УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

536.23

ТЕРМОФОРЕЗ В ГАЗАХ

С. П. Баканов, Б. В. Дерягин, В. И. Ролдугин

СОДЕРЖАНИЕ

Введение		255
1.	Термофорез в сильно разреженных газах (малые тела)	256
	а) Модель «запыленного газа» (257). б) Модель свободно-молекулярного обте-	
	кания (258).	
2.	Термофорез в слаборазреженных газах	259
	а) Граничные условия (260). б) Скорость термофореза (262).	
3.	Кинетические коэффициенты.	263
	а) О некоторых интегральных соотношениях (264). б) Неизотермическое	
	течение Пуазейля в плоском канале (266).	
4.	Граничные задачи кинетической теории и термодинамика необратимых	
	процессов	269
	а) О производстве энтропии в ограниченном объеме газа (270). б) Скорость	
	термофореза (272). в) Определение коэффициента теплового скольжения	
_	ra3a (274).	
<u>3</u> a	аключение	275
ц	итированная литература	276

ВВЕДЕНИЕ

Явление, о котором пойдет речь ниже, было открыто экспериментально более ста лет назад. Суть его состоит в следующем. Если в газ, где с помощью внешних источников тепла поддерживается малый градиент температуры, поместить постороннее тело (для простоты в дальнейшем будем рассматривать сферу радиуса R), то, несмотря на отсутствие внешних сил, тело придет в движение с установившейся скоростью, пропорциональной градиенту температуры и направленной в ту же сторону, что и поток тепла, обусловленный теплопроводностью газа. Объяснить и рассчитать этот эффект для тел малого размера ($R\ll\lambda$, где λ — длина свободного пробега молекул газа) после создания кинетической теории газов удалось довольно просто. Был подсчитан импульс, передаваемый телу молекулами, падающими со стороны более нагретого газа, который оказался больше суммарного импульса «холодных» молекул. Гораздо сложнее обстоит дело в случае тела большого размера или, что эквивалентно, слаборазреженного газа, т. е. когда $R \gg \lambda$. В рамках классической гидрогазодинамики скорость движения тела, помещенного в перавномерно нагретый газ, получается огличной от нуля лишь при наличии внешних сил. Впервые ненулевой результат был получен в работе Эпштейна¹, который при постаповке граничных условий на поверхности обтекаемого газом те та учел открытый Рейнольдсом 2 эффект теплового скольжения (creep). Эта работа положила начало развитию гидрогазодинамики со скольжением, в которой классические условия «прилицания» газа на повераности тела заменяются условиями скольжения и скачка. Так, для тангенциальной составляющей скорости газа на поверхности обтекаемого тела было принято условие пропорциональности скорости локальному тангенциальному градиенту температуры. Коэффициент пропорциональности, называемый коэффициентом теплового скольжения, в рамках са-

> © Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1979

мой гидрогазодинамики вычислен быть, конечно, не может. Его следует находить либо из опыта, либо из независимых теоретических представлений. Первую попытку рассчитать коэффициент теплового скольжения предпринял Максвелл³ на базе только что созданной кинетической теории газов.

Впоследствии в течение довольно длительного времени основное внимание уделялось исследованию процессов переноса в объеме газа вдали от ограничивающих газ поверхностей. Здесь были достигнуты значительные успехи в развитии методов решения задач кинетической теории.

Интерес к граничным задачам кинетической теории сильно возрос в связи с созданием летательных аппаратов для верхних слоев атмосферы Земли, а также интепсивным развитием вакуумной техники и потребностями химической технологии. Возникла необходимость обобщения кинетической теории на случай, когда существенную роль в явлении играют не только соударения газовых молекул между собой, по и их взаимодействие с ограничивающими газ поверхностями.

К этому моменту уже были известны результаты экспериментов по измерению скорости термофореза аэрозолей, которые показали, что формула Эпштейна дает заниженное значение скорости термофореза, не обнаруживает зависимости ее от характера взаимодействия молекул газа с поверхностью тела, плохо согласуется с экспериментом для тел большой теплопроводности. Такое резкое противоречие с экспериментом стимулировалэ дальнейщие теоретические исследования явления термофореза.

Немаловажный вклад в построение теорни термофореза крупных тел был сделан с помощью мегодов термодинамики необратимых процессов (ТНП). Впервые они были применены к исследованию термофореза в ⁴⁻⁶. В дальнейшем на основе представления ТНП были сформулированы граничные условия для гидрогазодинамики со скольжением ⁷, а также предложен рецепт ⁸, позволяющий устранить исоднозначность при расчете кинетических коэффициентов для граничных задач, возникающую при использовании методов полиномиальных разложений. Одновременно в рамках кинетической теории газов была показана ⁸ применимость ТНП к задачам, где существенную роль играют свойства газа внутри кнудсеновских слоев. Ниже приведен расчет скорости термофорсза не только в рамках гидрогазодинамики со скольжением, но и на основе ТНП. Совнадение результатов, полученных этими двумя методами, несомненно, повышает степень надежности процедуры вычислений, а также указывает на правильность самой постановки задачи.

Что касается экспериментального материала, то в литературе в основном приводятся данные об измерениях, проведенных с аэрозолями ^{9-19,42}. Эти системы довольно сложны в работе, свойства их сильно зависят от способа приготовления и параметров исходного материала. Поэтому разброс результатов и ошибки измерений значительны. Кроме того, пока не проделаны опыты в том диапазоне чиссл Киудсена, где можно провести уберенное сравнение с результатами теоретических расчетов.

Следует подчеркнуть, что все излагаемые пиже соображения справедливы при достаточно малых значениях градиента температуры ∇T , когда характерный масштаб се неоднородности *L* велик по сравнению с длиной пробега молекул газа λ .

1. ТЕРМОФОРЕЗ В СИЛЬНО РАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ (МАЛЫЕ ТЕЛА)

Разработаны два подхода к расчету скорости движения малых тел в неравномерно нагретом газе²⁰. Одни из них базируется на представлении системы «газ — взвещенные в нем малые тела» как бинарной смеси

ТЕРМОФОРЕЗ В ГАЗАХ

газов. Как известно, в бинарной газовой смеси под действием градиента температуры происходит разделение компонентов. Этот же эффект имеет место и в рассматриваемой системе: неравномерный нагрев приводит к относительному движению собственно газа и взвешенных в нем тел. Такая модель нашла широкое применение при исследовании течения газов сквозь пористые тела ²¹⁻²⁵ и эволюции неравновесных аэрозольных систем ²⁶⁻³⁰. В зарубежной литературе ее иногда называют термином dustygas model — модель запыленного газа.

Второй подход состоит в прямом вычислении импульса, который передают телу молекулы окружающего его газа при столкновении с поверхностью и последующем отражении. Установившаяся скорость движения тела находится приравниванием полного импульса нулю ^{20,31}.

а) Модель «запыленного газа»

Главное достоинство модели «запыленного газа» состоит в ее несомненной простоте, связанной в первую очередь с тем, что для решения поставленной задачи можно применить уже готовые результаты, полученные в кинетической теории для газовых смесей. Действительно, скорость движения малого тела относительно центра масс совокупности газовых молекул под действием градиента температуры совпадает в рамках рассматриваемой модели со скоростью термодиффузионного разделения компонентов смеси и равна ^{32,33}

$$\mathbf{v}_T = \frac{n^2}{n_1 n_2} D^{(T)} \frac{\nabla T}{T_0} , \qquad (1.1)$$

где n_1 и n_2 соответственно число малых тел и число газовых молекул в единице объема, $n = n_1 + n_2$, $D^{(T)}$ — коэффициент «термодиффузии» в рассматриваемой бинарной системе, T_0 — некоторая средняя температура. Для вычисления $D^{(T)}$ необходимо задаться законами взаимодействия молекул газа между собой и с поверхностью тела. Взаимные соударения взвешенных в газе тел можно не учитывать.

Рассмотрим вначале случай, когда все соударения происходят по закону столкновения упругих шаров. Если при этом учесть, что массы тел и их размеры велики по сравнению с соответствующими характеристиками газовых молекул (напомним, однако, что $R \ll \lambda$), а их число в единице объема мало́, то после очевидных преобразований известных выражений ^{32,33} приходим к следующей формуле для скорости движения малой сферы относительно центра масс газа:

$$\mathbf{v}_{T} = -\frac{3}{4} \frac{\eta}{\rho} \frac{\nabla T}{T_{0}}; \qquad (1.2)$$

здесь η — динамическая вязкость газа, р — его плотность. Таким образом, скорость термофореза в сильно разреженном газе не зависит от размеров тела и обратно пропорциональна давлению газа. Мэзон и Чепмен сделали попытку учесть в рамках этой модели зависимость скорости термофореза от типа взаимодействия газ — поверхность ²⁶. Рассмотрев помимо упругого взаимодействия рассеяние по закону Ламберта, опи в обоих случаях пришли к выражению (1.2). Сложнее обобщить этот метод на случай других моделей взаимодействия газовых молекул с поверхностью тела. Это удобнее сделать иным способом, а именно воспользовавшись моделью свободно-молекулярного обтекания.

6 уФН, т. 129, вып. 2

б) Модель свободно-молекулярного обтекания

Модель свободно-молекулярного обтекания газом малого тела базируется на очевидном соображении, что состояние газа слабо возмущается наличием в нем малого тела. Действительно, если размер тела мал по сравнению со средней длиной пробега газовых молекул, то мала и вероятность того, что молекула газа, будучи отраженной от тела после соударения с ним, вновь испытает такое соударение. С другой стороны, когда характерный масштаб неоднородности температуры газа велик по сравнению с длиной пробега молекул, то функцию распределения молекул на достаточно большом расстоянии от тела можно найти путем разложения по малому параметру λ/L функции. удовлетворяющей уравнению Больцмана.

Функция распределения отраженных молекул $f^*(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ определяется характером взаимодействия их с поверхностью тела. Если ограничиться одноатомными газами и не рассматривать пелинейных эффектов, связанных с адсорбцией газов па поверхности тела, то в стационарном случае (когда рассеяние молекул газа поверхностью можно считать практически мгновенным) вероятность того, что молекула с начальной скоростью \mathbf{v}' после соударения с поверхностью тела будет иметь скорость в элементе объема пространства скоростей **dv** вблизи скорости **v**, можно записать в виде $W(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ **dv**. Оператор $W(\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v})$ должен быть пеотрицательным и, кроме того, удовлетворять условию пормировки

$$\int_{(\mathbf{v}\mathbf{n})>0} W(\mathbf{v}'\to\mathbf{v})\,\mathrm{d}\mathbf{v}=1.$$

Интегрирование здесь ведется по полупространству, где проекция скорости молекул на направление внешней нормали к телу положительна. Функция распределения отраженных молекул должна удовлетворять условию непротекания:

$$(\mathbf{vn}) f^+(\mathbf{v}) = \int_{(\mathbf{v'n})<0} |(\mathbf{v'n})| f(\mathbf{v'}) W(\mathbf{v'} \to \mathbf{v}) d\mathbf{v'}.$$

Ядро рассеяния W зависит от природы атомов газа и поверхности, а также от температуры поверхности и характера ес обработки. При этом любое ядро рассеяния должно удовлетворять припципу детального равновесия ³⁴:

$$|(\mathbf{v'n})| W(\mathbf{v'} \to \mathbf{v}) \exp\left(-\frac{\rho v'^2}{2\rho}\right) = (\mathbf{vn}) W(-\mathbf{v} \to -\mathbf{v'}) \exp\left(-\frac{\rho v^2}{2\rho}\right). \quad (1.3)$$

Условие неотрицательности, условие нормировки и принции детального равновесия — три основных соотношения, которые определяют вид ядра рассеяния, допустимый в качестве математической модели рассеяния молекул газа поверхностью раздела фаз. До недавнего времени были известны ³⁵ только четыре простейшие модели (и их липейные комбинации), которые не нарушали этих ограничений:

1) зеркальное отражение:

$$W (\mathbf{v}' \rightarrow \mathbf{v}) = \delta \{ \mathbf{v}' - \mathbf{v} + 2\mathbf{n} (\mathbf{vn}) \}$$
(1.4)

(δ (x) — дельта-функция Дирака);

2) полное обратное рассеяние:

$$W (\mathbf{v}' \to \mathbf{v}) = \delta (\mathbf{v} + \mathbf{v}'); \tag{1.5}$$

3) диффузное отражение с полной аккомодацией:

$$W(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\rho}{2p}\right)^2 (\mathbf{v}\mathbf{n}) \exp\left(-\frac{\rho \mathbf{v}^2}{2p}\right); \qquad (1.6)$$

4) упругое (без изменения модуля скорости) рассеяние по закону косинусов (Ламберта):

$$W(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}) = \frac{1}{\pi} \frac{(\mathbf{v}\mathbf{n})}{v^3} \,\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}'). \tag{1.7}$$

Максвелл ³ объединил выражения (1.4) и (1.6) в однопараметрическое семейство моделей

$$W(\mathbf{v}' \to \mathbf{v}) = (1 - \varepsilon) \,\delta\left(\mathbf{v}' - \mathbf{v} + 2\mathbf{n} \,(\mathbf{v}\mathbf{n})\right) + \varepsilon \,\frac{2}{\pi} \left(\frac{\rho}{2p}\right)^2 (\mathbf{v}\mathbf{n}) \exp\left(-\frac{\rho\nu^2}{2p}\right), \quad (1.8)$$

где є — доля диффузно отраженных молекул. Более гибкие модели предложены в ³⁶⁻³⁹, однако мы не будем на них останавливаться.

Зеркальное отражение и полное обратное рассеяние являются скорее гипотетическими моделями. Последнюю часто используют для описания сильно шероховатых поверхностей. Рассеяние с полной аккомодацией приближение наиболее близкое к действительности, особенно если молекулы газа временно захватываются поверхностью. Упругое рассеяние по закону косинусов, по-видимому, реализуется при умеренно шероховатой поверхности, если атомы ее по сравнению с атомами газа являются тяжелыми и если при взаимодействии не происходит захвата.

Задаваясь моделью рассеяния, нетрудно найти импульс отраженных от поверхности сферы молекул, который в сумме с импульсом падающих молекул определяет после интегрирования по поверхности сферы полную силу воздействия газа на погруженное в него тело. Для случаев зеркального отражения и полного обратного рассеяния эта сила оказывается одинаковой. Для двух других моделей получается иное значение. Что касается скорости термофореза, то зеркальное отражение, обратное рассеяние и рассеяние по закону косинусов приводят к одинаковому значению скорости, а для диффузного отражения с полной аккомодацией скорость оказывается мельше в 1 — ($\pi/8$) раз. Этот результат удобно записать в виде формулы (ср. (1.2)):

$$\mathbf{v}_T = -\frac{3}{4\left[1 + (\pi\varepsilon \ 8)\right]} \frac{\eta}{\rho} \frac{\nabla T}{T_0}. \tag{1.9}$$

2. ΤΕΡΜΟΦΟΡΕЗ Β СЛАБОРАЗРЕЖЕННЫХ ГАЗАХ

Если размер взвешенного в газе тела не исчезающе мал по сравнению с длиной свободного пробега газовых молекул, то такое тело возмущает поток падающих на его поверхность молекул заметным образом. Поэтому развитый в предыдущей главе подход к расчету скорости термофореза в таких случаях оказывается неприменимым. Можно построить теорию, учитывающую слабое $| \sim R/\lambda |$ возмущение телом упомянутого потока молекул. Такие работы были опубликованы ⁸⁴, ⁸⁵; правда, их результаты даже качественно различны.

Есть возможность построить метод последовательных приближений в другом предельном случае, когда размер тела значительно превосходит величину среднего свободного пробега. Речь идет о гидрогазодинамике со скольжением. Как уже упоминалось, впервые в такой постановке скорость термофореза крупных тел вычислялась в работе Эпштейна¹, который получил для **v**_r выражение

$$\mathbf{v}_{T} = -\frac{3}{4} \frac{\eta}{\rho} \frac{1}{1 - (1 \ 2) (\varkappa_{i} \ \varkappa_{c})} \frac{\nabla T}{T_{0}}, \qquad (2.1)$$

где \varkappa_i и \varkappa_e соответственно теплопроводности тела и газа. Формула (2.1) отличается от (1.9), по существу, лишь множителем $\left(1 + \frac{1}{2} \frac{\varkappa_i}{\varkappa_e}\right)^{-1}$, обязанным своим происхождением влиянию тела на распределение температур в газе. Именно наличие этого множителя резко снижает теоретическое значение υ_r для сильно теплопроводных тел большого размера, чего не наблюдается на опыте. Это расхождение с экспериментом побудило Брока ⁴⁰⁻⁴² искать усовершенствование подхода Эпштейна на пути учета в граничных условиях слагаемых порядка числа Кнудсена Kn = λ/R , которые в работе¹ были опущены. Аналогичный метод был использован и в ⁴³⁻⁴⁶, причем одновременно уточнялись значения численных коэффициентов.

Наряду с этим развивалась и уточнялась методика расчета скорости термофореза на основе термодинамики необратимых процессов ⁴³, ⁴⁵, ⁴⁶. Следует, однако, отметить, что, несмотря на достигнутый прогресс, результаты расчета, полученные прямым и термодинамическим путями, все же отличались друг от друга. Анализ показывает, что главная причина такого расхождения заключается в том, что при формулировке граничных условий в рамках гидрогазодинамики со скольжением были учтены не все слагаемые первого порядка по числу Кнудсена, а лишь часть из них. Позднее появились работы ⁴⁷⁻⁵⁰, где в граничных условиях выписывались ряды, содержащие стецени Kn вплоть до пятой, однако без достаточных оснований опускались некоторые линейные по Kn слагаемые.

В связи со сказанным мы считаем нелишним подробно описать методику получения корректных граничных условий и схему решения поставленной задачи в линейном по Kn приближении.

а) Граничные условия

Пусть неравномерно нагретый газ обтекает поверхность произвольной формы. Вдали от этой поверхности он описывается уравнениями гидрогазодинамики. Ограничимся приближением Навье — Стокса. При любом сколь угодно малом числе Кнудсена вблизи границы раздела фаз имеется область, где уравнения гидрогазодинамики неприменимы. В этой области состояние газа описывается решением уравнения Больцмана с истичными кинетическими граничными условиями, которое по мере удаления от границы переходит в приближение Навье — Стокса, полученное с некоторыми фиктивными макроскопическими граничными условиями. Наша задача заключается в формулировке именно этих граничных условий. Аналогичпая ситуация имеет место в задаче о распространении тепла, диффузии и т. п.

Запишем истинную скорость газа в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + \mathbf{v}^{(Kn)},$$

где v — скорость, удовлетворяющая уравнениям гидрогазодинамики в приближении Навье — Стокса, если полагать их справедливыми вплоть до границы раздела фаз, $v^{(Kn)}$ — поправка к этой скорости, возникающая при учете состояния газа в слое Кнудсена. На достаточном удалении от поверхности раздела $v^{(Kn)} \rightarrow 0$ и $u \approx v$. Если на поверхности конденсированной фазы не происходит адсорбции или десорбции молекул, и она не проницаема для молекул газа, то нормальная компонента истинной скорости и на поверхности Σ должна обращаться в нуль. Из уравнения пепрерывности для и и v следует, что такому же уравнению удовлетворяет и добавка v^(Kn). Интегрируя последнее по нормали к поверхности и учитывая, что на бесконечно большом расстоянии от фазовой границы v^(Kn) обращается в нуль, получаем для нормальной составляющей скорости граничное

260

условие вида

$$v_n \mid_{\Sigma} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{\mathbf{J}}_{\tau}^{(m)}, \qquad (2.2)$$

где символом $\mathbf{\hat{l}}_{\tau}^{(m)}$ обозначена проинтегрированная по нормали к поверхности раздела фаз плотность тангенциального потока массы, локализованного в слое Кнудсена

$$\hat{\mathbf{l}}_{\tau}^{(m)} = \int_{0}^{\infty} \rho \mathbf{v}_{\tau}^{(\mathsf{Kn})} dn.$$
(2.3)

Аналогичным образом, обозначая плотность тангенциального потока энергии, локализованного в слое Кнудсена, символом $\hat{\mathbf{I}}_{\tau}^{(e)}$ и введя тепзор напряжений $p_{\mu\nu} = p\delta_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}$, имсем граничное условие для потоков тепла, нормальных фазовой границе:

$$\left(I_{\iota n}^{(q)} - I_{in}^{(q)} + \frac{3}{2} p v_n + v_{\gamma} p_{\nu n}\right)_{\Sigma} = -\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\hat{\mathbf{j}}_{\tau}^{(e)}\right).$$
(2.4)

Индексы е и і относят соответствующие величины к газу и к конденсированной фазе.

Для получения остальных граничных условий, а также соотношений, выражающих связь потоков $\hat{I}_{\tau}^{(m)}$ и $\hat{I}_{\tau}^{(q)}$ с макрохарактеристиками газа, обратимся к представлениям термодинамики необратимых процессов. Как будет показано ниже, искомые выражения имеют вид липейпых соотношений между некоторыми «потоками» и «силами», вычислепными на границе раздела фаз. Из руководств по ТНП известно, что для корректной записи таких соотношений необходимо прежде всего найти величину производства энтропии системы. В нашем случае речь идет о производстве энтропии на границе раздела фаз. Его можно подсчитать, интегрируя по поверхности раздела Σ разность пормальных потоков энтропии в газе и конденсированной фазе. Такой метод был впервые предложен в ⁵¹. В дальшейшем оп был распространен на случай жидкостей и многокомпонситных газовых смесей ⁵², ⁵³, а также разреженных газов ^{49, 50}. Этот метод позволяет учесть эффекты на границе газ — копденсированная фаза в самом общем виде.

Для вычисления потока энтропии в газе запишем выражения для потоков тепла и импульса для достаточно малых скоростей и градиентов температуры в виде

$$I_{e\mu}^{(q)} = -\varkappa_e \left(\frac{\partial T_e}{\partial r_{\mu}} + \frac{2}{5} \frac{T_0}{p} \frac{\partial \sigma_{\mu\nu}}{\partial r_{\nu}} \right), \qquad (2.5)$$

$$\sigma_{\mu\nu} = -2\eta \nabla_{\mu} \left(v_{\nu} + \frac{2}{5p} I_{e\nu}^{(q)} \right); \qquad (2 \ 6)$$

здесь удержаны некоторые слагаемые, соответствующие приближению Барнетта (см. ³²). Под $\nabla_{\mu} \cdot a_{\nu}$ подразумевается комбинация

$$\nabla_{\mu} \cdot a_{\mathbf{v}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{\mu}}{\partial r_{\nu}} + \frac{c a_{\nu}}{\partial r_{\mu}} \right) - \frac{1}{3} \delta_{\mu\nu} \frac{\partial a_{h}}{\partial r_{h}}.$$
 (2.7)

Численный коэффициент 2/5 вычислен в приближении одного полинома метода Чепмена — Энскога для одноатомных газов.

Записывая с помощью (2.5) и (2.6) выражение для производства энтропии в единице объема газа, используя уравнение баланса энтропии и ограничивая рассмотрение случаем, когда внутри конденсированной фазы имеют место лишь потоки тепла, получим производство энтропии на границе раздела фаз в виде

$$\Delta S_{W} = \int d \sum \left[\frac{1}{2} \left(I_{en}^{(q)} + I_{in}^{(q)} \right) \left(\frac{1}{T_{i}} - \frac{1}{T_{e}} + \frac{2}{5pT_{0}} \sigma_{nn} \right) + \frac{\sigma_{\tau n}}{T_{0}} \left(\mathbf{v}_{\tau} + \frac{2}{5p} \mathbf{I}_{e\tau}^{(q)} \right) + \frac{\hat{\mathbf{I}}_{\tau}^{(m)}}{\rho} \frac{1}{T_{0}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(p + \sigma_{nn} \right) - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{I}}_{\tau}^{(q)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{T_{e}} + \frac{1}{T_{i}} - \frac{2}{5pT_{0}} \sigma_{nn} \right) \right]. \quad (2.8)$$

Теперь можпо записать линейные соотнощения между «потоками» и «термодинамическими силами», взятыми на поверхности раздела. Выберем в качестве «потоков» выражения

$$I_{0} = \frac{1}{T_{i}} - \frac{1}{T_{e}} + \frac{2}{5pT_{0}}\sigma_{nn}, \quad I_{2} = \hat{I}_{\tau}^{(q)} = \hat{I}_{\tau}^{(e)} - \frac{5}{2}\frac{p}{\rho}\hat{I}_{\tau}^{(m)},$$

$$I_{1} = \frac{1}{T_{0}}\left(\mathbf{v}_{\tau} + \frac{2}{5p}I_{e\tau}^{(q)}\right), \quad I_{3} = \frac{\hat{I}_{\tau}^{(m)}}{\rho}.$$
(2.9)

Тогда «силы» принимают вид

$$X_{0} = \frac{1}{2} (I_{en}^{(q)} + I_{in}^{(q)}), \quad X_{2} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{1}{T_{i}} + \frac{1}{T_{e}} - \frac{2}{5pT_{0}} \sigma_{nn} \right),$$

$$X_{1} = \sigma_{n\tau}, \qquad X_{3} = \frac{1}{T_{0}} \frac{\partial}{\partial \tau} p_{nn}.$$
(2.10)

Следовательно,

$$I_0 = L_{00} X_0, (2.11)$$

$$\mathbf{I}_{k} = \sum_{i=1}^{3} L_{ik} \mathbf{X}_{i}, \quad k = 1, \ 2, \ 3.$$
 (2.12)

Согласно принципу Онзагера $L_{ik} = L_{ki}$. Уравнепия (2.11) и (2.12) при k = 1 выражают еще два граничных условия, равенства (2.12) при k = 2,3 связывают потоки $\hat{\mathbf{I}}_{\tau}^{(e)}$ и $\hat{\mathbf{I}}_{\tau}^{(m)}$ с объемными характерисгиками газа.

б) Скорость термофореза

Задача определения скорости термофореза состоит в расчете относительной скорости газа и погруженного в него тела, когда на достаточно большом расстоянии от последнего поддерживается малый постоянный градиент температуры. Процедура расчета заключается в определении поля температур в окрестности тела, поля скоростей газа, обусловленного его неравномерным нагревом, и приравнивании нулю полной силы, с которой газ воздействует на тело. Распределение температур в газе и конденсированной фазе находится из решения уравпения Лапласа, а поле скоростей и давлений в газе — из уравнений Навье — Стокса и пепрерывности. Постоянные интегрирования определяются с помощью написанных выше граничных условий.

Введем обозначения

$$L_{10} = -\frac{R}{\varkappa_{t}T_{0}^{2}} C_{t} \mathsf{Kn}, \quad L_{11} = -\frac{R}{\eta T_{0}} C_{m} \mathsf{Kn}, \quad (2.13)$$
$$L_{12} = \left(\frac{3}{2} - k_{TS}\right) \frac{\eta}{\rho}, \quad L_{22} = R\varkappa_{e}T_{0}^{2}C_{q} \mathsf{Kn}, \quad L_{32} = R \frac{\eta}{\rho} T_{0}C_{v} \mathsf{Kn}.$$

Ограничиваясь слагаемыми, пропорциональными степени числа Кнудсена не выше первой, получим граничные условия в виде

$$v_{r} = \operatorname{Kn} C_{v} \frac{\eta}{\rho T_{0}} \frac{1}{R} \left(\operatorname{clg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^{2}}{\partial \theta^{2}} \right) \frac{1}{2} (T_{e} + T_{i}),$$

$$v_{\theta} = k_{TS} \frac{\eta}{\rho T_{0}} \frac{1}{R} \frac{\partial T_{e}}{\partial \theta} - \frac{R}{\eta} C_{m} \operatorname{Kn} \sigma_{r\theta} - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} - k_{TS} \right) \frac{\eta}{\rho T_{0}} \frac{1}{2\varkappa_{e}} C_{t} \operatorname{Kn} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{2} (I_{er}^{(q)} + I_{ir}^{(q)}),$$

$$T_{e} - T_{i} = -\frac{R}{\varkappa_{e}} C_{t} \operatorname{Kn} \frac{1}{2} (I_{er}^{(q)} + I_{ir}^{(q)}),$$

$$-\varkappa_{e} \frac{\partial T_{e}}{\partial r} + \varkappa_{i} \frac{\partial T_{i}}{\partial r} = -\operatorname{Kn} C_{q} \varkappa_{e} \frac{1}{R} \left(\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^{2}}{\partial \theta^{2}} \right) \frac{1}{2} (T_{e} + T_{i}).$$

$$(2.14)$$

Элементарные выкладки приводят к формуле для скорости термофореза:

$$\mathbf{v}_{T} = -k_{TS} \frac{\eta}{\rho T_{0}} \nabla T \frac{1}{1 - (1 \ 2) (\varkappa_{i} \ \varkappa_{e})} \left\{ 1 + \mathsf{Kn} \left[\frac{\varkappa_{i}}{\varkappa_{c}} \left(\frac{1}{2} C_{i} + \frac{3}{4k_{TS}} C_{i} - \frac{3}{k_{TS}} C_{m} \right) - \frac{C_{v}}{k_{TS}} + C_{m} \left(\frac{3}{k_{TS}} - 2 \right) + \frac{1}{1 - (1 \ 2) (\varkappa_{i} \ \varkappa_{e})} \left(C_{q} - \frac{\varkappa_{i}}{\varkappa_{e}} C_{t} \right) \right] \right\}.$$
(2.15)

При Kn = 0 выражение (2.15) формально совпадает с формулой Энштейна (2.1). Как мы указывали выше, формула Энштейна плохо согласуется с экспериментом, особенно для тел большой теплопроводности. Из (2.15) (см. также ^{40-46, 50}) следует, что при $\varkappa_i \gg \varkappa_e$ скорость термофореза не зависит от отношения теплопроводностей тела и газа. Эксперимент, по крайней мере качественно ⁹⁻¹⁹, обнаруживает именно такое поведение сильно теплопроводных тел в поле градиента температуры.

Из равенства (2.15) вытекает еще один интересный результат: при

$$C_t = \frac{6C_m}{k_{TS} \quad (3\ 2)}$$

скорость термофореза сильно теплопроводных тел должна менять знак (отрицательный термофорез). Такого эффекта не предсказывают работы ⁴⁰. ⁴⁴, ⁴⁵. Впервые на возможность отрицательного термофореза указал Брок ⁴². Подобный же результат был получен в работе Двайера ⁴⁷. Его отмечают также Вестнер и др. ⁴⁹⁻⁵⁰ и Соун и Аоки ⁵⁴. Экспериментально явление отрицательного термофореза в явном виде пока не наблюдалось, так что вопрос о его существовании остается открытым.

3. КИНЕТИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ

Коэффициенты вязкого (изотермического) C_m , теплового k_{TS} скольжений, температурного скачка C_t и др. можно рассчитать лишь в рамках кинетической теории газов. Аналогичное положение имеет место в проблеме замыкация уравнений гидрогазодинамики путем установления связей между потоками вещества, импульса и энергии с плотностью, массовой скоростью и температурой. Существенное различие заключается, однако, в том. что здесь наряду со столкновениями молскул между собой следует учитывагь их столкновения с граничной поверхностью.

Впервые такую задачу решал еще Максвелл³. Он отметил разрывную природу функции распределения молекул газа вблизи поверхности ограничивающих газ тел и получил решение. постулировав, что падающие на поверхность молекулы имеют распределение, не отличающееся от объемного вплоть до самой степки, а отраженные находятся в равновесии со степкой. В такой модели толщина слоя Кнудсена, где газовые молекулы постепенно меняют свое распределение, принята равной нулю. Тем не менее, даже в рамках такой грубой модели, Максвелл получил довольно хорошую оценку коэффициентов теплового и вязкого скольжений. В дальнейшем эти расчеты были уточнены ⁵⁵⁻⁶¹. Следует заметить, что, кроме непосредственного расчета указанных коэффициентов, большой интерес представляет сама структура слоя Кнудсена. В настоящее время появились возможности не только теоретического, но и экспериментального изучения этой структуры ^{62, 63}.

Первой попыткой теоретического анализа явлений, происходящих в слое толщиной порядка средней длины пробега газовых молекул вблизи поверхности твердого тела, следует, по-видимому, считать работы Гросса и др. 64 65, где предложенный Ивоном 66 метод полупространственных разложений был применен к решению залачи Куртта. Суть его сволится к следующему. Пусть малое отклонение функции распределения от максвелловского значения является функцией расстояния от границы раздела фаз. Разложим его в ряд по некоторым полиномам скорости, подобно тому как это делается, например, в методе Чепмена — Энскога, считая, однако. коэффициенты разложения функциями расстояния от границы. Учет разрывности функции распределения газовых молекул на границе обеспечивается различием этих коэффициентов для ансамблей молекул с положительной и отрицательной проекциями скоростей на нормаль к поверхности раздела. Оказывается, что метод полупространственных разложений в любом приближении дает лучшие результаты, чем обычный метод полиномиальных разложений (в полном пространстве) в приближении вдвое более высоком. Однако цена этого улучшения — усложпение системы **у**равнений.

Физически, однако, очевидно, что поправка к равновесному распределению, определенная из решения граничной задачи, должна по мере удаления от границы приобретать симметричную форму, одинаковую для молекул обоих сортов. При условии малости внешнего возмущения можно потребовать, чтобы эта поправка на достаточно большом расстоянии от границы совпадала с распределением Чепмена — Энскога. Такой подход, предложенный в ⁶⁷ и развитый затем в ⁶⁸, ⁶⁹, позволил определить, с одной стороны, вид аппроксимации функции распределения, а, с другой, — указать некоторые важные связи между коэффициентами разложения, позволяющие существенно упростить систему уравнений для определения этих коэффициентов. Начнем с установления этих связей.

а) О некоторых интегральных соотношениях⁷⁰

Будем искать решение стационарного уравнения Больцмана

$$\mathbf{c} \,\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = I\left(f,\,f\right) \tag{3.1}$$

в виде

$$f = f^{(0)} (1 + \varphi), \tag{3.2}$$

где $\phi \ll 1$. Предположим, что достаточно хорошая аппроксимация функции ϕ (c. x) может быть представлена в виде рядов

$$\varphi^{+}(\mathbf{c}, x) = \sum_{i} a_{i}^{+}(x) P_{i}(\mathbf{c}),$$

$$\varphi^{-}(\mathbf{c}, x) = \sum_{i} a_{i}^{-}(x) P_{i}(\mathbf{c})$$
(3.3)

где P_i (с) — некоторые полиномы скорости молекул. Индексы + и — относятся соответственно к молекулам с $c_x > 0$ и $c_x < 0$. (Ось x направ-

лена по нормали к поверхности раздела фаз внутрь газа.) Таким образом,

$$\varphi(\mathbf{c}, x) = \frac{\varphi^{+} + \varphi^{-}}{2} + \frac{\varphi^{+} - \varphi^{-}}{2} \operatorname{sign} c_{\mathbf{x}},$$
 (3.4)

где

$$\operatorname{sign} \boldsymbol{c}_{x} = \frac{c_{x}}{|c_{x}|}.$$

Подставим (3.4) в уравнение (3.1), умножим на полином P_k (с) и проинтегрируем по скоростям. Возникающие в правой части системы полученных таким путем уравнений моменты больцмановского интеграла столкновения (в литературе последних лет⁷¹ их называют интегральными скобками)

$$\mathcal{L}_{ih} = [P_i(\mathbf{c}), P_h(\mathbf{c})] - \frac{1}{n^2} \int f^{(0)} P_i(\mathbf{c}) I[P_h(\mathbf{c})] \, \mathbf{d}\mathbf{c}$$
(3.5)

составляют предмет рассмотрения настоящего параграфа.

Метод расчета интегральных скобок, не содержащих символа sign, подробно изложен в книге ³². Вычисление выражений с sign c_x (полупространственных интегральных скобок) для простого одноатомного газа было впервые проделано Ванг-Чанг и Уленбеком ⁷². Расчет даже простейшего из них оказывается делом весьма громоздким. Были предложены численные методы ⁷³, существенный недостаток которых, по нашему мнению, состоит в невозможности априори определить необходимую точность вычислений. Поэтому требуются неоправданно большие затраты машинного времени. Излагаемые ниже соображения открывают также новый путь к оценке необходимой точности расчетов.

Рассмотрим уравнение Больцмана в форме Чепмена — Энскога ³²:

$$f^{(0)}\left[\left(c^{2}-\frac{5}{2}\right)c_{i}\frac{\partial\ln T}{\partial r_{i}}+2\left(c_{i}c_{j}-\frac{1}{3}\delta_{ij}c^{2}\right)\frac{\partial v_{i}}{\partial r_{j}}\right]=f^{(0)}I\left(\varphi\right).$$
(3.6)

Решение его в объеме газа ищется, как известно, в виде рядов по полиномам Сонина — Лагерра. Метод последовательных приближений в рамках линейной по производным от температуры и скорости теории заключается в учете одного, двух и т. д. членов разложения. В приближении одного полинома решение уравпения (3.6) для любой модели взаимодействия молекул имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{n} \left[a_1 \left(\frac{5}{2} - c^2 \right) c_i \frac{\partial \ln T}{\partial r_i} + b_1 \left(c_i c_j - \frac{1}{3} \,\delta_{ij} c^2 \right) \frac{\partial v_i}{\partial r_j} \right], \qquad (3.7)$$

причем коэффициенты a_1 и b_1 связаны соотношением

$$-4a_1 = 3b_1. (3.8)$$

Их можно вычислить, задаваясь моделью взаимодействия молекул. Для удобства дальнейших расчетов введем обозначения

$$P_{1}(\mathbf{c}) = c_{z} \operatorname{sign} c_{x}, \qquad P_{4}(\mathbf{c}) = c_{z} c_{x}^{2}, P_{2}(\mathbf{c}) = c_{x} c_{z}, \qquad P_{5}(\mathbf{c}) = c_{z} c_{x}^{2} \operatorname{sign} c_{x}, P_{3}(\mathbf{c}) = c_{x} c_{z} \operatorname{sign} c_{x}, \qquad P_{6} = c_{z} \left(\frac{5}{2} - c^{2}\right), P_{7} = c_{z} \left(\frac{5}{2} - c^{2}\right) \operatorname{sign} c_{x}.$$
(3.9)

Рассмотрим двумерное изотермическое сдвиговое течение. Уравнение (3.6) принимает вид

$$-\frac{2}{b_1} n f^{(0)} c_x c_z = f^{(0)} I (c c_z).$$

Умпожим его последовательно на P_1 , P_2 , P_5 , P_7 и проинтегрируем по пространству скоростей. Интегралы, которые получаются в левой части, вычисляются элементарно. Справа в соответствии с (3.5) получим интегральные скобки. В результате имеем

$$-\frac{\pi}{b_1} = [P_1, P_2], \quad -\frac{\pi}{b_1} = [P_2, P_5], -\frac{\pi \sqrt{\pi}}{2b_1} = [P_2, P_2], \quad \frac{\pi}{2b_1} = [P_2, P_7].$$
(3.10)

Рассмотрим теперь одномерную задачу теплопроводности. Имеем из (3.6)

$$\frac{1}{a_1} f^{(0)} n\left(\frac{5}{2} - c^2\right) c_z = f^{(0)} I\left[\left(\frac{5}{2} - c^2\right), c_z\right].$$

Умножая на полиномы Р₃, Р₆ и интегрируя по скоростям, получим

$$-\frac{\pi}{4a_1} = [P_3, P_6], \quad \frac{5}{4} \frac{\pi \sqrt{\pi}}{a_1} = [P_6, P_6]. \tag{3.11}$$

Из сопоставления (3.10), (3.11), с учетом (3.8) получаем равенства

$$\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{25} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \mathcal{L}_{22} = -3\mathcal{L}_{36} = \frac{3}{5\sqrt{\pi}} \mathcal{L}_{66} = -2\mathcal{L}_{27}.$$
 (3.12)

Аналогичным путем можно показать, что выполняются соотношения

$$\sqrt{\pi}\mathcal{L}_{34} = \mathcal{L}_{44}, \quad \sqrt{\pi}\mathcal{L}_{36} = \mathcal{L}_{46}. \tag{3.13}$$

Как следует из приведенного вывода, равенства (3.12) и (3.13) являются прямым следствием приближения одного полинома разложения (3.7) и выполняются для различных моделей межмолекулярного взаимодействия с той или иной точностью *). Так, для молекул, взаимодействующих по закону $\sim r^{-5}$, равенства (3.12) и (3.13) являются точными. Уместно отметить, что приложения метода полупространственных разложений, как правило, не выходят за рамки приближения одного полинома. Поэтому при решении граничных задач кинстической теории методом полупространственных разложений парушение равенства (3.12) и (3.13) следует рассматривать как превышение точности теории ^{68, 74}. Предложенная модификация метода полупространственных разложений ценой некоторого огрубления числепных значений искомых коэффициентов, которое легко может быть оценено сравнением с полученными другими методами, позволяет удовлетворить гораздо более важному физическому требованию. Именно, она обеспечивает корректный предельный переход к функции распределения в объеме газа вдали от степок. Кроме того, соотношения (3.12) и (3.13) уменьшают вдвое число полупространственных интегральных скобок, требующих прямого расчета, а также приводят к существенному упрощению системы уравнений для нахождения коэффициентов разложения (3.3). Накопец, с их помощью можно оценить точность, которой разумно ограничиваться при проведении численных расчетов значений Lih.

 б) Неизотермическое течение Пуазейля в плоском канале

Решение задачи о течении газа в плоскопараллельном канале единичной ширины, когда в нем поддерживаются малые постоянные продольные градиенты температуры и давления, позволяет рассчитать ряд входящих

^{*)} Аналогичным образом нетрудно найти соотношения, которым удовлетворяют интегральные скобки и при использовании более одного иолинома в разложении решения уравнения Больцмана.

в (2.15) кинетических коэффициентов. Пусть длина канала L значительно превышает как расстояние между пластинами 2d, так и длину свободного пробега газовых молекул. Направим ось z вдоль оси канала, а ось x по нормали к стенкам внутрь газа, приняв за начало отсчета ось симметрии в промежутке между пластинами. При этом, как легко показать 8,55 , решение стационарного уравнения Больцмана (3.1) сводится к решению цепочки уравнений

$$c_{\mathcal{X}}\frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} = I(f^{(0)}, f^{(0)}), \qquad (3.14)$$

$$c_{z} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial z} \perp f^{(0)} c_{x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + c_{x} \varphi \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x} = f^{(0)} I(\varphi), \qquad (3.15)$$

ит.д.

Уравнению (3.1) удовлетворяет локальное максвелловское распределение, параметры которого не зависят от *х*. Используем его в качестве нулевого приближения к искомому решению. Уравнение (3.15) пригодно при произвольных значениях числа Кнудсена $Kn_d = \lambda/d$, и его решение позволяет определить макрохарактеристики течения при произвольных разрежениях на любых расстояниях от ограничивающих газ поверхностей. Правда, точное решение уравнения (3.15) можно получить лишь для некоторых специальных случаев. Обычно же при рассмотрении таких задач прибегают к различного рода приближенным методам. Используем здесь модифицированный метод полупространственных разложений раздела а) гл. 3.

Следуя Максвеллу, будем считать, что функция распределения молекул вблизи поверхности стенок канала терпит разрыв при $c_x = 0$. Потребуем, однако, чтобы в объеме газа при $Kn_d \ll 1$ опа была непрерывна и переходила в известное решение Чепмена — Энскога. Этим определяется вид аппроксимации функции $\varphi(x. c)$:

$$\varphi^{\pm} = c_{z} \left[a_{0}^{\pm}(x) + c_{x} a_{1}^{\pm}(x) + \left(c^{2} - \frac{5}{2} \right) a_{2}^{\pm}(x) - \left(c_{x}^{2} - \frac{1}{2} \right) a_{3}^{\pm}(x) \right]. \quad (3.16)$$

Функции $a_i^{\pm}(x)$ должны удовлетворять условиям симметрии:

$$a_{0,2,3}^{+}(x) = a_{0,2,3}^{-}(-x), \ a_{1}^{+}(x) = -a_{1}^{-}(-x),$$

и граничным условиям, в качестве которых примем максвелловские (1.8):

$$\begin{array}{c} a_0^-(d) = (1-\varepsilon) \ a_0^+(d), \\ a_1^-(d) = -(1-\varepsilon) \ a_1^+(d), \\ a_2^-(d) = (1-\varepsilon) \ a_2^+(d), \\ a_3^-(d) = (1-\varepsilon) \ a_3^+(d). \end{array}$$

Подставим аппроксимацию (3.16) в уравнение (3.15), умножим последовательно на полиномы $c_z(1 \pm \text{sign } c_x)$, $c_x c_z$ ($1 \pm \text{sign } c_x$), $c_z \left((c^2 - \frac{5}{2}\right) \times (1 \pm \text{sign } c_x)$). $c_z \left(c_x^2 - \frac{1}{2}\right)$ ($1 \pm \text{sign } c_x$), проинтегрируем по скоростям. В результате придем к системе восьми дифференциальных уравнений для определения функций $a_i^{\pm}(x)$. Учет равенств (3.12) и (3.13) позволяет упростить эту систему и дает возможность получить аналитическое решение⁸. Отсюда легко вычислить среднюю скорость газа и плотность потока тепла вдоль канала:

$$\frac{I_{z}^{(m)}(x)}{\rho} = \frac{d^{2}}{2\eta} \left[\left(\frac{x^{2}}{d^{2}} - 1 \right) - \frac{5\pi}{8} \operatorname{Kn}_{d} \frac{2 - \varepsilon}{\varepsilon} F_{1}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{15}{8} \frac{\eta}{\rho} F_{2}(x, \varepsilon) \frac{\partial \ln p}{\partial z} + \frac{3}{4} \frac{\eta}{\rho} F_{3}(x, \varepsilon) \frac{\partial \ln T}{\partial z}, \quad (3.17)$$

$$I_{z}^{(q)} = \frac{3}{2} \frac{\eta}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{2} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \left[1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \left[1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \left[1 + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} \right] \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon} + \frac{\varepsilon}$$

$$I_{z}^{(q)} = \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \left[1 + \frac{1}{2} \Phi_{1}(x, \varepsilon) + \frac{1}{2-\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{2}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial P}{\partial z} - \kappa_{e} \left[1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \operatorname{Kn}_{d} \Phi_{3}(x, \varepsilon) \right] \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3.18)$$

где $F_i(x, \varepsilon)$ и $\Phi_i(x, \varepsilon)$ — некоторые функции расстояния от стенки канала x и коэффициента аккомодации импульса ε . Из (3.17) при $|x-d| \gg \lambda$ и (2.14) получаем для коэффициентов вязкого и теплового скольжений

$$C_m = \frac{5\pi}{16} \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} F_1(0, \varepsilon), \quad k_{TS}^{(0)} = \frac{3}{4} F_3(0, \varepsilon).$$

Значения численных коэффициентов зависят от принятой модели взаимодействия молекул газа. Для модели твердых шаров⁸

$$C_{m} = \frac{5\pi}{16} \frac{2-\varepsilon}{\varepsilon} \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \left[0.358 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} 0.484 + \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^{2} 0.673 \right] \right\}, \quad (3.19)$$

$$k_{TS}^{(0)} = \frac{3}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{\Delta(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \left[1,44 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} 3,75 + \left(\frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}\right)^2 2,46 \right] \right\},$$
(3.20)

где

$$\Delta(\varepsilon) = 1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} 4,07 + \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^2 5,55 + \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^2 2,46.$$
(3.21)

В качестве множителей перед скобками в (3.19) и (3.20) выделены значения соответствующих коэффициентов, полученные в работе Максвелла ³. Видно, что они представляют собой предельные значения C_m и k_{TS}^{ros} при $\varepsilon \to 0$ (почти зеркальное отражение). В другом предельном случае $\varepsilon = 1$ (диффузное рассеяние) $C_m = 1,13; \quad k_{TS}^{ros} = 1,19$. Зависимость k_{TS}^{ros} от ε довольно хорошо аппроксимируется во всем диапазоне изменения ε линейной функцией, что находится в хорошем согласии с результатами других расчетов ⁵⁵⁻⁶¹.

Отметим, что входящий в выражение (2.15) коэффициент теплового скольжения k_{TS} отличается от соответствующего значения $k_{TS}^{(0)}$ из (3.20) для плоской поверхности тем, что он сам зависит от Kn (влияние кривизны поверхности на скорость теплового скольжения). В рассматриваемом приближении $k_{TS} = k_{TS}^{(0)}$ (1 + a Kn). Расчеты, проведенные в ⁸⁷ и ⁸⁸ для модельного кинетического уравнения дали соответственно a = 1,16 и 4,06.

Слагаемое, пропорциональное $F_2(x, \varepsilon)$ в (3.17), описывает скольжение второго порядка | $\sim K n_d^2$ |; его исследование выходит за рамки развиваемого здесь приближения (см. ^{55, 75}).

Рассмотрим теперь равенство (3.17). Первое слагаемое, состоящее из трех членов, описывает поток тепла в отсутствие градиента температуры. Его иногда называют изотермическим теплом переноса. Составляющая, не зависящая от координаты, — объемное изотермическое тепло переноса, — получается в приближении Барнетта обычной кинетической теории газов ³². Два других члена описывают поток тепла, локализованный в слое Кнудсена. Эта часть потока явным образом содержит зависимость от закона взаимодействия молекул газа со стенкой канала. Если усреднить равенства (3.17) и (3.18) поперек канала, то получается соотношение, выражающее симметрию кинетических коэффициентов,

$$\frac{1}{2}\vec{F}_3 = 1 + \frac{1}{2}\vec{\Phi}_1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\operatorname{Kn}_d \vec{\Phi}_2,$$

в полном соответствии с принципом Онзагера.

Аналогичную структуру имеет и второе слагаемое (3.18): первый его член описывает поток тепла в объеме газа — обычную теплопроводность, второй — теплоперенос внутри слоя Кнудсена. Он экспоненциально убывает по мере удаления от стенки, и при достаточно высоких давлениях его вклад в теплоперенос вдоль канала становится сколь угодио малым. Однако именно локализованные в слое Кнудсена потоки тепла и вещества определяют значения коэффициентов C_q и C_v (см. равенства (1.5) и (1.6)). Действительно, проинтегрируем поверхностные (зависящие от x) слагающие потоков (3.17) и (3.18) по толщине кнудсеновского слоя. В соответствии с определениями $\hat{\Gamma}_{\tau}^{(q)}$ и $\hat{\Gamma}_{\tau}^{(m)}$ имеем

$$C_q = 1,12 \frac{1}{\Delta(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \left[1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} 3,08 + \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^2 1,72 \right], \qquad (3.22)$$

$$C_{v} = 1,16 \frac{1}{\Delta(\varepsilon)} \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} \left[1 + \frac{\varepsilon}{2-\varepsilon} 3,23 + \left(\frac{\varepsilon}{2-\varepsilon}\right)^{2} 1,86 \right].$$
(3.23)

В заключение приведем один из результатов вычисления коэффициента C_t . Обычно его находят путем, независимым от определения других коэффициентов, так как C_t связан с коэффициентом аккомодации энергии α , которые отличается от ε , определяющего аккомодацию импульса.

Значение C_t , полученное путем решения линеаризованного уравнеиия Больцмана вариационным методом для модели твердых шаров ⁸⁶, имеет вид

$$C_t = 1.78 \frac{2-\alpha}{\alpha} (1+0.162\alpha).$$
 (3.24)

Подробный обзор результатов теоретического и экспериментального исслецования температурного скачка читатель может найти в ^{76, 77}.

4. ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ И ТЕРМОДИНАМИКА НЕОБРАТИМЫХ ПРОЦЕССОВ

В работе 4 был впервые предложен в известной мере независимый метод рассмотрения граничных задач кинетической теории, основанный на использовании представлений термодинамики необратимых процессов. В дальнейшем он нашел применение и в решении задачи о термофорезе в слаборазреженных газах, а также в ряде других задач. Суть его состоит в следующем. Вместо прямого расчета интересующего нас эффекта решается другая задача, так сказать, симметричная рассматриваемой (в смысле Онзагера). Затем в соответствии с принципом симметрии кинетических коэффициентов записывается искомый результат. Такой путь, помимо чисто методического значения, позволяя проконтролировать процедуру довольно громоздких вычислений, представляет еще и самостоятельный интерес. Он привел к обнаружению неизвестного ранее эффекта тепловой поляризации тела в потоке разреженного газа и указал идею постановки эксперимента для изучения на совершенно новой основе явления термофореза, а также природы взаимодействия газовых молекул с поверхностью твердых и жидких тел.

Кроме того, имеются случаи, когда такой косвенный расчет предпочтительнее прямого, ибо позволяет при решении кинетического уравнения обходиться меньшим числом полиномов в разложении функции распределения. Отметим, однако, во избежании недоразумений, что, как и при прямом расчете, термодинамический метод не может обойтись без вычисления кинетических коэффициентов путем решения уравнения Больцмана (см. раздел б) гл. 3).

Несмотря па очевидные успехи этого подхода, в литературе ⁷⁸⁻⁸⁰ появились высказывания, подвергающие сомнению законность его применения в условиях, когда длина свободного пробега молекул газа становится сравнимой с характерными размерами задачи. Основанием для таких утверждений послужило то обстоятельство, что связь между кинетической теорией и термодинамикой необратимых процессов установлена ⁸¹ лишь для процессов, которые описываются в рамках приближения Навье — Стокса метода Чепмена — Энскога, не пригодного для решения граничных задач.

Поэтому прежде всего остановимся на вопросе о применимости ТНП к изучению явлений, где существенную роль играют свойства газа внутри кнудсеновских слоев у поверхности раздела газ — конденсированная фаза и о связи ТНП с кинетической теорией газов при рассмотрении таких задач.

a) О производстве энтропии в ограниченном объеме газа

Рассмотрим этот вопрос на примере решения задачи о неизотермическом течении Пуазейля. Вернемся к уравнению (3.15). Умножим обе его части на φ , проинтегрируем по импульсам молекул и усредним по объему газа. Справа с точностью до постоянного множителя получим отнесенное к единице объема производство энтропии ΔS . Воспользуемся для $f^{(0)}$ выражением

$$f^{(0)} = \exp\left[\frac{\rho}{p}\left(\mu - \frac{1}{2}v^{2}\right)\right],$$

где µ — химический потенциал газа, и введем обозначения для векторов плотности потока массы I^(m) и энергии I^(e):

$$\mathbf{I}^{(m)}(x) = m \int \varphi f^{(0)} \mathbf{v} \, \mathrm{d}\mathbf{p},$$
$$\mathbf{I}^{(e)}(x) = \frac{4}{2} m \int \varphi f^{(0)} \mathbf{v} v^2 \, \mathrm{d}\mathbf{p}.$$

В результате получим после усреднения по сечению канала

$$\Delta S = (\mathbf{I}^{(e)} - \mu \mathbf{I}^{(m)}) \frac{\nabla T}{T_0^2} + \frac{\nabla \mu}{T_0} - \frac{1}{2d} \int f^{(0)} v_x \frac{\varphi^2}{2} d\mathbf{p} \Big|_{-d}^d; \qquad (4.1)$$

здесь ∇T и $\nabla \mu$ — продольные градиенты температуры и химического потенциала. $\mathbf{I}^{(m)}$ и $\mathbf{I}^{(e)}$ — усреднешные по сечению канала значения потоков массы и энергии. Таким образом, производство энтропии отличается от классического выражения наличием дополнительного слагаемого, связанного со свойствами газа внутри слоя Кпудсена у стенок канала. Примем теперь во внимание, что молекулы газа, сталкиваясь со стенкамь, меняют свое распределение. Поэтому здесь возникает дополнительное производство энтропии, которое следует добавить к выражению (4.1), чтобы получить полное производство энтропии в единице объема канала. Для вычисления этой величины поступим следующим образом. Найдем разность потоков энтропии, которые несут газовые молекулы, двигаясь к стенке и от нее. На поверхность стенки x = d падают молекулы с распределением f⁺; функция распределения рассеянных молекул f⁻. Если взаимодействие происходит по закону, отличному от зеркального, то эти функции существенно различны. Поток энтропии, который несут на стенку молекулы газа, равен ³³

$$I^{(S)}(0) = -\int_{\iota_X>0} \mathbf{v} f^+ \ln f^+ \, \mathrm{d}\mathbf{p};$$

поток, уносимый отраженными молекулами,

$$I^{(S)}(\delta) = \int_{v_v < 0} \mathbf{v} f^- \ln f^- \,\mathrm{d}\mathbf{p},$$

где б — условная толщина слоя вещества стенки, в котором происходит трансформация функции распределения. Уравнение баланса

div
$$\mathbf{I}^{(S)} = \Delta S_W$$

определяет искомое производство энтропии ΔS_W в слое δ . Полное производство энтропии в поверхностном слое, отнесенное к единице объема газа, в точности компенсирует дополнительный член в выражении (4.1), и производство энтропии в газе принимает классический вид билинейной комбинации термодинамических сил и потоков. Сохраняют свою форму и линейные соотношения между потоками и силами *).

Полученный результат положительно решает вопрос о законности применения ТНП к задачам, в которых существенную роль играют свойства газа внутри слоя Кнудсена.

Термодинамика необратимых процессов позволяет решить еще один немаловажный вопрос, возникающий при решении кинетического уравнения методом полиномиальных разложений. Речь идет о неоднозначности выбора полиномов скорости, которые следует использовать для построения моментных уравнений. Хотя этот вопрос уже обсуждался в литературе ⁵⁶, практика на сегодняшний день такова, что выбор полиномов диктуется соображениями удобства и простоты вычислений. Покажем, однако, что требование, чтобы найденная приближенным путем функция распределения удовлетворяла уравнению баланса энтропии, эквивалентно некоторому достаточному, но. вообще говоря, не необходимому условию, определяющему выбор полиномов.

В стационарном случае уравнение баланса энтропии эквивалентно соотношению

$$\int \mathbf{d}\mathbf{p}\boldsymbol{\varphi} f^{(0)} \left[v_z \frac{\partial \ln f^{(0)}}{\partial z} + v_x \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} - I(\boldsymbol{\varphi}) \right] = 0.$$
(4.2)

Ему, естественно, удовлетворяет точное решение уравнения (3.15). Потребуем, чтобы искомое решение, будучи приближенным, тем не менее также удовлетворяло (4.2). Запишем его в виде ряда по полиномам скорости молекул

$$\varphi = \sum a_i (x) P_i (\mathbf{c}). \tag{4.3}$$

Подставив разложения (4.3) в уравнение (4.2) и введя обозначение

$$I_{i} = \int d\mathbf{p} f^{(0)} P_{i}(\mathbf{c}) \left[v_{z} \frac{\partial \ln f^{(0)}}{\partial z} - v_{x} \sum_{k} \frac{\partial a_{k}(x)}{\partial x} P_{k}(\mathbf{c}) \right],$$

^{*)} Отметим, что вывод выражения для производства энтронии в канале, предложенный в ⁸¹, вообще говоря, теряет силу для разреженных газов. Это связано с тем, что расчеты ⁸¹ предполагают отсутствие потока энтропии через поверхность канала при равном нулю нормальном к граничной поверхности потоке тепла. Эффекты же разреженности, как вид но из вышесказанного, приводят к тому, что поток энтропии через поверхность имеет место при наличии любой неоднородности в газе.

представим локальное производство энтропии в виде

$$\int \mathrm{d}\mathbf{p}\,\varphi f^{(0)}I(\varphi) = \sum_{i}a_{i}I_{i}.$$

В результате можно записать линейные соотношения между «потоками» и «силами» а_i в виде

$$I_i = \sum_k \mathcal{L}_{ik} a_k. \tag{4.4}$$

Легко видеть, что уравнения (4.4) представляют собой моментные уравнения, полученные из (3.15) с помощью тех же полиномов, которыми аппроксимирована функция φ , а коэффициенты \mathcal{L}_{ih} есть интегральные скобки (3.5), обладающие, как известно, свойством симметрии относительно перестановки индексов. Такой способ построения моментных уравнений заведомо обеспечивает выполнение условия баланса энтропии, в отличие от обычного, формального, когда применяются произвольные полиномы скорости. Найденная этим путем приближенная функция распределения определяет потоки I_i таким] образом, что коэффициенты пропорциональности, связывающие их с силами a_i , удовлетворяют принципу симметрии Онзагера.

Используем методы ТНП для расчета скорости термофореза. Зададим скорость относительного движения газа и сферы и вычислим вызванное этим движением изменение температуры газа в окрестности сферы. Воспользовавшись затем принципом симметрии, найдем и скорость термофореза. Следует подчеркнуть, что в обоих случаях задача решается в предположении малых чисел Рейнольдса. Таким образом, вязкий нагрев, будучи пропорциональным Re², мал. Заметим попутно, что малы также и термострессовые эффекты, рассмотренные B⁸².

Начнем с вычисления производства энтропии ΔS_V в газе, когда он движется относительно сферы с малой постоянной скоростью \mathbf{v}_0 , причем на достаточно большом расстоянии от сферы поддерживается малый градиент температуры. В системе координат, связанной со сферой, уравнение баланса энтропии имеет вид

div
$$(\mathbf{v}_0 S + \mathbf{I}^{(S)}) = \Delta S.$$

Проинтегрируем его по объему газа. Справа получим искомое значение производства энтропии ΔS_V . Левую часть преобразуем по теореме Гаусса в интеграл по окружающей сферу поверхности. В качестве такой поверхности удобно взять цилиндр достаточно большого радиуса с центром симметрии, совпадающим с центром сферы, и осью, направленной вдоль градиента температуры (ось z). Если принять радиус цилиндра много бо́льшим его высоты, то интегрирование по поверхности цилиндра сведется к интегрированию по его торцам, т. е.

$$\Delta S_V = 2\pi \int_0^\infty (v_{0z} S + I_z^{(S)}) r \, dr \Big|_{z=-H}^{z=H}.$$

Принимая во внимание постоянство вектора плотности потока энергии, получим

$$\Delta S_{V} = -2\pi \int_{0}^{\infty} r \, dr \left[\frac{v_{0z}}{T_{0}} \, \Delta p + I_{z}^{(q)} \, (z = H) \, \frac{\Delta T}{T_{0}^{2}} \, \right]. \tag{4.5}$$

272

Символами Δp и ΔT обозначены перепады давления и температуры между торцами цилиндра с координатами z = H и z = -H. Температура газа в окрестности сферы выражается в виде

$$T = T_0 + \frac{(\mathbf{Br})}{r^3} + (\nabla T\mathbf{r}).$$

Для плотности потока тепла используем выражение (2.5). Преобразуем (4.5), сохранив слагаемые, квадратичные относительно малого отклонения от равновесия. После несложных вычислений получим

$$\Delta S_V = rac{{f Fv_0}}{T_0} + rac{4\pi arkappa_e \, ({f B}
abla T)}{T_0^2}$$
 ,

где F — полная сила, действующая на сферу со стороны газа. Линейные соотношения между «потоками» и «силами» можно записать в виде

$$\mathbf{v}_{0} = \Lambda_{11} \frac{\mathbf{F}}{T_{0}} + \Lambda_{12} \frac{\nabla T}{T_{0}^{2}},$$

$$4\pi\varkappa_{e}\mathbf{B} = \Lambda_{21} \frac{\mathbf{F}}{T_{0}} + \Lambda_{22} \frac{\nabla T}{T_{0}^{2}}.$$
(4.6)

Скорость термофореза равна (с обратным знаком) величине v_0 при F = 0,

$$\mathbf{v}_T = -\Lambda_{12} \, \frac{\nabla T}{T_0^2}.$$

Коэффициент пропорциональности Λ_{12} найдем, вычислив изменение температуры газа, обусловленное его течением относительно сферы, и воспользовавшись принципом симметрии. При $\nabla T = 0$ из второго уравнения (4.6) следует

$$\Lambda_{21} = 4\pi\varkappa_e T_0 \frac{(\mathbf{BF})}{F^2}.$$

Таким образом, расчет скорости термофореза термодинамическим методом сводится в рассматриваемой постановке к определению констант интегрирования **В** и *а* из соответствующих граничных условий при $\nabla T = 0$. Они, естественно, в рассматриваемом приближении должны записываться несколько отличным от (2.14) образом. Действительно, если при прямом расчете связь между динамическими и тепловыми характеристиками течения газа обеспечивалась условием, что скачок скорости на поверхности раздела фаз пропорционален производной от температуры газа, то здесь ему соответствует условие пропорциональности потока тепла градиенту давления, точнее, производной напряжения в газе по координатам, т. е. второй производной от скорости газа. Учет этого приводит в рассматриваемом приближении к граничным условиям вида

$$\begin{split} v_r &= 0, \\ v_\theta &= -C_m \operatorname{Kn} \frac{R}{\eta} \, \sigma_{r\theta}^{(0)}, \\ T_e - T_i &= 3C_m \operatorname{Kn} \frac{\eta}{\rho \varkappa_e} R \frac{\partial p}{\partial r} - C_t \operatorname{Kn} \frac{R}{2\varkappa_e} (I_{er}^{(q)} + I_{ir}^{(q)}), \\ \varkappa_i \frac{\partial T_i}{\partial r} &- \varkappa_e \frac{\partial T_e}{\partial r} = k_{TS} \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \left[1 + \left(\frac{3}{k_{TS}} - 2 \right) C_m \operatorname{Kn} \right] + \\ &+ \operatorname{Kn} \frac{1}{R} \left(\operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left[\frac{\eta}{\rho} \, \sigma_{rr}^{(0)} \left(C_v - \frac{3}{4} \, C_q \right) + \frac{\eta}{\rho} \, C_v p - \varkappa_e C_q \, \frac{T_e + T_i}{2} \right]. \end{split}$$

Здесь для потока тепла в газе мы использовали полное выражение (2.5), а для напряжения — только слагаемое, соответствующее вязким напряжениям.

Определяя отсюда обычным путем константы интегрирования, приходим к искомому выражению для скорости термофореза, в точности совпадающему с (2.15).

7 УФН, т. 129, вып. 2

в) Определение коэффициента теплового скольжения газа⁸³

Термодипамику необратимых процессов можно применить также и для определения коэффициента теплового скольжения $k_{15}^{(0)}$.

Рассмотрим с этой целью течение газа в плоской щели, образованной двумя параллельными плоскостями с расстоянием между ними 2d. Под действием некоторой силы, приложенной к одной из пластин, они приводятся в относительное движение со скоростью v. Если создать температурное поле с малым постоянным градиентом температуры ∇T , направленным вдоль зазора, то производство энтропии на единицу длины канала можно записать в виде

где **F** — сила, отнесенная к единице поверхности пластины, $\mathbf{I}^{(q)} = I^{(e)} - \frac{5}{2} \frac{p}{\rho} \mathbf{I}^{(m)}$. Линейные соотношения между потоками, \mathbf{v}_i^{\cdot} и $\mathbf{q} = \int_{-d}^{d} \mathbf{I}^{(q)}(x) dx$ и силами **F** и ∇T запишем в форме

$$\mathbf{v} = L_{11} \frac{\mathbf{F}}{T_0} + L_{12} \frac{\nabla T}{T_0^2}, \quad \mathbf{q} = L_{21} \frac{\mathbf{F}}{T_0} + L_{22} \frac{\nabla T}{T_0^2}.$$
(4.8)

Вычисляя с помощью кинетической теории поток тепла $\mathbf{q} \mid_T$ при постоянной температуре и заданной силе F, легко найти L_{21} , а затем, воспользовавшись принципом симметрии, скорость **v** при $\mathbf{F} = 0$ и заданном градиенте температуры:

$$\mathbf{v} = \frac{(\mathbf{q} \mid_T \mathbf{F})^2}{F^2} \frac{\nabla T}{T_0}.$$

Таким образом, задача определения скорости относительного движения пластин под действием градиента температуры сводится в данной постановке к вычислению на основе кинстической теории изотермического потока тепла вдоль канала в задаче Куртта.

Имея в виду равенство F = — σ_{zz} , получим искомую скорость относительного движения пластии:

Отметим, что при одинаковых значениях коэффициента аккомодании молекул на поверхности обенх пластии течение Куэтта полностью антисимметрично и относительного движения пластии под действием граднента температуры не возникает. Найдем теперь скорость движения пластии относительно центра масс газа (скорость теплового скольжения). При $\lambda/d \ll 1$ перекрытием пристенных кнудсеновских слоев можно препебречь. Тогда относительную скорость пластии можно записать как разпость скоростей каждой из них по отношению к центру масс газа $v = v_{TS}^{(2)} - v_{TS}^{(2)}$, т. е. представить скорость скольжения в виде

$$v_{IS}^{(1)} = \frac{\int_{-d}^{0} \mathbf{I}^{(q)}(x) \, dx}{\sigma_{\pi z}} \frac{\nabla T}{T_0} + C_1.$$
(4.11)

где C_1 — не зависящая от є константа, которую можно определить из следующих соображений. При отражении молекул от поверхности раздела по закону, близкому к зеркальному, газ под действием градиента температуры скользит вдоль поверхности с максвелловской скоростью ⁵⁷ (см. раздел б) гл. 3)

$$v_{TS}^{(M)} = \frac{3}{4} \frac{\eta}{\rho} \frac{\nabla T}{T_0}.$$
 (4.12)

Вычисляя поток тепла и импульса в задаче о течении Куэтта методом, изложенным в разделе б) гл. 3, переходя к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$ в выражении (4.11) и сравнивая результат с (4.12), найдем постоянную C_1 .

В итоге для скорости теплового скольжения получаем выражение, совнадающее с (3.17).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теория термофореза, безусловно, нуждается в экспериментальной проверке. Но, как мы уже отмечали выше, опыты, проделанные в основном с аэрозолями, не позволяют провести уверенного сравнения с теорией, в силу необычайно большого разброса свойств объекта измерений и чисто технических трудностей. Кроме того, как видно из изложенных выше соображений, необходимы независимые эксперименты по определению коэффициентов аккомодации импульса и энергии молекул газа при их взаимодействии с поверхностью находящегося в газе тела. Действительно, из (1.9) следует, что скорость термофореза малых тел зависит от коэффициента аккомодации импульса є, а из (2.15), (3.19) — (3.24) видно, что для расчета скорости термофореза крупных тел необходимо знать оба коэффициента ε и α. В литературе постоянно публикуются результаты измерения значений этих параметров для разных газов, материалов и состояния поверхностей твердых и жидких тел. Обычно используемая методика состоит в измерении сопротивления газа при течении в трубе (метод Кнудсена), вискозиметрии достаточно разреженного газа (метод А. К. Тимирязева) и. наконец, исследовании вязкого сопротивления тел в газе (метод Милликена). Этими методами измеряют значение коэффициента C_m и затем по формуле (3.21) рассчитывают параметр є. Метод Милликена, по-видимому, является наиболее точным. Он позволяет определять Ст с ошибкой менее 3%¹⁵. Аккомодация энергии при взаимодействии газа с поверхностью тел изучается в экспериментах другого типа, именно при исследовании теплопередачи в достаточно разреженных газах. Опыты, проведенные на установках различных модификаций, обнаружили резкую зависимость коэффициента аккомодации эпергии от рода газа, материала поверхности, характера его обрабочки и степени чистоты. Экспериментально определенные значения α оказались лежащими в интервале 77 0,15-1.00. К сожалению, нам не удалось обнаружить публикаций, в которых были бы приведены экспериментальные значения є и « для одной и той же нары газ — конденсированная фаза. Это лишает нас возможности провести однозначное сравнение изложенной выше теории с опытом, по крайней мере для достаточно крупных тел.

Что касается мелких частиц (или достаточно разреженного газа), то эксперименты и расчеты, проведенные разными авторами, находятся в хорошем согласии.

По нашему мнению, экспериментальная проверка теории в области малых чисел Кнудсена требует проведения специальных опытов, предусматривающих возможность контролируемого изменения коэффициентов аккомодации газовых молекул на поверхности тела путем соответствующей обработки и очистки последней, а также подбора газа.

Одна из возможных схем такого опыта вытекает из результатов раздела б) гл. 4, где показано, что в соответствии с принципом симметрии движению тела под влиянием градиента температуры в газе соответствует тепловая поляризация тела при его движении в однородном газе. Действительно, при Re «1 (когда выделением энергии из-за трения можно пренебречь) разность температур двух точек поверхности шара ΔT_i , расположенных на концах диаметра, параллельного скорости набегающего потока, можно выразить в виде

$$\begin{split} \frac{\Delta T_i}{T_0} &= -\frac{\operatorname{KnM} k_{TS}}{1 + (1/2) \left(\varkappa_i / \varkappa_e\right)} \left\{ 1 + \operatorname{Kn} \left[3C_m \left(\frac{3}{k_{TS}} - 1 \right) + \right. \\ &\left. + C_t \left(1 - \frac{3}{2k_{TS}} \right) - \frac{C_v}{k_{TS}} - \frac{\left(\varkappa_i / \varkappa_e\right) C_t - C_q}{1 + (1/2) \left(\varkappa_i / \varkappa_e\right)} \right] \right\}, \end{split}$$

где **М** — число Маха.

Эта разность температур простым образом связана с величиной скорости термофореза. Измеряя ее, можно судить о справедливости теории термофореза без измерения самой скорости. Этот метод привлекателен также тем, что здесь можно экспериментировать с телами достаточно больтого размера. Поэтому значительно расширяются возможности и упрощается методика обработки и контроля состояния поверхности тела, по сравнению с аэрозолями. Более того, если рядом опытов будет доказана правильность теории, то этот метод можно использовать для экспериментального определения одного из коэффициентов аккомодации (при известном другом).

Институт физической химии AĤ CCCP

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- 1. Epstein P. S. Zs. Phys., 1929, v. 54, p. 529.

- Epstein P. S.— Zs. Phys., 1929, v. 54, p. 529.
 Reynolds O.— Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. B, 1880 v. 170, p. 727.
 Maxwell J. C.— Ibid., 1879, v 170, p. 231.
 Дерягин Б. В., Баканов С. П.— ДАН СССР, 1961, т. 141, с. 384.
 Дерягин Б. В., Баканов С. П.— Ibid., 1962, т. 144, с. 535.
 Дерягин Б. В., Баканов С. П.— Ibid., 1962, т. 144, с. 535.
 Дерягин Б. В., Баканов С. П.— Ibid., 1962, т. 144, с. 535.
 Дерягин Б. В., Баканов С. П.— Ibid., 1962, т. 147, с. 139.
 Баканов С. П., Ролдугин В. И.— Колл. ж., 1977, т. 39, с. 1027.
 Баканов С. П., Ролдугин В. И.— IMM, 1977, т. 44, с. 551.
 Rosenblatt P., La Mer V. К.— Phys. Rev., 1946, v. 70, p. 385.
 Saxton R. L., Ranz W. E.— J. Appl. Phys., 1952, v. 23, p. 917.
 Schadt C. F., Cadle R. D.- J. Coll. Sci., 1957, v. 12, p. 356, J. Phys. Chem., 1961, v. 65, p. 1689.

- Захсон Ц. Г. И. И. И. И. И. Б. Б. Парана Бара, 1997,

- p. 3199.
- 25. Annis B. K., Mason E. A. Phys. Fluids. 1970, v. 13, p. 1452. 26. Mason E. A., Chapman S. J. Chem. Phys., 1962, v. 36, p. 627.

- 27. Williams M. M. R. Zs. Naturforschus., 1972, Bd. 27a, S. 1798, 1804. 28. Annis B. K., Malinauskas A. P., Mason E. A. J. Aerosol. Sci., 28. Аппів Б. К., Мантнаціякая А. Г., мазон Б. А. С. 1972, v. 3, р. 55; 1973, v. 4, р. 271.
 29. Annis B. K., Mason E. A. — Ibid., 1975, v. 6, р. 105.
 30. Vichland L. A., Mason E. A. — Ibid., 1977, v. 8, р. 381.
 31. Waldmann L. — Zs. Naturforsch., 1959, Bd. 14a, S. 589.
 32. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. — У С. И. 4060.

- м.: ИЛ, 1960.
- 33. Силин В. П. Введение в кинстическую теорию газов. М.: Наука, 1971.
- 34. Киščег I.— Surface Sci., 1971, v. 25, p. 225. 35. Кутер И.— В кн. Динамика разреженного газа.— М.: Мир, 1976.— С. 60. 36. Сегсідпапі С., Lampis M.— Transp. Theory Stat. Phys., 1971, v. 1, p. 101. 37. Cercignani C.— 1bid., 1972, v. 2, p. 27.

- 37. Cerefghan C. Ibld., 1972, V. 2, p. 27. 38. Kinslow M. AIAA J., 1976, v. 14, p. 1358. 39. Epstein M. Ibid., 1967, v. 5, p. 1797. 40. Brock J. R. J. Coll. Sci., 1962, v. 17, p. 768. 41. Brock J. R. J. Phys. Chem., 1962, v. 66, p. 1763. 42. Jacobsen S., Brock J. R. J. Coll., Sci., 1965, v. 20, p. 544. 43. Drock J. R. J. Vala man V. J. Coll., Sci., 1965, v. 20, p. 544.
- 43. Derjaguin B. V., Yalamov Yu. I. Ibid., p. 555; 1966, v. 21, p. 256; v. 22, p. 195.
- 44. П Бченко П. Н., Яламов Ю. П.— ЖФХ, 1971, т. 45, с. 577.
 45. Яламов Ю. П., Дерягин Б. В., -- Колл. ж., 1971, т. 33, с. 294.
 46. Derjaguin B. V., Yalamov Yu. I.— In: Topics in Current Aerosol Research. V.2.- London: Pergamon Press, 1972.

- search. v.2.-. London: Pergamon Press, 1972.
 47. Dwayer H. A.— Phys. Fluids, 1967, v. 10, p. 976.
 48. Phillips W. F.— Ibid., 1975, v. 18, p. 144.
 49. Vestner H., Kübel M., Waldmann L.— Nuovo Cimento. Ser. B, 1975, v. 25, p. 405.
 50. Vestner H., Waldmann L.— Physica. Ser. A, 1975, v. 80, p. 527; 1977, v. 26, p. 202.
- v. 86, p. 303.
- 51. Waldmann L.— Zs. Naturforsch., 1967, Bd. 22a, S. 1269. 52. Bedeaux D., Albano A. M., Mazur P. Physica. Ser. A, 1976, v. 82, 438.
- 53. Kovac J.--Ibid, 1977, v. 86. p. 1. 54. Sone Y., Aoki K.--Phys. Fluids, 1977, v. 20, p. 571.
- 55. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов.— М.: Мир, 1973. 56. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967. 57. Annis B. K. — J. Chem. Phys., 1972, v. 57, p. 2898. 58. Loyalka S. K., Peterlis N., Storvick T. S. — Phys. Fluids, 1975,

- v. 18, p. 1094.
- 59. Loyalka S. K. J. Chem. Phys., 1975, v. 63, p. 4054.
- 60. Баканов С. П. ЖТФ, 1977, т. 47. с. 421. 61. Суетин П. Е., Черняк В. Г. Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидкости и газа», 1977, № 6, с. 107. 62. Рейнольдс М., Смолдерен Дж., Вендт Дж. Цитир. в ³⁵ сб. —
- C. 230.
- 63. Loyalka S. K.- Phys. Fluids. 1975, v. 18, p. 1666; 1976, v. 19, p. 1641.
- 64. Gross E. P., Jackson E. A., Ziering S.— Ann. of Phys., 1957, v. 1, p. 141.
- 65. Gross E. P., Ziering S. Phys. Fluids, 1958, v. 1, p. 215. 66. Kourganoff V., Busbridge W. Basic Methods in Transfer Problems. Oxford: Clarendon Press, 1952.

- Oxiord: Clarendon Press, 1952.
 67. Баканов С. П., Дерягин Б. В. ДАН СССР, 1961, т. 139, с. 71.
 68. Баканов С. П., Маркеев Б. М., ЖТФ, 1974, т. 44, с. 2081.
 69. Баканов С. П. Іbid., с. 2625.
 70. Баканов С. П. ІММ, 1975, т. 39, с. 932.
 71. Ферцигер Дж., Капер Г. Математическая теория процессов переисса в газах. М.: Мир, 1976.
 72. Wang-Chang C. S., Uhlenbeck G. E. Univ. of Michigan Eng. Research Inst. Rept. UMH-3-F. 1949.
 73. Ерикаков С. П. Митерикание констрание и система. М.: Математическая 4074.
- 73. Е р м а к о в С. М. Метод Монте-Карло и смежные вопресы. М.: Наука, 1971.
- 74. Cercignani C.- Nuovo Cimento, 1963. v. 27, p. 1240.
- 75. Lang H.— Phys. Fluids, 1976, v. 19, p. 366. 76. Лазарев П. П. Сочинения. Т. 2.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950.— с. 363. 77. Коленчиц О. А. Тепловая аккомодация систем газ твердое тело.— Минск: Наука и техника, 1977.

- Втоск J. R.— J. Coll. Sci., 1965, v. 20, р. 570.
 Ивченко И. И., Яламов Ю. И. ЖФХ, 1971, т. 45, с. 2622.
 Whitmore P. J., Меізен А.– J. Aerosol. Sci., 1976, v. 7, р. 297.
 Де Гроот С., Мазур И. Неравновесная термодинамика.— М.: Мир., 1964.
 Котан М. Н., Галкии В. С., Фридлендер О. Г. УФН, 1977, т. 119,

- 82. Котан М. Н., Галкин В. С., Фридлендер О. ... с еми изг., и иг., с. 111.
 83. Баканов С. П., Дерягин Б. В., Роддутин В. И.— ДАН СССР, 1976, т. 227, с. 329; J. Coll. Int. Sci., 1977, v. 60, р. 172.
 84. И вченко И. И., Яламов Ю. И. Изв. АН СССР. Сер. «Механика жидко-сти и газа», 1970. № 3. с. 3.
 85. Вгоск Ј. В. J. Coll. Int. Sci., 1967, v. 23, р. 488.
 86. К і і п. g. Т., К изсег 1.— Phys. Fluids. 1972. v. 45. No. 6.
 87. Sопе Ү.— In: Rare Gas Dynamics, V. I.— N. Y.; Academic Press, 1969.— Р. 243.
 88. Яламов Ю. И., Барсегян О. А., Юш канов А. А.— В ки. Физическая кинетика. Калинин: КГУ, 1975.— С. 11.

.