

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539,21:539.18

**ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОННОГО ТОРМОЖЕНИЯ
ТЯЖЕЛЫХ ИОНОВ В МЕТАЛЛАХ****И. А. Ахиезер, Л. Н. Давыдов**

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	239
2. Линейная зависимость электронного торможения от скорости	241
3. Осцилляции тормозных сечений при изменении атомного номера	243
4. Торможение свободным ферми-газом	246
5. Нелинейная зависимость торможения от скорости	248
6. Полуэмпирические формулы	250
7. Выводы	252
Цитированная литература	253

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно (см., например, ¹⁾), быстрые частицы (ионы или нейтральные атомы), проходя через твердое тело, теряют энергию в результате столкновений двух типов — столкновений с электронами вещества мишени (электронные потери) и столкновений с ионными остовами, находящимися в узлах кристаллической решетки (так называемые ядерные потери). Роль этих двух типов столкновений в судьбе облученного вещества принципиально различна: столкновения с электронами только тормозят движущуюся частицу *), в то время как столкновения с ионными остовами могут приводить к выбиванию последних из узлов кристаллической решетки и тем самым к возникновению точечных дефектов.

В области не очень высоких энергий ($\varepsilon < \varepsilon_c$, где ε_c — некоторая характерная энергия, различная для различных пар «движущийся ион — атом вещества мишени») главную роль в торможении пролетающей частицы играют ядерные потери. При $\varepsilon > \varepsilon_c$ большая часть теряемой частицей энергии передается электронам вещества.

Тормозная способность электронов вещества характеризуется тормозным сечением; в литературе для него приняты две различные нормировки:

$$S_e = \int T \frac{d\sigma}{dT} dT, \quad Q_e = m_2^{-1} S_e, \quad (1.1)$$

где T — передаваемая энергия, $\frac{d\sigma}{dT} dT$ — сечение рассеяния с передачей электронам вещества энергии в интервале $(T, T + dT)$, m_2 — масса атома мишени. Сечение $d\sigma$ обычно нормируется на один атом (а не на один электрон) среды. Потери энергии частицы (на единице пути) связаны

*) Сводка большого числа экспериментальных и теоретических результатов по взаимодействию частиц с электронами вещества дана в ².

с тормозным сечением соотношением

$$-\frac{dE}{dx} = nS_e, \quad (1.2)$$

где n — плотность рассеивателей (для указанной нормировки сечений n — число атомов среды в единице объема).

В высокоэнергетической области тормозное сечение дается известной формулой Бете (см., например, ³)

$$S_e = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2 e^4}{mv^2} \ln \frac{2mv^2}{I}, \quad (1.3)$$

где v — скорость и Z_1 — атомный номер налетающей частицы, Z_2 — атомный номер вещества мишени и I — величина порядка энергии ионизации (m — масса электрона). Мы видим, что в этой области тормозное сечение, грубо говоря, обратно пропорционально энергии частицы.

В низкоэнергетической области электронное торможение в металлах впервые исследовалось Ферми и Теллером ⁴. Рассматривая электроны металла как свободный вырожденный ферми-газ, они получили линейную зависимость электронного торможения от скорости частицы. Формулу Ферми — Теллера можно записать в виде

$$S_e = \gamma_F \frac{e^2 a_0}{v_0} v, \quad \gamma_F = 4\pi \frac{a^2}{a_0^2} \frac{v_F}{v_0} Z_2^*, \quad (1.4)$$

где $v_0 = e^2/\hbar$ и $a_0 = \hbar/mv_0$ — боровские скорость и радиус, v_F — фермиевская скорость, Z_2^* — число коллективизированных электронов на один атом вещества мишени и a^2 — величина порядка сечения рассеяния налетающей частицы электроном (конкретно в рассмотренном Ферми и Теллером случае торможения мюонов рассеяние описывалось формулой Резерфорда и потому $a^2 \sim (e^2/mv_F^2)^2$). Формула (1.4) описывает вклад в торможение коллективизированных электронов металла; область ее применимости $v \ll v_F$.

Дальнейшее развитие теории электронных потерь основано на двух моделях атомных столкновений: модели Фирсова ⁵ и модели Линдхарда и сотрудников ⁶⁻¹⁰. Обе модели трактуют атом как квазиклассическую систему; в остальном физические соображения, лежащие в их основе, различны. При малых v модели приводят к линейной зависимости торможения от скорости:

$$S_e = Cv, \quad (1.5)$$

с различающимися коэффициентами C как функциями атомного номера и массы налетающей частицы (Z_1, m_1) и атома мишени (Z_2, m_2).]

Первоначальные варианты этих моделей описывают лишь усредненную (монотонную) зависимость коэффициента C от Z_1, Z_2 ; между тем ясно, что как следствие оболочечной структуры атома должны возникать осцилляции C при изменении атомных номеров мишени ¹¹⁻²⁰ и налетающей частицы ²¹⁻³². Квазиклассическим моделям неупругого рассеяния и их обобщениям, учитывающим осцилляции коэффициента C , посвящены разделы 2, 3.

До недавнего времени считалось (см., например ^{1,33}, что пропорциональность тормозного сечения скорости v сохраняется вплоть до скоростей атомных электронов $v_A \sim Z^{2/3}v_0$, где Z — величина порядка Z_1 или Z_2 . Эта точка зрения противоречит экспериментальным данным (см. ³⁴), согласно которым уже при значительно меньших скоростях зависимость S_e от v существенно нелинейна *).

*) Недавно появилась экспериментальная работа ⁶⁸, также подтверждающая нелинейную зависимость S_e от v .

Далее, чтобы «спить» зависимость $S_e = Cv$ и $S_e \sim v^{-2}$, естественно предположить, что нелинейные по скорости поправки к функции S_e отрицательны, так что в промежуточной области скоростей $S_e(v) < Cv$; между тем те же эксперименты³⁴ показывают, что при не очень больших скоростях $S_e(v) > Cv$. Возникает вопрос о том, как объяснить такой ход кривой $S_e(v)$. Этому вопросу посвящены разделы 4 и 5.

Разумеется, торможение атомов или ионов в веществе (кроме разве единственного физически прозрачного случая очень больших скоростей, $v \gg v_A$, когда вещество можно рассматривать как газ не взаимодействующих между собой электронов и ядер, а пролетающую частицу — как голое ядро) определяется большим числом различных физических процессов; поэтому используемые теоретические модели оказываются слишком грубыми, чтобы претендовать на точное численное совпадение с экспериментом. Равным образом они не могут охватить одновременно весь интервал скоростей v . Поэтому для практических целей используются эмпирические и интерполяционные формулы; некоторых из них мы коснемся в разделе 6.

Совершенно особая ситуация возникает при торможении ионов в кристалле в условиях каналирования. Движение иона в канале нельзя, очевидно, свести к последовательности парных атомных столкновений — большое число атомов мишени участвует в процессе когерентно. Не касаясь этого вопроса (оказывающегося из-за его специфики в стороне от логической схемы настоящей статьи), отошлем читателя к обзору³⁵, посвященному каналированию.

2. ЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ЭЛЕКТРОННОГО ТОРМОЖЕНИЯ ОТ СКОРОСТИ

Как уже отмечалось, при очень малых значениях скорости ($v \ll v_F$) электронное торможение в металлах должно подчиняться линейному закону $S_e = Cv$ (формула (1.4)). При увеличении скорости зависимость S_e от v становится сложной; в частности, могут возникать осцилляции S_e как функции скорости, отражающие зонную структуру электронного спектра. Линейная зависимость тормозного сечения от скорости снова восстанавливается при $v > v_0$, когда можно не учитывать энергетических щелей между зонами.

Анализ электронного торможения в этой области скоростей начнем с одной из широко используемых в литературе моделей, принадлежащей Фирсову⁵. В этой модели при столкновении двух атомов их электронные облака сливаются в единое электронное облако. Если ввести обозначение Φ для потока электронов через плоскость, равноудаленную от центров сталкивающихся атомов (для нее часто применяется термин «фирсовская плоскость»), то, очевидно, силы, действующие на каждый атом, равны:

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_2 = -\Phi m \mathbf{v}. \quad (2.1)$$

Работа W , совершаемая силой \mathbf{F}_1 , зависит от прицельного параметра b ; считая, что скорость атома не меняется во время столкновения, имеем

$$W(b) = -mv \int \Phi dr, \quad (2.2)$$

где \mathbf{r} — радиус-вектор движущегося атома

Мы должны, таким образом, прежде вычислить поток электронов $\Phi(x)$ через плоскость с координатой $x/2$, пользуясь какой-либо моделью для распределения атомных электронов (ось x соединяет центры сталкивающихся атомов). В частности, в квазиклассическом приближении

следует вычислить величину

$$\Phi(x) = \frac{1}{4} n \bar{u} dy dz, \quad (2.3)$$

где n, \bar{u} — плотность и средняя скорость электронов. Используя далее (2.2) и интегрируя по всем прицельным параметрам, получим тормозное сечение

$$S_s = -2\pi \int W(b) b db = 2\pi m v \int b db \int \Phi dr. \quad (2.4)$$

В⁵ использовалась вытекающая из статистики Ферми связь между средней скоростью и плотностью

$$\bar{u} = \frac{3h}{4m} (3\pi^2 n)^{1/3}. \quad (2.5)$$

Если в качестве n подставить томас-фермиевское распределение плотности для атома с $Z = Z_1 + Z_2$, то выражение для коэффициента C можно представить в виде *)

$$C = \gamma \Phi \frac{e^2 a_0}{v_0}, \quad \gamma \Phi = 7,51 \frac{3\pi^2}{32} (Z_1 + Z_2). \quad (2.6)$$

Заметим, что модель Фирсова (как и рассматриваемая ниже модель Линдхарда и сотр.) не учитывает квантовомеханических эффектов. Условие применимости таких моделей — малость дебройлевской длины волны большинства атомных электронов $\hbar/m\bar{u}$ по сравнению с размерами атома. Как известно, размеры атома (точнее, области, занимаемой большей частью атомных электронов) $\lambda \sim a_0 Z^{-1/3}$; для большинства атомных электронов $\hbar/m\bar{u} \sim a_0 Z^{-2/3}$. Поэтому учет квантовомеханических эффектов соответствует неучету поправок, пропорциональных $Z^{-1/3}$. Таким образом, квазиклассические модели применимы для описания тяжелых атомов (например, для урана $Z^{-1/3} = 0,22$) и не применимы в случае легких атомов.

Другой подход к вопросу об электронном торможении ионов, разрабатывавшийся Линдхардом и сотрудниками⁶⁻¹⁰, основан на так называемом диэлектрическом формализме — описании атома как среды с некоторой диэлектрической проницаемостью. (Сопоставляя подход Фирсова с этим подходом, многие авторы говорят о первом как о геометрическом, а о втором — как о динамическом.)

Если бесструктурная частица с зарядом $Z_1 e$ тормозится в однородной среде, то для тормозного сечения, отнесенного к одному электрону среды, в борновском приближении, как известно (см., например,³⁶), имеем

$$S'_e = -\frac{Z_1^2 e^2}{2\pi^2 v n_e} \int \frac{d^3 k}{k^2} \operatorname{Im} \frac{1}{\epsilon(\mathbf{k}, \omega)} \delta(\omega - \mathbf{k} \mathbf{v}), \quad (2.7)$$

где $\epsilon(\mathbf{k}, \omega)$ — диэлектрическая проницаемость и n_e — плотность электронов среды. Это выражение применимо и в случае среды с медленно меняющейся плотностью электронов $n_e(\mathbf{r})$ ($\lambda \gg \hbar/mv$, где λ — характерная длина неоднородности и v — средняя скорость электронов среды); при этом оно приводит к зависимости S'_e не только от скорости, но и от координаты, $S'_e = S'_e(v, \mathbf{r})$. Суммируя вклады отдельных электронов, получим

$$S_e(v) = \int d^3 r S'_e(v, \mathbf{r}) n_a(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

*) Выражение для коэффициента γ едва ли можно считать надежным при точных численных расчетах. В частности, рассчитанные по формуле (2.6) величины S_e для ионов урана при $v < 6 \cdot 10^8$ см/с, согласно³¹, явно превышают измеренные. В равной мере то замечание относится к формуле (2.9).

(интегрирование проводится по объему, занимаемому одним атомом вещества мишени).

Формулы (2.7), (2.8) можно непосредственно использовать для описания торможения движущихся ядер в веществе с большим Z_2 . В самом деле, в этом случае $\lambda \gg \hbar/mv$, что позволяет рассматривать атом как слабонеоднородную электронную плазму с каким-либо заданным (например, томас-фермиевским) распределением электронов $n(r)$ (Линдхард, Шарф и Винтер^{6,9}).

Недостатком этого подхода является трудность обобщения на случай, когда налетающая частица не является голым ядром, а сохранила все или часть своих электронов. Грубо говоря, для такого обобщения приходится из каких-либо дополнительных соображений изменить (в сторону симметризации по атомным номерам Z_1 и Z_2) формулу (2.8). Из получаемых при этом выражений в литературе при анализе эксперимента чаще всего используется формула Линдхарда и Шарфа

$$C = \gamma_L \frac{e^2 a_0}{v_0} \quad \gamma_L = 8\pi Z_1^{7/6} Z_2 (Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{-3/2}, \quad (2.9)$$

опубликованная в⁷ без вывода.

Квазиклассические подходы Фирсова и Линдхарда и сотрудников выражают, таким образом, тормозное сечение $S_e(v)$ через плотность атомных электронов $n(r)$; при этом остается еще, разумеется, свобода в выборе $n(r)$. В первоначальных вариантах этих подходов в качестве $n(r)$ подставлялось распределение Томаса — Ферми, что давало возможность проследить за усредненной Z -зависимостью тормозного сечения. В последующих работах использовались хартри-фоковские распределения, позволяющие изучить более тонкий эффект — осцилляции сечений при изменении Z_1 и Z_2 (см. в этой связи следующий раздел). Наконец, для получения простых аналитических формул используются модельные потенциалы, более простые, чем потенциал Томаса — Ферми, например, потенциал³⁷

$$V(r) = \frac{Ze^2}{r} \varphi(r), \quad \varphi(r) = [H(e^{r/r_s} - 1) + 1]^{-1} \quad (2.10)$$

(H и r_s — функции атомного номера).

В заключение этого раздела обратим внимание на то, что при $v > v_0$ пролетающая частица с большой вероятностью лишена внешних электронов; однако для тяжелых атомов при $v < Z_1^{2/3} v_0$ большая часть электронов еще остается в связанном состоянии. Потеря внешних электронов должна сильно сказаться на каких-либо периферических процессах (например, на процессах, в которых большую роль играют размеры атома; см. раздел 4). В рассматриваемый здесь глубоко неупругий процесс, в котором играют сравнимую роль все атомные электроны, потеря Z_1^* внешних электронов вносит малый вклад, пропорциональный Z_1^*/Z_1 .

3. ОСЦИЛЛЯЦИИ ТОРМОЗНЫХ СЕЧЕНИЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ АТОМНОГО НОМЕРА

Квазиклассический подход к атомным столкновениям, позволяющий выразить тормозные сечения через характеристики атома как сплошной среды (в конечном счете через плотность электронного облака $n(r)$), при всей своей простоте и физической наглядности обладает двумя существенными недостатками. Во-первых, применимость такого подхода ограничена большими Z ; в лучшем случае малым параметром квазиклассичности оказывается величина $(Z_1 + Z_2)^{-1/3}$. Во-вторых, учет эффектов, обус-

ловленных оболочечной структурой атома, требуя выхода за рамки первого квазиклассического приближения, резко усложняет все формулы в ущерб их наглядности. Между тем описание одного из таких эффектов, — осцилляций S_e при изменении Z_1 и Z_2 , — физически не менее интересно, чем описание монотонной (усредненной) зависимости S_e от атомного номера.

Из двух естественных направлений обобщения квазиклассической модели, в сторону учета Z -осцилляций и в сторону меньших значений Z , значительно более привлекательной для большинства авторов является первое: осцилляции на фоне монотонной Z -зависимости четко выделяются при анализе экспериментов, что облегчает экспериментальную проверку выводов той или иной модели. Поэтому не удивительно, что большинство работ, обобщающих квазиклассическую модель, посвящено изучению осцилляций электронного тормозного сечения при изменении атомного номера.

Общим для всех этих работ является стремление сохранить физическую наглядность (пусть даже в ущерб теоретической корректности). Крайнее проявление этой тенденции — полумпирические формулы работ^{38,39}.

При обобщении модели, основанной на диэлектрическом формализме, авторы исходят из формулы (2.7), подставляя в нее плотность электронов $n(r)$, вычисленную с помощью слэтеровских или хартрифовских волновых функций. Ясно, что Z -осцилляции таких распределений $n(r)$ автоматически приводят к немонотонной зависимости S_e от Z_2 . Невыясненным остается вопрос, не теряются ли осциллирующие члены того же порядка при самом представлении тормозного сечения в виде (2.7). Это (наряду с трудностью учета осцилляций S_e при изменении Z_1) является, по-видимому, причиной относительно малого числа работ, обобщающих модель диэлектрического формализма^{40-43,20}.

Простейший путь введения осцилляций в модель Фирсова используется в работах⁴⁴, автор которых исходит из выражения (2.10) для атомного потенциала. Осцилляции радиуса экранировки r_s и параметра H при изменении Z приводят, естественно, к осцилляциям тормозного сечения; простота используемого электронного распределения позволяет получить замкнутые и легко обозримые аналитические формулы. Несколько сложнее подход работы⁴⁵: автор исходит из формул (2.3) и (2.5), подставляя в качестве $n(r)$ хартрифовскую функцию распределения электронов.

Обратим внимание, что обобщение формулы Фирсова связано со значительно большим произволом по сравнению с обобщением формулы (2.7). В самом деле, пока мы интересовались усредненной Z -зависимостью, было естественно описывать распределение электронов в слившихся электронных облаках томас-фермиевской функцией для $Z = Z_1 + Z_2$. При описании же осцилляций величины S_e нет ни общезначимых, ни экспериментальных оснований считать, что эта величина зависит только от суммы $Z_1 + Z_2$ или какой-либо другой заранее известной комбинации Z_1 , Z_2 . Поэтому большинство авторов стремится ввести Z -осцилляции в модель Фирсова не на уровне плотности $n(r)$, а на более раннем уровне — для входящего в формулу (2.4) потока Φ .

Главная трудность, возникающая на этом пути, связана с квантово-механическим обобщением выражения (2.3) для потока электронов через фирсовскую плоскость. Большинство авторов следует Чешайру и др.⁴⁶, постулировавшим следующее выражение для входящей в (2.4) величины Φ :

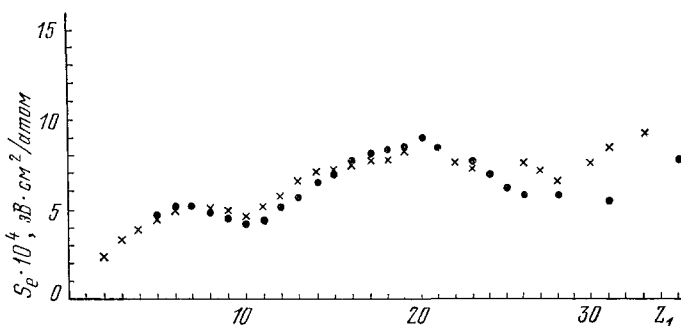
$$\Phi(x) = \frac{1}{4} \int \left[\sum_i \bar{u}_i |\psi_i|^2 + \sum_j \bar{u}_j |\psi_j|^2 \right] dy dz; \quad (3.1)$$

здесь индексы i, j нумеруют волновые функции ψ электронов движущегося атома (i) и атома мишени (j), поэтому величины $|\psi_i|^2, |\psi_j|^2$ описывают вклады отдельных электронов в функцию $n(r)$ (в предположении, что электронные оболочки при столкновении не деформируются). Что же касается величин \bar{u}_i, \bar{u}_j , то они выбираются в виде

$$\bar{u}_i = \sqrt{\frac{2}{m} \varepsilon_i}, \quad \bar{u}_j = \sqrt{\frac{2}{m} \varepsilon_j}, \quad (3.2)$$

где $\varepsilon_i, \varepsilon_j$ — средние значения в состояниях i, j оператора кинетической энергии $\hat{\varepsilon} = -(\hbar^2/2m) \Delta$.

Описанию Z -осцилляций тормозного сечения в обобщенной по такому пути модели Фирсова посвящены работы ⁴⁶⁻⁴⁹ (см. также ^{50,51}); в одной из них ⁴⁷ расчет удастся провести аналитически.



Зависимость электронного тормозного сечения в углероде от Z_1 ⁴⁶.

● — эксперимент ²⁷, × — теория ⁴⁶; скорость ионов — $1,38 \cdot 10^8$ см/с.

В качестве иллюстрации получающихся при этом результатов приведем сравнение теоретической ⁴⁶ и экспериментальной ²⁷ зависимостей S_e от Z_1 (рисунок). График взят из работы ⁴⁶.

Разумеется, с точки зрения теоретической корректности изложенному обобщению модели Фирсова присущ тот же недостаток, что и обобщенной модели Линдхарда и сотрудников: далеко не очевидно, что формула (3.4) действительно определяет квантовомеханический поток через фирсовскую плоскость.

Обобщение модели Фирсова, основанное на корректном квантовомеханическом определении потока, принадлежит Брайсу ⁵². Следуя этой работе, введем волновую функцию $\psi_+(\mathbf{r})$ электрона, пересекающего фирсовскую плоскость в определенном направлении. Выделяя из волновой функции атомного электрона $\psi(\mathbf{r})$ гармоники с $k_x > k_0$, имеем

$$\psi_+(\mathbf{k}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi(\mathbf{k}) \Theta(k_x - k_0), \quad (3.3)$$

где $\hbar k_0/m$ — скорость фирсовской плоскости и

$$\psi(\mathbf{k}) = \int d^3r e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} \psi(\mathbf{r}), \quad \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

Зная функции $\psi_+(\mathbf{r})$, можно найти вклад Φ' отдельного электрона в величину Φ :

$$\Phi' = -\frac{\hbar}{2m} \int \left[i \left(\psi_+^* \frac{\partial \psi_+}{\partial x} - \psi_+ \frac{\partial \psi_+^*}{\partial x} \right) + 2k_0 |\psi_+|^2 \right] dy dz. \quad (3.5)$$

Первые два слагаемых в подынтегральном выражении описывают квантовомеханический поток через покоящуюся плоскость; последний член

связан с дополнительным потоком, возникающим благодаря движению фирсовской плоскости.

Используя в качестве ψ волновую функцию 1s-состояния водородо-подобного атома (с зарядом ядра Ze),

$$\psi(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{Zr}{a_0} \right), \quad (3.6)$$

Брайс получил следующее выражение для вклада одного электрона в тормозное сечение:

$$S'_e = -\frac{16e^2 a_0}{5Zv_0} v \xi \left(\frac{v^2}{4Z^2 v_0^2} \right), \quad (3.7)$$

где ξ — функция скорости (обращающаяся при $v = 0$ в единицу),

$$\xi(x) = \frac{21 + 74x + 83x^2 + 30x^3}{24(1-x)^3} + (1+10x) \frac{\arctg \sqrt{x}}{8\sqrt{x}}. \quad (3.8)$$

При $v \ll Zv_0$ эта формула приводит к линейной зависимости потерь энергии от скорости; коэффициент пропорциональности при этом (не только численно, но и по Z -зависимости) отличается как от фирсовского, так и от линдхардовского. В этом смысле модель Брайса, использующую строгое квантовомеханическое определение плотности потока и простейшую волновую функцию (3.6) атомных электронов, можно рассматривать как (единственную, известную нам) попытку обобщения квазиклассической модели в сторону малых Z .

4. ТОРМОЖЕНИЕ СВОБОДНЫМ ФЕРМИ-ГАЗОМ

Рассмотрев электронное торможение тяжелых ионов в области малых скоростей, когда тормозное сечение линейно по скорости иона, перейдем к анализу торможения при больших значениях скорости. Прежде всего обратим внимание, что исходные формулы обеих квазиклассических моделей (2.4), (2.7) содержат v только в четных степенях. В этом легко убедиться, замечая, что Φ , $\operatorname{Re} \varepsilon(k, kv)$ и $kv \operatorname{Im} \varepsilon(k, kv)$ являются четными функциями скорости (точнее, отношения v/v_A , где $v_A \sim Z^{2/3}v_0$ — средняя скорость атомных электронов). К аналогичной зависимости S_e от v приводят формулы (2.7), (3.8) (в случае водородоподобного атома $v_A \sim Zv_0$). Между тем нет никаких физических оснований считать, что в выражении для S_e отсутствуют значительно большие (пропорциональные v^2 , а не v^3) поправки. Мы приходим к выводу, что квадратичные по скорости слагаемые в тормозном сечении потеряны на более раннем этапе и не могут быть извлечены из формул разделов 2, 3.

В этой связи представляет интерес проследить на простейшей физической модели за переходом от зависимости $S_e \sim v$ при малых скоростях к зависимости $S_e \sim v^2$ при больших значениях скорости. В качестве такой модели рассмотрим торможение частицы свободным электронным ферми-газом. Такая задача является обобщением работы Ферми и Теллера⁴ на случай скоростей частицы, не малых по сравнению с фермиевской скоростью *).

Разумеется, при учете тождественности частиц-рассеивателей (в частности, в задаче о торможении ферми-системой при $v \ll v_F$) потери энергии пролетающей частицы не выражаются через сумму тормозных сечений на каждом рассеивателе. Мы по-прежнему будем пользоваться понятием (на этот раз эффективного) тормозного сечения, определяя его с помощью

*) Для объяснения торможения очень медленных ионов в металле понадобилось обобщение работы⁴ в другом направлении — учет ферми-жидкостных эффектов в системе электронов проводимости^{5с}.

соотношения (1.2). (Именно эта величина имела в виду выше, в формуле (1.4).)

Потери энергии частицы на единице пути в ферми-газе определяются очевидным соотношением

$$-\frac{dE}{dx} = \frac{1}{v} \int \frac{p'^2 - p^2}{2m} n_F(p) [1 - n_F(p')] dv_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'} d\tau_{\mathbf{p}}, \quad (4.1)$$

где \mathbf{p}, \mathbf{p}' — импульсы электрона среды до и после рассеяния, n_F — функция распределения Ферми и $dv_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'}$ — вероятность рассеяния электрона в элемент фазового объема $d\tau_{\mathbf{p}}$.

Остановимся сперва на случае медленных частиц ($v < v_F$) и короткодействующих сил ($R < \hbar/m_r v_r$, где R — радиус действия сил, v_r — относительная скорость сталкивающихся частиц и m_r — приведенная масса, в интересующем нас случае тяжелых частиц совпадающая с массой электрона). При этом согласно известной формуле Бете (см., например, ³), сечение упругого рассеяния изотропно и не зависит от скорости:

$$d\sigma' = a'^2 d\Omega, \quad (4.2)$$

где $d\sigma'$ — отнесенное к одному рассеивателю (электрону) дифференциальное сечение рассеяния и a' — соответствующая длина рассеяния. Переходя от сечений к вероятностям перехода, имеем согласно (1.2), (4.1)

$$S'_e = 4\pi a'^2 m v v_F \quad (4.3)$$

(как и в ⁴, мы полагаем $v_F > v > m v_F / m_1$).

Если, как Ферми и Теллер, исходить из незаэкранированного кулоновского потенциала и, следовательно, из резерфордского сечения рассеяния, то вместо (4.3) получим ⁴

$$S'_e = 2\pi a_0^2 m v v_F f\left(\frac{v_F}{v_0}\right), \quad f(x) = x^{-4} \ln x. \quad (4.4)$$

Учитывая, что $v_F \sim v_0$ и $a' \sim a_0$, мы видим, что выражения (4.3) и (4.4) различаются лишь множителем порядка единицы. Заметим, что в реальном металле $R \sim \hbar/mv_F$; поэтому реализуется случай, промежуточный между резерфордским рассеянием и рассеянием на короткодействующем потенциале. Мы не будем приводить соответствующих громоздких выражений (лишь множителем порядка единицы отличающихся от (4.3) и (4.4)).

В случае быстрых частиц, $v > v_F$, считая потенциал короткодействующим, из (4.1), (1.2) получим

$$S'_e = 4\pi a'^2 m v^2. \quad (4.5)$$

Мы видим, что линейная зависимость тормозного сечения от скорости частицы заменяется при $v > v_F$ квадратичной зависимостью.

Проследим теперь, какие черты реального рассеяния быстрых ионов ($v > v_0$) электронами отражает рассмотренная модель. Разобьем для этого электроны налетающей частицы и атома вещества мишени на две группы — электроны внешних оболочек (внешние электроны) и электроны внутренних оболочек (внутренние электроны, электроны ионного остова). В торможение иона вносит вклад, очевидно, рассеяние ионного остова движущейся частицы как на ионном остове, так и на внешних электронах атома мишени. (Что же касается внешних электронов движущегося иона, — в случае, если ион их еще сохранил, — то их взаимодействие с веществом мишени при $v > v_0$ скорее приводит к перезарядке иона, чем к его торможению.)

Формула (4.2) для рассеяния медленных частиц на короткодействующем потенциале применима к столкновениям между электронами и ней-

тральным атомом при $v < Z_1^{1/3}v_0$. Оставляя на минуту в стороне вопрос о том, вплоть до каких значений нескомпенсированного заряда Z_1^*e ион можно трактовать как нейтральный атом, мы видим, что необходимым условием применимости формулы (4.5) является неравенство $v < Z_1^{1/3}v_0$.

Ограничимся поэтому областью скоростей $v_0 < v < Z_1^{1/3}v_0$. Если при этом $Z_2 \sim Z_1$, то (даже вне этой области, вплоть до $v \sim Z_1^{2/3}v_0$) к ионным остовам обеих сталкивающихся частиц можно применить квазиклассическую модель атомных столкновений, используя для вклада остовов в тормозное сечение выражения (1.5) и (2.6) (или (2.9)).

Если бы существовала резкая граница между энергиями связи внешних (I_p) и внутренних (I_c) электронов атома, то мы могли бы, выбрав скорость в интервале $\sqrt{I_p/m} \ll v \ll \sqrt{I_c/m}$, непосредственно применить формулу (4.5) к анализу вклада внешних электронов. Складывая вклады внутренних и внешних электронов в тормозное сечение, получим

$$S_c = Cv + 4\pi a'^2 Z_2^* m v^2, \quad (4.6)$$

где Z_2^* — число внешних электронов. Разумеется, четкой границы между внешними и внутренними электронами не существует; поэтому Z_2^* следует рассматривать как феноменологический параметр, растущий при увеличении скорости. Формула (4.6) использовалась для анализа экспериментов ^{34, 51} в ⁵⁵.

В заключение этого раздела оценим, при каких условиях столкновения электронов с ионом мало отличаются от их столкновений с нейтральным атомом. Сравним для этого амплитуду (длину) рассеяния a' электроном нейтрального атома с амплитудой рассеяния a'_c электроном движущегося в среде нескомпенсированного заряда Z_1^*e . Эти величины, как известно, имеют вид

$$a' = \frac{Z_1 \bar{r}^2}{3a_0}, \quad \bar{r}^2 = Z_1^{-1} \int r^2 n d^3r \quad (4.7)$$

$$a'_c = \frac{2e^2 Z_1^* a_0^{-1}}{q^2 + r_s^{-2}}, \quad hq = 2mv \sin \frac{\vartheta}{2}, \quad (4.8)$$

где n — плотность атомных электронов, ϑ — угол рассеяния в системе центра масс и r_s — радиус обусловленной средой экранировки заряда ($r_s \sim a_0$). Учитывая, что $\bar{r}^2 \sim Z_1^{-2/3} a_0^2$, мы видим, что $a'_c < a'$, если

$$Z_1^* < Z_1^{1/3} \max \left(\frac{v^2}{v_0^2}, \frac{a_0^2}{r_s^2} \right) \quad (4.9)$$

Таким образом, условие $Z_1^* < Z_1^{1/3}$ является достаточным для того, чтобы не учитывать отличие иона от нейтрального атома при всех значениях его скорости.

5. НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ТОРМОЖЕНИЯ ОТ СКОРОСТИ

Вклад рассмотренного в предыдущем разделе упругого (по отношению к налетающему атому) рассеяния свободными электронами несложно в принципе вычислить при всех значениях скорости, если известна структура налетающей частицы, описываемая ее упругим формфактором. Знание упругих формфакторов (определяемых экспериментально, например по рассеянию электронов атомами, или рассчитанных теоретически, например по методу Хартри — Фока или на основании модели Томаса — Ферми) позволяет проследить за зависимостью тормозного сечения от скорости иона вплоть до $v \sim Z_1^{2/3}v_0$. При дальнейшем увеличении скорости знание упругих формфакторов оказывается недостаточным, так как

открывается увеличивающееся с ростом скорости число неупругих каналов, вносящих вклад в торможение иона (каналов, не связанных с перезарядкой). При $v \gg Z_1^{2/3} v_0$ удастся выполнить суммирование вкладов всех этих каналов, приводящее к формуле Бете (1.3).

Для мишени с большим Z_2 такой подход не позволил бы выйти за рамки качественного описания торможения ионов, так как электроны тяжелого вещества при $v < Z_2^{2/3} v_0$ ни в коей мере нельзя рассматривать как свободный электронный газ. Иначе обстоит дело в случае мишени с малым Z_2 и, следовательно, низкой энергией полной ионизации I_2 . Для такой мишени может существовать область скоростей

$$\left(\frac{I_2}{m}\right)^{1/2} < v < Z_1^{2/3} v_0, \quad (5.1)$$

в которой модель упругих столкновений между свободными электронами и частицей, имеющей внутреннюю структуру, адекватно описывает электронное торможение тяжелого иона.

Итак, будем рассматривать электронное торможение тяжелого иона в легком веществе в области скоростей (5.1). Используя известное выражение для дифференциального сечения упругого рассеяния (см., например, ³),

$$d\sigma' = \left(\frac{e^2}{2mv^2}\right)^2 [Z_1 - f(q)]^2 \frac{do}{\sin^4(\vartheta/2)}, \quad (5.2)$$

получим

$$S_e = \frac{Z_2 e^4}{2mv^2} \int \frac{do}{\sin^2(\vartheta/2)} [Z_1 - f(q)]^2, \quad (5.3)$$

где $f(q)$ — атомный формфактор, связанный с распределением электронов в атоме соотношением

$$(q) = \int d^3 r n(r) \exp(-i\mathbf{q}\mathbf{r}). \quad (5.4)$$

Хорошо известно, что при $Rq \gg 1$ (R — размеры рассеивающей системы) $f(q) \rightarrow 0$. Мы видим, что при $v \gg Z_1^{2/3} v_0$ выражение (5.3) ведет себя (если отвлечься от множителя под знаком логарифма) как точное выражение (1.3) (учитывающее наряду с упругим рассеянием вклад неупругих каналов).

В случае не очень больших скоростей движущейся частицы, $v < Z_1^{1/3} v_0$, имеем $Rq < 1$; при этом

$$Z_1 - f(q) = \frac{1}{6} q^2 \int d^3 r n r^2 + Z_1^*. \quad (5.5)$$

В этом случае (по крайней мере, если $Z_1^* < Z_1^{1/3}$; см. неравенство (4.9)) происходит изотропное рассеяние на короткодействующем потенциале с длиной рассеяния (4.7), характеризующееся тормозным сечением (4.5). Поскольку $r^2 \sim Z_1^{-2/3} a_0^2$, то тормозные сечения различных атомов в одном и том же веществе при не очень больших скоростях должны относиться как $Z_1^{2/3}$ (в случае $v \gg Z_1^{1/3} v_0$ эти сечения относятся согласно (1.3) как Z_1^2).

В работах ^{34,54} описаны эксперименты по торможению ионов брома в углероде при скорости $v = 15 \cdot 10^8$ см/с, которая хорошо укладывается в интервале (5.1). Подставляя хартри-фоковский формфактор атома брома (см., например, ⁵⁶) в (5.3) и интегрируя, получим, в полном согласии с экспериментом, $Q_e \approx 50$ кэВ·см²/мкг.

При меньших значениях скорости формула (5.3) скорее дает удобный язык для интерпретации экспериментальных результатов, чем их численное объяснение. В этом случае можно считать свободными лишь часть

электронов вещества мишени; это можно учесть, заменяя в формуле (5.3) Z_2 некоторой функцией скорости $Z_2^*(v)$. Соответствующий анализ экспериментов^{34,54} приведен в⁵⁷.

Формула (5.3) позволяет сравнивать тормозные сечения для различных тяжелых ионов в одном и том же веществе также и в том случае, когда условие $v > \sqrt{I_2/m}$ не выполняется. В самом деле, характеризующий вещество мишени эмпирический параметр Z_2^* при сравнении тормозных сечений для различных ионов сокращается; поэтому сечения должны быть пропорциональны входящим в (5.3) интегралам.

Особенно просто провести такое сравнение при $v < Z_1^{1/3}v_0$, когда тормозные сечения определяются формулами (4.5), (4.7) и, следовательно, относятся как $Z_1^{2/3}$. Например, для ионов урана, иода и брома имеем

$$S_e(U) : S_e(I) : S_e(Br) = 20,4 : 14,1 : 10,7. \quad (5.6)$$

К сожалению, неравенство $v < Z_1^{1/3}v_0$, с одной стороны, и требования доминирования упругого рассеяния $S_e > Cv$, с другой, ограничивают область применимости и точность соотношений типа (5.6). Тем не менее, как можно судить на основании экспериментов^{34,54}, при $v = 8 \cdot 10^8$ см/с соотношение (5.6) выполняется с хорошей точностью.

6. ПОЛУЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Как уже отмечалось, в электронное торможение тяжелых ионов вносит вклад большое число различных физических процессов. Поэтому теоретические модели, как бы корректны с точки зрения теоретической физики они ни были, не могут охватить все стороны явления и потому едва ли могут претендовать на точное численное совпадение с экспериментом и дать достаточно надежные количественные предсказания. Между тем при обработке экспериментальных данных удается заметить ряд эмпирических закономерностей, оказывающихся очень полезными для практических расчетов^{34,39,52,58-66 *}).

Как иллюстрацию подходов, используемых при физической интерпретации таких закономерностей, приведем вывод трехпараметрической формулы Брайса⁵². Автор исходит из формулы (3.7), учитывающей вклад квантовых эффектов в модели Фирсова. В этой модели, как мы видели, электрон, пересекающий фирсовскую плоскость в направлении от атома А к атому В, «сменил владельца», передав атому В всю свою энергию. Поскольку при больших скоростях сталкивающихся атомов электрон не успевает передать всю свою энергию, Брайс вводит в тормозное сечение обрезающий множитель

$$f_c^B(v) = \left[1 + \left(\frac{av}{v_0} \right)^n \right]^{-1}, \quad (6.1)$$

где a и n — эмпирические параметры. Далее предлагается считать эмпирическим параметром величину Z в выражении (3.7) для S_e' . В результате, складывая вклады отдельных электронов, приходим к формуле⁵²

$$S_e(v) = (Z_1 + Z_2) S_e' f_c(v), \quad (6.2)$$

в которую хорошо укладываются экспериментальные значения тормозных сечений для ряда пар (Z_1, Z_2) .

Другой широко применяемый подход основан на понятии эффективного заряда. (Это понятие используется, в частности, еще в монографии

*) Полуэмпирические таблицы электронных (а также ядерных) тормозных сечений можно найти в⁵⁸.

Бора ⁶⁷.) Физические соображения, лежащие в основе этого подхода, можно выяснить следующим образом.

В борновском приближении дифференциальное сечение рассеяния иона $d\sigma$ легко связать с дифференциальным сечением $d\sigma_0$ «стандартного» процесса (в качестве которого выбрано рассеяние атома водорода в $1s$ -состоянии) в том же веществе при одинаковых передачах импульса $\hbar q$ и энергии $\hbar\omega$. Получим

$$d\sigma = Z_1^2 \Psi d\sigma_0, \quad (6.3)$$

где Ψ — некоторая функция q и ω , характеризующая рассеиваемый ион. Подставляя это соотношение в (1.1), найдем

$$S_e = Z_1^2 \int \hbar\omega \Psi \frac{d\sigma_0}{d\omega} d\omega. \quad (6.4)$$

Величины ω , q являются функциями относительной скорости v и угла рассеяния в системе центра масс ϑ ; мы можем поэтому написать здесь $\Psi \equiv \Psi(v, \vartheta)$.

Используя известное математическое соотношение (теорему о среднем), перепишем (6.4) в виде

$$S_e = Z_1^2 \Psi(v, \vartheta_1) S_{e0}, \quad (6.5)$$

где S_{e0} — тормозное сечение в случае атома водорода,

$$S_{e0} = \int \hbar\omega \frac{d\sigma_0}{d\omega} d\omega, \quad (6.6)$$

и ϑ_1 — некоторый угол (разумеется, различный для различных Z_1).

Таким образом, тормозное сечение может быть представлено в форме

$$S_e(v) = (Z_1 \gamma(v))^2 S_{e0}(v), \quad (6.7)$$

где γ — функция скорости и атомного номера Z_1 . Величина $Z_1 \gamma(v)$ называется эффективным зарядом.

Если ограничиться учетом лишь упругого рассеяния (доминирующего, согласно разделу 5, в области скоростей $Z_1^{1/3}v_0 < v < Z_1^{2/3}v_0$), то функция Ψ выразится через упругий формфактор $f(q)$:

$$\Psi = (1 - Z_1^{-1}f(q))^2. \quad (6.8)$$

Отсюда для эффективного заряда получим ⁵⁷

$$\gamma^2(v) = \left(8\pi \ln \frac{v}{v_0} \right)^{-1} \int [1 - Z_1^{-1}f(q)]^2 \frac{d\omega}{\sin^2(\vartheta/2)} \quad (6.9)$$

(мы подставили в явном виде формфактор $1s$ -состояния атома водорода для $a_0 q \gg 1$, что соответствует $v \gg v_0$).

В принципе функция Ψ , а следовательно, эффективный заряд, определяется вкладом как упругого, так и всех (не приводящих к перезарядке) неупругих каналов. Поэтому целесообразно, не вычисляя функцию γ из теоретических соображений, рассматривать эту функцию как эмпирическую.

Любая разумная параметризация функции $\gamma(v)$ должна отразить тот факт, что при $v \gg v_A$ электроны движущейся частицы не принимают участия в ее торможении; поэтому при $v \gg v_A$ $\gamma(v) \rightarrow 1$. Большинство авторов выбирают $\gamma(v)$ в виде

$$\gamma(v) = 1 - C_1 \exp\left(-\frac{v}{Z_1^{2/3}v_1}\right), \quad (6.10)$$

где C_1 и v_1 — постоянные.

При $q \rightarrow 0$, как известно, формфактор нейтрального атома обращается в нуль; поэтому можно выбрать $C_1 = 1$ и в качестве эмпирической постоянной рассматривать лишь величину v_1 . Мы приходим при этом к формуле Пирса и Бланна ⁶²:

$$\gamma = 1 - \exp \left(-0,95 Z_1^{-2/3} \frac{v}{v_0} \right), \quad (6.11)$$

где v_0 — боровская скорость.

Несколько иная параметризация используется Брауном и Моуком ³⁴:

$$\gamma = 1 - 1,034 \exp \left(-Z_1^{-0,688} \frac{v}{v_0} \right). \quad (6.12)$$

Следует иметь в виду, что применимость понятия эффективного заряда связана с возможностью представления дифференциальных сечений рассеяния в форме произведения двух сомножителей, один из которых зависит только от свойств пролетающего иона, а другой — только от свойств среды. Такая факторизация имеет место в борновском приближении, область применимости которого ограничена требованием $(e^2/\hbar v)(Z_1 - f(\bar{q})) < 1$ (\bar{q} — характерный переданный импульс). Далее, факторизация имеет место при больших скоростях, когда электроны среды можно считать свободными. Поэтому для тяжелых ионов (в случае тяжелого вещества мишени, когда электроны последней нельзя считать свободными) применимость понятия эффективного заряда нарушается при $v > Z_1^{1/3} v_0$ и снова восстанавливается при $v > Z_2^{2/3} v_0$.

7. ВЫВОДЫ

1. В низкоэнергетической области электронное тормозное сечение тяжелых ионов пропорционально скорости:

$$Q_e = \kappa \frac{e^2 a_0}{m_H} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{1/2}, \quad \frac{e^2 a_0}{m_H} = 0,46 \text{ кэВ} \cdot \text{см}^2/\text{мкг}, \quad (7.1)$$

где ε — энергия иона, $\varepsilon_0 = \left(\frac{1}{2} \right) m_H v_0^2 = 24,97 \text{ кэВ}$ — соответствующая боровской скорости энергия и κ — численный коэффициент (m_H — масса протона).

2. Простые и часто используемые теоретические модели дают для коэффициента κ следующие значения:

модель Фирсова ⁵:

$$\kappa = \eta_\Phi (Z_1 + Z_2) A_2^{-1} A_1^{-1/2}, \quad \eta_\Phi = 6,95; \quad (7.2)$$

модель Линдхарда и Шарфа ⁷:

$$\kappa = \eta_L Z_1^{7/6} Z_2 (Z_1^{2/3} + Z_2^{2/3})^{-3/2} A_2^{-1} A_1^{-1/2}, \quad \eta_L = 25,13. \quad (7.3)$$

(A — атомный вес). Эти модели определяют усредненную (монотонную) зависимость тормозного сечения от Z_1, Z_2 .

В литературе имеются обобщения этих моделей, позволяющие проследить также и за осцилляциями коэффициента κ при изменении атомного номера.

3. Строго говоря, область применимости формулы (7.1) ограничена снизу боровской скоростью v_0 и, следовательно, энергией ε_0 на нуклон.

Верхней границей области применимости этой формулы для тяжелых ионов является энергия $\varepsilon_1 \sim Z_1^{2/3} \varepsilon_0$ на нуклон. При дальнейшем увеличении энергии иона тормозное сечение возрастает быстрее, чем $\varepsilon^{1/2}$, дости-

гает максимума и начинает убывать по хорошо известному закону Бете: $Q_e \sim \varepsilon^{-1} \ln \varepsilon$.

4. Сравнительно четкая физическая картина электронного торможения в области энергий $\varepsilon > \varepsilon_1$ есть для случая тяжелых ионов, движущихся в легком веществе (см. раздел 5). Для тяжелых ионов в тяжелом веществе удастся аккуратно учесть вклад лишь одного из каналов рассеяния и только качественно объяснить экспериментально наблюдаемый рост тормозных сечений при $\varepsilon \sim \varepsilon_1$.

5. В литературе имеется ряд полуэмпирических формул, находящихся в хорошем согласии с экспериментом (например, формулы (6.2), (6.9), (6.10)).

Харьковский физико-технический институт
АН УССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Томпсон М. Дефекты и радиационные повреждения в металлах. — М., Мир, 1971.
2. Готт Ю. В. Взаимодействие частиц с веществом в плазменных исследованиях. — М.: Атомиздат, 1978.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика. — М.: Физматгиз, 1963.
4. Fermi E., Teller E. — Phys. Rev. 1947, v. 72, p. 399.
5. Фирсов О. Б. — ЖЭТФ, 1959, т. 36, с. 1517.
6. Lindhard J., Scharff M. — Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1953, v. 27, No. 15.
Lindhard J. — Ibid., 1954, v. 28, No. 8.
7. Lindhard J., Scharff M. — Phys. Rev., 1961, v. 124, p. 128.
8. Lindhard J., Scharff M., Schiøtt H. E. — Mat. Fys. Medd. Dan. Vid., Selsk., 1963, v. 33, No. 14.
9. Lindhard J., Winther Aa. — Ibid., 1964, v. 34, No. 4.
10. Bonderup E. — Ibid., 1967, v. 35, No. 17.
11. Green D. W., Cooper J. N., Harries J. C. — Phys. Rev., 1955, v. 98, p. 466.
12. Bader M., Pixley R. E., Mozer F. S., Whaling W. — Ibid., 1956, v. 103, p. 32.
13. Bernhard F., Müller-Jahreis U., Rockstroh G., Schwabe S. — Phys. Stat. Sol. Ser. b, 1969, v. 35, p. 285.
14. Chu W. K., Powers D. — Phys. Rev., 1969, v. 187, p. 478.
15. White W., Müller R. M. — Ibid., p. 499.
16. Apel P., Müller-Jahreis U., Rockstroh G., Schwabe S. — Phys. Stat. Sol. Ser. a, 1971, v. 3, p. K173.
17. Valenzuela A., Meckbach W., Kestelman A. J., Eckardt J. C. — Phys. Rev. Ser. B, 1972, v. 6, p. 95.
18. Ziegler J. F., Chu W. K. — At Data and Nucl. Data Tables, 1974, v. 13, p. 463.
19. Simons D. G., Land D. J., Brennan J. G., Brown M. D. — Phys. Rev. Ser. A, 1975, v. 12, p. 2383.
20. Pietsch W., Hauser U., Neuwirth W. — Nucl. Instr. and Meth., 1976, v. 132, p. 79.
21. Тендова Л. А., Николаев В. С., Дмитриев Н. С., Фатеева Л. Н. — ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 44.
22. Ormrod J. H., Duckworth H. E. — Can. J. Phys., 1963, v. 41, p. 1424.
23. Ormrod J. H., Macdonald J. R., Duckworth H. E. — Ibid., 1965, v. 43, p. 275.
Macdonald J. R., Ormrod J. H., Duckworth H. E. — Zs. Naturforsch., 1966, Bd. 21a, S. 130.
24. Davies J. A., Eriksson L., Jespersgaard P. — Nucl. Instr. and Meth., 1965, v. 38, p. 245.
Eriksson L., Davies J. A., Jespersgaard P. — Phys. Rev., 1967, v. 161, p. 219.
25. Fastrup B., Hvelplund P., Sautter C. — Nucl. Instr. Meth., 1965, 38, p. 260; Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1966, v. 35, No. 10.

26. Fastrup B., Borup A., Hvelplund P.— *Can. J. Phys.*, 1969, v. 46, p. 489.
27. Hvelplund P., Fastrup B.— *Phys. Rev.*, 1968, v. 165, p. 408.
28. Ormrod J. H.— *Can. J. Phys.*, 1968, v. 46, p. 497.
29. Eisen F. H.— *Ibid.*, p. 561.
30. Böttiger J., Bason F.— *Rad. Effects*, 1970, v. 2, p. 105.
31. Högborg H.— *Phys. St. Sol. Ser. b*, 1971, v. 48, p. 829.
32. Ndocko-Ndongue V. P., Pape A. J., Armbrusker R.— *Rad. Eff.*, 1977, v. 33, p. 91.
33. Lindhard J.— *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, 1969, v. 311, p. 11.
34. Brown M. D., Moak C. D.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1972, v. 6, p. 90.
35. Gemmell D. S.— *Rev. Mod. Phys.*, 1973, v. 46, p. 129.
36. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред*,— М.: Гостехиздат, 1957.
37. Green A. E. S., Sellin D., Zachor A.— *Phys. Rev.*, 1969, v. 184, p. 1.
38. El-hoshy A. H., Gibbons J. E.— *Ibid.*, 1968, v. 173, p. 454.
39. Eckardt J. C., Meckbach W., Baragiola R. A.— *Rad. Effects*, 1976, v. 27, p. 179.
40. Rousseau C. C., Chu W. K., Powers D.— *Phys. Rev. Ser. A*, 1971, v. 4, p. 1066.
41. Chu W. K., Powers D.— *Phys. Lett. Ser. A*, 1972, v. 38, p. 267.
42. Bhalla C. P., Bradford J. N.— *Ibid.*, 1968, v. 27, p. 318.
43. Latta B. M., Scanlon P. J.— *Phys. Rev. Ser. A*, 1976, v. 13, p. 1370.
44. Кессельман В. С.— *ЖТФ*, 1971, т. 41, с. 1708; 1972, т. 42, с. 1161.
45. Winterbon K. B.— *Can. J. Phys.*, 1968, v. 46, p. 2429.
46. Cheshire I. M., Dearnaley G., Poate J. M.— *Proc. Roy. Soc. Ser. A*, 1969, v. 311, p. 47; *Phys. Lett. Ser. A*, 1968, v. 27, p. 304.
47. Комаров Ф. Ф., Кумачов М. А.— *Phys. Stat. Sol. Ser. b*, 1973, v. 58, p. 389.
48. Land D. J., Brennan J. G.— *Nucl. Instr. and Meth.*, 1976, v. 132, p. 89.
49. Latta B. M., Scanlon P. J.— *Phys. Stat. Sol. Ser. b*, 1976, v. 74, p. 711.
50. Bhalla C. P., Bradford J. N., Reese G.— *In: Atomic Collision Phenomena in Solids*/Ed. D. W. Palmer, M. W. Thompson, P. D. Townsend.— Amsterdam: North-Holland, 1970,— P. 361.
51. Wilson W. D., Hatcher R. D., Bisson C. L.— *Bull. Am. Phys. Soc.*, 1971, v. 16, p. 333.
52. Brice D. K., — *Phys. Rev. Ser. A*, 1972, v. 6, p. 1794; *Appl. Phys. Lett.*, 1976, v. 29, p. 10.
53. Трубников Б. А., Явлинский Ю. Н. — *ЖЭТФ*, 1965, т. 48, с. 253.
54. Moak C. D., Brown M. D. — *Phys. Rev.*, 1965, v. 149, p. 244.
55. Ахиезер И. А., Давыдов Л. Н., Спольник З. А. — *УФЖ*, 1978, т. 23, с. 601, 1489.
56. Мотт Н., Мессн Г. *Теория атомных столкновений*.— М.: Мир, 1969.
57. Akhiezer I. A., Davydov L. N.— *Rad. Effects*, 1979, v. 40, p. 53.
58. Northcliffe L. C., Schilling R. F.— *Nucl. Data. Sect. A*, 1970, v. 7, p. 233.
59. Land D. J., Brennan J. G., Simons D. G., Moak M. D.— *Phys. Rev. Ser. A*, 1977, v. 16, p. 492.
60. Booth W., Grant I. S.— *Nucl. Phys.*, 1965, v. 63, p. 481.
61. Betz H.-D., Hottig G., Leischer E., Schmelzer Ch., Stadler B., Weinrauch J.— *Phys. Lett.*, 1966, v. 22, p. 643.
62. Pierce T. E., Blann M.— *Phys. Rev.*, 1968, v. 173, p. 390.
63. Kalish R., Grodzins L., Chmara F., Rose P. H.— *Phys. Rev.*, 1969, v. 183, p. 431.
64. Bloom S. D., Sauter G. D., — *Phys. Rev. Lett.*, 1971, v. 26, p. 607.
65. Ward D., Graham R. L., Geiger J. S.— *Can. J. Phys.*, 1972, v. 50, p. 2302.
66. Yarlagadda B. S., Robinson J. E., Brandt W.— *Phys. Rev. Ser. B*, 1978, v. 17, p. 3473.
67. Бор Н. *Прожождение атомных частиц через вещество*.— М.: Гостехиздат. 1950.
68. Pape H., Clerc H.-G., Schmidt K.-H.— *Zs. Phys. Kl. A*, 1978, Bd. 286, S. 159.