

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145.1

СТАТИСТИКА ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА*Г. М. Заславский***СОДЕРЖАНИЕ**

Введение	211
1. Происхождение задачи	212
а) Замечание Эйнштейна (212). б) Стохастическое разрушение интегралов движения (214). в) Теория Дайсона (217). г) Неупорядоченные системы (218).	
2. Структура спектра при разрушении интегралов движения	220
а) Формулировка ответа (220). б) Характеристики спектральной структуры (221).	
3. Вероятность появления близких уровней	221
а) Предположения (221). б) Правила квантования (222). в) Стохастическая неустойчивость в фазовом пространстве (224). г) Распределение уровней (225). д) Анализ экспериментальных данных и критические показатели (227).	
4. Некоторые приложения	229
а) Скользящие электроны (229). б) Возбужденные молекулы (229). в) Состояние преддиссоциации при образовании молекулярных связей (230). г) Стохастическое разрушение связанного состояния атомов с полем (231). д) «Можно ли услышать форму барабана?» (233).	
5. О спектре уровней квазиэнергий	233
а) Отображения для квантовых систем (234). б) Два случая расплывания волновых пакетов (235).	
6. Заключение	236
а) О квантовании стохастически неустойчивых систем (236). б) О волновых функциях (236). в) О принципе соответствия (237).	
Цитированная литература	237

ВВЕДЕНИЕ

Вопросу о зарождении стохастических свойств в классических динамических системах с небольшим числом степеней свободы в настоящее время посвящено огромное число работ. На их фоне тот же вопрос для квантовых систем только начинает обсуждаться. Интерес к нему связан не только с практической необходимостью и не только с новым кругом явлений, но и с необходимостью развития специального квантовомеханического описания систем, обладающих стохастической неустойчивостью. Этот обзор посвящен только той части проблемы, которая связана со структурой энергетического спектра, т. е. с правилами квантования. Его цель — изложить последовательно разрозненные в настоящее время факты из разных областей физики и привлечь к ним внимание исследователей.

В различных физических задачах уже давно используется прием, заключающийся в переходе от детерминированного описания некоторых свойств системы к их статистическому описанию в тех случаях, когда малые изменения параметров приводят к столь сильному изменению рассматриваемых свойств системы, что их детализация становится бессмысленной. Появление идеи о введении статистического описания энергети-

ческого спектра сложной системы связано с работами Вигнера и Ландау и Смородинского, объектом исследований которых были возбужденные состояния тяжелых ядер. Формальное выражение этих идей нашло воплощение в теориях Вигнера, Портера и Розенцвейга и Дайсона. В основе этих работ лежало введение определенной гипотезы о том, каким должен быть статистический ансамбль энергетических уровней системы. Подобный подход оставляет в стороне по крайней мере два принципиально важных вопроса: «когда?» и «почему?» должно возникать статистическое описание спектра системы. Результаты исследований последних десяти лет позволили не только ответить на эти вопросы, но и внести серьезные изменения в теоретический анализ характеристик распределения уровней. Одновременно с этим появилась возможность существенно расширить класс физических объектов, в которых при определенных условиях может возникать статистическая структура спектра. Обзор этих исследований и составляет содержание настоящей статьи.

1. ПРОИСХОЖДЕНИЕ ЗАДАЧИ

Задача, изложению которой посвящен настоящий обзор, возникла на пересечении нескольких направлений исследования свойств спектров очень сложных систем. Понятие «сложности» системы или «сложности» ее спектра будет уточнено ниже. Но сколь сильно мы ни пытались бы усложнить возможную структуру спектра, не столь просто представить себе, с какими фундаментальными характеристиками движения системы структура спектра должна быть связана. Может быть, именно поэтому полезно изложить те логические идеи, которые лежат в основе теории энергетического спектра «сложных» квантовых систем.

а) З а м е ч а н и е Э й н ш т е й н а

Историю вопроса следует начать с работы Эйнштейна¹, опубликованной в 1917 г. и посвященной квазиклассическим правилам квантования.

К тому времени были известны правила квантования (правила Бора — Зоммерфельда)

$$\frac{1}{2\pi} \oint p_i dq_i = n_i \hbar \quad (i = 1, 2, \dots, M), \quad (1)$$

где M — число степеней свободы. Неудовлетворительность правил (1), по мнению Эйнштейна, была связана с тем, что их применимость ограничена лишь случаем, когда переменные в системе полностью разделяются, ибо только в этом случае можно выбрать такие p_i , q_i , чтобы выражения $\oint p_i dq_i$ были инвариантами движения. Последнее необходимо, так как квантовые числа должны быть интегралами движения. Вместе с тем, свойство разделения переменных никак не связано с собственно квантовой проблемой, и поэтому Эйнштейном был предложен другой способ квантования:

$$S_k \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{C_k} \sum_{i=1}^M p_i dq_i = n_k \hbar \quad (k = 1, 2, \dots, M), \quad (2)$$

где контуры C_k будут определены ниже. Как известно, величина $\sum_{i=1}^M p_i dq_i$ является одним из интегральных инвариантов Пуанкаре². Поэтому S_k — инвариант. Далее, если существует точно M (т. е. столько, сколько сте-

пений свободы) однозначных и независимых интегралов движения, то выражение $\sum_{i=1}^M p_i dq_i$ является полным дифференциалом. Доказательство этого факта можно найти в той же работе Эйнштейна¹ или, в более современном виде, в книге Арнольда³. Таким образом, при полном наборе однозначных и независимых интегралов движения величина S_h зависит не от вида контура интегрирования, а лишь от положения его концов. Если рассматривать только замкнутые контуры C_h , то $S_h = 0$ в тех случаях, когда контур C_h может быть стянут в точку. Отличные от нуля значения S_h могут быть получены лишь в случае, когда пространство, в котором лежат C_h , является многосвязным. Именно таким является фазовое пространство системы. Остановимся на описании движения в нем подробнее.

Если переменные разделяются, то существует M интегралов движения, в качестве которых могут быть выбраны действия

$$I_k = \frac{1}{2\pi} \oint p_k dq_k \quad (k=1, 2, \dots, M).$$

В этом случае

$$H = \sum_{k=1}^M H_k(I_k),$$

и уравнения движения имеют вид

$$\dot{I}_k = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_k} = 0, \quad \dot{\vartheta}_k = \frac{\partial H}{\partial I_k} = \frac{\partial H_k}{\partial I_k} = \omega_k(I_k) \quad (k=1, 2, \dots, M).$$

В более общем случае существует M интегралов движения ($F_1, F_2, \dots, F_M$), но переменные не разделяются. Тогда можно определить

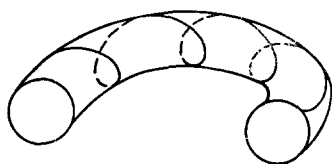


Рис. 1. Инвариантный тор системы из двух степеней свободы.

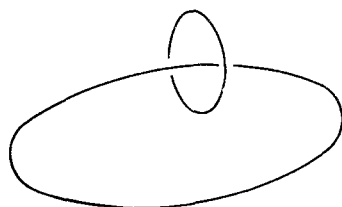


Рис. 2. Неприводимые контуры в случае двух степеней свободы.

с помощью выражений (2) M новых интегралов движения ($S_1, S_2, \dots, S_M$) и выразить

$$F_i = F_i(S_1, S_2, \dots, S_M) \quad (i=1, 2, \dots, M).$$

Такое преобразование существует, и, более того, переменные (S_h, ϑ_h) являются канонически сопряженными парами³:

$$H = H(S_1, S_2, \dots, S_M), \quad (3)$$

$$\dot{S}_k = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_k} = 0; \quad \dot{\vartheta}_k = \frac{\partial H}{\partial S_k} = \omega_k(S_1, S_2, \dots, S_M).$$

Из (3) следует, что движение происходит по M -мерному тору с частотами ω_k . В частности, при $M=2$ траектория навивается на 2-мерный тор (рис. 1). На нем можно построить два базисных замкнутых контура (рис. 2), которые не могут быть ни стянуты в точку, ни сведены друг к другу. Такие контуры будем называть неприводимыми. На M -мерном

торе можно построить ровно M неприводимых контуров C_k ($k = 1, 2, \dots, M$). Их и следует выбирать для выражения (2), что дает M уравнений

$$S_k(F_1, F_2, \dots, F_M) = n_k \hbar \quad (k = 1, 2, \dots, M), \quad (4)$$

определяющих правила квантования действий в случае неразделяющихся переменных.

Впоследствии правила квантования Эйнштейна были обоснованы и уточнены за счет неквазиклассических поправок в работах Келлера⁴, Балиана и Блоха^{5,6}, Берри и Маунта⁷ и, в наиболее строгой форме, Масловым^{8,9} *). Все эти уточнения относились к тому же случаю, когда число интегралов движения равно числу степеней свободы.

Работа Эйнштейна¹ заканчивается замечанием о том, что возможны случаи, когда число интегралов движения меньше числа степеней свободы, как, например (со ссылкой на результаты Пуанкаре), это может быть в задаче трех тел. Какими должны быть в этом случае правила квантования? Понадобилось много лет, в течение которых была подготовлена информация о тех свойствах динамических систем, которые необходимы для ответа на этот вопрос.

б) Стохастическое разрушение интегралов движения

Когда мы говорим о том, что траектория в фазовом пространстве навивается на тор, мы, естественно, подразумеваем, что сам тор является инвариантом. Если система имела инвариантные торы, то включение дополнительного взаимодействия между различными степенями свободы

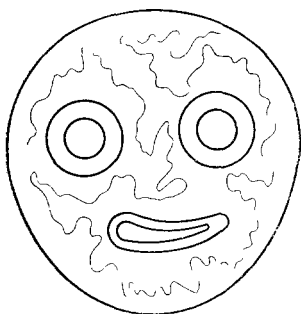


Рис. 3. Деление фазового пространства на островки устойчивости и «стохастическое море».

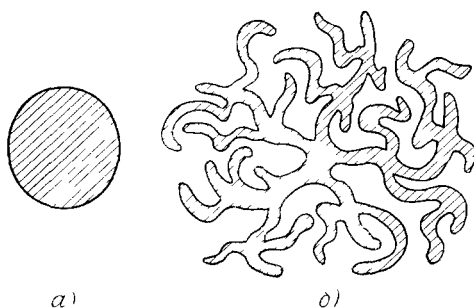


Рис. 4. Расплавление фазовой капли при стохастически неустойчивом движении.

может привести к разрушению инвариантных торов. Теория Колмогорова — Арнольда — Мозера (КАМ)¹⁰⁻¹² привела к результату, согласно которому достаточно малые возмущения сохраняют инвариантные торы.

Если возмущения достаточно велики, то инвариантные торы в основном разрушаются, и разрушение носит (по-видимому, всегда) стохастический характер. Это утверждение нуждается в достаточно пространном пояснении. Представим себе некоторый фазовый объем, в котором возможно финитное движение системы (этот объем условно изображая на рис. 3). Если начальные условия попадают в некоторые области фазового пространства (на рис. 3 они обведены жирными линиями), то траектории

*) Элементарный вывод правил квантования (4) приведен в работе²⁹.

в этих областях являются замкнутыми, что соответствует наличию нетривиального интеграла движения (например, площадь, ограниченная этой траекторией). Вне этих областей, называемых островками устойчивости, движение носит случайный характер. Это означает, что движение обладает двумя свойствами: эргодичностью и перемешиванием (т. е. расцеплением корреляций некоторых переменных).

Более наглядная интерпретация возникновения стохастичности обычно связывается с неустойчивостью траекторий в фазовом пространстве относительно сколь угодно малого возмущения начальных условий. При этой неустойчивости расстояние между траекториями экспоненциально нарастает со временем:

$$D = D_0 \exp(ht). \quad (5)$$

Описанное поведение траекторий приводит к тому, что капля в фазовом пространстве (рис. 4. а) быстро принимает очень сложную форму (рис. 4. б), равномерно покрывая фазовое пространство. Величина h в формуле (5) носит название энтропии Колмогорова (точнее, энтропия Колмогорова^{13,14} есть некоторое среднее по фазовому пространству значение h , умноженное на константу порядка единицы¹⁵). Точная формула для вычисления энтропии Колмогорова была получена Синаем⁶¹. Динамические системы, обладающие свойством перемешивания (т. е. $h > 0$), называют K -системами*). В реальной ситуации K -системы являются некоторой абстракцией. В типичных задачах, встречающихся в физике, всегда имеются островки устойчивости, в которых $h = 0$. Эти островки могут иметь сколь угодно малые размеры и очень сложно «наполняют» все фазовое пространство. Мера их, однако, может быть очень мала по сравнению с мерой области стохастического движения, и именно в этом смысле далее будет употребляться термин «стохастическая система». Обычно переход системы от динамического, или регулярного, движения к стохастическому определяется критическими значениями некоторых параметров. Чаще всего таким параметром является энергия системы (см., например, обзор¹⁶). Приведем несколько примеров появления стохастичности.

*Пример 1. Модель Хенона — Хейлеса*¹⁷. Гамильтониан системы из двух частиц имеет вид

$$H = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + x^2 y - \frac{1}{3} y^3. \quad (6)$$

Численный анализ движения, определяемого выражением (6), был проведен в работе¹⁷ следующим образом. На плоскости $(y, \dot{y})$ при $x = 0$ отмечались точки траектории при определенном значении энергии $H = E$. При достаточно малых E эти точки группируются в семейство замкнутых кривых (на рис. 5 $E = 0,0833$), что соответствует существованию дополнительного (к энергии) интеграла движения. При $E > 1/12$ часть замкнутых кривых начинает распадаться. На рис. 6 приведены отображения траекторий при $E = 0,125$. Часть траекторий становится стохастической, а область островков устойчивости еще достаточно велика. С дальнейшим увеличением E островки тают и при $E = 0,1667$ почти весь фазовый объем становится областью стохастического движения.

*) Строго говоря, определение K -систем, данное Колмогоровым¹³, включает также требование определенной равномерности перемешивания траекторий в различных областях фазового пространства. В физической литературе, однако, понятие K -систем используется в более широком смысле и предполагает лишь существование перемешивания траекторий, т. е. их локальной неустойчивости¹⁶.

Пример 2. Биллиард Синая. Хопфом было показано¹⁸, что движение частицы в пространстве с отрицательной кривизной обладает перемешиванием. Этот результат был обобщен Крыловым для доказательства стохастичности движения твердых сфер, сталкивающихся друг

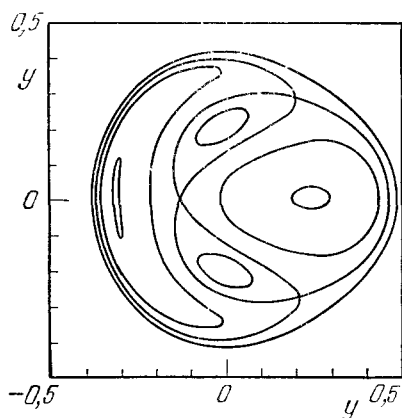


Рис. 5. Фазовые траектории в модели Хенона — Хейлеса (устойчивая область энергий).

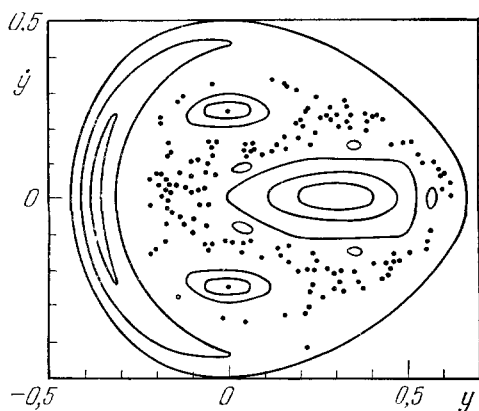


Рис. 6. Начало стохастического разрушения траекторий в модели Хенона — Хейлеса.

с другим по закону абсолютно упругого удара¹⁹. Строгое исследование систем биллиардного типа было проведено Синаем^{20,21}. Примеры биллиардов, в которых движение частицы является стохастическим, даны на рис. 7

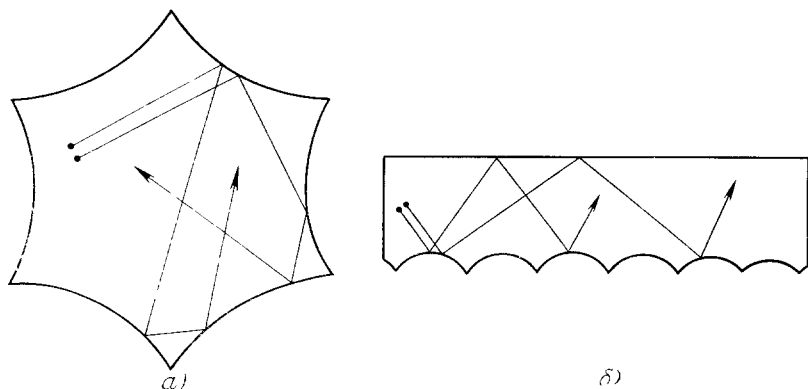


Рис. 7. Примеры биллиардов отрицательной кривизны: а) «звезда», б) «гусеница».

(а — биллиард типа «звезда», б — биллиард типа «гусеница»). Параллельный пучок траекторий в таких биллиардах **быстро разбегается**. Закон их разбегания в фазовом пространстве удовлетворяет условию (5).

Пример 3. Скользящие электроны. Движение электронов, подскакивающих на поверхности металла и закручиваемых магнитным полем, параллельным поверхности металла, является стохастическим, если поверхность имеет отрицательную кривизну, а энергия электронов больше некоторого критического значения (рис. 8; жирная линия обозначает поверхность, а магнитное поле перпендикулярно к плоскости рисунка). Эта система аналогична биллиарду типа «гусеница». Критерий

стохастичности движения имеет вид ²²

$$R > \frac{1}{2} \frac{a^2}{b} \equiv R_0, \quad (7)$$

где R — циклотронный радиус электронов, a — период неоднородности поверхности, b — высота неоднородности ($b \ll a$). Условие (7) может быть переписано в виде

$$E > E_0 = \frac{1}{2} m R_0^2 \Omega^2 = \frac{1}{8} \frac{m \Omega^2 a^4}{b^2}, \quad (8)$$

где E — энергия, E_0 — критическая энергия (граница стохастичности), Ω — циклотронная частота.

Примеры 1 и 3 приводят нас к неожиданным вопросам. До некоторых значений энергии квантование соответствующих гамильтонианов может быть приведено к некоторым привычным схемам. Но как квантовать тот же гамильтониан при энергиях, больших критической энергии E_0 ? В этой области остается только один интеграл движения — энергия, и это обстоятельство сразу возвращает нас к замечанию Эйнштейна, хотя и с существенно новым содержанием: каким должен быть спектр системы, в которой часть интегралов движения стохастически разрушена? Аналогичный вопрос возникает и при определении спектра колебаний мембран или резонаторов, имеющих форму типа изображенной на рис. 7. Поскольку существует изоморфизм траекторий для примера 2 и примеров 1, 3 при $E > E_0$ *), то сформулированная выше задача сводится к задаче о квантовании бильярда Синая.



Рис. 8. Траектории электронов, закручиваемых магнитным полем, вблизи неоднородной отражающей поверхности.

в) Т е о р и я Д а й с о н а

В этом разделе мы остановимся еще на одном вопросе, развивавшемся независимо от предыдущих, но, как станет ясно ниже, имеющем прямое отношение к сформулированной выше задаче.

При достаточно большой энергии возбуждения тяжелых ядер структура энергетических уровней столь сильно и нерегулярно искажается, что статистическое описание энергетического спектра становится более адекватным действительности. Авторами этой идеи Вигнером ²³ и Ландау и Смородинским ²⁴ была указана одна принципиальная особенность, связанная с необычностью рассмотрения энергии как случайной переменной: для уровней одной симметрии вероятность $P(E; \Delta E)$ обнаружения двух соседних уровней в области энергии E на расстоянии ΔE друг от друга должна стремиться к нулю при $\Delta E \rightarrow 0$ (принцип «отталкивания» уровней). Это означало, что из-за сильной корреляции между близкими уровнями распределение расстояний между ними не могло носить характер обычных вероятностных распределений, например, пуассоновского $\exp(-|\Delta E|)$ или гауссовского $\exp[-(\Delta E)^2]$.

Основы статистической теории распределения уровней были заложены работами Вигнера, Портера и Дайсона. Основные работы этого направления (по 1965 г.) собраны в сборнике ²⁵. Их анализ проведен в прекрасном обзоре Портера ²⁶. Подобно тому как в статистической

*) Строго говоря, этот изоморфизм существует с точностью до влияния островков устойчивости.

механике делается определенная гипотеза о статистическом ансамбле состояний, так и в статистическую теорию спектра была заложена гипотеза об эквивалентности распределения уровней E_k и собственных значений λ_k ансамбля случайных матриц определенной симметрии (будем называть ее далее «гипотезой $\lambda - E$ эквивалентности»). В работах Вигнера²³ и Портера и Розенцвейга²⁶ рассматривался гауссовский ансамбль случайных матриц. Формальное завершение это направление получило в работах Дайсона²⁷, который рассмотрел ансамбли случайных матриц ортогональных, унитарных и симплектических. Основным результатом этих исследований было следующее выражение для вероятности распределения расстояний ΔE между соседними уровнями в области спектра с энергией, близкой к E :

$$P(E; \Delta E) = A |\Delta E|^\alpha \exp[-B(\Delta E)^2], \quad (9)$$

где A и B — некоторые, слабо зависящие от E , функции, а критический показатель α принимает значения 1, 2 или 4 в зависимости от типа симметрии системы. К аналогичной формуле (9), но с несколько иными значениями A и B , приводит и теория Вигнера. При $\Delta E \rightarrow 0$

$$P(E; \Delta E) \sim |\Delta E|^\alpha, \quad (10)$$

и эта структура P является наиболее существенной, поскольку она определяет закон расталкивания уровней.

Следует оговорить, что «гипотеза $\lambda - E$ эквивалентности» не является очевидной. Основной аргумент в ее пользу связан с тем, что распределение собственных значений ансамбля случайных матриц характеризуется «расталкиванием», т. е. таким же свойством, каким должно обладать распределение уровней. Однако неясным оставался фундаментальный вопрос: какие именно свойства взаимодействий в системе должны приводить к случайной структуре спектра? Дело в том, что в период появления работ Вигнера и Дайсона представление о «сложности» взаимодействия было весьма наивным. В частности, считалось, что это есть характерное свойство систем с большим числом степеней свободы. Сейчас ясно (см. далее), что статистические свойства спектра системы могут возникать даже при двух (!) степенях свободы. Таким образом, в связи с гипотезой о « $\lambda - E$ -эквивалентности» возникают по крайней мере следующие два вопроса:

1. Как получить функцию $P(E; \Delta E)$ из первых принципов, т. е. из уравнений движения, и выяснить, действительно ли существуют распределения типа (9), (10)?

2. Действительно ли критический показатель α в законе расталкивания уровней зависит лишь от типа симметрии системы и не зависит от конкретных ее свойств?

г) Неупорядоченные системы

Для ответа на первый из поставленных выше вопросов необходимо знать по крайней мере те физические причины, которые могут приводить к случайному распределению уровней. В период работ Вигнера и Дайсона отсутствие информации об этих причинах компенсировалось введением понятия (также достаточно расплывчатого) о существовании «черного ящика взаимодействий». В подобной ситуации естественно было обратиться к системе, у которой некоторые величины имеют известное случайное распределение. Первая попытка такого рода была проведена Покровским²⁸ для одномерной неупорядоченной системы.

Гамильтониан неупорядоченной системы

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

содержит потенциал $V(x)$, который является реализацией некоторого случайного процесса. Например,

$$V(x) = V_0 \sum_k \delta(x - x_k),$$

где точки x_k распределены по пуассоновскому закону. Одной из центральных задач в исследовании неупорядоченных систем является определение плотности состояний $\rho(E)$ ⁶²⁻⁶⁴. Распределение расстояний между уровнями $P(E; \Delta E)$ является более тонкой характеристикой, и в одномерном случае при $V_0 > 0$ Покровский получил

$$P(E; \Delta E) \propto \exp\left[-\frac{\text{const}}{(\Delta E)^2}\right], \quad (11)$$

т. е. экспоненциальный закон расталкивания уровней. Этот результат имеет смысл лишь для достаточно больших значений энергии. Действительно, при больших E случайный потенциал $V(x)$ является возмущением и поэтому энергетический спектр должен быть близок к невозмущенному (с максимальным, бесконечным расталкиванием), в котором соседние уровни находятся на расстоянии $\sim 1/L$ друг от друга (L — размер системы). Для той же системы, но при достаточно малых значениях E распределение расстояний между уровнями было получено Молчановым.

Пусть ΔE — расстояние между соседними уровнями в окрестности значения энергии E . Тогда существует предел выражения

$$\lim_{L \rightarrow \infty} (L \Delta E).$$

Результат Молчанова сводится к следующему:

$$P(E; L \Delta E > \delta) \propto \exp[-\rho(E) \delta],$$

что соответствует пуассоновскому распределению уровней. Отсутствие расталкивания в области малых энергий можно понять из следующих качественных соображений, также принадлежащих Молчанову.

Известно, что в одномерном случае весь энергетический спектр неупорядоченной системы является точечным, а состояния локализованными. Обсуждение этих свойств спектра было начато Лифшицем и Моттом ^{62, 63}, а их строгое доказательство впервые получено в работе ⁶⁴. Из свойств локализованности состояний вытекает, что их волновые функции экспоненциально убывают при $x \rightarrow \pm \infty$ ⁶⁷. Отсюда следует, что все состояния имеют некоторую область локализации Δx в пространстве. Существенным обстоятельством здесь является то, что свойством локализации обладают все (с вероятностью единица) состояния. При малых значениях E

$$\Delta x \sim \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE}},$$

и $\Delta x \rightarrow \infty$ при $E \rightarrow 0$. Таким образом, характерная ширина потенциальной ямы, в которой локализуется состояние, велика при малых E и соответствует маловероятной флуктуации потенциала $V(x)$, при которой образуется большая «дырка» шириной $\sim \Delta x$ ⁶². Эффективная форма соответствующего потенциала найдена в ⁶⁵. Появление двух таких «дырок» близко друг от друга на оси x маловероятно. Поэтому области локализации уровней встречаются на оси x достаточно далеко друг от друга и практически не перекрываются. Отсюда следует отсутствие взаимодействия

локализованных состояний при малых E и, следовательно, отсутствие расталкивания.

Исследование характера распределения уровней в неупорядоченных двумерных и трехмерных системах, а также случая промежуточных энергий в одномерных системах является безусловно интересной задачей, которую еще предстоит решить. Однако уже имеющаяся информация позволяет указать на слишком слабую связь полученного распределения с формулой типа (9). Расталкивание уровней в одномерной неупорядоченной системе является слишком слабым в области малых энергий и слишком сильным в области больших энергий по сравнению с законом, определяемым формулой (9). Этому выводу не следует удивляться, так как динамические свойства одномерной системы принципиально отличны от динамических свойств системы сильно взаимодействующих частиц.

2. СТРУКТУРА СПЕКТРА ПРИ РАЗРУШЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ДВИЖЕНИЯ

а) Ф о р м у л и р о в к а о т в е т а

Выше была приведена основная информация, необходимая не только для понимания постановки задачи, но и для ее ответа. Для модели скользящих электронов выражение для $P(E; \Delta E)$ в области стохастичности было получено в ²² в случае обеих асимптотик: $\Delta E \ll \epsilon$, $\Delta E \gg \epsilon$ (ϵ — среднее расстояние между уровнями). Впоследствии удалось показать ²⁹, что при $\Delta E \rightarrow 0$ существует универсальная формула.

Предположим, что $E > E_0$ и что интеграл энергии является единственным однозначным интегралом движения, а все остальные интегралы стохастически разрушены. Тогда закон расталкивания уровней имеет следующий вид ²⁹:

$$P(E; \Delta E) \sim \text{const} \cdot |\Delta E|^{\text{const}/h} \quad (\Delta E \ll \epsilon), \quad (12)$$

где все const есть функции E , а $h = h(E)$ имеет тот же смысл, что и в формуле (5), т. е. это энтропия Колмогорова, или эффективный инкремент неустойчивости траекторий в фазовом пространстве. Закон (12) имеет ту же структуру (т. е. степенную зависимость от $|\Delta E|$), что и распределение (10) в теории Дайсона, однако, критический показатель определяется величиной h , которая характеризует свойства локальной неустойчивости системы *).

Формула (12) определяет распределение расстояний между уровнями при $\Delta E \ll \epsilon$. В обратном предельном случае $\Delta E \gg \epsilon$ в работе ²² было получено для модели скользящих электронов (см. раздел а) гл. 2, пример 3) распределение

$$P(E; \Delta E) \propto \exp \left[-\text{const} \cdot \left(\frac{\Delta E}{\epsilon} \right)^2 \right],$$

т. е. гауссовский закон. При выводе этой формулы использовались достаточно общие соображения, и поэтому можно ожидать, что она, так же как и формула (12), является универсальной при стохастическом разрушении интегралов движения. Вывод выражения (12) будет приведен в следующем разделе, а здесь мы остановимся более подробно на характере общей структуры распределения уровней.

*) Согласно (5) величина h соответствует инкременту локальной неустойчивости и легко может быть оценена по порядку величины для реальных систем путем линеаризации уравнений движения ¹⁶.

б) Характеристики спектральной структуры

Поскольку характер квантования и само распределение энергетических уровней существенно связаны со свойствами траекторий классических частиц, то возникает идея классификации уровней по сериям³⁰. Каждая серия уровней связана с определенным классом классических траекторий. Различные серии уровней могут очень сложным образом перекрываться друг с другом. Поэтому даже если и есть возможность определения всех серий энергетического спектра, расположение уровней в порядке возрастания энергий может оказаться достаточно сложной задачей.

Персивалем³¹ было предложено называть регулярным спектром те уровни, которые соответствуют условно-периодическим движениям классической частицы, и нерегулярным спектром те уровни, которые соответствуют стохастическому движению. Например, для классических траекторий, которым соответствует рис. 3, можно указать одну серию, соответствующую нерегулярному спектру, и три серии регулярной компоненты спектра, которым соответствует движение в различных островах устойчивости.

Поскольку предметом настоящего обзора является нерегулярная серия энергетического спектра, то необходимо сделать специальное замечание о том, в какой связи находится статистика уровней с ансамблем в обычной статистической физике. Дело в том, что система уровней нерегулярного спектра не может быть таким же представителем ансамбля, как, например, какое-либо состояние системы многих тел. Это обстоятельство отмечалось Дайсоном²⁷. Отказ от точного описания производится не для системы уровней, а для системы, природа взаимодействий в которой является очень сложной и спектр которой подлежит определению. Впоследствии мы увидим, что возбужденные молекулы являются примером такого рода систем и точное определение состояний такой системы является столь же бессмысленным, как и определение координат большого числа частиц. Энергетический спектр возбужденных молекул является тонкой характеристикой системы и вероятностное описание состояний системы приводит автоматически к появлению вероятностных свойств в спектре. Например, для бильярда типа «звезды» (см. рис. 7, а) статистический ансамбль могли бы образовывать звезды с небольшим разбросом в геометрических характеристиках звезды. При этом общий характер траекторий в таких бильярдах не зависит от детальных свойств этого разброса и, следовательно, не зависит от него и структура спектра. Поэтому каждая конкретная геометрия звезды может служить представителем ансамбля, который порождает определенную систему уровней. Такой способ введения представителя ансамбля уровней точно соответствует реальной физической ситуации, хотя, по-видимому, и не является единственно возможным. Например, при возбуждении молекул или ядер ансамбль может образовываться вследствие небольшого разброса возбужденных состояний различных молекул или ядер.

3. ВЕРОЯТНОСТЬ ПОЯВЛЕНИЯ БЛИЗКИХ УРОВНЕЙ

а) Предположения

В этом разделе будет определена вероятность $P(E; \Delta E)$ появления уровня с энергией $E + \Delta E$ в интервале dE , если известно, что состояние с энергией E в интервале dE является собственным. Мы здесь будем интересоваться асимптотикой $\Delta E \rightarrow 0$. Такая задача для случая сколь-

зующих электронов была решена в ²² путем использования квазиклассической асимптотики для волновых функций. В ²⁹ было показано, что результат работы ²² носит значительно более общий характер. Изложение ниже следует в основном работе ²⁹.

Оговорим некоторые общие условия, при которых определяется $P(E; \Delta E)$. Мы предполагаем ниже, что все интегралы движения стохастически разрушены, за исключением интеграла энергии, т. е. система изоморфна бильярду Сивая. Кроме того, для простоты предполагается, что стохастические траектории достаточно равномерно покрывают область движения (функция распределения близка к константе). Для бильярдов типа «звезды» или «гусеницы» это означает, например, большое число дуг с достаточно большой кривизной. Наконец, мы будем интересоваться только квазиклассической асимптотикой с очень большими номерами собственных значений E (энергетические уровни нумеруются в порядке возрастания собственных значений E).

б) Правила квантования

Прямой способ анализа собственных значений энергии E_k заключается в определении функции отклика $g(E)$, равной

$$g(E) = \int dq G(q, q, E) = \sum_k \frac{1}{E - E_k}, \quad (13)$$

где $G(q'', q', E)$ — функция Грина стационарного уравнения Шрёдингера, а q — совокупность координат. В квазиклассическом приближении G имеет вид

$$G(q'', q', E) = A \exp \left\{ i \left[\frac{1}{\hbar} S(q'', q', E) + \psi \right] \right\}, \quad (14)$$

где действие S равно

$$S(q'', q', E) = \sum_{i=1}^M \int_{q'}^{q''} dq_i p_i(q, E), \quad (15)$$

а A и ψ — предэкспоненциальный множитель и фаза, которые могут быть определены. Поскольку A и ψ являются медленно меняющимися функциями координат и дают малые поправки к правилам квантования, мы ограничимся приближением, в котором пренебрегают величиной ψ и изменением A . Это всегда справедливо при $\hbar \rightarrow 0$.

Можно упростить выражение (13), если воспользоваться тем, что $S/\hbar \gg 1$ и под знаком интеграла в (13) стоит быстро осциллирующая функция. Условие экстремума $S(q, q, E)$ имеет вид

$$\frac{\partial S(q, q, E)}{\partial q_i} = \left[\frac{\partial S(q'', q', E)}{\partial q_i''} + \frac{\partial S(q'', q', E)}{\partial q_i'} \right]_{q_i''=q_i'=q_i} = \\ = p_i'' - p_i' = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, M),$$

где p_i' и p_i'' — импульсы соответственно в начальной и конечной точках траектории. Их равенство означает, что в точке экстремума $S(q, q, E)$ равно

$$S_{\text{н}}(q) = \sum_{i=1}^M \oint_q dq_i p_i(q, E),$$

где интегрирование проводится по замкнутому контуру в фазовом пространстве, проходящему через точку q на поверхности, соответствующей

энергии E . Отсюда следует, что $g(E)$ можно переписать в виде

$$g(E) \approx A_1 \int dq \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{\pi}(q) \right], \quad (16)$$

где A_1 — некоторая новая константа.

Поскольку траектории классической частицы являются случайным процессом, то бессмысленно говорить о замкнутых траекториях, мера которых равна нулю. Вместо этого рассмотрим траектории, выходящие из малой области фазового пространства $\Delta\Gamma$ и возвращающиеся в эту же область. Этому соответствует операция «огрубления», аналогичная тому, как это делается в статистической механике. Совершим в (16) в соответствии со сказанным замену

$$\exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\pi}(q) \right\} \rightarrow \frac{1}{\Delta\Gamma} \sum_{C(\Delta\Gamma)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S_{\pi}(q) \right], \quad (17)$$

где сумма берется по всем контурам $C(\Delta\Gamma)$, начинающимся и кончающимся в области огрубления $\Delta\Gamma$. В силу однородности функции распределения частицы в области движения, правая часть в (17) не зависит от q и поэтому (16) можно переписать в виде

$$g(E) \approx A_1 V \frac{1}{\Delta\Gamma} \sum_{C(\Delta\Gamma)} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{\pi} \right), \quad (18)$$

где V — объем. Множество траекторий, выходящих из $\Delta\Gamma$ и возвращающихся в $\Delta\Gamma$, состоит: из траекторий, которые вышли из $\Delta\Gamma$ и через некоторое время вернулись в $\Delta\Gamma$; из траекторий, которые совершили два таких цикла, и т. д. до бесконечного числа циклов. Обозначим через

$$S^{(m)}(E) = \sum_{i=1}^M \int_{C_m(\Delta\Gamma)} p_i dq_i \quad (19)$$

действие на m -м цикле, который совершается по контурам $C_m(\Delta\Gamma)$. Тогда (18) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} g(E) = A_1 V \left\{ 1 + \frac{1}{\mu\Delta\Gamma} \sum_{C_1(\Delta\Gamma)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S^{(1)}(E) \right] + \frac{1}{\mu\Delta\Gamma} \sum_{C_1(\Delta\Gamma)} \frac{1}{\mu\Delta\Gamma} \sum_{C_2(\Delta\Gamma)} \times \right. \\ \times \exp \left(\frac{i}{\hbar} [S^{(1)}(E) + S^{(2)}(E)] \right) + \dots + \frac{1}{\mu\Delta\Gamma} \sum_{C_1(\Delta\Gamma)} \frac{1}{\mu\Delta\Gamma} \times \\ \left. \times \sum_{C_2(\Delta\Gamma)} \dots \frac{1}{\mu\Delta\Gamma} \sum_{C_{\infty}(\Delta\Gamma)} \exp \left(\frac{i}{\hbar} [S^{(1)}(E) + S^{(2)}(E) + \dots + S^{(\infty)}(E)] \right) \right\}. \quad (20) \end{aligned}$$

Здесь множитель μ , имеющий размерность, обратную действию, и пропорциональный плотности циклических траекторий в фазовом пространстве, выбирается так, чтобы удовлетворялось условие нормировки:

$$\sum_{C_m(\Delta\Gamma)} 1 = \mu\Delta\Gamma \quad (m = 1, 2, \dots, \infty).$$

В силу закона больших чисел совокупность всех циклических траекторий, например, $C_1(\Delta\Gamma)$, не отличается от любой совокупности $C_m(\Delta\Gamma)$, т. е. все пучки траекторий $C_m(\Delta\Gamma)$ для произвольного m -го цикла эквивалентны друг другу в статистическом смысле. Поэтому (20) можно переписать в виде

$$\bar{g}(E) = 1 + \frac{1}{\mu\Delta\Gamma} \sum_{C_1(\Delta\Gamma)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S^{(1)}(E) \right] \bar{g}(E), \quad (21)$$

где для удобства введена нормированная функция отклика $\bar{g} = g/A_1 V$. Из (21) следует, что полюсы функции отклика определяются из выражения

$$\frac{1}{\mu \Delta \Gamma} \sum_{c_1(\Delta \Gamma)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S^{(1)}(E) \right] = 1. \quad (22)$$

Выражение (22) дает новые правила квантования в квазиклассическом пределе для случая, когда стохастически разрушены все интегралы движения, кроме энергии. Его исследование основано на использовании более детальной информации о действии $S^{(1)}(E)$ частицы, совершающей однократный возвратный цикл, и на некоторой конкретизации операции округления.

в) Стохастическая неустойчивость в фазовом пространстве

Во всех примерах билиардов на рис. 7, 8 траектория частицы может быть охарактеризована дискретным преобразованием во времени $\hat{T}$, определяющим связь между динамическими переменными после (или до) двух последовательных столкновений частицы со стенками. Эта связь может быть записана в виде

$$(p_{n+1}, q_{n+1}) = \hat{T}(p_n, q_n)$$

или

$$p_{n+1} = f_1(p_n, q_n); \quad q_{n+1} = f_2(p_n, q_n),$$

где f_1, f_2 — некоторые функции, такие, что $\hat{T}$ сохраняет меру (соответствующий фазовый объем). В общем случае полезно выделить быстро меняющиеся переменные. Тогда можно утверждать, что если рассматриваемая система является K -системой, т. е. в фазовом пространстве имеет место локальная (стохастическая) неустойчивость в смысле (5), то всегда существует хотя бы одна переменная, по которой происходит быстрое размешивание. Более того, именно неустойчивость относительно малых возмущений этой переменной делает систему K -системой^{15,16,32}. Проиллюстрируем это утверждение на примере скользящих электронов (см. рис. 8). Пусть x_n — координата частицы при n -м столкновении с поверхностью, а φ_n — угол, который образует траектория частицы в точке n -го столкновения с осью x . Кроме того, будем предполагать, что дуги поверхности имеют хорду a и высоту $b \ll a$. Тогда преобразование $\hat{T}$ имеет вид²²

$$\begin{aligned} \xi_{n+1} &= \left\{ \xi_n + 2 \frac{R}{a} \sin \varphi_{n+1} \right\}, \\ \varphi_{n+1} &= \varphi_n + \varepsilon \chi(\xi_n), \quad \varepsilon = \frac{b}{a} \ll 1, \end{aligned} \quad (23)$$

где скобки $\{ \dots \}$ обозначают дробную часть аргумента; $\xi_n \equiv \{x_n/a\}$, $\chi(\xi)$ — функция, задаваемая формой дуги поверхности и нормированная так, что $\max \chi \sim 1$ (при $\varepsilon \ll 1$ это, вообще говоря, парабола). Из (23) видно, что быстро меняющейся переменной является величина ξ , условие локальной неустойчивости которой имеет вид

$$\begin{aligned} K &= \left| \frac{\delta \xi_{n+1}}{\delta \xi_n} \right| \sim 2\varepsilon \frac{R}{a} \chi'(\xi) \gg 1; \\ \chi'(\xi) &= \frac{d\chi(\xi)}{d\xi} \end{aligned} \quad (24)$$

(неравенство (7) следует из (24) при $\chi' \sim 1$). Пусть теперь $\delta\xi_0$ есть возмущение начального условия ξ_0 . Тогда

$$\delta\xi_n \sim K\delta\xi_{n-1} \sim K^2\delta\xi_{n-2} \sim \dots \sim K^n\delta\xi_0!$$

или

$$\delta\xi_n \sim e^{nh}\delta\xi_0, \quad h = \ln K. \quad (25)$$

В общем (многомерном) случае связь между энтропией Колмогорова и коэффициентом растяжения траекторий K может отличаться от (25)^{61, 15, 16, 33}, однако пропорциональность между h и $\ln K$ остается. Таким образом, начальное возмущение $\delta\xi_0$ экспоненциально нарастает со временем до тех пор, пока $\delta\xi_{N_0}$ не достигает в момент времени N_0 значения ~ 1 . Это время равно

$$N_0 = \frac{\ln(1/|\delta\xi_0|)}{\ln K} = \frac{1}{h} \ln \frac{1}{|\delta\xi_0|}. \quad (26)$$

Через время (26) две траектории, начальные условия которых отличались на малую величину $\delta\xi_0$, разойдутся настолько, что станут статистически независимы.

Общность рассмотренной ситуации в том, что в системах со стохастически разрушенными интегралами движения можно определить инкремент локальной неустойчивости $\ln K$ и с его помощью записать время N_0 , в течение которого малое возмущение начального условия приведет к статистической независимости траекторий. Это замечание будет проанализировано более подробно в следующем разделе.

Стохастическая неустойчивость траекторий в фазовом пространстве выделяет множество случайных траекторий по сравнению со множеством периодических траекторий при выводе правил квантования. Действительно, квазиклассическое приближение (14) для функции Грина определено на узком пучке траекторий, лежащих вблизи некоторой (базисной) классической траектории. В качестве базисной траектории бессмысленно выбирать периодическую траекторию, т. к. траектории, лежащие в ее малой окрестности, испытывают стохастическую неустойчивость и экспоненциально быстро разбегаются.

г) Р а с п р е д е л е н и е у р о в н е й

Перейдем к анализу правил квантования (22). Предварительно заметим, что область $\Delta\Gamma$ будет предполагаться достаточно малой (и может быть меньше $\hbar$). Степень малости $\Delta\Gamma$ определяется из следующих соображений. Чем меньше $\Delta\Gamma$, тем больше $\tau_{\Delta\Gamma}$ — время возврата в $\Delta\Gamma$. Необходимо, чтобы время $\tau_{\Delta\Gamma}$ было велико по сравнению со временем релаксации функции распределений частиц. В этом случае замена (17) приводит лишь к слабому огрублению траектории, не меняя существенно ее стохастических свойств. Иными словами, все траектории, входящие в $C(\Delta\Gamma)$, сосредоточены вблизи некоторой «средней» траектории, которая очень мало отличается от «типичной» стохастической траектории частицы. Это позволяет заменить условие (22) на следующее:

$$\exp\left[\frac{i}{\hbar} S_{\Delta\Gamma}(E)\right] = 1, \quad (27)$$

где $S_{\Delta\Gamma}(E)$ есть действие частицы, совершающей один «приближенный» цикл. Понятие «приближенного» цикла вводится таким образом, что если на конец траектории частицы насадить фазовую сферу объемом $\Delta\Gamma$, то в эту сферу должно попасть начало траектории.

Обозначим через $P(E)$ вероятность того, что уровень с энергией E является собственным. Тогда из (27) следует, что

$$P(E) = \sum_{m=0}^{\infty} p_m(E), \quad (28)$$

где $p_m(E)$ есть вероятность того, что $S(E)$ принимает значение $2\pi m\hbar$, m — целое число. Поскольку длина траектории достаточно велика из-за малости $\Delta\Gamma$, то можно воспользоваться законом больших чисел. Тогда зависимость $p_m(E)$ от m имеет вид острой функции (рис. 9) с максимумом при некотором значении $m_0(E) \gg 1$. Отсюда, по определению, следует, что этот максимум приходится на траекторию, для которой действие равно

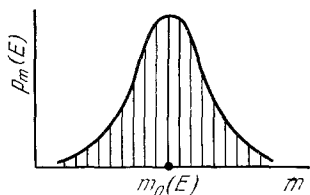


Рис. 9. Распределение вероятностей различных значений действия случайной траектории.

$$\bar{S}_{\Delta\Gamma}(E) = 2\pi\hbar m_0(E). \quad (29)$$

Траекторию с действием $\bar{S}_{\Delta\Gamma}$ будем называть типичной для уровня E .

Пусть теперь значение энергии $E + \Delta E$ соответствует ближайшему к E уровню. Аналогичные рассуждения дают для типичной траектории с энергией $E + \Delta E$

$$\bar{S}_{\Delta\Gamma}(E + \Delta E) = 2\pi\hbar m_1(E), \quad (30)$$

где целое число m_1 не очень сильно отличается от m_0 . Основное следствие из (29), (30) в том, что

$$|\bar{S}_{\Delta\Gamma}(E + \Delta E) - \bar{S}_{\Delta\Gamma}(E)| = 2\pi\hbar |m_1 - m_0| \geq 2\pi\hbar, \quad (31)$$

т. е. разность действий для двух типичных траекторий, соответствующих двум соседним уровням, отстоящим на величину ΔE , не может быть меньше $2\pi\hbar$. Дальнейшие рассуждения покажут, что из этого неравенства находится асимптотика $P(E; \Delta E)$ при $\Delta E \rightarrow 0$. Действительно, вид траектории зависит от E как от параметра. Зафиксируем типичную траекторию, соответствующую энергии E , и возмущим теперь в ней параметр E на малую величину ΔE . Типичной траектории соответствует некоторое (типичное) время цикла $\tau_{\Delta\Gamma}$ и поэтому возникает следующий вопрос: как при сколь угодно малых возмущениях параметра траектории ($\Delta E \rightarrow 0$) получить на конечном интервале времени конечное изменение действия $\geq 2\pi\hbar$? Ясно, что это невозможно в случае устойчивых траекторий. В частности, уже из этих рассуждений следует, почему расталкивание уровней должно быть сильнее в устойчивом случае (т. е. при существовании полного набора интегралов движения), чем в неустойчивом случае. Более того, чем сильнее неустойчивость траектории относительно малых возмущений ее параметров, тем слабее расталкивание уровней.

В разделе в) отмечалось, что в случае стохастической неустойчивости одна из переменных (ξ) очень сильно изменяется от одного столкновения частицы со стенками бильярда к другому столкновению. Это видно, например, из типичных уравнений (23). Параметр растяжения K является функцией энергии (в уравнении (23) от энергии зависит циклотронный радиус R). Поэтому, как видно из (23), возмущение E на величину ΔE приводит к возмущению начального условия на величину

$$\delta\xi_0 \sim \frac{dK(E)}{dE} \Delta E. \quad (32)$$

Теперь заметим, что действие на траектории с энергией $E + \Delta E$ никогда не сможет отличаться на конечную величину $\geq 2\pi\hbar$ от действия на траек-

тории с энергией E , если только эти траектории не станут статистически независимы. Действительно, на временах, меньших времени развития стохастической неустойчивости, изменение действия из-за возмущения мало и неравенству (31) нельзя удовлетворить при $\Delta E \rightarrow 0$. Наоборот, действия статистически независимых траекторий могут отличаться с отличной от нуля вероятностью на произвольную величину.

Согласно (26) и (32) безразмерное время (число столкновений со стенками билиарда), в течение которого возмущение энергии на величину ΔE приводит к статистической независимости траекторий, равно

$$N_0 = \left(\ln \frac{1}{|\Delta E|} + \ln \frac{1}{dK/dE} \right) (\ln K)^{-1} \xrightarrow{\Delta E \rightarrow 0} \left(\ln \frac{1}{|\Delta E|} \right) [\ln K(E)]^{-1}. \quad (33)$$

С другой стороны, для типичной траектории с энергией E существует типичное время цикла и, следовательно, типичное число столкновений $\bar{N} = \bar{N}(E)$. Согласно (33) при $\Delta E \rightarrow 0$ величина N_0 растет, в то время как $\bar{N}(E)$ не меняется. Поэтому при достаточно малых ΔE всегда выполняется неравенство

$$N_0 \gg \bar{N}. \quad (34)$$

Таким образом, траектория с энергией $E + \Delta E$ может стать статистически независимой от траектории с энергией E , если частица с энергией $E + \Delta E$ испытывает N_0 столкновений, причем N_0 очень велико по сравнению с числом $\bar{N}$, на которое приходится максимум функции распределения $P(N)$ числа столкновений на стохастической траектории. Но вероятность $P(N_0)$ есть вероятность очень редкой флуктуации и поэтому

$$P(N_0) \propto \exp(-\text{const } N_0). \quad (35)$$

Поскольку появление $\geq N_0$ столкновений на траектории с энергией $E + \Delta E$ означает возможность выполнения неравенства (31) с отличной от нуля вероятностью, то $P(E; \Delta E) \propto P(N_0)$, или, согласно (35),

$$P(E; \Delta E) \propto \exp(-\text{const } N_0). \quad (36)$$

Подстановка (33) в (36) дает ответ

$$P(E; \Delta E) \propto |\Delta E|^{\text{const}/\ln K(E)} = |\Delta E|^{\text{const}/h(E)}, \quad (37)$$

приведенный в (12). Величина const в (37) может зависеть от E и с большой степенью точности не зависит от ΔE . Для ее вычисления необходимы не только более строгие методы, чем изложенный, но и большая детализация модели. Для скользящих электронов в ²² получено: $\text{const} \approx 1/2$.

Формула (37) имеет простую физическую интерпретацию. С ростом K показатель степени в (37) уменьшается и расталкивание уровней становится слабее. При $K \rightarrow \infty$ вероятность $P(E; \Delta E)$ перестает зависеть от ΔE и расталкивание исчезает. Это связано с тем, что чем больше K , тем быстрее происходит стохастизация траекторий, т. е. тем сильнее локальная неустойчивость и корреляция между собственными значениями ослабевает. В пределе, когда время стохастизации траекторий стремится к нулю ($K \rightarrow \infty$), корреляция уровней исчезает.

д) Анализ экспериментальных данных и критические показатели

Первые экспериментальные данные по анализу функции распределения расстояний между уровнями были получены Гуревичем и Певзнером³⁴ по данным для ядер In^{113} , In^{115} , Cs^{133} , Tb^{159} , Ho^{165} , Tm^{169} , Hf^{177} , Hf^{179} , Ta^{181} , U^{235} , U^{238} . Ими была получена гистограмма, приведенная

на рис. 10 и четко обнаруживающая расталкивание уровней (по оси абсцисс отложено $\Delta E' / \langle \Delta E \rangle$, а по оси ординат — число случаев). Аналогичная кривая приводится Портером и Розенцвейгом³⁵ для группы элементов в районе осмия Hf, Ta, W, Re, Os, Ir (рис. 11; кривой изображено распределение Вигнера) для электронных уровней возбужденных нейтральных атомов. Статистическое распределение уровней здесь должно

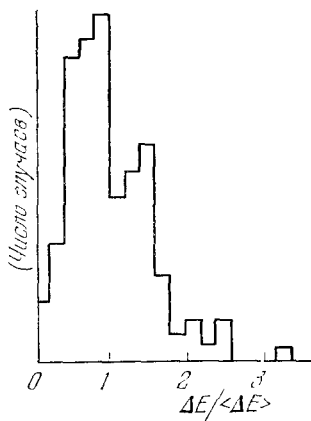


Рис. 10. Гистограмма распределения расстояний между уровнями по данным работы³⁴.

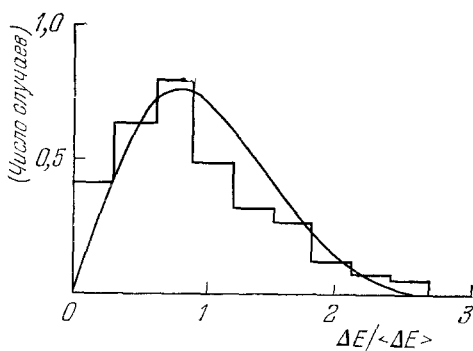


Рис. 11. Гистограмма распределения расстояний между уровнями по данным работы³⁵.

возникать за счет сильного спин-орбитального взаимодействия, приводящего к разрушению квантовых чисел L и S . Данные по статистике атомных уровней приведены также в работах^{36,37}.

Как видно из рис. 10, 11, принцип расталкивания уровней блестяще подтверждается. Эта характеристика распределения является, однако, слишком грубой. Более тонкой характеристикой является критический показатель α в формуле (10) и показатель β в выражении

$$\frac{dP(E; \Delta E)}{d\Delta E} \propto |\Delta E|^\beta \quad (\Delta E \rightarrow 0).$$

Согласно (37)

$$\alpha = \frac{\text{const}}{h(E)}, \quad \beta = \frac{\text{const}}{h(E)} - 1 = \alpha - 1.$$

Отсюда следует, что либо всегда, либо начиная с некоторых E , β становится отрицательным (так как h растет с ростом E) и $dP(E; \Delta E)/d\Delta E \rightarrow \infty$ при $\Delta E \rightarrow 0$. Описанный ход распределения $P(E; \Delta E)$ вблизи $\Delta E = 0$ отсутствует в распределении Вигнера — Дайсона (9), так как в нем

$$\alpha = -1, 2, 4, \quad \beta = 0, 1, 3 \geq 0.$$

Экспериментальное определение критических показателей α , β является нелегким. Однако на этом пути может быть выяснено, каков реальный закон расталкивания уровней и какие причины его обуславливают. Хотя поведение гистограмм на рис. 10, 11 говорит скорее в пользу того, что $\beta \neq 0, 1, 3$, тем не менее их малая точность вблизи $\Delta E = 0$ недостаточна для определенного заключения *).

*) Когда настоящая статья готовилась к печати, появилась статья Макдональда и Кауфмана⁷⁶ с численным анализом спектра колебаний бильярда типа «стадион». Движение частиц в таком бильярде, как показано Бунимовичем⁶⁸, является переме-

4. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Вопросы о структуре нерегулярного спектра в настоящее время привлекли к себе большое внимание исследователей и широко обсуждаются в литературе (см., например, обзоры по квазиклассическим правилам квантования ^{7,38}, работы по спектрам возбужденных молекул ³⁹⁻⁴¹ и по движению электрона в анизотропном поле ^{42,43}, а также в связи со структурой волновой функции ⁴⁴ и др.). Остановимся на некоторых из них подробнее.

а) Скользящие электроны

Задача о скользящих вдоль поверхности металла электронах в магнитном поле рассматривалась в различных работах ⁴⁵⁻⁴⁷ в связи с проблемой поверхностных электронных уровней в металле. Введение периодически гофрированной поверхности отрицательной кривизны (рис. 7. б), сделанное в работе ²², могло бы в определенной степени моделировать периодичность кристаллической структуры металла. Возникающая при этом нерегулярность спектра поверхностных электронов должна была бы проявляться следующим образом. При воздействии на поверхностные электроны слабым внешним полем на малой частоте ω электроны интенсивно поглощали бы энергию, если ω совпадало бы с расстоянием между соседними поверхностными уровнями. Но число таких переходов должно быть пропорционально $P(E; \Delta E = \hbar\omega)$. Поэтому интенсивность поглощения энергии внешнего поля согласно (37) должна иметь вид

$$I(\omega) \propto \omega^{\text{const}} \ln K. \quad (38)$$

Поскольку стохастическая картина в спектре, согласно (8), возникает лишь при магнитном поле, меньшем некоторого критического, то с уменьшением магнитного поля должна была бы резко измениться частотная характеристика линии поглощения.

б) Возбужденные молекулы

Сильно возбужденные молекулы, или молекулы, находящиеся в состоянии преддиссоциации, могут служить сейчас одним из наиболее ярких объектов, в которых теория статистического распределения уровней может решить ряд принципиальных вопросов. С одной стороны, структура колебательных спектров молекул существенно определяется тем, сколько интегралов движения имеет данная молекула. С другой стороны, скорости мономолекулярных реакций существенно определяется внутренними состояниями молекул, особенно в тех случаях, когда время внутренней релаксации молекул сравнимо с характерными временами взаимодействия или возбуждения молекул. Эти обстоятельства были давно поняты ^{40,48} и далее усиленно изучались, в основном численно. Райсом и сотрудниками ^{40,41}. Интерес к вопросу о спектрах возбужденных молекул усилился в последнее время также в связи с проблемой бесстолкновительной диссоциации молекул, возникающей при воздействии мощного лазерного

пивающимися. Распределение расстояний между уровнями, полученное в работе ⁷⁶, характеризуется четко выраженным расталкиванием в соответствии с теорией, приведенной в гл. 3. Для сравнения в работе ⁷⁶ приводится распределение расстояний между уровнями в случае интегрируемой задачи о колебаниях круглого диска, в котором расталкивание отсутствует. Дж. Казати любезно сообщил автору об аналогичных численных результатах для бильярда типа «стадион».

импульса на молекулу. Несмотря на некоторую наивность первых работ в исследовании возбужденных молекул, в дальнейшем Окстоби и Райс⁴¹ правильно заметили связь между свойствами спектров молекулы и тем, существует или нет в молекуле стохастическая неустойчивость. Численные расчеты Помффри⁷⁴ для модели Хенона — Хейлеса (6) показали, что при переходе от области регулярного движения в область стохастического движения в расстояниях между квантовыми уровнями энергии появляются сильные флуктуации.

Приведем очень простые соображения для иллюстрации перестройки спектра при достаточно сильном возбуждении молекул²⁹. Крыловым было показано¹⁹, что газ сфер, сталкивающихся друг с другом как твердые шарики, обладает свойствами перемешивания при условии

$$K = \frac{R}{2a} \gg 1, \quad (39)$$

где a — радиус сфер, R — характерное расстояние между центрами сфер. В более общем случае под a можно понимать характерный размер рассеивающего потенциала, например, атома в молекуле. Тогда величина R , определяющая по-прежнему расстояние между центрами взаимодействующих областей, является функцией энергии молекулы. Действительно, из эксперимента известно, что с увеличением энергии молекул величина $R = R(E)$ возрастает. Это означает, что условие (39) может быть использовано для определения критической энергии E_0 :

$$R(E_0) \approx 2a,$$

при которой в молекуле исчезают все интегралы движения (или часть из них), за исключением интеграла энергии. Устойчивому случаю соответствует неравенство $K < 1$ или $R < 2a$, т. е. «плотная упаковка» сфер взаимодействия. Это, как известно, приводит к возможности введения некоторого самосогласованного потенциала и к хорошо определенной (с помощью всех необходимых квантовых чисел) одночастичной задаче (модель независимых частиц в теории ядра). Наоборот, условию (39) соответствует неравенство $R > 2a$. Система становится «рыхлой», и именно в этой ситуации должно возникать статистическое распределение уровней.

Наиболее простое следствие из разрушения интегралов движения для сильно возбужденных молекул, по-видимому, состоит в том, что спектры поглощения в низкочастотной области должны обладать аномальным видом. Его легко определить из тех же соображений, что и в разделе а) для скользящих электронов, т. е. интенсивность поглощения поля на частоте ω должна иметь вид (38).

в) Состояние преддиссоциации. при образовании молекулярных связей

При образовании молекулярных связей и, в частности, водородной связи возникает состояние преддиссоциации. Изучение инфракрасных спектров при образовании связи обнаруживает очень сильное уширение. Квантовая теория ширины линии этого явления впервые была дана Степановым⁴⁹. В дальнейшем эта теория развивалась Степановым и многими другими исследователями (см., например, анализ, проведенный в работах^{50,51}). Однако до сих пор ширина линий, предсказываемых теорией, почти на два порядка (!) меньше наблюдаемой ширины для водородной связи.

Можно высказать следующую гипотезу. При сближении атомных групп, образующих молекулу, возмущение, действующее на ион водорода в одной из групп, разрушает его интегралы движения (или, что то же самое, квантовые числа, определяющие движение иона водорода). Возникает стохастическая неустойчивость для иона водорода, которая и приводит к аномальной ширине соответствующих колебательных спектров. Дело в том, что стохастическая неустойчивость является одной из самых сильных среди известных в настоящее время динамических неустойчивостей¹⁶ и может приводить к аномально большому уширению колебательных линий спектра. Интересно в связи с этим заметить, что появление стохастической неустойчивости в системе из двух частиц с экспоненциальным потенциалом взаимодействия (аналогичным потенциалу Морса) изучалось в работе⁵² в связи с задачами иного рода. Возникающие на фазовой плоскости картины аналогичны приведенным на рис. 5.6. Это позволяет с определенностью утверждать о существовании стохастической неустойчивости водородной связи при расстоянии между группами, образующими молекулу, меньшем некоторого критического.

г) Стохастическое разрушение связанного состояния атомов с полем⁵³

Гамильтониан, описывающий связанные состояния двухуровневых атомов с полем, имеет вид (так называемая модель Дике):

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_r + H_{ar}, & H_0 &= \hbar\omega (c^+c + R_z); \\ H_r &= \hbar\omega\Lambda (R_+c + R_-c^+), & H_{ar} &= \hbar\omega\Lambda (R_+c^+ + R_-c); \end{aligned} \quad (40)$$

$$\Lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{16\pi\rho\mu^2}{\hbar\omega}},$$

где c^+, c — операторы рождения и уничтожения фотонов; r_{vi} ($v = z, +, -$) — компоненты энергетического спина i -го атома; $R_v = \sum_{i=1}^N r_{vi}$; ω — частота поля, которая предполагается равной частоте атомного перехода; Λ — безразмерная константа взаимодействия атомов с полем, в которой ρ — плотность атомов, а μ — их дипольный момент. Часть гамильтониана H_r описывает резонансное взаимодействие и удовлетворяет коммутационным свойствам

$$[H_0, H_r] = 0. \quad (41)$$

Нерезонансной частью H_{ar} , как правило, пренебрегают. В этом случае из (40), (41) следуют два закона сохранения:

$$[H, H_0] = 0, \quad [H, H_r] = 0, \quad (42)$$

с помощью которых энергия системы может быть выражена как функция двух квантовых чисел. Исследование такой задачи проводилось многими авторами, и вопросы, связанные со спектром в резонансном приближении ($H_{ar} = 0$), подробно изложены в обзоре⁵⁴.

Полный гамильтониан (41) в полуклассическом приближении приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{c} + \omega^2 c &= \frac{1}{2} \omega^2 \Lambda m, \\ \ddot{m} + \omega m &= -\frac{1}{2} \omega^2 \Lambda \mathcal{E} \sqrt{r^2 - m^2 - \frac{\dot{m}^2}{\omega^2}}, \end{aligned} \quad (43)$$

где ξ — безразмерная напряженность поля, m — поперечная проекция энергетического спина на один атом и r — константа движения, называемая кооперационным числом. Интеграл энергии системы (43) имеет вид

$$E = \frac{1}{\omega^2} \dot{\xi}^2 + \xi^2 + \sqrt{r^2 - m^2 - \frac{\dot{m}^2}{\omega^2}} - \Lambda \xi m,$$

причем величина

$$n = \sqrt{r^2 - m^2 - \frac{\dot{m}^2}{\omega^2}}$$

имеет смысл разности заселенностей уровней атома, а

$$y = \xi^2 + \frac{\dot{\xi}^2}{\omega^2}$$

— число фотонов, приходящихся на один атом. Исследование системы (43) было проведено в работе ⁵³. В ней было показано, что при $\Lambda < 1$ система остается в основном устойчивой. У нее по-прежнему сохраняются два

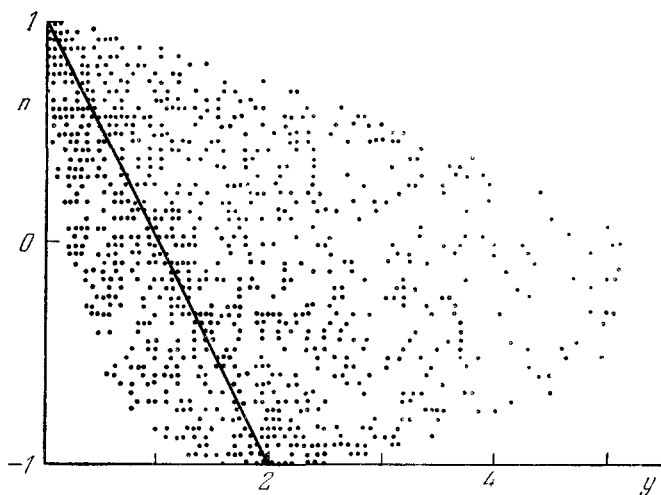


Рис. 12. Стохастическая траектория заполняет фазовое пространство (система атомы + поле излучения).

интеграла движения, которым соответствуют два квантовых числа. Однако при $\Lambda > 1$ картина резко меняется. Траектории становятся стохастическими и заполняют почти все фазовое пространство. Иными словами, при взаимодействии $\Lambda > 1$ в замкнутой системе атом + поле должно возникать статистическое распределение уровней. Пример разрушенной траектории на плоскости (n, y) приведен на рис. 12 при $E = 1$, $\Lambda = 1.8$. При $H_{ar} = 0$ величина

$$n + y = \text{const}$$

согласно (42), и этому закону сохранения соответствует на рис. 12 прямая. На рис. 13 по данным той же работы ⁵³ приведена зависимость расстояния D от безразмерного времени $\tau = \omega t$ для двух очень близких начальных условий: кривая 1 — $\Lambda = 0.9$; $E = 1$; кривая 2 — $\Lambda = 3$, $E = 1$. Этот рисунок демонстрирует развитие локальной неустойчивости. Из графика можно непосредственно определить инкремент неустойчивости

и связанную с ним ширину линии γ . При $\Lambda = 3$ (кривая 2 на рис. 13) находим: $\gamma \sim 0,5\omega$ (сравните с замечанием о ширине линии в разделе в) гл. 4).

Подчеркнем особенность рассмотренной системы по сравнению с изучавшимися ранее: стохастическое разрушение квантовых чисел происходит не по шкале энергий, а по шкале константы взаимодействия.

Обсуждавшийся в этом разделе вопрос может оказаться связанным с проблемой множественного рождения частиц. Условие появления стохастичности при столкновении частиц очень высоких энергий обсуждалось в работах Чернавского и Фейнберга^{55,56}.

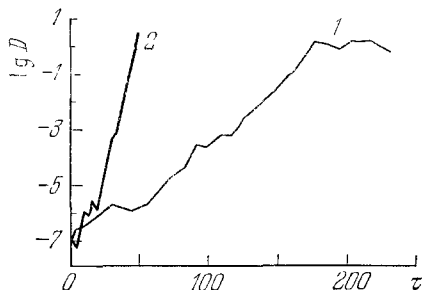


Рис. 13. Развитие локальной неустойчивости в системе атомы + поле излучения.

д) «Можно ли услышать форму барабана?»

Под этим вопросом обычно понимают следующее: можно ли по спектральным характеристикам резонатора определить его форму? Известен отрицательный ответ на этот вопрос (см. его обсуждение в книге Арнольда³, с. 407), поскольку одинаковым спектрам могут соответствовать существенно разные формы резонаторов.

Появление стохастической компоненты в спектре собственных значений при квантовании K -систем позволяет понять отрицательный ответ на вопрос, поставленный в заглавии, с иной точки зрения. Именно: две изоморфные K -системы имеют одинаковый (в статистическом смысле) спектр и могут сколь угодно сильно отличаться по форме.

5. О СПЕКТРЕ УРОВНЕЙ КВАЗИЭНЕРГИЙ

При действии периодического возмущения на квантовую систему можно ввести понятие квазиэнергии подобно тому, как вводится понятие квазимпульса. Это было сделано впервые Зельдовичем^{69,70}. Пусть гамильтониан

$$H = H_0(p, x) + V(x, t)$$

обладает свойством периодичности:

$$V(x, t + T) = V(x, t).$$

Тогда волновые функции можно выбрать так, что

$$\psi(x, t + T) = e^{(i/\hbar)\zeta T} \psi(x, t),$$

где величина ζ называется квазиэнергией. Состояния с определенным значением квазиэнергии играют в нестационарном случае ту же роль, что и состояния с определенным значением энергии в стационарном случае. Однако в классической теории периодические возмущения могут приводить к возникновению стохастического движения, если возмущение достаточно велико. При этом происходит стохастическое разрушение интеграла (единственного) энергии. Что должно происходить со спектром квазиэнергий, если при $\hbar = 0$ соответствующий классический гамильтониан описывает движение с перемешиванием? Ответа на этот вопрос в настоящее время не существует. Информация, которая сейчас имеется, и возникающие в поставленной задаче трудности настолько интересны, что на них стоит остановиться отдельно.]

а) О т о б р а ж е н и я д л я к в а н т о в ы х с и с т е м

Типичным и наиболее удобным примером для построения дискретных отображений является нелинейный осциллятор, на который действует периодическая последовательность δ -функционных импульсов

$$V(x, t) = U(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT). \quad (44)$$

Обозначим

$$\psi_n = \psi(x, t = nT + 0),$$

т. е. волновую функцию непосредственно после действия n -го импульса. Нетрудно получить рекуррентное соотношение ^{71,72}

$$\psi_{n+1} = e^{-(i/h)U(x)} e^{-(i/h)H_0 T} \psi_n \equiv \hat{T}_q \psi_n. \quad (45)$$

Таким образом,

$$\hat{T}_q \psi_n = \exp\left(\frac{i}{h} \mathcal{E} T\right) \psi_n,$$

и определение квазиэнергий сводится к определению собственных значений отображения T_q .

С другой стороны, в классическом случае можно построить отображение $\hat{T}$ для переменных (p, x) , определяющих состояние системы:

$$(p_{n+1}, x_{n+1}) = \hat{T}(p_n, x_n).$$

Анализ отображения $\hat{T}$ для потенциала возмущения (44) проводился во многих работах ^{15,16,32,72}. Характер движения, определяемый преобразованием $\hat{T}$, зависит от параметра

$$K = \text{const} \cdot \alpha \varepsilon \omega T, \quad (46)$$

где const — число порядка единицы, α — безразмерный параметр нелинейности:

$$\alpha = \frac{I}{\omega(I)} \frac{d\omega(I)}{dI},$$

$\omega(I)$ — нелинейная частота, определяемая невозмущенным гамильтонианом $H_0(p, x)$; ε — безразмерный параметр возмущения ($\varepsilon \sim U/H_0 T$). Параметр K имеет тот же смысл, что и в (24). При $K < 1$ движение является условно-периодическим (устойчивым). Однако при условии

$$K = \text{const} \cdot \alpha \varepsilon \omega T > 1 \quad (47)$$

возникает стохастическая неустойчивость, приводящая к тому, что классическая система становится K -системой.

Пусть теперь выполнено условие (47). Какими свойствами будет обладать квантовая система? Иначе говоря, если отображение $\hat{T}$ соответствует K -системе, то каким будет отображение $\hat{T}_q$? Это лишь другая формулировка вопроса, поставленного в начале раздела.

В работе ⁶⁰ рассматривалась эволюция когерентных состояний при условии (47) и было показано, что в квазиклассическом приближении собственные значения операторов рождения и уничтожения обладают свойством перемешивания. Однако анализ работы ⁶⁰ справедлив лишь на конечных временах

$$t < t_h^* \propto t_0 \frac{I}{h}, \quad (48)$$

где t_0 — некоторое характерное время задачи. Аналогичный результат был получен из численного анализа в работе ⁷¹, в которой вычислялись квантовомеханические средние $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$. Их временная эволюция лишь на конечном времени соответствует эволюции переменных (x, p) эквивалентной классической системы. В этом месте придется снова (уже в который раз!) остановиться на различии квантового и классического подходов.

б) Два случая распылывания волновых пакетов

Поскольку в квантовой механике мы всегда имеем дело не с отдельной траекторией системы, а с волновым пакетом, то полезно остановиться на эволюции в фазовом пространстве некоторой области, заполненной классическими частицами. Если такими частицами являются линейные осцилляторы, имеющие все одинаковые частоты, то ячейка фазового пространства, которую они заполняют, перемещается без деформации границ. В квантовой механике этому обстоятельству соответствует возможность построить нерасплывающийся волновой пакет (так называемое когерентное состояние). Иначе обстоит дело в нелинейном случае. Частоты осцилляторов зависят от их энергий, и поэтому различные участки фазовой ячейки движутся с разными скоростями. В результате происходит искажение формы границ ячейки, изображенное условно на рис. 14 ($t_2 > t_1 > t_0$). При этом происходит не только

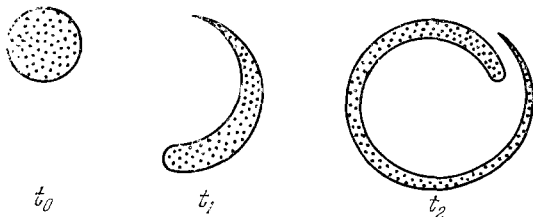


Рис. 14. Растекание фазовой капли ансамбля невзаимодействующих нелинейных осцилляторов.

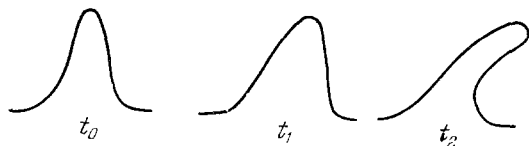


Рис. 15. Образование многозначного профиля нелинейной волны.

расплывание фазовой ячейки, но и укручение ее «фронта» и появление многозначности в форме границы ячейки. Описанная картина аналогична укручению профиля нелинейной волны в гидродинамике (рис. 15, $t_2 > t_1 > t_0$). Этому обстоятельству соответствует в квантовой механике отсутствие нерасплывающихся

когерентных состояний в нелинейном случае.

Отмеченное распылывание волновых пакетов в нелинейном случае является достаточно медленным. Иначе обстоит дело в случае K -систем, где распылывание ячейки фазового пространства и деформация ее границ происходят экспоненциально быстро вследствие перемешивания. В этом случае понятие волнового пучка, даже очень узкого ($\sim \hbar$), быстро теряет смысл. Наличие локальной неустойчивости делает понятие квазиклассического пучка не определенным на очень большие времена. Таким образом, мы сталкиваемся с определенными принципиальными трудностями при квазиклассическом описании K -систем.

В связи с этим следует указать на единственные пока два численных результата исследования, проведенные для систем с потенциалом (44). В работе ⁷¹, как уже отмечалось, было показано, что наблюдаемые средние $\langle x \rangle$, $\langle p \rangle$ изменяются со временем в соответствии с классической теорией, если времена не слишком велики. Из результатов работы ⁷³ также следует, что на тех (малых) временах, на которых проводился численный анализ,

поведение амплитуды вероятности находится в хорошем согласии с данными классической динамики.

Из сказанного следует, что в настоящее время мы не имеем возможности использовать квазиклассический метод в его существующем виде на неограниченных временах. И это сразу же означает, что мы не можем сказать о спектре квазиэнергий K -систем, является ли он дискретным или непрерывным.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные в обзоре вопросы показывают, что мы столкнулись с новыми и еще мало исследованными явлениями как в теоретическом, так и в экспериментальном смысле. Поэтому основная цель обзора заключалась в том, чтобы привлечь к ним внимание и указать на связь некоторых, на первый взгляд разных, задач. Некоторые замечания, следующие ниже, ставят своей целью расширить круг неясных вопросов.

а) О к в а н т о в а н и и с т о х а с т и ч е с к и н е у с т о й ч и в ы х с и с т е м

Задача об энергетическом спектре систем с разрушенными интегралами движения является частным случаем более общей задачи: каковы квантовые свойства таких систем?

Мы уже давно привыкли к тому, что при $\hbar \rightarrow 0$ существует достаточно надежное квазиклассическое приближение. По образному выражению Келлера, оно заключается в описании некоторого способа «насаживания волнового мяса на классическую кость». Этим вопросам посвящено к настоящему времени достаточно много работ (см., например, обзоры ^{7,9,57}). Сохранится ли обычный квазиклассический метод для описания систем с разрушенными интегралами движения? Основания для выражения сомнений в утвердительном ответе на поставленный вопрос дает следующее ниже замечание.

б) О в о л н о в ы х ф у н к ц и я х

Первой работой, в которой волновые функции, получаемые в квазиклассическом приближении, были подвергнуты критическому анализу, явилась работа Арнольда ⁵⁸. На основании исследования специального примера Арнольдом была высказана гипотеза о существовании в квазиклассическом приближении не мод, а «квазимод» (см. также ³, с. 406). Это означает следующее: с течением времени волновая функция все меньше становится похожей на колебание (скажем, типа плоской волны), а расплывается достаточно интенсивно и превращается в квазимоду. Такие функции с достаточной степенью точности удовлетворяют уравнению, но могут очень сильно отличаться от собственных функций.

Вопрос о структуре волновых функций при стохастически неустойчивом гамильтониане становится особенно актуальным, ибо не исключено, что в этом случае моды не существуют вообще. Причина этого лежит в локальной неустойчивости траекторий частицы, что приводит к автоматическому распылению «волнового мяса». Такое свойство волновых функций было обнаружено в ²², а в ⁶⁰ было показано экспоненциальное распыление когерентных (в начальный момент времени) волновых пакетов. По-видимому, удобное введение квазимод могло бы упростить анализ стохастических квантовых систем.

Обсуждение структуры волновых функций квазиклассического приближения в случае регулярного и нерегулярного спектров проводилось также в работах Берри ^{44,59}.

в) О принципе соответствия

Исследование явления стохастичности в квантовых системах показывает, что в рамках обычного квазиклассического метода возникают определенные трудности. Сейчас мы не можем указать, каков характер этих трудностей, принципиальный или технический? С другой стороны, из принципа соответствия возникает альтернатива: либо классические K -системы являются слишком грубым описанием реальности и в квантовом мире стохастичности не существует, либо мы не умеем достаточно хорошо совершать предельный переход в квазиклассическом случае для K -систем. Последнее заставляет нас вспомнить о критических замечаниях Эйнштейна по поводу классического предела в квантовой механике, ссылкой на слова которого мы хотим закончить этот обзор:

«Спросим теперь: включает ли в себе квантовая механика (с вытекающими из нее ограничениями на точность), то реальное описание движения макроскопических тел, которое дает классическая механика?»⁷⁵.

В течение длительного времени автор имел возможность обсуждать с В. И. Арнольдом, И. М. Лифшицем, Я. Г. Синаем, Б. В. Чириковым различные вопросы, затронутые в обзоре. Большая помощь была оказана автору В. Ф. Шабановым при анализе материала раздела в) гл. 4. Г. П. Берман, И. А. Малкин и Л. А. Пастур сделали ряд ценных замечаний к первоначальному варианту рукописи. С. А. Молчанов ознакомил меня с результатами, вошедшими в раздел а) гл. 1, до их публикации. Всем я выражаю искреннюю благодарность.

Институт физики им. Л. В. Киренского]
СО АН СССР, Красноярск

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Einstein A.—Verhandl. Dtsch. phys. Ges., 1917, Bd. 19, S. 82.—Перевод: Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 3.—М.: Наука, 1966.—С. 407.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика.—М.: Наука, 1973.
3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики.—М.: Наука, 1974.
4. Keller J. B.—Ann. of Phys., 1958, v. 8, p. 180.
5. Balian R., Bloch C.—Ibid., 1972, v. 69, p. 76.
6. Balian R., Bloch C.—Ibid., 1974, v. 85, p. 514.
7. Berry M. V., Mount K. E.—Rept. Progr. Phys., 1972, v. 35, p. 315.
8. Маслов В. П. Метод ВКБ в многомерном случае.—Приложение к книге: Хеддинг Дж. Введение в метод фазовых интегралов.—М.: Мир, 1965.
9. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики.—М.: Наука, 1976.
10. Колмогоров А. Н.—ДАН СССР, 1954, т. 98, с. 527.
11. Арнольд В. И.—УМН, 1963, т. 48, вып. 5, с. 13.
12. Moser J.—Nachr. Acad. Wiss. Göttingen. Math.-phys. Kl., 1962, Bd. 11a, S. 1.—Перевод: Математика, 1962, т. 6, вып. 4, с. 51.
13. Колмогоров А. Н.—ДАН СССР, 1958, т. 119, с. 861.
14. Синай Я. Г.—Ibid., 1959, т. 121, с. 768.
15. Чириков Б. В. Препринт № 267 ИЯФ СО АН СССР. Новосибирск: 1969.
16. Заславский Г. М., Чириков Б. В.—УФН, 1971, т. 105, с. 3.
17. Nepon M., Heiles C.—Astron. J., 1964, v. 69, p. 73.
18. Норф Е.—Math. Ann., 1940, Bd. 117, S. 590.—Перевод: УМН. 1949, т. 4, вып. 2, с. 129.
19. Крылов Н. С. Работы по обоснованию статистической физики.—М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1950.
20. Синай Я. Г.—ДАН СССР, 1963, т. 153, с. 1261.
21. Синай Я. Г.—УМН, 1970, т. 25, вып. 2, с. 141.
22. Заславский Г. М., Филопенко Н. Н.—ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 643.
23. Wigner E. P.—Ann. Math., 1951, v. 53, p. 36; 1955, v. 62, p. 548; 1957, v. 65, p. 203; 1958, v. 67, p. 325.
24. Ландау Л. Д., Смородинский Я. А. Лекции по теории атомного ядра.—М.; Л.: Гостехиздат, 1955.

25. Statistical Theories of Spectra: Fluctuations/ Ed. C. E. Porter.— New York; London: Academic Press, 1965.
26. Porter C. E.— Ibid.,— P. 3.
27. Dyson F. J.— J. Math. Phys., 1962, v. 3, pp. 40, 157, 166.— Перевод: Дайсон Ф. Статист. теория энергет. уровней сложных систем.— М.: ИЛ, 1963.
28. Покровский В. Л.— Письма ЖЭТФ, 1966, т. 4, с. 140.
29. Заславский Г. М.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 2089.
30. Лазуткин В. Ф.— В кн. Проблемы математической физики.— Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1971.— Вып. 5, с. 72.
31. Percival I. C.— J. Phys. Ser. B, 1973, v. 6, p. 1229.
32. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах.— М.: Наука, 1970.
33. Casati G., Diana E., Scotti A.— Phys. Lett. Ser. A, 1976, v. 56, p. 5.
34. Gurevich I. I., Pevsner M. I.— Nucl. Phys., 1956/57, v. 2, p. 575; ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 162.
35. Porter C. E., Rosenzweig N.— Ann. Acad. Sci. Fennicae. Ser. A, 1960, v. VI, No. 44.
36. Rosenzweig N., Porter C. E.— Phys. Rev., 1960, v. 120, p. 1698.
37. Trees R. E.— Ibid., 1961, v. 123, p. 1293.
38. Percival I. C.— Adv. Chem. Phys., 1977, v. 36, p. 1.
39. Noid D. W., Marcus R. A.— J. Chem. Phys., 1975, v. 62, p. 2119.
40. Nordholm K. S., Rise S. A.— Ibid., 1974, v. 61, p. 203, 768; 1975, v. 62, p. 157.
41. Oxtoby D. W., Rice S. A.— Ibid., 1976, v. 65, p. 1676.
42. Gutzwiller M. C.— J. Math. Phys., 1973, v. 14, p. 139.
43. Gutzwiller M. C.— Ibid., 1977, v. 18, p. 806.
44. Berry M. V.— J. Phys. Ser. A, 1977, v. 10, p. 2083.
45. Лифшиц И. М., Росевич А. М.— ЖЭТФ, 1955, т. 29, с. 743.
46. Хайкин М. С.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 212.
Nee T. W., Prange R. E.— Phys. Rev. Lett., 1967, v. 25, p. 282.
47. Канер Э. А., Макаров Н. М., Фукс Н. М.— ЖЭТФ, 1968, т. 55, с. 931.
Фальковский Л. А.— ЖЭТФ, 1970, т. 60, с. 838.
Макаров Н. М., Фукс Н. М.— ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 806.
48. Eastes E. A., Markus R. A.— J. Chem. Phys., 1974, v. 61, p. 4301.
49. Степанов В. И.— ЖФХ, 1945, т. 19, с. 507.
50. Coulson C. A.— Proc. Roy. Soc. Ser. A, 1974, v. 337, p. 167.
51. Robertson G. H.— J. Chem. Soc.: Faraday Trans. II, 1976, v. 72, p. 1153.
52. Casati G., Ford J.— Phys. Rev. Ser. A, 1975, v. 12, p. 1702.
53. Белобров Н. Н., Заславский Г. М., Тартаковский Г. Х.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 1799.
54. Stenholm S.— Phys. Rept., 1973, v. 60C, p. 1.
55. Пухов Н. М., Чернавский Д. С.— ТМФ, 1971, т. 7, с. 249.
56. Фейнберг Е. Л.— УФН, 1971, т. 104, с. 539.
57. Кравцов Ю. А.— Акуст. ж., 1968, т. 14, с. 1.
58. Арпольд В. И.— Функц. анализ, 1972, т. 6, с. 12.
59. Berry M. V.— J. Phys. Ser. A, 1977, v. 10, p. L 193.
60. Bergman G. P., Zaslavsky G. M.— Physica. Ser. A, 1978, v. 91, p. 450.
61. Спнай Я. Г.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1966, т. 30, с. 15.
62. Лифшиц И. М.— УФН, 1963, т. 83, с. 617.
63. Мотт Н. Электроны в неупорядоченных структурах.— М.: Мир, 1969.
64. Гредескул С. А., Пастур Л. А.— ФНТ, 1975, т. 1, с. 277.
65. Заславский Г. М., Покровский В. Л.— ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 449.
66. Гольдштейн И. Я., Молчанов С. А., Пастур Л. А.— Функц. анализ, 1977, т. 10, с. 1.
67. Молчанов С. А.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1978, т. 42, с. 70.
68. Bunimovich L. A.— Comm. Math. Phys., 1979, v. 65, p. 295.
69. Зельдович Я. Б.— ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 1492.
70. Базь А. И., Зельдович Я. Б., Переломов А. М. Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой теории.— М.: Наука, 1971.
71. Израйлев Ф. М., Казати Дж., Форд Дж., Чириков Б. В. Препринт ИЯФ 78-46.— Новосибирск: 1978.
72. Casati G., Chiricov B. V. et al.— In: Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems.— (Springer Notes in Physics) (in press).
73. Berry M. V., Balazs N. L. et al.— Ann. of Phys., 1979 (in press).
74. Pomphrey N.— J. Phys. Ser. B, 1974, v. 7, p. 1909.
75. Einstein A.— In: Scientific Papers presented to Max Born.— Edinburgh: Oliver and Boyd, 1953.— P. 33.— Перевод: Эйнштейн А. Собрание научных трудов. Т. 3.— М.: Наука, 1966.— С. 617.
76. Mc Donald S. W., Kaufman A. N.— Phys. Rev. Lett., 1979, v. 42, p. 1189.