что стационарное решение достигается при $t \rightarrow \infty$ при условии $\Delta_{\text{ion}}(T_{e1}) > l_p$. Последнее неравенство есть ограничение на величину электрического поля перед фронтом ударной волны. Действительно, с уменьшением E_{y1}^* величина $\Delta_{\text{ion}}(T_{e1}) = v_1/(v_{\text{ion}} - v_n)$, где v_{ion} и v_n — частоты ионизации и линейных по n потерь электронов, растет, обращаясь в бесконечность при $E_{y1}^* = E_\infty$. Тем самым мы получим нижний предел сжатия магнитного поля, при котором реализуется

решение. Неравенство $\Delta_{\text{ion}}(T_{e1}) > l_p$ можно привести к виду

$$1 - \sqrt{A \frac{N_1}{M_1}} \leq \frac{v_2 H_2}{v_1 H_1} \leq 1, \quad (3.4)$$

где M_1 — звуковое число Маха, A — постоянная, характеризующая свойства газа. Как видно из (3.4), для ударных волн большой интенсивности, т. е. при $M_1 \rightarrow \infty$, сжатие магнитного поля заведомо максимальное, т. е. $H_2/H_1 = v_1/v_2 = \rho_2/\rho_1$. При большой величине электрического поля перед фронтом, т. е. при $\Delta_{\text{ion}}(T_{e1}) < l_p$, стационарное решение отсутствует. При этом (3.3) представляет волну ионизации, распространяющуюся вверх по потоку с фазовой скоростью относительно фронта ударной волны $v_1 [l_p/\Delta_{\text{ion}}(T_{e1}) - 1]$. Причем скорость распространения волны ионизации тем больше, а рост степени ионизации происходит тем быстрее, чем больше величина E_{y1}^* . Большая скорость такой волны, по сравнению с известными результатами для волн ионизации в поперечном электрическом поле^{51, 52}, связана с тем, что возникновение затравочных электронов обусловлено фотоионизацией, а не диффузией.

Как мы видим, формирование стационарной структуры фронта ионизирующей ударной волны связано с развитием упоминавшейся во введении неустойчивости перед фронтом невозмущенного газа, в котором ударная волна одновременно создает фотоэлектроны и индуцированное поперечное электрическое поле. Это развитие неустойчивости в линейном приближении можно описывать волновой ионизацией, отделяющейся от фронта. Разумеется, на основе уравнения (3.2) можно делать только качественные выводы, указывающие тенденцию развития процесса. Полное описание перестройки структуры фронта при переходе в стационарный режим требует численного решения довольно сложной нелинейной нестационарной задачи. В частности, как уже указывалось в конце п. 1, описание начальных стадий развития неустойчивости (пробой) требует кинетического подхода, поскольку функция распределения электронов в слабоионизованном газе в присутствии электрического поля существенно отличается от максвелловской, и пользоваться понятием электронной температуры, вообще говоря, нельзя.

4. Ударная адиабата. Структура фронта и ионизационная релаксация

При конкретных расчетах параметров газа за фронтом ударной волны необходимо учитывать затраты на ионизацию и диссоциацию газа. Вычисляя, например, из уравнений (1.3) — (1.5), (1.11) скачок скорости (плотности), найдем

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{8(\kappa+1)} \left[1 + \frac{3}{M_1^2} + \frac{5+4\kappa}{2M_{a1}^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{3}{M_1^2} + \frac{5+4\kappa}{2M_{a1}^2}\right)^2 + \frac{8(\kappa+1)(4\kappa+1)}{M_{a1}^2}} \right]; \quad (4.1)$$

здесь $\kappa = \alpha_2 J / 2T_2 (1 + \alpha_2)$ — параметр, характеризующий влияние ионизации на скачок скорости и сжатие в ударной волне. Влияние ионизации пренебрежимо мало только в случае слабой, $\alpha_2 \ll 1$, или очень сильной, $J/T_2 \ll 1$, ударной волны.

С уменьшением плотности газа κ неограниченно растет, и сжатие в ударной волне в таком газе, вообще говоря, неограниченно. Параметры газа в поперечной ионизирующей ударной волне с учетом неупругих процессов вычислены в работе³⁴. На рис. 4 из³⁴ изображены температура,

скорость, степень ионизации и диссоциации, как функции звукового числа Маха M_1 для водорода.

Уравнение ударной адиабаты для ионизирующей ударной волны записывается в виде

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{1 + \alpha_1}{(1 + \alpha_2)(4\omega_2 - 1)} \left[4 - \omega_2 + \frac{(1 - \omega_2)^3}{\beta_1 \omega_2} - 2 \frac{J}{T_1} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)}{1 - \alpha_1} \right], \quad (4.2)$$

где

$$\omega_2 = \frac{N_1}{N_2}, \quad \beta_1 = \frac{8\pi p_1}{H_1^2}.$$

Если затраты на ионизацию незначительны, уравнение (4.2) совпадает с уравнением ударной адиабаты в полностью ионизованной плазме⁵³.

Задача о структуре фронта поперечной ионизирующей волны рассматривалась в рамках многожидкостной гидродинамики в работе³⁴, где получены как аналитические, так и численные решения. На рис. 5 и 6 из работы³⁴ представлены изменения магнитного поля, скорости, температуры и степени ионизации в ударной волне в аргоне для случая $M_2 < M_{2кр}$ (рис. 5) и для $M_2 > M_{2кр}$ (рис. 6). Все величины представлены в безразмерном виде: $h = H_2/H_1$, $\omega = v_2/v_1$, $\theta = T/T_1$, $\theta_e = T_e/T_1$. Изменение температуры, плотности, скорости газа и т. п. в ударной волне дается решением системы дифференциальных уравнений (1.1) — (1.6) с соответствующими граничными условиями. Если перейти в уравнениях к безразмерным переменным, определенным, например, как в (2.1), то в уравнениях возникнут величины размерности длины — масштабы, характерные для различных физических процессов. В частности, из уравнения (1.1) находим масштаб токовых диссипаций $\Delta_j = c^2/4\pi\sigma_1 v_1$. Эта величина есть не что иное, как длина, характерная для диффузии магнитного поля. При этом ширина фронта ударной волны по сжатию магнитного поля есть $\Delta_{j1} = c^2/4\pi\sigma_1 v_1$, где σ_1 — проводимость газа перед фронтом волны, возникающая в результате фотоионизации и поддерживаемая собственным электрическим полем ударной волны.

Следует отметить, что при малой проводимости газа перед фронтом ударных волн,двигающихся с небольшой скоростью, наблюдаемое отсутствие сжатия магнитного поля в установках конечных размеров связано с тем, что стационарная магнитная структура не успевает сформироваться. Ширина области сжатия магнитного поля, создаваемой фотоионизацией газа, вычисленная в³⁴ по значению проводимости, перед фронтом хорошо согласуется с измеренной в опытах Стеббинса и Власеса при скоростях фронта больше $6 \cdot 10^6$ см/с, когда наблюдается заметное сжатие магнитного поля. При меньших скоростях, как видно из рис. 11 работы³⁴, величина Δ_{j1} уже заметно больше размеров установок.

Поскольку скорость ударной ионизации в газе экспоненциально зависит от температуры, удобно различать два предельных случая —

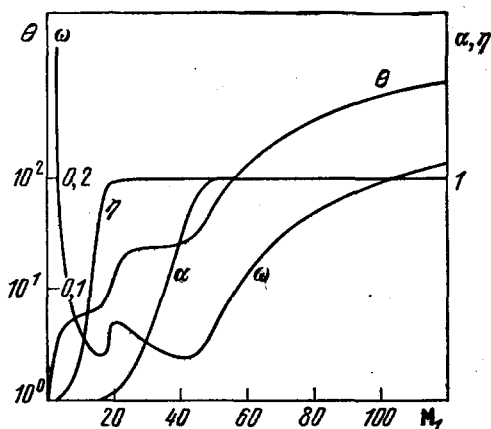


Рис. 4. Изменение температуры $\theta = T_2/T_1$, скорости $\omega = v_2/v_1$, степени ионизации α и диссоциации η в ударной волне в водороде в зависимости от величины звукового числа Маха M_1 .

умеренно сильных ударных волн, в которых скорость ионизации много меньше всех диссипативных процессов, и сильных ударных волн, в которых скорость ионизации почти сразу становится значительно больше скорости всех диссипаций. Другими словами, характерный масштаб ионизации в первом случае значительно больше, а во втором — меньше всех других масштабов задачи.

Первый случай — умеренно-сильной ударной волны аналогичен известной модели детонационной волны Зельдовича — фон Неймана. Фронт волны состоит из узкой области сжатия и нагрева (зона диссипации), которая сменяется значительно более широкой областью релаксации (область ионизации). В релаксационной зоне диссипации пренебрежимо малы, плотность и магнитное поле меняются мало, а температура падает за счет потери энергии на ионизацию газа.

Рис. 5. Структура фронта ударной волны в аргоне для $M_2 < M_{2кр}$.

В противоположном предельном случае ионизация на фронте ударной волны происходит достаточно быстро, так что на всем фронте ударной волны, кроме несущественного участка в начале фронта, успевает установиться локальное ионизационное равновесие.

Следует отметить, что при $\kappa \gg 1$ основное изменение скорости, плотности и магнитного поля сосредоточено в релаксационной зоне, а не в зоне сжатия.

Ширина релаксационной зоны измерялась в ударных волнах без магнитного поля. Эксперименты проводились с аргонем при различных

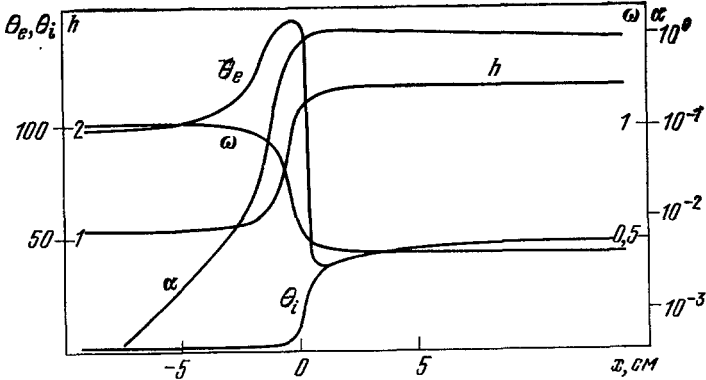
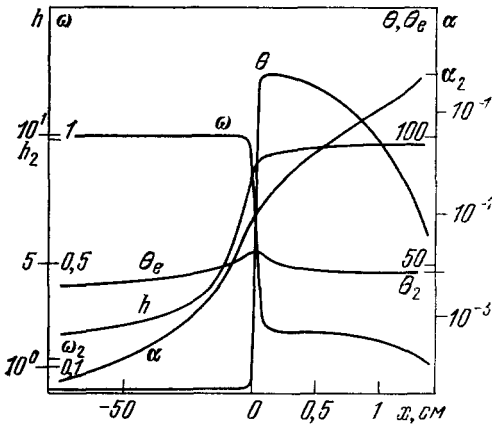


Рис. 6. Структура фронта ударной волны в аргоне для $M_2 > M_{2кр}$.

начальных давлениях ⁴⁰, ⁵³, в смесях аргона с криптоном ⁵⁴ и с ксеноном ⁵⁵. Экспериментально измеряемой величиной является время нарастания ионизации τ . Обозначая α_{ion} — коэффициент ионизации электронным ударом, находим из (1.2) для характерной длины ионизации

$$\Delta_{ion} = \frac{v_2^2}{\alpha_{ion2} N_1 v_1}$$

откуда имеем

$$\tau = \frac{\Delta_{10n}}{v_2} = \frac{v_2}{\alpha_{10n2} N_1 v_1}. \quad (4.3)$$

Удобным параметром является произведение $p_1 \tau$, слабо зависящее от начального давления p_1 ($T_1 = 300$ К),

$$p_1 \tau = \frac{T_1 v_2}{\alpha_{10n2} v_1}. \quad (4.4)$$

На рис. 7 представлена зависимость $p_1 \tau$ от величины обратной температуры за фронтом волны, вычисленной без учета потерь на ионизацию. Экспериментальные точки, штрих-пунктир, и сплошная линия — результаты измерений и численных расчетов из ⁴⁰, штриховая линия построена по формуле (4.4).

Наконец, следует отметить, что характерной особенностью структуры поперечной ударной волны может быть сильный нагрев электронов в индуцированном поле, когда электронная температура и концентрация электронов проходят через максимум. По-видимому, именно этот эффект — максимум степени ионизации на фронте волны, почти на порядок превышающий равновесную степень ионизации за фронтом, наблюдался в ³¹.

III. ПОПЕРЕЧНЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАЗМЕ

5. Постановка задачи. Граничные условия

Структура поперечной (столкновительной ударной волны в плазме изучалась многими авторами (см. ^{3-5, 56-73}). В ранних теоретических работах использовались весьма идеализированные модели, которые в дальнейшем усовершенствовались включением в рассмотрение все большего числа физических процессов, происходящих на фронте ударной волны. Задача о структуре с учетом всех эффектов, исследование которых допускает гидродинамический подход (разделение зарядов, инерция электронов, существование холловских потоков, связанных с переносом импульса, энергии, заряда и т. д.) была решена в работах ⁶⁸⁻⁷⁰ для слабых ударных волн, используя уравнения «13 моментов» Грэда, и в ⁷¹⁻⁷³ для ударных волн произвольной интенсивности путем использования уравнений двухжидкостной гидродинамики ⁷⁴. Сравнение результатов показывает хорошее согласие между ними. Поэтому представляется допустимым описывать структуру столкновительных ударных волн в плазме чисто гидродинамически, без привлечения высших моментов кинетического уравнения. Этот вывод подтверждается и результатами численного моделирования ^{3, 4} поперечных ударных волн в плазме на основе уравнений гидродинамики с обычными плазменными коэффициентами переноса ^{74, 75}. Результаты таких расчетов хорошо описывает эксперимент ⁷⁶. В дальней-

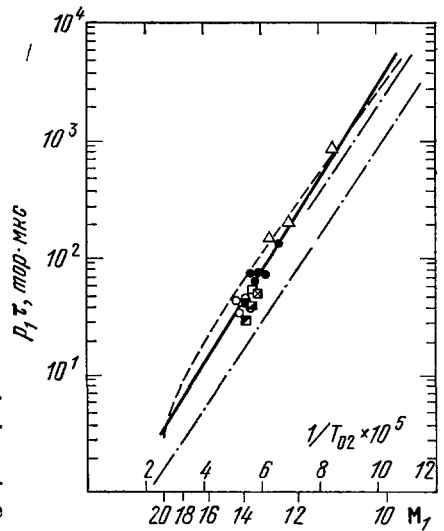


Рис. 7. Время ионизационной релаксации для ударной волны в аргоне.

шем мы будем придерживаться именно двухжидкостного гидродинамического описания.

Рассмотрим стационарную плоскую ударную волну, распространяющуюся в полностью ионизованной плазме вдоль оси x . Ось z направим вдоль магнитного поля H . Плазму будем считать простой ⁷⁴ (один сорт ионов с $z = 1$, $\gamma_e = \gamma_i = 5/3$). Переходя в систему фронта ударной волны, с помощью уравнений Максвелла получаем $E_y = v_1 H_1 / c = v_2 H_2 / c$ (см. гл. II). Уравнения ударного слоя те же, что и в гл. 1, но выражения для коэффициентов переноса отвечают полностью ионизованной плазме ⁷⁴, а неупругие процессы ионизации и рекомбинации отсутствуют.

Граничные условия выражаются через числа Маха M_1 и M_{a1} (или M_2 и M_{a2}), определенные выше в п. 2. Скачки скорости и температуры через фронт ударной волны есть

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{H_1}{H_2} = \frac{1}{8} \left[1 + \frac{3}{M_1^2} + \frac{5}{2M_{a1}^2} + \sqrt{\left(1 + \frac{3}{M_1^2} + \frac{5}{2M_{a1}^2}\right)^2 + \frac{8}{M_{a1}^2}} \right], \quad (5.1)$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{M_1^2}{3} \left(1 - \frac{v_2}{v_1}\right) \left(\frac{v_2}{v_1} + 1 - \frac{2}{M_{a1}^2} \frac{v_1}{v_2}\right). \quad (5.2)$$

Выражения (5.1) и (5.2) остаются справедливыми при замене индексов $1 \leftrightarrow 2$.

Как известно (⁷⁷, с. 282), магнитная гидродинамика для движения проводящей среды поперек магнитного поля сводится к обычной гидродинамике, в которой роль скорости распространения малых возмущений играет скорость быстрой магнитозвуковой волны $c_t = \sqrt{c_s^2 + c_a^2}$. Это обстоятельство позволяет сразу найти область изменения чисел Маха

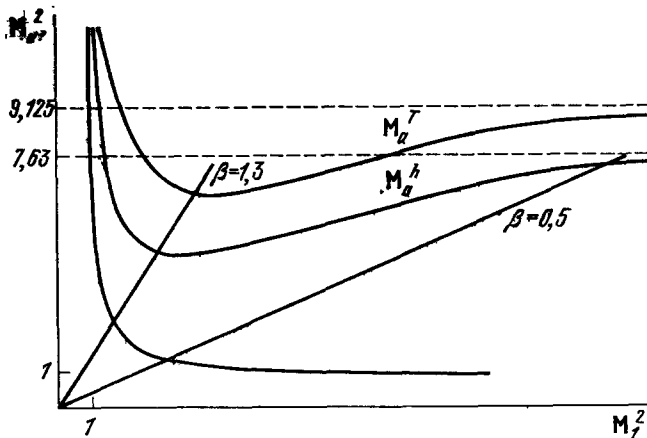


Рис. 8. Область изменений чисел Маха (M_1^2 , M_{a1}^2).

M_1 и M_{a1} : поскольку в обычной гидродинамике ударная волна отвечает сверхзвуковому движению, $v_1 > c_{s1}$, то в данном случае, по аналогии, должно быть $v_1 > c_{t1}$, т. е. $M_1 = v_1 / c_{t1} = M_1 M_{a1} (M_1^2 + M_{a1}^2)^{-1/2} > 1$ (рис. 8). Подобным образом в вытекающем потоке $M_2 < 1$. Соответствующая область на плоскости (M_2^2 , M_{a2}^2) лежит между гиперболой $M_2 = 1$ и кривой, параметрическое уравнение которой

$$M_2^2 = \frac{3\omega_2(5\omega_2 + 1)}{5(1 - \omega_2)^3}, \quad M_{a2}^2 = \frac{\omega_2^2(5\omega_2 + 1)}{2(4\omega_2 - 1)}, \quad (5.3)$$

где $\omega_2 = v_2 / v_1 = N_1 / N_2$, $1/4 < \omega_2 < 1$. Кривая (5.3) соответствует пределу сильных ударных волн: $M_1 \rightarrow \infty$, $\beta_1 = 8\pi r_1 / H_1^2 = (5/6) M_{a1}^2 / M_1^2 \rightarrow 0$

при сжатии $\omega_2 = \text{const}$ (рис. 9). В пределе малого магнитного давления $M_{a2} \rightarrow \infty$, $\beta_2 \rightarrow \infty$ эта область переходит в конечный интервал $1/5 < M_2^2 < 1$, отвечающий ударной волне в газе или плазме без магнитного поля⁷⁸. В обратном пределе холодной плазмы $M_2 \rightarrow \infty$, $\beta_2 \rightarrow 0$ интервал допустимых значений M_{a2} стягивается в точку $M_{a2} = 1$. Это вполне естественно: необратимая диссипация энергии в ударной волне связана именно со сжатием и нагревом газовой компоненты. Если ее давление в конечном состоянии мало по сравнению с давлением магнитного поля, значит, энергии набегающего потока недостаточно для сжатия газа (поскольку магнитное поле сжимается в то же число раз), и ударная волна может быть только слабой. Ударная адиабата для данного случая дается выражением (1.2) гл. II, где следует положить $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Метод исследования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих ударный слой — асимптотический анализ⁷⁸. Если привести эту систему к безразмерному виду, то каждому физическому процессу, который может влиять на структуру фронта (такие процессы в уравнениях описываются членами, содержащими производные по x) соответствует масштабный множитель Δ_k . Например, джоулеву нагреву отвечает длина, характерная для диффузии магнитного поля, инерции тока — бесстолкновительная глубина проникновения и т. д. Если ввести безразмерную координату ξ соотношением $x = \Delta \xi$ (Δ — некоторый заданный масштаб), то все производные войдут с множителями вида Δ_k/Δ . В частности, рассматривая ударную волну как разрыв нулевой толщины, «ступеньку», т. е. формально положив $\Delta = \infty$, мы придем к уравнениям, вообще не содержащих производных: к алгебраическим соотношениям Ренкина — Гюгонио, связывающим значения переменных перед и за фронтом ударной волны. Исследуя структуру фронта, следует выбрать из всех Δ_k максимальное: пусть, например, таким является Δ_1 , т. е. $\Delta_k/\Delta_1 \ll 1$ при $k \neq 1$. Тогда, положив $\Delta = \Delta_1$, можно пытаться решать уравнения в нулевом приближении по малым параметрам Δ_k/Δ_1 . Если при этом удастся получить непрерывное решение, дающее переход из состояния 1 в состояние 2, то процесс с масштабом Δ_1 доминирует в структуре фронта, а влияние остальных сводится к малым поправкам. Если такое решение не существует, необходимо ввести новый разрыв на масштабе Δ_1 и изучить его структуру тем же способом. Задача нередко осложняется тем, что необходимо учитывать сразу несколько процессов, если их характерные масштабы сравнимы между собой.

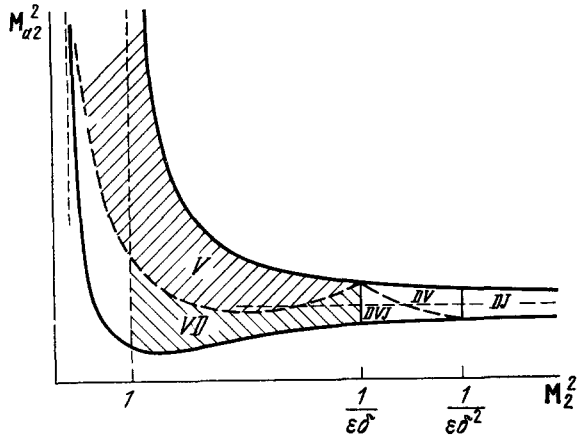


Рис. 9. Область изменений чисел Маха (M_2^2 , M_{a2}^2).

6. Ударные волны в замагниченной плазме

Рассмотрим сначала случай сильной анизотропии коэффициентов переноса плазмы, когда ионы и электроны являются замагниченными, т. е. на всем протяжении фронта ударной волны справедливы условия

$\Omega_1 \tau_1 \gg 1$, $\Omega_e \tau_e \gg 1$. Обозначая $\delta = (\Omega_1 \tau_1)^{-1}$, мы всюду до конца этого раздела будем считать δ малым параметром.

В уравнениях ударного слоя при $\delta \ll 1$ можно выделить следующие процессы и соответствующие им масштабы: $\Delta_v = l/M$ отвечает ионной вязкости, $\Delta_d = \varepsilon \delta M/M_a$ — электронной инерции, $\Delta_j = \varepsilon \delta^2 M/M_a^2$ — джоулевым потерям и холловским потокам, $\Delta_{rel} = M/\varepsilon$ — температурной релаксации ионов и электронов (l — кулоновская длина свободного пробега). Сравнивая эти масштабы, убеждаемся, что наибольшим из них является Δ_{rel} . Поскольку процесс теплообмена сам по себе не дает ни диссипации, ни дисперсии, это приводит к тому, что в узком по сравнению с Δ_{rel} ударном слое электроны и ионы нагреваются независимо, а за ним следует релаксационная зона, где $v = \text{const}$, $H = \text{const}$, $T_e + T_1 = \text{const}$ и ⁷⁹

$$x - x_0 = 0,91 \frac{M_2 l_2}{\varepsilon} \left[\frac{1}{2} \ln \frac{1 + (T_e/T_2)^{1/2}}{1 - (T_e/T_2)^{1/2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{T_e}{T_2} \right)^{3/2} - \left(\frac{T_e}{T_2} \right)^{1/2} \right]. \quad (6.1)$$

Так как $\Delta_d \gg \Delta_j \sim \delta \Delta_d$, можно заключить, что основную роль в формировании структуры ударного слоя играют ионная вязкость и дисперсия, обусловленная электронной инерцией. Дисперсия приводит к возникновению колебаний, а их затухание осуществляется за счет вязких или джоулевых диссипаций. Сравнивая масштабы Δ_v и Δ_d , можно видеть, что при $M_2^2 \ll (\varepsilon \delta)^{-1}$ преобладает ионная вязкость — на рис. 9 эта область обозначена V . При $M_2^2 \gg (\varepsilon \delta)^{-1}$ основным процессом, влияющим на формирование ударного фронта, является дисперсия — на рис. 9 область D . При $\Theta_1^5 (\varepsilon \delta)^{-1} \ll M_2^2 \ll (\varepsilon \delta)^{-1}$ дисперсия в начале фронта ударной волны более существенна, чем вязкость — область VD . В дисперсионной области преобладают вязкие диссипации при $M_2^2 \ll (\varepsilon \delta^2)^{-1}$, а джоулевы потери являются основными при $M_2^2 \gg (\varepsilon \delta^2)^{-1}$ — на рис. 9 подобласти DV и DJ . В области V с точностью до малых ε и δ членов получаем: магнитное поле оказывается замороженным $H/H_1 = N/N_1$, электроны нагреваются только адиабатически $T_e/T_1 = (N/N_1)^{2/3}$, процессы теплопроводности и холловские потоки подавляются сильным поперечным магнитным полем. Решение уравнений ударного слоя в этом приближении имеет вид ($\omega = v/v_1$)

$$\frac{T_1}{T_1} = 2 + \frac{4}{3} (1 - \omega) + \frac{10M_1^2}{3} (1 - \omega) \left(1 - \frac{1}{\omega M_{a1}^2} \right) - \frac{T_e}{T_1}, \quad (6.2)$$

$$x - x_0 = 0,3 \frac{l_1}{M_1} \int_{[1+(N_1/N_2)]/2}^{\omega} \frac{[T_1(\omega')/T_1]^{5/2} d\omega'}{\omega'^2 (\omega' - 1) [\omega' - (N_1/N_2)] (\omega' - \omega_{2-})}, \quad (6.3)$$

где ω_{2-} отличается от правой части (6.1) знаком перед радикалом. В следующем приближении можно найти малые по δ поперечные компоненты скоростей ⁷¹ ионов и электронов.

Эксперименты с наиболее сильными поперечными столкновительными ударными волнами проводились на ударной трубе в лаборатории плазменных исследований Колумбийского университета ^{1, 2, 10, 20, 76, 80-83}. Эта установка представляет собой коаксиальную электромагнитную ударную трубу около 2 м длиной, на которой в водороде при $p_1 = 50$ мТорр и $H_1 = 7.2$ кЭ достигаются скорости поперечных ударных волн до $4 \cdot 10^8$ см/с. Поперечное поле создается протеканием тока по оси трубы, вследствие чего фронты ударных волн заметно неоднородны, в продольном сечении они имеют приблизительно параболическую форму с выгибом к внутреннему проводнику. Тем не менее, имеет смысл сравнить

результаты этих опытов с одномерной теорией. В случае $M_1 \gg 1$ с помощью (6.3) можно получить аналитические оценки ширины фронта ударной волны. С точностью до $O(M_1^{-2})$ ширина фронта по Прандтлю

$$L_{Pr} \equiv \frac{v_1 - v_2}{|dv/dx|_{\max}} = 2\sqrt{5} l_1.$$

В эксперименте, однако, измеряется не ширина фронта «по максимальной крутизне», а скорее величина $L_{exp} = \int_{v_{\min}}^{v_{\max}} dv |dv/dx|^{-1}$, где отличие граничных значений скорости v_{\min} и v_{\max} от равновесных, отвечающих граничным условиям, определяется точностью измерения скорости в эксперименте. В том же приближении из (6.3) получаем

$$L_{exp} = \left(\frac{1}{32} \ln \frac{3}{4(v_2/v_1)_{\min} - 1} - 0,046 \right) M_1^4 l_1. \quad (6.4)$$

(Заметим, что $L_{exp} \gg L_{Pr}$ при $M_1 \sim 10^2 - 10^3$)

Сравним теперь результаты теории с данными эксперимента. Ширина фронта сильных ударных волн в замагниченной плазме измерялась в работе ⁷⁶. Непосредственное применение формулы (6.4) затруднено тем обстоятельством, что ударные волны в опытах распространяются по водороду при комнатной температуре, т. е. являются скорее сверхсильными ионизирующими ударными волнами. Для того, чтобы правильно применить чисто плазменную формулу (6.4) к ионизирующей волне, заметим, что наиболее важно правильно знать температуру ионов, от которых резко зависит вязкость, формирующая фронт. Примем, что в начальном состоянии имеется плазма с той же плотностью ионов (протонов), что и в молекулярном водороде при $T = 300$ К. Определим «эффективное» число Маха $M_{1\text{эфф}}$, применив формулу для плазмы до завершения температурной релаксации (6.1), и взяв для минимальной скорости из опытов ⁷⁶ минимальную измеренную температуру $T_1 = 100$ эВ, будем считать, согласно работе ⁵, точность определения скорости равной 1%. На рис. 10 приведены экспериментальные точки из ⁷⁶, результаты численного расчета ⁴, оценки ширины фронта из ⁵ и согласно (6.4).

Поскольку, как известно из гидродинамики ⁸⁴, стационарная структура формируется лишь после того, как пройденное ударной волной расстояние будет иметь порядок стационарной ширины, естественным параметром, указывающим на применимость стационарной теории, является отношение l/Δ , где l — расстояние от начала ударной трубы до места расположения датчика, Δ — стационарная ширина при данной скорости (6.4). Следует ожидать совпадения стационарной теории с экспериментом при $l/\Delta > 1$ и расхождения при $l/\Delta < 1$. Из рис. 10 видно, что для всех положений датчика $l/\Delta < 1$ при $v_1 \gtrsim 10^8$ см/с. Для меньших скоростей наблюдается хорошее согласие между результатами ⁷⁶ и оценкой (6.4). Результаты численного моделирования ⁴ согласуются с экспериментом и в нестационарном случае, демонстрируя тем самым применимость гидродинамической теории.

В работе ⁸² приводятся данные измерений плотности и температуры электронов и сжатия магнитного поля для $9 \cdot 10^6 < v_1 < 2 \cdot 10^7$ см/с, $H_1 = 1,0; 3,6$ кЭ. Вычисляя ожидаемое сжатие магнитного поля H_2/H_1 по измеренной скорости v_1 согласно (5.1), находим, что теоретическое значение H_2/H_1 завышено по сравнению с экспериментальным на 20—30% (точность измерения последнего — около 15%). Небольшое расхождение обусловлено, по-видимому, неоднородностью ударных волн в этих экспериментах. Интересно, что температурная релаксация (6.1) в этих опытах не наблюдается, хотя ударная волна проходит значительное, по срав-

нению с $\Delta_{\text{геі}}$ расстояние. Электроны, нагретые примерно до 10 эВ, успевают получить в столкновениях от ионов, температура которых на порядок выше, достаточное количество тепла, но температура их не увеличивается. Автор работы⁸² полагает, что причиной этому является радиационное охлаждение, связанное с сильным резонансным излучением в диапазоне вакуумного ультрафиолета многократно ионизованных атомов тяжелых примесей, всегда присутствующих в исследуемом газе (дейтерий).

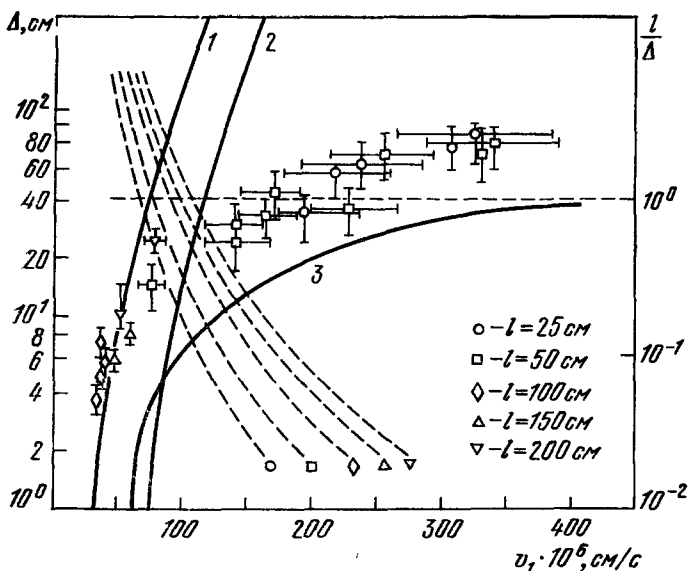


Рис. 10. Зависимость ширины фронта сильной ударной волны в замагниченной плазме от скорости ударной волны v_1 .

Экспериментальные точки — из⁷⁹. Кривая 1 рассчитана согласно (6.4), 2 — результат оценки³, 3 — результат численного моделирования⁴. Штриховые кривые представляют отношения расстояния l от начала ударной трубы до места расположения датчика и вычисленной по (6.4) стационарной ширине фронта.

В⁸³ для скоростей $10^7 < v_1 < 3 \cdot 10^7$ см/с независимые измерения сжатия плазмы N_2/N_1 и магнитного поля H_2/H_1 подтверждают соотношение $H_2/H_1 = N_2/N_1$ с точностью до экспериментальных ошибок.

Обратимся теперь к другому предельному случаю, когда плазма за фронтом ударной волны является холодной, т. е. $M_2^2 \gg (\varepsilon\delta)^{-1}$. При этом масштаб Δ_d — наибольший. Положив

$$\Delta = \frac{1,05\varepsilon\delta M_2 l_2}{M_{a2}}$$

и опуская члены, малые по ε , δ и $(M_2^2\varepsilon\delta)^{-1}$, мы в нулевом приближении получаем следующие уравнения для безразмерного магнитного поля $h = H/H_1$ (η — лагранжева координата: $d/d\eta = (v/v_1) d/d\xi$):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dh}{d\eta} \right)^2 + \frac{(h-1)^2}{2} \left[\frac{(h+1)^2}{4M_{a1}^2} - 1 \right] \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{dh}{d\eta} \right)^2 + U(h) = 0, \quad (6.5)$$

$$\frac{d^2h}{d\eta^2} + (h-1) \left[\frac{h(h+1)}{2M_{a1}^2} - 1 \right] = 0. \quad (6.6)$$

Уравнения (6.5) — (6.6) имеют хорошо известную механическую аналогию⁸⁵⁻⁸⁷: это интеграл энергии и уравнение движения частицы единичной массы в поле $U(h)$. Очевидно, что уравнения (6.5) — (6.6), при получении

которых были опущены все диссипативные члены, не могут дать решения в виде ударной волны. (В самом деле, во фронте обязательно должна возрастать энтропия за счет необратимого перехода в тепло кинетической энергии набегающего потока. Попытки построить структуру фронта в модели идеальной среды без диссипаций — например, в плазме, описываемой уравнением Власова или, что почти то же самое, уравнениями движения компонент без столкновений, — по самому существу вопроса обречены на неудачу, хотя, как ни странно, такие работы появляются до сих пор, см., например, ⁸⁸.) Граничное условие $h(-\infty) = 1$ выделяет солитон

$$h(\eta) = 1 + \frac{2(M_{a1}^2 - 1)}{1 + M_{a1} \operatorname{ch}(2\eta \sqrt{1 - M_{a1}^{-2}})}. \quad (6.7)$$

Максимальному значению $h = h_{\max} = 2M_{a1} - 1$ отвечает максимальная плотность $N_{\max} = N_1 (2/M_{a1} - 1)^{-1}$. Условие $N_{\max} < \infty$ приводит к известному соотношению

$$M_{a1} < 2. \quad (6.8)$$

Смысл этого неравенства заключается в том, что при $M_{a1} \geq 2$ высота потенциального горба, связанного с солитоном, превышает кинетическую энергию ионов в набегающем потоке. При этом возникает поток ионов, отраженных от солитона.

Даже в предположении о ламинарности такого многопоточкового движения рассмотрение этой задачи требует выхода за пределы используемой модели ^{89, 90}, что не входит в задачу настоящей работы.

В случае соблюдения (6.8) можно получить ламинарное гидродинамическое решение уравнений ударного слоя. Структура фронта будет, вообще говоря, осцилляторной: затухание колебаний, описываемых уравнениями (6.5) — (6.6) в следующем приближении, обусловлено вязкостью в области параметров DV и джоулевыми потерями в области DJ . В промежуточном случае (область VD на рис. 9) масштаб вязких диссипаций, быстро возрастающий с T_1 , может быть в точке 1 меньше не зависящего от температуры дисперсионного масштаба, а в точке 2 — больше. Поэтому возможны структуры, в которых конечное число колебаний в передней части фронта предшествует монотонному приближению к равновесию за фронтом ⁷². Отметим, что достаточно слабые ударные волны всегда имеют монотонный профиль.

Другим дисперсионным механизмом, способным создавать осцилляторные структуры поперечных ударных волн в плазме, является разделение зарядов ^{86, 90}. Для того, чтобы этот эффект был определяющим в структуре фронта ударной волны, необходимо выполнение неравенства ⁷³

$$\max\left(\frac{l_1}{M_1^2}, r_{e1}\right) \ll r_{D1} \ll r_{i1}, \quad (6.9)$$

где r_{D1} — дебаевский радиус, r_{i1} и r_{e1} — циклотронные радиусы ионов и электронов в состоянии 1.

Дисперсия от разделения зарядов вызывает электростатические колебания холодных ионов относительно электронов, привязанных к силовым линиям магнитного поля условием вмороженности (нарушение этого условия означало бы необходимость включения в рассмотрение инерции электронов, несущественной в области (6.9)). Характерная частота есть плазменная частота ионов, характерная скорость — c_{a1} , т. е. характерный масштаб эффекта имеет порядок $c_{a1}/\omega_{pi} \sim r_{D1}\beta_1^{-1/2} \gg r_{D1}$ при $\beta_1 \ll 1$ ⁹⁰.

Нетрудно получить уравнения для безразмерной скорости ионов $\omega_1 = v_i/v_1$ (в лагранжевых координатах: $d/d\eta = \omega_1 d/d\xi$), аналогичные (6.5) — (6.6):

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\omega_1}{d\eta} \right)^2 + \frac{1}{4} (\omega_1 - 1)^2 \left[\frac{4}{M_{a1}^2} - (\omega_1 + 1)^2 \right] \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{d\omega_1}{d\eta} \right)^2 + \tilde{U}(\omega_1) = 0, \quad (6.10)$$

$$\frac{d^2\omega_1}{d\eta^2} + (1 - \omega_1) \left[\omega_1 (\omega_1 + 1) - \frac{2}{M_{a1}^2} \right] = 0. \quad (6.11)$$

Магнитное поле $H = H_1 [1 + M_{a1}^2 (1 - \omega_1^2)/2]$, скорость электронов $v_e/v_1 = H_1/H$, электрический потенциал $\phi = H_1 (H - H_1)/4\pi e N_1$. Свойства решений этих уравнений полностью аналогичны обсуждавшимся выше. В частности, и здесь можно построить решение только при $M_{a1} < 2$. Заметим, что наряду со сходством этих пар уравнений, налицо и существенная разница, обусловленная различием физических механизмов двух видов дисперсии. В частности, здесь в механической аналогии роль уравнения движения играет уравнение Пуассона (выше — обобщенный закон Ома), а интеграла энергии — уравнение сохранения импульса плазмы (выше — уравнение сохранения энергии). Совпадение критических условий, конечно, не случайно: эти условия являются следствием уравнений сохранения и не зависят от механизма дисперсии, подобно тому, как условия Гюгио — Ренкина не зависят от вида диссипации.

При $M_{a1} \geq 2$ в области D столкновительных гидродинамических структур не существует (отметим, что для этого случая пока не построены сколько-нибудь последовательные решения и в теории бесстолкновительных ударных волн). Экспериментально качественное изменение структуры при переходе через $M_{a1} = 2$ пока не наблюдалось (см. ниже, п. 3)).

Следует подчеркнуть, что физическая роль разделения зарядов в плазменных ударных волнах не исчерпывается созданием колебаний при соблюдении (6.9). Хотя в столкновительной гидродинамике характерный масштаб разделения зарядов — дебаевский радиус — обычно мал по сравнению с шириной фронта, что оправдывает принятое всюду выше (кроме случая (6.9)) предположение о квазинейтральности плазмы, но в рассматриваемой одномерной задаче весьма важным является возникновение в рамках квазинейтральности сильного аксиального поля $E'_x \gg E_y$ (при $\delta \ll 1$), направленного перпендикулярно внешнему магнитному полю и протекающему в плазме току (холловское поле). Это поле, во-первых, создает скачок потенциала через фронт ударной волны $\phi_2 - \phi_1 = - \int_{-\infty}^{+\infty} E_x(\xi) d\xi$. В отличие от скачков всех остальных величин $\phi_2 - \phi_1$ не определяется условиями Гюгио (здесь есть некоторая аналогия с проблемой граничных условий, обсуждавшейся в гл. 1) и непосредственно зависит от структуры фронта. По измеренным значениям $\phi_2 - \phi_1$ можно делать вывод о механизмах, формирующих структуру фронта (см. п. 7)). Во-вторых, наличие холловского поля маскирует эффект анизотропии проводимости⁷⁴, поэтому закон Ома в пренебрежении инерцией электронов холловскими потоками и т. п. в настоящей работе имеет вид $j_y = \sigma_{\perp} E_y$, где поперечная проводимость $\sigma_{\perp} \sim \sigma_{\parallel}$ (в полностью ионизованной плазме $\sigma_{\parallel}/\sigma_{\perp} \approx 2$). В условиях реального эксперимента нарушение одномерности приводит к подавлению поперечной проводимости магнитным полем, и это обстоятельство необходимо учитывать при расчете джоулева тепловыделения. Например, нагрев электронов до 10 эВ в экспериментах⁸², значительно превышающий повышение температуры при адиабатическом сжатии, можно объяснить именно малой величиной поперечной проводимости.

7. Ударные волны в немагнитной плазме

Обратимся теперь к другому предельному случаю — немагнитной плазме, т. е. будем считать, что как $(\Omega_1 \tau_1)^{-1} = \delta \gg 1$, так и $(\Omega_e \tau_e)^{-1} = \varepsilon \delta \gg 1$. В уравнениях возникают следующие характерные масштабы: джоулевых диссипаций $\Delta_j = \varepsilon \delta^2 M / M_a^2$, электронной теплопроводности $\Delta_{Te} = l / \varepsilon M^3$, электронной температурой релаксации $\Delta_{rel} = Ml / \varepsilon$, ионной вязкости и теплопроводности $\Delta_{v1} = l / M$, $\Delta_{T1} = l / M^3$. Среди перечисленных масштабов при $\varepsilon \delta \gg 1$ наибольшим является Δ_j , что соответствует преобладанию джоулевых потерь. Причем $\Delta_j \gg \Delta_{rel}$, т. е. в рассматриваемом случае на масштабе Δ_j с точностью до $O(\Delta_{rel} / \Delta_j)$ устанавливается тепловое равновесие между компонентами плазмы: $T_e = T_1 = T$. Пренебрегая малыми порядка ε и $(\varepsilon \delta)^{-1}$, из уравнений сохранения импульса и энергии можно выразить H и T через безразмерную скорость $\omega = v/v_1$

$$\frac{H}{H_1} = \frac{1}{\omega} + \frac{3}{5\omega} \left[\sqrt{1 + \frac{40M_{a1}^2}{9} (\omega - 1)(\omega - \omega_2)} \left(\frac{N_2}{N_1} - \omega \right) - 1 \right], \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{T}{T_1} = 1 - \frac{M_a^2}{3\omega} (\omega - 1) \left(\omega^2 + \omega - \frac{2}{M_{a1}^2} \right) - \\ - \frac{2M_a^2}{5\omega M_{a1}^2} \left[\sqrt{1 + \frac{40M_{a1}^2}{9} (\omega - 1)(\omega - \omega_2)} \left(\frac{N_2}{N_1} - \omega \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (7.2)$$

(Конечно, (7.1) — (7.2) остаются справедливыми и при замене индексов $1 \leftrightarrow 2$. Соотношение (7.1) — это другая форма записи (6.2): $\Phi(H/H_1, v/v_1) = 0$.)

Структура ударной волны в области преобладания джоулевых диссипаций определяется законом Ома, который в рассматриваемом случае немагнитной плазмы (скалярная проводимость) имеет вид:

$$j_y = -\frac{c}{4\pi} \frac{dH_z}{dx} = \sigma \left\{ E_y + \frac{1}{c} [vH]_y \right\} = \frac{\sigma}{c} (v_1 H_1 - vH),$$

и окончательно в безразмерной форме ($\zeta = x/\Delta_j$) имеем

$$\frac{vH}{v_1 H_1} - 1 = 0,53 \left(\frac{T}{T_1} \right)^{-3/2} \frac{d}{d\zeta} \frac{H}{H_1}. \quad (7.3)$$

С помощью (7.1) — (7.2) можно проинтегрировать (7.3) и получить структуру фронта в виде квадратуры

$$\begin{aligned} x - x_0 = 0,89 \Delta_j \int_{[1+(N_2/N_1)]/2}^{\omega} d\omega' \frac{d}{d\omega'} \frac{H(\omega')}{H_1} \left[\frac{T(\omega')}{T_1} \right]^{-3/2} \times \\ \times \left[\sqrt{1 + \frac{40M_{a1}^2}{9} (\omega' - 1)(\omega' - \omega_2)} \left(\frac{N_2}{N_1} - \omega' \right) - 1 \right]. \end{aligned} \quad (7.4)$$

Из (7.1) легко видеть, что левая часть (7.3) положительна при $N_2/N_1 < \omega < 1$, т. е. знак $dv/d\zeta$ определяется знаком dH/dv вдоль кривой (7.1); решение (7.4) имеет смысл только при $dH/dv < 0$. Из уравнения (7.1) нетрудно получить, что это имеет место всюду при $N_2/N_1 < \omega < 1$, если $M_2 > 1$, и нарушается в некоторой области $N_2/N_1 < \omega < \omega_k$ при $M_2 < 1$. На рис. 3 первый случай соответствует расположению обеих точек 1 и 2 на сверхзвуковой ветви кривой (2.2), а во втором случае основная диссипацией на дозвуковой (нижней) ветви. В первом случае основной диссипацией на всем протяжении фронта являются джоулевы потери (чисто резистивная структура), во втором их недостаточно для непрерывного перехода

из 1 в 2, и необходимо ввести внутренний разрыв⁵⁸. Заметим, что в обоих случаях ширина фронта определяется джоулевым масштабом (поскольку проводимость растет с температурой, джоулев масштаб максимален в состоянии 1, поэтому ширина фронта порядка Δ_{j1}). Этот факт

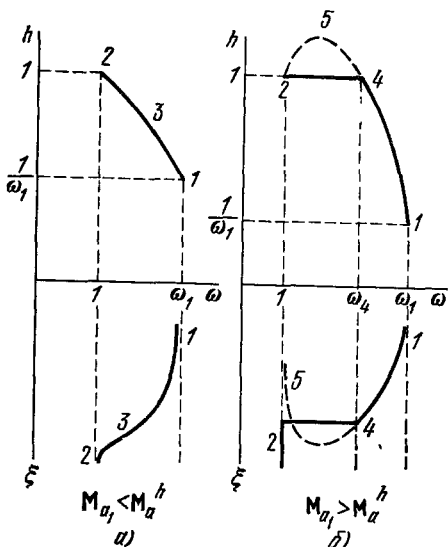


Рис. 11. Зависимость $h = H/H_1$ от $\omega = v_2/v_1$ и ξ для $M_{a1} < M_a^h(\beta_1)$ (а) и $M_{a1} > M_a^h(\beta_1)$ (б).

можно интерпретировать следующим образом: сжатое магнитное поле H_2 за фронтом диффундирует вверх по набегающему потоку, проводимость в котором есть σ_1 , на длину порядка $c^2/4\pi\sigma_1 v_1$. Поскольку $\Delta_{j1} \sim 1/v_1$, магнитную структуру джоулевой зоны можно непосредственно наблюдать в достаточно слабых ударных волнах даже в плазме с высокой начальной проводимостью⁹¹.

Появление внутреннего разрыва на фронте ударной волны можно обосновать и более формальными методами, не исследуя подробно структуру фронта волны⁹²⁻⁹³. Простое физическое объяснение состоит в том, что за счет джоулева механизма можно диссипировать плотность энергии порядка $(H_2 - H_1)^2/8\pi$, причем $H_2 \leq \leq 4H_1$, т. е. величина джоулевой диссипации ограничена, тогда как плотность кинетической энергии в набегающем потоке может быть сколь угодно велика. Поэтому, начиная с некоторой скорости v_1 (при данном β_1), джоулевых диссипаций становится недостаточно, и необходимо включить в рассмотрение другие диссипативные процессы⁹⁴. На рис. 8 проведена линия критических значений альвеновского числа Маха $M_a^h(\beta_1)$. В области ниже $M_a^h(\beta_1)$ структура ударных волн чисто резистивная, выше этой кривой расположены ударные волны с внутренним разрывом.

Поскольку внутренний разрыв имеет масштаб $\Delta \ll \Delta_j$, в нем $H = \text{const}$ с точностью до $O(\Delta/\Delta_j)$, т. е. он должен быть изомагнитным⁵⁸. Как и в гл. II нетрудно получить, что единственным физически разумным способом введения этого разрыва является изомагнитный скачок в задней части фронта ($h = H/H_1 = 1$, участок 4—2 на рис. 11). Поскольку при $M_2 < 1$ всегда $M_2 \sim 1$ (см. рис. 9), масштабы электронной теплопроводности и электрон-ионного теплообмена имеют один порядок величины l_2/ε . Структуру изомагнитного скачка можно исследовать, положив $\dot{H} = H_2$ и $\Delta = l_2/\varepsilon$.

Изомагнитный скачок — чисто газодинамический, поскольку в нем $H = \text{const}$ и единственным параметром, определяющим его интенсивность, является звуковое число Маха M_2 . Поэтому его структура аналогична структуре ударной волны в плазме без магнитного поля^{78, 95-98}. Из уравнений сохранения легко найти скорость и температуру плазмы перед изомагнитным скачком (точка 4)

$$\frac{v_4}{v_2} = \frac{M_2^2 + 3}{4M_2^2}, \quad \frac{T_4}{T_2} = \frac{(M_2^2 + 3)(5M_2^2 - 1)}{16M_2^2},$$

$$M_4^2 = \left[\frac{v_4}{c_s(4)} \right]^2 = \frac{M_2^2 + 3}{5M_2^2 - 1} > 1 \quad \text{при} \quad M_2^2 < 1. \quad (7.5)$$

Структура изомагнитного скачка совпадает со структурой фронта ударной волны без внешних полей с $M_1 = M_4$ (последняя величина определяется по числам Маха M_1 и M_{a1} исходной ударной волны с помощью (5.1), (5.2) и очевидного соотношения $M_2^2 = (N_1/N_2)^2 (T_1/T_2) M_1^2$). На масштабе $\Delta = 0,316l_2/\varepsilon$ она описывается уравнениями (здесь $\omega = v/v_2$)

$$\frac{d}{d\xi} \frac{T_e}{T_2} = M_2^2 \left(\frac{T_e}{T_2} \right)^{-5/2} (\omega - 1) \left(\frac{v_4}{v_2} - \omega \right), \quad (7.6)$$

$$\frac{d\omega}{d\xi} = \left\{ \frac{d}{d\xi} \frac{T_e}{T_2} + \frac{1,2}{M_2^2 \omega^3} \left(\frac{T_e}{T_2} \right)^{-3/2} \left[\frac{T_e}{T_2} - \omega + \frac{5}{3} M_2^2 \omega (\omega - 1) \right] \right\} \times \left[\frac{10}{3} - \frac{10}{3} M_2^2 (8\omega - 5) - \frac{2}{3\omega} \frac{T_e}{T_2} \right]^{-1}. \quad (7.7)$$

Второй сомножитель в (7.7) имеет одинаковые знаки в точках 1 и 2 при $M_2^2 > 4/5$ ($M_4 < 1,12$) и различные при $M_2^2 < 4/5$ ($M_4 > 1,12$). Таким образом, в первом случае в структуре наблюдается слабый изомагнитный скачок, сформированный электронной теплопроводностью, ширина которого

$$L_{Pr} \approx \frac{0,56l_2}{M_2(1-M_2^2)\varepsilon}.$$

Этой структуре отвечают числа Маха в диапазоне $M_a^h(\beta_1) < M_{a1} < M_a^T(\beta_1)$ (см. рис. 8). Профили фронта, рассчитанные для ударной волны средней интенсивности в холодной плазме (сжатие от 10^{16} см⁻³ до $2,4 \cdot 10^{16}$ см⁻³, нагрев от 1 до 3,9 эВ) представлены на рис. 12.

При $M_2^2 < 4/5$ необходимо ввести еще один разрыв внутри изомагнитного скачка. Его структура формируется ионной вязкостью и теплопроводностью — соответствующий масштаб есть l_2 . С точностью до малых порядка ε электронная температура в этом скачке постоянна (так называемый электронный изотермический разрыв). По своей структуре этот скачок весьма схож с ударным слоем в замагниченной плазме — в обоих случаях роль основной диссипации играет вязкость, которая формирует монотонный профиль ударного фронта; на интенсивность ударной волны не накладывается никаких ограничений, потому что вязкость способна обеспечить любую требуемую диссипацию. Сильный электронный изотермический разрыв делит изомагнитный скачок на две части: в первой возрастает электронная температура (до величины, близкой к граничному значению), затем в изотермическом скачке резко изменяются скорость и температура ионов (которая поднимается выше граничного значения), и в оставшейся части изомагнитного скачка происходит температурная релаксация и незначительное сжатие за счет электронной теплопроводности (на рис. 13 изображена такая структура для ударной волны, в которой происходит сжатие плазмы от 10^{16} см⁻³ до $3 \cdot 10^{16}$ см⁻³ и нагрев

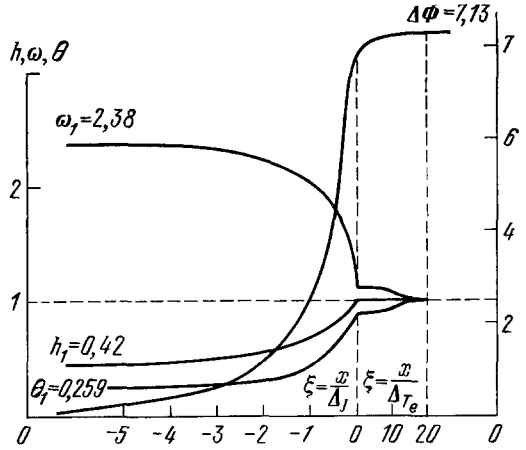


Рис. 12. Структура фронта ударной волны со слабым изомагнитным скачком.

$$M_1^2 = 20, M_{a1}^2 = 7, N_1 = 10^{16} \text{ см}^{-3}, T_1 = 1 \text{ эВ}, H_1 = 1,4 \text{ кЭ}.$$

от 1 до 5,3 эВ). С ростом интенсивности ударной волны все большая часть общего скачка плотности, температуры и потенциала будет сосредотачиваться в таком ионном скачке. Учитывая также, что с ростом температуры плазма становится замагниченной при любом начальном значении магнитного поля, мы можем сделать вывод, что структура сильных ударных волн отличается от рассмотренной в п. 6 лишь небольшим джоулевым участком в передней части фронта.

Рассмотрим еще один предельный случай, имеющий более узкую область применимости по сравнению с рассмотренными выше. Это промежуточный случай частично замагниченной плазмы, когда электроны замагничены ($\Omega_e \tau_e \gg 1$), а ионы — нет ($\Omega_i \tau_i \ll 1$)⁷². В этих условиях

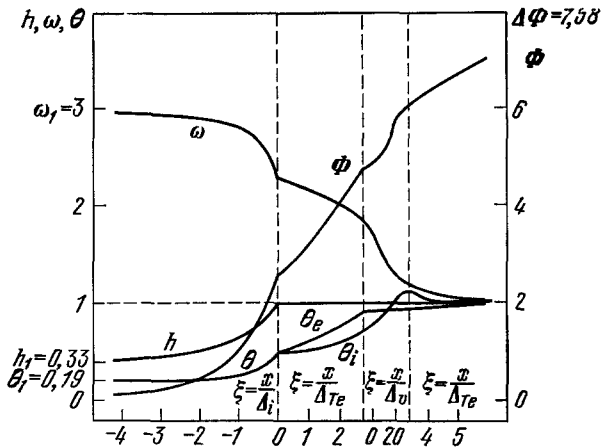


Рис. 13. Структура фронта ударной волны с сильным изомагнитным скачком.

$M_1^2 = 17, M_{a1}^2 = 25, N_1 = 10^{16} \text{ см}^{-3}, T_1 = 1 \text{ эВ}, H_1 = 0,68 \text{ кЭ}$. Масштабы изомагнитных скачков и электронного изотермического скачка для наглядности растянуты. $\omega = v/v_s, h = N/N_2, \theta_e = T_e/T_2, \theta_i = T_i/T_2, \Phi = e\phi/hT_2$.

основными диссипациями будут джоулевы потери, электронная теплопроводность и холловские потоки. При этом ионы нагреваются адиабатически. Из изложенного выше ясно, что для очень сильных волн этих диссипаций недостаточно. Внутренний разрыв, одновременно изомагнитный и изотермический по электронной температуре, появляется при $M_2 < M_{2кр}$, где $M_{2кр}$ есть решение трансцендентного уравнения

$$M_2^2 = \frac{1}{5} \left[3 + \frac{T_1}{T_2} \left(\frac{N_2}{N_1} \right)^{2/3} \right].$$

В пределе $M_1 \rightarrow \infty, \beta_1 \rightarrow 0$ соответствующее критическое число Маха $M_{a1} = 2 \sqrt{3} = 3,46$.

Экспериментальных результатов по ударным волнам в незамагниченной плазме имеется пока немного⁶. Ожидаемая ширина джоулевой волны есть

$$\Delta_{j1} = \frac{2 \cdot 10^6}{v_1 \text{ (см/с)} T_{e1}^{3/2} \text{ (эВ)}} \left\{ 1 + 0,23 \lg \left[T_{e1}^3 \text{ (эВ)} \cdot \frac{10^{16} \text{ см}^{-3}}{n_{e1}} \right] \right\}. \quad (7.8)$$

(В случае, если в состоянии 1 замагничены только электроны, эту величину следует умножить на 2.) В типичных экспериментальных условиях (пинчи, электромагнитные ударные трубы) $N_1 \approx 10^{16} \text{ см}^{-3}, T_{e1} \approx 1 \text{ эВ}, v_1 \approx 10^7 \text{ см/с}, \Omega_e \tau_e > 1$, т. е. ширина фронта ударной волны Δ_{j1} порядка

0,5 см, что и наблюдается ⁶. Трудность интерпретации этих экспериментов связана с тем, что в них, как правило, существенно влияние неоднородности и потерь магнитного потока (не весь магнитный поток сжимается ударной волной), поэтому порядок ширины фронта — едва ли не единственная экспериментально измеряемая величина, которую можно сравнить с идеализированной теорией. Например, в работе ⁹⁹ при $N_1 = 10^{16} \text{ см}^{-3}$ $T_{e1} = 1,2-2,1 \text{ эВ}$; из (7.8) получаем для $v_1 = 2 \cdot 10^6 \text{ см/с}$ $\Delta_{j1} \approx 0,3-0,6 \text{ см}$, что соответствует измеренным значениям (0,3—0,8 см). Но потери магнитного потока существенно изменяют картину течения по сравнению с описанной выше; так, L_{exp} не убывает как v_1^{-1} , а наоборот, линейно возрастает с v_1 . Авторы ⁹⁹ объясняют свои результаты, феноменологически вводя параметры неидеальности установки.

Отметим, что столкновительный джоулев нагрев может наблюдаться в ударных волнах в разреженной плазме ($N_1 \lesssim 10^{15} \text{ см}^{-3}$), где важную роль играют бесстолкновительные эффекты. Рассмотрим, например, эксперимент ¹⁰⁶ с $T_{e1} = 1 \text{ эВ}$, $N_1 = 7 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$, $H_1 = 1200 \text{ Э}$, $M_{a1} = 2,5$, $v_1 = 2,5 \cdot 10^7 \text{ см/с}$. Из (5.1) получаем ожидаемое сжатие магнитного поля $H_2/H_1 = 2,5$, что соответствует результатам измерений. Оценка времени нарастания фронта с помощью (7.8) дает величину 12 нс, близкую к наблюдаемой (около 10 нс). Наконец, оценка температур электронов и ионов в предположении джоулева нагрева электронов и отсутствия теплообмена ¹⁰¹ дает $T_{e2} = 46 \text{ эВ}$, $T_{i2} = 2 \text{ эВ}$, что близко к измеренным значениям ¹⁰². Однако качественная картина структуры свидетельствует о том, что столкновительный джоулев нагрев, существенный на переднем участке, сменяется диссипациями другого рода. Уже при $M_{a1} = 2,5$ крутизна фронта ударной волны в начале больше, чем в конце (в чисто резистивной ударной волне должно быть наоборот). При $M_{a1} = 3,7$ (т. е. $M_2 < 1$) никакой резистивный механизм (ни кулоновское, ни аномальное сопротивление плазмы), как это видно из изложенного выше, не может обеспечить необходимой диссипации ¹⁰³. Соответственно структура качественно изменяется по сравнению с $M_{a1} = 2,5$, но не таким образом, как это описывается выше: изомагнитная «ступенька» появляется не вслед за джоулевой зоной, а перед ней. Исследование подобных структур относится уже к теории бесстолкновительных ударных волн; в их изучении достигнут значительный прогресс ^{85-87, 89, 90, 104, 105}, хотя вряд ли можно считать эту проблему полностью решенной. Ограничимся здесь замечанием, что и в таких структурах роль обычного джоулева нагрева может быть существенной.

IV. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уже во введении мы отмечали, что ударные волны в магнитных полях представляют собой широко распространенное явление, с которым физикам приходится встречаться в самых разных областях своей деятельности. В настоящей статье мы ограничились изложением простейшего случая поперечных ударных волн. Простота в данном случае обусловлена тем, что поперек магнитного поля малые возмущения распространяются только со скоростью быстрого магнитного звука и потому существуют лишь быстрые ударные волны. Общий случай — произвольной ориентации магнитного поля по отношению к плоскости фронта волны, включая случай нормальных, включающих ударных волн ^{106, 107}, хотя и имеет много интересных и специфических деталей, в целом основывается на идеологии, изложенной в настоящей статье. Как мы видели, укоренившееся представление об ударных волнах как о поверхностях разрыва нулевой толщины, не оправдывает себя для ударных волн в магнитных полях. Ударные

фронты в данном случае имеют вполне макроскопическую структуру и, более того, знание структуры ударного фронта зачастую необходимо для интерпретации наблюдений.

Другим, поучительным с методической точки зрения примером, демонстрирующим единство физической науки, является теория ионизирующих ударных волн в магнитном поле. В рамках классической гидродинамики, без привлечения теории пробоя газа, без учета излучения, построение адекватной теории ионизирующих ударных волн оказалось невозможным.

Вместе с тем, последовательная теория ударных волн, включая и бесстолкновительные ударные волны, далека от завершения (если такая теория вообще может быть построена). Такая теория должна основываться на кинетическом рассмотрении, и с этой точки зрения гидродинамическая теория может рассматриваться как первое приближение, позволяющее выделить экспериментально наблюдаемые эффекты, обязанные чисто гидродинамическим проявлениям. В этом же аспекте теория столкновительных ударных волн может быть полезной и для развития теории бесстолкновительных ударных волн. Например, осциллирующая структура ударного фронта, считающаяся специфической для бесстолкновительных ударных волн, как было показано в гл. III, появляется и в столкновительных ударных волнах.

Институт физических проблем
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Gross R.— Nucl. Fusion, 1975, v. 15, p. 729.
2. Gross R. A. Some Gas Dynamic Aspects of Fusion Plasmas.— Presented to XII Biennial Fluid Dynamics Symposium (Symposium on Advanced Problems and Methods in Fluid Dynamics). Bialowieza, Poland, 8—13 September 1975.
3. Schneider S. H., Chu C. K., Leonard B. P.— Phys. Fluids, 1971, v. 14, p. 1103.
4. Schneider S. H.— Ibid., 1972, v. 15, p. 805.
5. Taussig R. T.— Ibid., 1973, v. 16, p. 384.
6. Чу К., Гросс Р.— В кн. Физика высокотемпературной плазмы.— М.: Мир, 1972.— С. 262.
7. Гросс Р.— В кн. Физика высоких плотностей энергии/Под ред. О. Н. Крохина.— М.: Мир, 1974.— С. 275.
8. Есков А. Г., Куртмуллаев Р. Kh., Malutin A. I., Semenov V. N.— In: 6th European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics.— Moscow: JINR, 1973.— P. 595.
9. Todd A. M. M.— Phys. Fluids, 1975, v. 18, p. 453.
10. Sandel F. L., Niimura M., Robertson S. N., Gross R. A.— Ibid., 1975, v. 18, p. 1075.
11. Lui H. C., Chu C. K.— Ibid., p. 1277.
12. Sarder F.— In: Proc. of 9th Intern. Shock Tube Symposium.— Stanford University Press, 1973.— P. 556.
13. Loubsky E. L., Prakash S. G., Bershader D.— Ibid.— P. 568.
14. Shiraishi M.— J. Phys. Soc. Japan, 1975, v. 39, p. 1069.
15. Ambar M., Upadhyaya K. S., Khare H. C.— Nuovo Cimento. Ser. B, 1976, v. 4, p. 47.
16. Зайцев С. Г., Михайлов А. В.— ДАН СССР, 1976, т. 226, с. 81.
17. Глатман Р. А.— ЖТФ, 1973, т. 43, с. 2115.
18. Patrik R.— Phys. Fluids, 1959, v. 2, p. 589.
19. Kunkel W. B., Gross R. A.— In: Plasma Hydromagnetic /Ed. D. Bershader.— Stanford, California: Stanford Univ. Press, 1962.— P. 58.
20. Gross R. A., Miller B.— In: Methods of Experimental Physics. V. 9, pt. A /Ed. H. R. Griem, R. H. Lovberg.— N. Y.; Lnd.: Academic Press, 1970.— P. 169.
21. Ахизер А. И., Ахизер И. А., Половин Р. В., Ситенко А. Г., Степанов К. Н. Электродинамика плазмы.— М: Наука, 1974.
22. Любимов Г. А.— ДАН СССР, 1959, т. 126, с. 291.
23. Chu C. K.— Phys. Fluids, 1964, v. 7, p. 1349.
24. Taussig R. T.— Ibid., 1965, v. 10, p. 1145.

25. Куликовский А. Г.— ПММ, 1968, № 6, с. 1126.
26. Hoffert M. T.— Phys. Fluids, 1968, v. 11, p. 77.
27. Vlases G. C.— J. Fluid. Mech., 1963, v. 16, p. 82.
28. Vlases G. C.— Phys. Fluids, 1964, v. 7, p. 1358.
29. Vlases G. C.— Ibid., 1967, v. 11, p. 2351.
30. Stebbins C. F., Vlases G. C.— J. Plasma Phys., 1968, v. 2, p. 633.
31. Patrick R. H., Pugh E. R.— Phys. Fluids, 1965, v. 8, p. 636.
32. Великович А. Л., Либерман М. А.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 1650.
33. Максимов П. А., Осташев В. Е.— ТВТ, 1975, т. 13, с. 644.
34. Великович А. Л., Либерман М. А.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 891.
35. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
36. Leonard B. P.— J. Plasma Phys., 1977, v. 17, p. 69.
37. Liberman M. A., Velikovich A. L.— Plasma Phys., 1978, v. 20, p. 439.
38. Weymann H. D.— Phys. Fluids, 1960, v. 3, p. 545.
39. McRae R. G., Leaton B. M.— Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 2067.
40. Kamimoto G., Neshima K.— Trans. Japan Soc. Aeronaut. and Space Sci., 1972, v. 15, p. 124.
41. Vinolo A. R., Clarke J. H.— Phys. Fluids, 1973, v. 16, p. 1622.
42. Pipkin A. C.— Ibid., 1963, v. 6, p. 1382.
43. Weymann H. D.— Ibid., 1969, v. 12, p. 1193.
44. Holmes I. B., Weymann H. D.— Ibid., p. 1200.
45. Lubin N. J., Resler E. L.— Ibid., 1967, v. 10, p. 1.
46. Murty S. R., Seron P.— Ibid., 1972, v. 15, p. 1035.
47. Mills J. L., Naraghi M., Fowler R. G.— Ibid., 1974, v. 17, p. 691.
48. Nelson H. F.— AIAA J., 1975, v. 13, p. 115.
49. Pinegre M.— Thèse.— L'Universitet de Rouane, 1975.
50. Dobbins R. A.— AIAA J., 1970, v. 8, p. 407.
51. Munt R., Ong R. S. D., Turcotte D. L.— Plasma Phys., 1969, v. 11, p. 739.
52. Лозанский Э. Д., Фирсов О. Б. Теория искры.— М.: Атомиздат, 1975.
53. Petschek H., Byron S.— Ann. of Phys., 1957, v. 1, p. 270.
54. Ezumi H., Enomoto Y., Kawamura M.— J. Phys. Soc. Japan, 1972, v. 32, p. 1676.
55. Ezumi H., Kawamura M., Yokota T.— Ibid., 1977, v. 43, p. 1060.
56. Hoffman F., Teller E.— Phys. Rev., 1950, v. 80, p. 692.
57. Helfer H. L.— Astrophys. J., 1953, v. 117.
58. Marshall W.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1955, v. 233, p. 367.
59. Sen H.— Phys. Rev., 1956, v. 102, p. 5.
60. Голицын Г. С., Станюкович К. П.— ЖЭТФ, 1957, т. 33, с. 1417.
61. Ludford G. S. S.— J. Fluid Mech., 1959, v. 5, p. 67.
62. Куликовский А. Г., Любимов Г. А.— ПММ, 1959, т. 23, с. 868.
63. Пикельнер С. Б.— ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 1536.
64. Любимов Г. А.— ПММ, 1961, т. 25, с. 179.
65. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика.— М.: Физматгиз, 1962.
66. Андерсон Э. Ударные волны в магнитной гидродинамике.— М.: Атомиздат, 1968.
67. Geiger W., Kaerpeler H. J., Mauser B.— Nucl. Fusion Suppl., 1962, pt. 2, p. 403.
68. Hu P. N.— Phys. Fluids, 1966, v. 9, p. 89.
69. Grad H., Hu P. N.— Ibid., 1972, v. 10, p. 2596.
70. Hu P. N., Grad H.— Ibid., 1972, v. 15, p. 402.
71. Великович А. Л., Либерман М. А.— Физ. плазмы, 1976, т. 2, с. 334.
72. Великович А. Л., Либерман М. А.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1390.
73. Великович А. Л., Либерман М. А.— Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа», 1977, № 3, с. 134.
74. Брагинский С. И.— В кн. Вопросы теории плазмы /Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1963.— Т. I, с. 183.
75. Спитцер Л. Физика полностью ионизированного газа.— М.: Мир, 1965.
76. Moriette P.— Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 51.
77. Ландау Л. Д. и Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Гостехиздат, 1957.
78. Jaffrin M.Y., R.F. Probstein. Phys. Fluids, 1964, v. 7, p. 1658.
79. Шафранов В. Д.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 1453.
80. Halmou E.— Phys. Fluids, 1971, p. 14, p. 2134.
81. Gross R.— Цитир. в¹² сб.— P. 72.
82. McNeill D. H.— Phys. Fluids, 1975, v. 18, p. 44.

83. Robertson S. H., Chen Y. G.— Ibid., p. 917.
84. Lighthill M. J.— In: *Surveys in Mechanics* /Ed. G. K. Batchelor, R. M. Davies.— Cambridge, Mass.: Cambridge Univ. Press, 1956.— P. 250.
85. Сагдеев Р. З.— В кн. *Вопросы теории плазмы* /Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1964.— Т. 4, с. 20.
86. Tidman D., Kroell N. A. *Shock Waves in Collisionless Plasmas*.— N. Y., Wiley, 1971.
87. Карпман В. И. *Нелинейные волны в диспергирующих средах*.— М.: Наука, 1973.
88. Мейер Р. Е. В кн. *Нелинейные волны*.— М.: Мир, 1977, с. 244.
89. Sherwell D., Cairns R. A.— *J. Plasma Phys.*, 1977, v. 17, p. 265.
90. Галеев А. А., Сагдеев Р. З.— Цитир в ⁸⁵ сб.—1973, т. 7, с. 3.
91. Cadez V., Selak S.— *Fizika*, 1974, v. 6, p. 67.
92. Whitman G. B.— *Comm. Pure Appl. Math.*, 1959, v. 12, p. 113.
93. Имшенник В. С.— *Физ. плазмы*, 1975, т. 1, с. 202.
94. Hintz E.— Цитир. в ²⁰ сб.— P. 213.
95. Greywall M. G.— *Phys. Fluids*, 1975, v. 18, p. 1439.
96. Greywall M. G.— Ibid., 1973, v. 16, p. 561.
97. Greywall M. G.— Ibid., 1976, v. 19, p. 2046.
98. Имшенник В. С.— *ЖЭТФ*, 1962, т. 42, с. 236.
99. Sommer E. J., Jr., Barach J. P.— *Phys. Fluids*, 1971, v. 14, p. 2102.
100. Paul J. W. M., Holmes L. S., Parkinson M. J., Sheffield J.— *Nature*, 1965, v. 208, p. 133.
101. Morse D. L.— *Plasma Phys.*, 1973, v. 15, p. 1262.
102. Paul J. W. M., Goldenbaum G. C., Iiyoshi A., Holmes L. S., Hardcastle R. A.— *Nature*, 1976, v. 216, p. 363.
103. Kornherr M.— *Zs. Phys.*, 1970, v. 233, p. 37.
104. Woods L. C.— *J. Plasma Phys.*, 1969, v. 3, p. 435.
105. Manheimer W. M., Haber I.— *Phys. Fluids*, 1974, v. 17, p. 706.
106. Либерман М. А.— *ЖЭТФ*, 1978, т. 75, с. 1652.
107. Либерман М. А.— *ЖЭТФ*, 1979, т. 77, с. 124.
108. Leonard V. P.— *J. Plasma Phys.*, 1973, v. 10, p. 13.
109. Leonard V. P.— Ibid., 1972, v. 7, p. 157.