

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУКНОБЕЛЕВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ 1977 ГОДА

538.11

ЛОКАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ И ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ СОСТОЯНИЯ*)**Ф. Андерсон**

В решении Нобелевского комитета я упоминаюсь в связи с работами в двух областях: в области магнетизма и неупорядоченных систем, и я хотел бы рассказать здесь о истории развития каждого из этих направлений. Две теории, о которых я буду говорить, в некоторых отношениях резко различались. Теория локализованных моментов в металлах оказалась в определенном смысле довольно легкой: дело свелось к формулировке в виде простой математической модели идей, которые в то время уже носились в воздухе. Из-за ее своевременности и относительной простоты эта теория получила быстрое и прочное признание. Те математические трудности, которые в ней содержались, удалось почти полностью преодолеть в течение последних нескольких лет.

С локализацией дело обстояло иначе: вначале мало кто верил в нее, и еще меньше людей понимали ее важность; в частности, я могу с уверенностью сказать, что среди последних был и сам автор этой теории. Соответствующее адекватное математическое рассмотрение еще впереди, и пока для разрешения даже простейших вопросов приходится обращаться к прозе численного моделирования. Только сейчас, главным образом благодаря усилиям сэра Невилла Мотта, идея локализации начинает завоевывать всеобщее признание.

И тем не менее обе эти теории, рожденные размышлением и в конце концов добившиеся успеха, имеют много общего: прежде всего, вырастая в атмосфере всеобщего господства зонной теории твердого тела, они подчеркивали другой аспект — *локальность*: основной вопрос, который при этом решался — это каким образом магнитный момент или собственное состояние электрона может оказаться постоянно локализованным в определенном месте. Нас троих, стоящих здесь перед вами, объединяет как раз то, что нас вдохновляло именно явление локализации, т. е. скорее неудачи, а не успехи зонной теории.

Во-вторых, обе идеи родились в ответ на ясные экспериментальные указания на явления, противоречившие принятым в то время представлениям. В-третьих, обе эти теории связали мою работу с работами двух моих выдающихся коллег, с которыми мы вместе удостоены сегодня высокой чести; и, в-четвертых, обе эти области продолжают чрезвычайно активно развиваться и сейчас, в 1977 г.

*) Anderson Philip W. Local Moments and Localized States: Nobel Lecture. 8 December 1977. — Перевод Д. И. Хомского.

1. «МОДЕЛЬ АНДЕРСОНА»; ЛОКАЛИЗОВАННЫЕ МОМЕНТЫ В МЕТАЛЛАХ

Чтобы пояснить происхождение существенных элементов модели, которую я развил для описания локализованных моментов в металлах, я опишу исторический фон, на котором возникла эта теория. Всего двумя годами ранее я написал статью о сверхобмене^{1*)}, в которой я рассматривал источники возникновения и взаимодействие моментов в диэлектрических магнитных кристаллах типа MnO , $\text{CuSO}_4 \cdot 5\text{H}_2\text{O}$ и т. д. Я трактовал эти вещества как то, что сейчас мы назвали бы «моттовскими диэлектриками», лежащими с диэлектрической стороны от моттовского перехода,

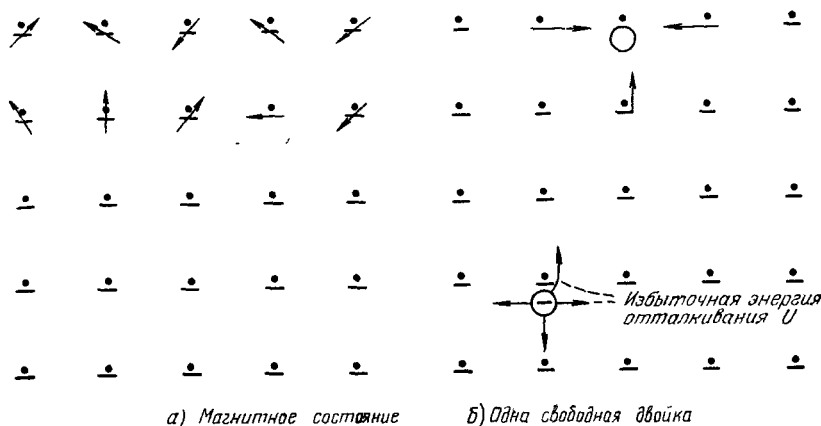


Рис. 1. Мотт-пайерлсовский механизм возникновения магнитных состояний. Состояние со свободной парой электронов имеет дополнительную энергию « U » — энергию отталкивания двух электронов на одном центре.

о котором, к сожалению, сэр Невилл (Мотт), как он сказал, сегодня говорить не будет. Коротко говоря, следуя идее Пайерлса, он развил соображения, в соответствии с которыми эти магнитные диэлектрики являются таковыми потому, что для создания в них возбуждений типа ионизованных электронных состояний потребовалась бы добавочная энергия возбуждения U — энергия, необходимая, чтобы изменить конфигурации двух удаленных друг от друга атомов, переводя их из состояния $d^n + d^n$ в $d^{n-1} + d^{n+1}$. Эта энергия U является, по существу, энергией кулоновского отталкивания двух электронов на одном и том же узле, и ее величина может быть весьма значительной (рис. 1). Для описания этой ситуации я предложил модельный гамильтониан (теперь называемый «гамильтонианом Хаббарда»)

$$\mathcal{H} = \sum_{ij} b_{ij} c_{i\sigma}^\dagger c_{j\sigma} + \sum_i U n_{i\uparrow} n_{i\downarrow}; \quad (1)$$

здесь b_{ij} описывает амплитуду «перескока» электрона с узла на узел — такие переходы показаны на рис. 1, б, а U — это энергия отталкивания двух электронов с противоположными спинами на одном центре (состояния с параллельными спинами на центре, естественно, невозможны). Исходя из гамильтониана (1) — соответствующим образом обобщенного — оказалось возможным объяснить преимущественно антиферромагнитное взаимодействие спинов в этих моттовских диэлектриках, к которым относится, в частности, известный еще с древности «магнитный железняк»

*) В русской литературе соответствующий английский термин «superexchange» переводится также как «косвенный обмен», «кинетический обмен». (Прим. перев.)

или магнетит, а также технически важные гранаты и ферриты. Это взаимодействие вызывается виртуальными перескоками электронов на соседний центр и обратно, которые возможны только при антиферромагнитном упорядочении, когда требуемая орбиталь на соседнем центре оказывается незаполненной. Используя эту идею, можно получить по обычной теории возмущений выражение для обменного интеграла

$$J_{ij} = -\frac{2b_{ij}^2}{U}, \quad (2)$$

где величина b описывает тенденцию электрона к переходу с центра на центр и к образованию зоны (происхождение выражения (2) ясно из рис. 2). Позже² я детально показал, как объяснить известные эмпирические правила, описывающие эти взаимодействия, и как, исходя из экспериментальных данных, оценить параметры b и U .

Важная роль этого кулоновского взаимодействия на одном центре U для описания магнетизма металлов, в отличие от диэлектриков, была впервые отмечена Ван-Флеком; более детальное рассмотрение этого

вопроса содержалось в диссертации Гурвица³, написанной во время войны, и позже в докладе, который я слышал в 1951 г., опубликованном в 1953 г.⁴ Очень важной для меня оказалась также небольшая конференция, организованная Оксфорд-Харуэллской группой в сентябре 1959 г. в Колледже Брэнос в Оксфорде и посвященная магнетизму металлов.

На этой конференции я высказал в очень качественной форме некоторые свои идеи о том, как может возникнуть магнетизм в металлах группы железа. Более важным, однако, было мое первое знакомство на этой конференции с идеями Фриделя и Бландэна о резонансных или виртуальных состояниях. Суть идей Фриделя заключалась в том, что 1) примеси в металлах часто лучше описываются не атомными орбиталями, а фазами рассеяния зонных электронов, которые во многих случаях имеют резонансный характер, и 2) что спины в случае магнитных примесей могут быть описаны посредством фаз рассеяния, зависящих от спинов.

Маттиас и Сул, работавшие в лабораториях фирмы «Белл», активно занимались в это время, как экспериментально, так и теоретически, проблемой влияния рассеяния на магнитных примесях на сверхпроводимость⁷. Для многих редкоземельных атомов понижение T_c при добавлении магнитных примесей выражено весьма ярко и является очень резким (рис. 3, а); оно оказывается еще более резким для большинства примесей переходных металлов. Например, сверхпроводимость Mo полностью подавляется примесями Fe в концентрации 10^{-5} . Однако во многих других случаях, например, в случае примесей Fe в Ti, номинально магнитные атомы не оказывали никакого влияния на сверхпроводимость или даже увеличивали T_c (рис. 3, б).

Систематическое изучение условий возникновения магнитных моментов было проведено Клогстоном с соавторами⁸. Вплоть до этого момента практически не уделялось никакого внимания (за исключением работы⁶) вопросу о том, что же означает наличие магнитного момента в металле:

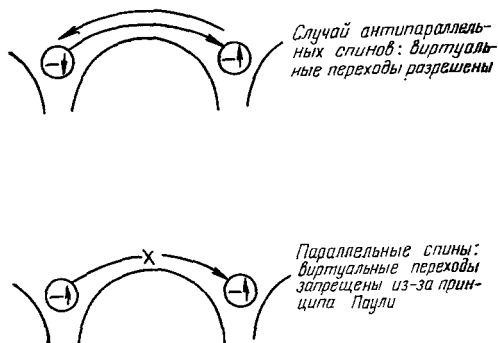


Рис. 2. Виртуальные переходы как причина сверхобмена.

например, детальные исследования поведения Mn в Si, сделанные Оуэном с сотрудниками⁹ и Циммерманом¹⁰, а также расчеты Иосиды¹¹,

по существу, постулировали, что в металле имеется локальный атомный спин, обозначаемый S и существующий от бога. Предполагалось, что подобный спин взаимодействует обменным образом со свободными

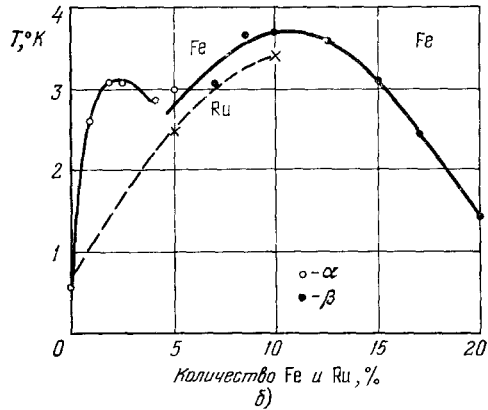
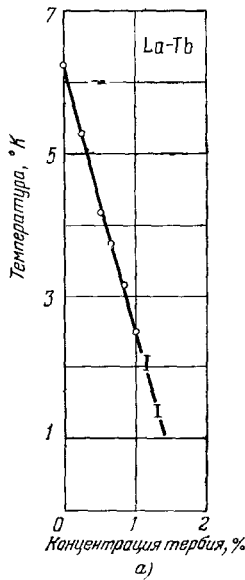


Рис. 3. а) Влияние магнитных примесей на T_c сверхпроводников; б) температура сверхпроводящего перехода твердых растворов железа и рутения в титане; при немагнитном состоянии примесей T_c растет.

электронами, с эмпирически определенным обменным интегралом J ; это в точности то, что мы сейчас называем «гамильтонианом Кондо»:

$$\mathcal{H} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k n_{k\sigma} + JSs, \quad (3)$$

где

$$s = \sum_{kk'} c_{k\sigma}^* \sigma_{\sigma\sigma'} c_{k'\sigma'}$$

— локальная спиновая плотность электронов проводимости на примеси.

«Модель Андерсона» — это простейшая модель, которая описывает электронный механизм возникновения таких моментов. Мы вводим играющую принципиальную роль обмен на центре U и характеризуем примесный атом добавочной орбиталью φ_d (с числом заполнения n_d), которой соответствует оператор рождения $c_{d\sigma}^+$; это состояние существует на фоне и в дополнение к свободным электронным состояниям вблизи поверхности Ферми (как я показал позже¹³, очевидная проблема переполненности системы функций не представляет существенной трудности). Физика должна стать вам ясной из рис. 4. Гамильтониан модели имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_{k\sigma} \epsilon_k n_{k\sigma} + U n_{d\uparrow} n_{d\downarrow} + E_d (n_{d\uparrow} + n_{d\downarrow}) + \sum_{k\sigma} V_{dk} (c_{d\sigma}^* c_{k\sigma} + \text{c. c.}), \quad (4)$$

где, в дополнение к свободным электронам и магнитному члену с константой U , мы включили член $d-k$ туннелирования V_{dk} , описывающий туннелирование электрона через центробежный барьер, которое превращает локальную орбиталь φ_d в один из фриделевских резонансов. Резонанс имеет ширину

$$\Delta = \pi \langle V^2 \rangle \rho, \quad (5)$$

и в отсутствие взаимодействия U его центр был бы расположен при энергии E_d — энергии d -резонанса (если только плотность состояний меняется достаточно слабо; см. снова рис. 4).

Простое решение модели с этим гамильтонианом в приближении Хартри — Фока показало, что если d -уровень E_d лежит несколько ниже E_F и если $\Delta/U < \pi$, резонанс расщепится, как показано на рис. 5 (взятом из оригинальной работы). Мы получаем два резонанса, по одному на каждое направление спина, причем один из них, лежащий ниже уровня Ферми, является почти заполненным, а другой, лежащий выше E_F — почти пустым. Это дает два математически эквивалентных решения, соответствующих поляризованным состояниям, по одному для каждого направления спина. В этих решениях локальное состояние φ_d перемешано с состояниями свободных электронов, соответствующих рассеянным волнам; никаких локализованных связанных электронных состояний нет, однако локализованный момент *есть*. Область магнитных решений в приближении Хартри — Фока показана на рис. 6. Соответствующие параметры можно оценить из химических данных или исходя из первых принципов, и можно вполне естественно получить, что Mn и Fe в поливалентных металлах являются немагнитными, но оказываются магнитными, например, в Cu.

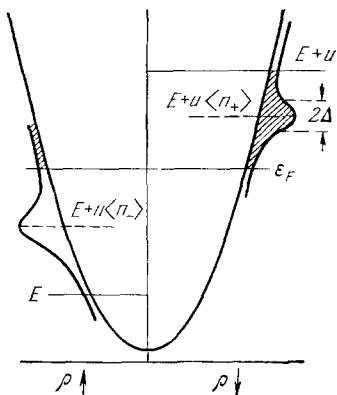


Рис. 5. Расщепленные по спину энергетические уровни в магнитном случае.

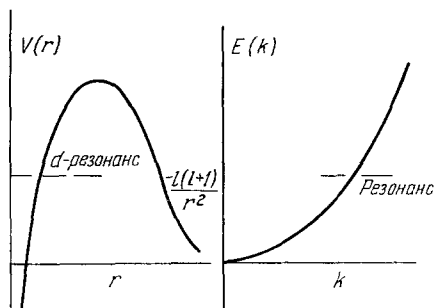


Рис. 4. Резонанс в d -состоянии за счет туннелирования через центробежный барьер.

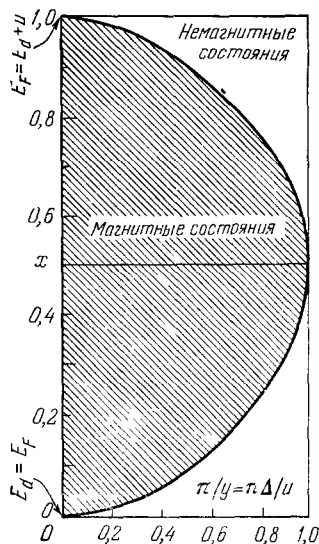


Рис. 6. Область магнитного решения в пространстве параметров в модели Андерсона.

Все это кажется, и является на самом деле, удивительно простым объяснением простого эффекта. Математика бесстыдно списана с некоторыми усовершенствованиями (или упрощениями) с ядерной физики (фриделевское видоизменение вигнеровской теории резонансов): сходные явления известны в ядерной физике под названием «аналоговые резонансы». Тем

не менее все это привело к чрезвычайно интересной, все еще активно развивающейся и довольно разветвленной области физики.

Прежде чем обсуждать некоторые разделы этой области, позвольте мне сказать кое-что о простоте модели, которая фактически больше является кажущейся, чем истинной. Искусство построения моделей заключается в умении отбросить реально существующие, но несущественные стороны проблемы, и чревато риском как для автора, так и для читателя. Автор может отбросить что-нибудь, что на самом деле важно; читатель, вооруженный слишком тонкой экспериментальной методикой или проделывающий чрезмерно аккуратные вычисления, может понять слишком буквально схематизированную модель, основная цель которой — это демонстрация какой-то возможности. В данном случае я опустил ряд факторов: 1) кристаллическую структуру и фактически атомную природу исходного металла, которые действительно большей частью несущественны; 2) вырождение d -уровней, которое приводит к некоторым важным физическим следствиям, изученным в Приложении к моей статье и позже и намного лучше в работах Кароли и Бландэна¹⁴. В Приложении я показал, что если ширина резонансного уровня оказывается достаточно большой по сравнению с другими внутриатомными взаимодействиями электронов на d -орбиталях, различные d -орбитали будут заполнены одинаковым образом, что обычно и наблюдается для примесей переходных металлов; в противоположном случае орбитальные степени свободы будут «заморожены», как почти всегда бывает для редкоземельных атомов; 3) я опустил также все корреляционные эффекты, кроме описываемого константой U ; это приближение базируется на основной идее «ферми-жидкостного» подхода, в соответствии с которой электроны в металле ведут себя как свободные, однако при этом все их параметры отличаются от значений, полученных в наивных расчетах: эти параметры являются *перенормированными*, а не «голыми». В этом месте — самая серьезная ловушка для неосторожных; обоснованием здесь служат некоторые фундаментальные идеи Фриделя о сдвигах фаз рассеяния и Ландау о ферми-жидкости. Я также не рассматривал ряд реальных возможностей; о некоторых из них вскоре пойдет речь.

Одно из моих глубочайших убеждений относительно стиля в науке заключается в следующем: квантовая механика и статистическая физика принципиально настолько просты, что многие факты, перед которыми нас ставит Природа, кажутся просто невероятными, так что одна только демонстрация разумного механизма, могущего их объяснить, не оставляет сомнения в правильности объяснения. Это тем более так в тех случаях, когда при этом правильно предсказываются неожиданные явления, такие, как (в данном случае) корреляция существования моментов с низкой плотностью состояний, описанное только что замораживание орбитального момента для всех примесей с d -уровнями или отрицательная обменная поляризация свободных электронов, которую мы вскоре обсудим. Очень часто такая упрощенная модель проливает больше света на то, как в действительности устроена природа явления, чем любое число вычислений *ab initio* для различных конкретных случаев, которые, даже если они правильны, часто содержат так много деталей, что скорее скрывают, чем проясняют истину. Возможность рассчитать или измерить что-либо слишком точно может быть скорее помехой, а не преимуществом, так как часто то, что измеряется или рассчитывается, с точки зрения выяснения механизма явления оказывается несущественным. В конце концов идеальный расчет просто копирует Природу, а не объясняет ее.

Вернемся к вопросу о том, в каких направлениях дальше развивалась описанная модель; я был бы рад иметь достаточно места, чтобы познакомить вас с некоторыми из них. К сожалению, такой возможности у меня

нет, и вместо этого я покажу вам таблицу, в которой сведены основные направления исследований, а затем достаточно подробно опишу одно из них, так, чтобы быть в состоянии показать вам одно уравнение и один график из совсем недавних работ.

Одно из направлений, которому я хотел бы посвятить здесь некоторое время — это «модельное» направление 1. Оно возникло из весьма

Развитие модели Андерсона (МА) в разных направлениях

1. МА как точно решаемая теоретико-полевая модель — см. текст:
 - а) МА — модель Кондо; Андерсон, Клогстон, Вольф, Шриффер.
 - б) Фундаментальные трудности обеих моделей: Александер, Шриффер, Кондо, Сул, Нагаока, Абрикосов.
 - в) Решение модели Кондо: Андерсон, Ювал, Хаманн, Иосида, Вильсон, Нозьер и др.
 - г) Решение МА: Хаманн, Вильсон, Кришнамурти, Уилкинс, Холдейн, Иосида и др.
2. Взгляд на магнетизм в металлах как на «микроскоп»; МА с взаимодействием в сплавах: Александер, Андерсон¹⁵, Мория¹⁶.
3. Применение к другим системам:
 - а) Адсорбированные на поверхности атомы и молекулы: Гримли¹⁷, Ньюнс¹⁸ и др.
 - б) Магнитные примеси в полупроводниках: Холдейн¹⁹.
 - в) МА с экранированием + фононы, — U ; проблема промежуточной валентности, центры на поверхности и т. д., Холдейн²⁰. Кажется, так можно идти до неба, конца не видно

физического вопроса: каковы знак и величина взаимодействия спина со свободными электронами? Уже в 1959 г., *прежде* чем появилась модель, во время оксфордской встречи я заключил с (ныне сэром) Уолтером Маршаллом известное пари на один фунт стерлингов, что поляризация свободных электронов металла, вызванная спинами, будет отрицательной, по существу, по тем же причинам, что и при сверхобмене: занятые спиновые состояния *ниже* уровня Ферми отталкиваются, а пустые, лежащие выше него, — притягиваются, поскольку они могут быть заняты электронами с тем же спином, что и у примеси. Для модели Андерсона мы опубликовали этот результат совместно с Клогстоном²¹. Питер Вольф формально доказал его (в статье со Шриффером²²) с помощью теории возмущений, показав эквивалентность моделей «Кондо» и «Андерсона», причем обменный интеграл оказался равным

$$J = \frac{2\Delta}{\pi} \left(\frac{1}{E_d} - \frac{1}{E_d + U} \right) \quad (\Delta = \pi \langle |V_{dk}|^2 \rangle \rho(E_F)). \quad (6)$$

Вскоре, однако, было понято (Кондо²³, Сул²⁴, Шриффер²⁵ и другие), что как модель Кондо, так и модель Андерсона при низких температурах обладают очень серьезными и неприятными расходимостями, которые, по-видимому, сигнализируют об исчезновении локализованных моментов. Наилучшее физическое описание того, что происходит (по-видимому, в качестве более подробного обзора для неспециалистов будет достаточно серии моих статей в «Comments on Solid State Physics»), заключается в том, что при высоких температурах или на больших энергиях (короткие времена) описанная выше хартри-фоковская теория оказывается справедливой и существует свободный спин. Однако по мере того, как масштаб энергий уменьшается, эффективное антиферромагнитное взаимодействие между этим спином и газом свободных электронов самосогласованным образом возрастает настолько, что оно в конце концов связывает вблизи локализованного спина электрон с антипараллельным спином, делая

таким образом состояние немагнитным. Это очень близкий аналог процесса «удержания» цветовых степеней свободы в современных теориях кварков²⁶ и привлекательный пример постоянного обмена идеями и техникой между физикой системы многих частиц и квантовой теорией поля.

На протяжении нескольких последних лет интенсивные исследования с помощью методики ренормгруппы (которая, в почти современной форме, была впервые применена к этой проблеме в работе²⁷) привели, по существу, к полному решению этой «проблемы Кондо». Очень сжато можно продемонстрировать особенности этого решения на примере поведения восприимчивости в зависимости от температуры (рис. 7; по работам

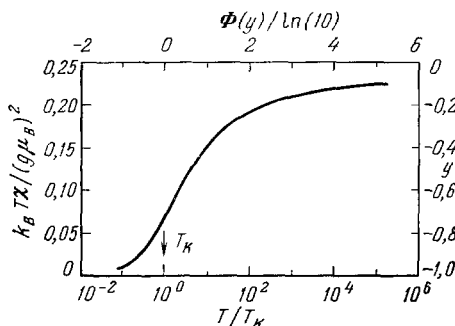


Рис. 7. Восприимчивость в модели Кондо по расчетам Вильсона²⁸.

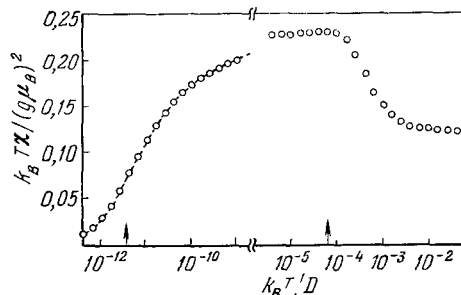


Рис. 8. Восприимчивость в «модели Андерсона», показывающая ее эквивалентность модели Кондо (из работы Кришнамурти и др.²⁹).

Вильсона²⁸). Для сравнения и для того, чтобы показать, с какой хорошей точностью работает преобразование Шриффера — Вольфа, мы приведем здесь еще один, последний в этом разделе график, показывающий результаты соответствующих вычислений для модели Андерсона, проделанных Кришнамурти²⁹ (рис. 8). Приведем также одно уравнение — найденную Холдейном²⁰ точную связь параметров этих двух моделей:

$$T_h = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2\Delta U}{\pi}} \exp \left[\frac{E_d(E_d + U)}{2\Delta U} \right]. \quad (7)$$

Эта связь может быть использована для определения свойств одной модели исходя из другой, например,

$$\chi(T \rightarrow 0) = \frac{0,103}{T_h} \text{ и т. д.}$$

Из статьи лондонской газеты «Таймс» об Иди Амине я узнал, что на языке суахили «кондоизм» означает «ограбление с применением насилия». Это не такое уж плохое описание математических джунглей этих моделей: Г. Сул однажды сказал, что еще ни один гамильтониан, настолько неправоподобно простой, не вызвал такого волнения в литературе и не нанес такого ущерба национальному бюджету в области науки.

2. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ТЕОРИИ ЛОКАЛИЗАЦИИ

В начале 1956 г. в лабораториях фирмы «Белл», главным образом П. А. Вольфом, К. Херрингом и мной, был организован новый теоретический отдел. Наш статус был необычным для промышленных лабораторий в то время: мы должны были работать в академическом стиле, с сотрудниками на уровне кандидатов наук («post-doctoral fellows»), при неформаль-

ном и демократическом управлении, и с активной программой приглашения гостей из других учреждений. В это первое лето нам посчастливилось принимать большую группу гостей, среди которых к этой истории имели отношение Дэвид Пайнс и Элиу Абрагамс *).

Мы втроем занялись эффектами магнитной релаксации, наблюдавшимися в красивой серии экспериментов по исследованию парамагнитного резонанса доноров в Si, начатых Бобом Флетчером и продолженных затем Джорджем Феером. Феер изучал в основном парамагнитный резонанс при температуре жидкого гелия для системы донорных примесей (например, P, As и т. д.) в очень чистом Si, в области концентраций $10^{15} - 10^{18}$ примесей/см³, включающей точку образования «примесной зоны», примерно около $6 \cdot 10^{17}$. При таких температурах большинство доноров были нейтральными (кроме тех, электроны с которых ушли на компенсирующие «акцепторные» примеси, такие как B, Al или Ga); четыре их электрона участвовали в валентных связях, а последний, пятый электрон оставался на водородоподобной орбите, причем из-за диэлектрического экранирования и отличия эффективной массы электрона от истинной эффективный боровский радиус оказывался порядка 20 Å (рис. 9). Свободный спин этой добавочной донорной орбитали взаимодействовал с помощью сверхтонкого взаимодействия с ядром донора (например, ³¹P или As), что приводило к четкому сверхтонкому расщеплению, показанному на рис. 10. Кроме этого, с помощью изотопического замещения было показано, что большая часть остаточной ширины линий также вызвана сверхтонкими взаимодействиями очень протяженной электронной орбитали со случайной атмосферой (~5%) ядер ²⁹Si в естественном Si, и что при достаточно низкой плотности доноров $\sim 10^{16}$ см⁻³ времена спин-спиновой и спин-решеточной релаксации составляли много секунд. Иначе говоря, линии были «неоднородно уширенными», в результате чего доступными становились различные достаточно тонкие эксперименты. Феер и Флетчер к тому времени уже натолкнулись в этих материалах на то, что сейчас мы назвали бы переходом Мотта — Андерсона (см. рис. 10, а). При увеличении концентрации примесей вначале возникали линии с промежуточным сверхтонким расщеплением, что свидетельствовало о появлении кластеров из 2, 3, 4 или более спинов; в этих кластерах обменное взаимодействие между донорами «перевешивало» сверхтонкое расщепление и электронные спины чувствовали только некоторую долю спинов ядер доноров, находящихся в кластере. (Хороший пример этого показан на рис. 10, б.) В конце концов, при концентрации $\sim 6 \cdot 10^{17}$, происходил резкий переход к однородно уширенной линии свободного электрона; в этой точке электроны начинали двигаться по «примесной зоне». Пайнс, Бардин и Слехтер ³³ разработали

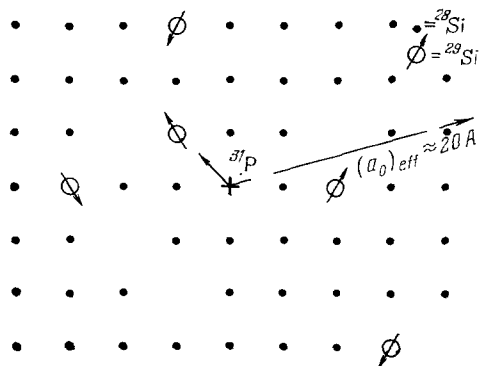


Рис. 9. Схематический вид донорной волновой функции в Si и ядра ²⁹Si.

Рис. 9. Схематический вид донорной волновой функции в Si и ядра ²⁹Si. Свободный спин этой добавочной донорной орбитали взаимодействовал с помощью сверхтонкого взаимодействия с ядром донора (например, ³¹P или As), что приводило к четкому сверхтонкому расщеплению, показанному на рис. 10. Кроме этого, с помощью изотопического замещения было показано, что большая часть остаточной ширины линий также вызвана сверхтонкими взаимодействиями очень протяженной электронной орбитали со случайной атмосферой (~5%) ядер ²⁹Si в естественном Si, и что при достаточно низкой плотности доноров $\sim 10^{16}$ см⁻³ времена спин-спиновой и спин-решеточной релаксации составляли много секунд. Иначе говоря, линии были «неоднородно уширенными», в результате чего доступными становились различные достаточно тонкие эксперименты. Феер и Флетчер к тому времени уже натолкнулись в этих материалах на то, что сейчас мы назвали бы переходом Мотта — Андерсона (см. рис. 10, а). При увеличении концентрации примесей вначале возникали линии с промежуточным сверхтонким расщеплением, что свидетельствовало о появлении кластеров из 2, 3, 4 или более спинов; в этих кластерах обменное взаимодействие между донорами «перевешивало» сверхтонкое расщепление и электронные спины чувствовали только некоторую долю спинов ядер доноров, находящихся в кластере. (Хороший пример этого показан на рис. 10, б.) В конце концов, при концентрации $\sim 6 \cdot 10^{17}$, происходил резкий переход к однородно уширенной линии свободного электрона; в этой точке электроны начинали двигаться по «примесной зоне». Пайнс, Бардин и Слехтер ³³ разработали

*) Может быть, будет небезынтересно, что среди теоретиков, постоянно или временно работавших в это лето в лабораториях «Белл», были: а) (постоянно или периодически) Ф. В. Андерсон, К. Херринг, М. Лэкс, Г. В. Льюис, Г. Х. Ванье, П. А. Вольф, Дж. С. Филиппс; б) (временно) Э. Абрагамс, К. Хуанг, Дж. М. Латтинджер, У. Кон, Д. Пайнс, Дж. Р. Шриффер, П. Нозьер; в) (постоянно, но не в теоретической группе) Л. Р. Уокер, Г. Сул, В. Шокли.

теорию спин-решеточной релаксации для доноров, и мы наивно надеялись, что вскоре поймем, как применить ее для объяснения результатов Феера. Фактически, однако, никакого теоретического объяснения релаксационных явлений, наблюдаемых Феером, не последовало, появилось только описание результатов экспериментов³⁴. Все мы трое скоро поняли, что столкнулись с весьма сложной ситуацией, в которой мало что понимаем. В частности, мы не могли понять сам факт существования чрезвычайно

резких и хорошо определенных «спиновых пакетов», которые были обнаружены в таких экспериментах, как эксперименты по «выжиганию дыры» («hole digging»), а позже в красивом эффекте ДЭЯР *)^{32, 34}. (В эксперименте по ДЭЯР Феер выделял спиновый пакет с помощью насыщения линии на определенной частоте — «выжигал дыру» (рис. 11, б) и регистрировал частоты ЯМР ядер ^{29}Si , находящихся в контакте со спиновым пакетом, путем возбуждения их подходящим радиочастотным полем; таким путем он наблюдал за расплыванием пакета (рис. 11, а). Видное на этом графике характерное время

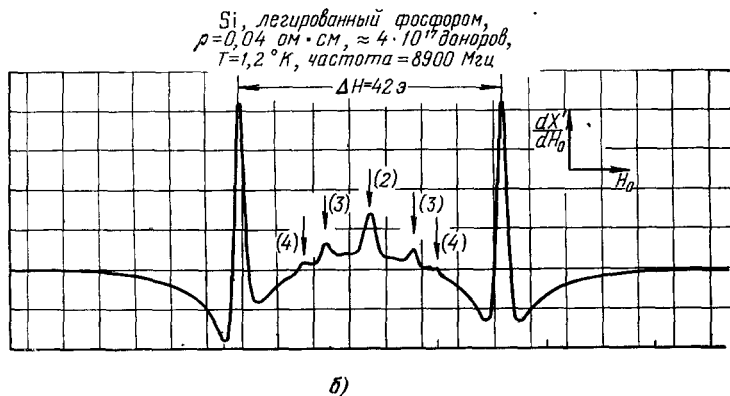
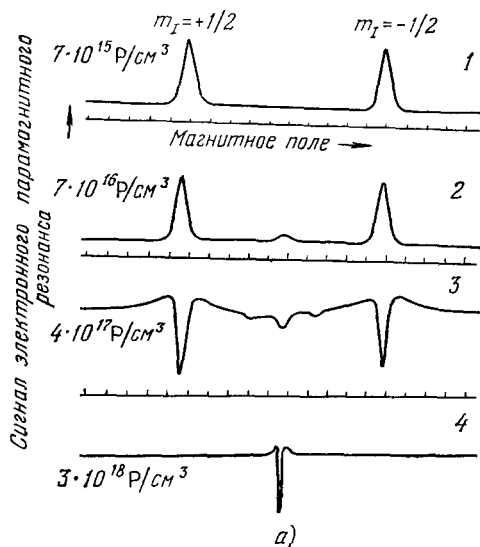


Рис. 10. а) Сверхтонкая структура линий ЭПР доноров (Р) при увеличении их концентрации, причем проходит область мотт-андерсоновского перехода диэлектрик—металл; б) пример четко выраженных линий кластеров.

восстановления после возбуждения линии ДЭЯР, составляющее много секунд, фактически представляет собой заниженную оценку истинного времени релаксации спинового пакета T_2 , поскольку система находится под внешним воздействием.) Таким образом, отсюда следует вывод, что электрон на каждом индивидуальном доноре Р обладает своей собственной характерной частотой и сохраняет ее в течение секунд или минут.

*) Двойной электронно-ядерный резонанс (краткий английский термин — ENDOR). (Прим. перев.)

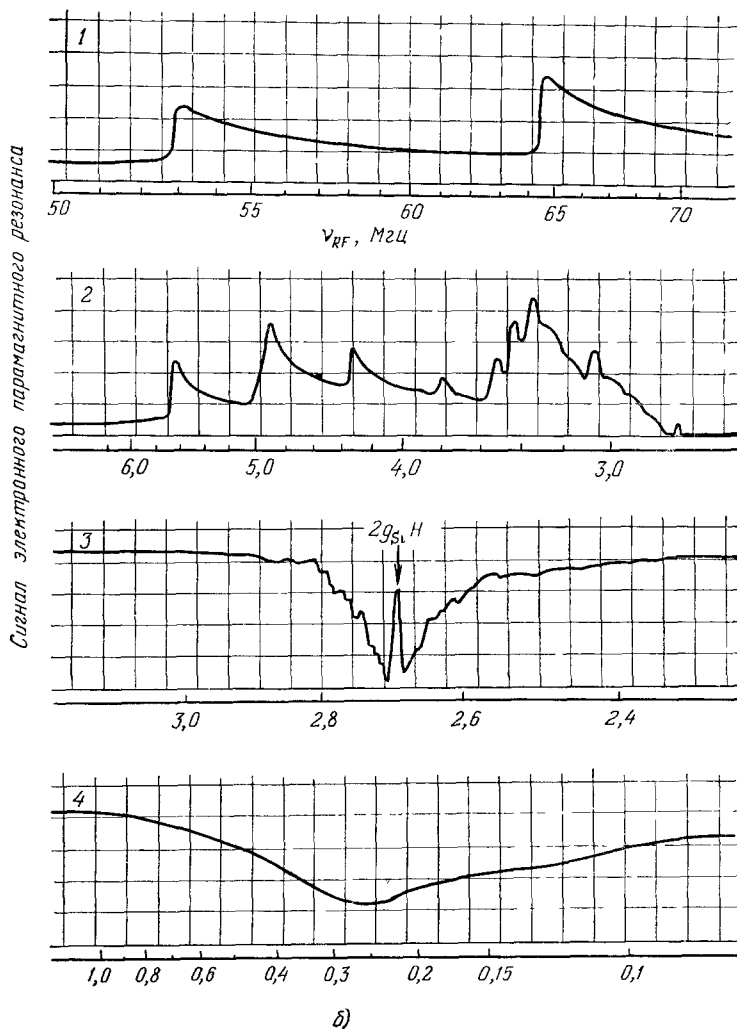
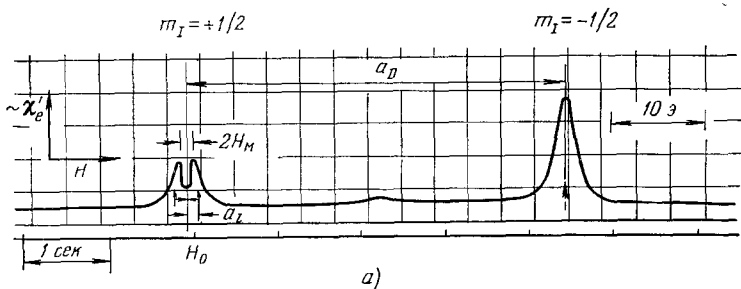


Рис. 11. Спектры ДЭЯР и «выжигание дыр».

а) Демонстрация неоднородного уширения в кремнии, легированном фосфором ($\rho = 0,25 \text{ ом} \cdot \text{см}$, $T = 1,2 \text{ }^\circ\text{K}$, $H_0 = 3000 \text{ э}$); стрелками показано, как в методе ДЭЯР переворачиваются спиновые пакеты. б) Спектр двойного резонанса в Si, легированном P, $\approx 2 \cdot 10^{16} \text{ см}^{-3}$, $T = 1,3 \text{ }^\circ\text{K}$, $\nu_0 \approx 9000 \text{ Мгц}$. На рис. б) показано насыщение определенной частоты. Рис. а) соответствует приложению радиочастотного сигнала переменной частоты. Обратите внимание на медленное (экспоненциальное) запыливание «дыры» на рис. а): характерное время составляет несколько минут. Оно определяется спинрешеточной релаксацией ^{29}Si , усиленной за счет приложенного радиочастотного поля.

С самого начала мы исходили из основополагающей идеи Мотта относительно истинного состояния электронов: поскольку компенсирующих акцепторов было мало, вследствие кулоновского отталкивания электронов большинство доноров оказывалось занято однократно, что и приводило

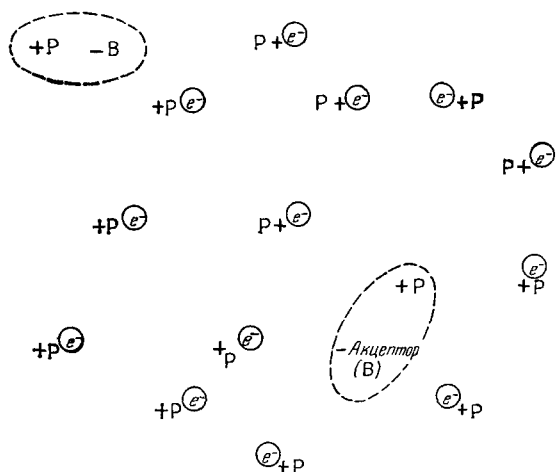


Рис. 12. Предполагаемое связывание заряженных доноров с акцепторами.

к существованию наблюдаемой парамагнитной системы спинов. Кажется, У. Кон предположил, что даже пустые доноры будут жестко закреплены в системе вследствие кулоновского притяжения, находясь поблизости от компенсирующих их отрицательно заряженных акцепторов (рис. 12). В результате истинное движение электронов было весьма слабо, и мы заметили лишь некоторое ускорение релаксации по мере приближения к тому, что сейчас было бы названо переходом Мотта — Андерсона.

Рассуждая таким образом, мы вполне могли принять на веру и уверить са-

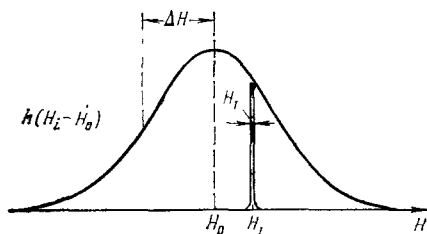


Рис. 13. «Спиновые пакеты» и спектральная диффузия.

Никакие доводы, использующие кулоновское взаимодействие, не спасали нас, однако, от второй трудности — отсутствия спиновой диффузии. В 1949 г. Бломберген³⁶ предложил идею спиновой диффузии в системе ядерных спинов, которая позже получила обширное экспериментальное подтверждение. Эта идея заключалась в том, что диполь-дипольное взаимодействие вызывало взаимную прецессию спинов, которая в высокотемпературной парамагнитной фазе могла посредством диффузии выравнивать спиновую температуру в пространстве, тем самым, например, давая возможность ядерным спинам релаксировать путем диффузии спинового возбуждения в окрестность примеси с электронным спином. Для расчета этого процесса Бломберген использовал простые оценки, основанные на теории возмущений и теории случайных блужданий.

В 1953 г. Портис³⁷ ввел понятие «неоднородного уширения», когда полное установление равновесия внутри спектральной линии затруднено, и вместо этого надо говорить о «спиновых пакетах», сформированных из

спинов, имеющих определенную резонансную частоту внутри линии (рис. 13). (Такие пакеты, конечно, хаотичны в пространстве; в макроскопически неоднородных системах это явление наблюдалось значительно раньше.) По оценке Портиса, если взаимодействие соседних спинов есть J_{ij} , то время жизни спинового пакета должно быть порядка ³⁸

$$\frac{\hbar}{\tau} \approx \pi |J_{ij}|^2_{\text{средн}} \frac{z}{W}, \quad (8)$$

где W — ширина линии; это ясно из «золотого правила». Однако, когда Элиу Абрагамс оценил J_{ij} для нашей системы, он обнаружил, что, в соответствии с (8), время жизни τ должно было бы составлять от 0,1 до 10^{-6} сек, тогда как в типичных экспериментах Феера по ДЭЯР спиновые пакеты оставались насыщенными в течение 10—100 сек. Подтверждением этих оценок было появление «кластеров»; см. рис. 10.

В своих бумагах я обнаружил заметки о беседе с Пайнсом, состоявшейся 20 июня 1956 г., во время которой для объяснения этих явлений я предложил теорему «Все или Ничего». Несколько позже, 31 октября 1956 г., я оптимистически заявил о «доказательстве» «теоремы Андерсона», которое было весьма похоже на тот не очень изощренный вариант, который содержался в моей окончательной статье и который тем не менее вряд ли является «доказательством»; настоящего доказательства пока фактически не существует. Я также, кажется, говорил об этом перед незаинтересованной аудиторией на Международном симпозиуме по теоретической физике в Сиэттле. Однако по-настоящему работа была завершена незадолго до того, как я рассказывал о ней (10 и 17 июля 1957 г.) практический той же самой уже упоминавшейся группе сотрудников и гостей отдела. К этому времени я уже достаточно надоел всем с «моей» теоремой: Питер Вольф прочел мне краткий курс теории возмущений, Коньерс Херринг показал полезные препринты Бродбента и Хаммерсли, посвященные новой тогда теории протекания, Ларри Уокер предложил кое-что, Грегори Ванье задал ряд существенных вопросов и т. д. Но у меня в памяти осталось впечатление, что общее отношение ко мне было довольно ироническим.

Позвольте мне теперь привести здесь основные моменты моих тогдашних рассуждений ³⁹, используя, однако, гораздо более современную терминологию (вся математика по существу остается прежней). Я не думаю, что это единственный или окончательный вариант; во многих отношениях более полезное рассмотрение может быть дано, например, на основе идеи Мотта о минимальной металлической проводимости, как это было сделано Таулесом и его сотрудниками и о чем будет, в частности, говорить сам Мотт. Я думаю, однако, что мой подход наиболее ярко выявляет основную природу этого неожиданного неэргодического поведения. Я должен извиниться за этот краткий математический экскурс, однако, пожалуйста, поверьте, что я включил сюда лишь самый необходимый минимум математики.

Первой проблемой было сформулировать модель, которая содержала бы только самое необходимое. Это было довольно просто: удовлетворительной оказалась линеаризованная случайная модель невзаимодействующих частиц в приближении «сильной связи»,

$$\mathcal{H} = \sum_i E_i n_i + \sum_{ij} V_{ij} c_i^\dagger c_j, \quad (9)$$

где интегралы «перескока» V_{ij} считались заданными (неслучайными) функциями r_{ij} (если хотите, можно считать, что узлы i образуют решетку), а энергии E_i являлись хаотическими, характеризующимися функцией

распределения с шириной W (рис. 14). Величины c_i могут описывать координаты гармонических осцилляторов (фононы), могут соответствовать электронным операторам, или же спинорам, для которых $V_{ij} = J_{ij}$, причем мы пренебрегаем взаимодействием спиновых отклонений $J_{ij} S_i^z S_j^z$. Существенно, что гамильтониан (9) приводит к линейным уравнениям движения

$$i\hbar \dot{c}_i^+ = E_i c_i^+ + \sum_j V_{ij} c_j^+. \quad (10)$$

Если бы W было равно нулю и все E_i были одинаковыми (скажем, 0), уравнения (10) описывали бы зону блоховских состояний с шириной порядка zV_{ij} . При $W \ll \bar{V}_{ij} = V$ теория кинетических явлений, незадолго перед этим развитая Ван-Ховом и Латинджером⁴⁰, очевидным образом описывала бы рассеяние свободных волн (скажем, для простоты, электронов)

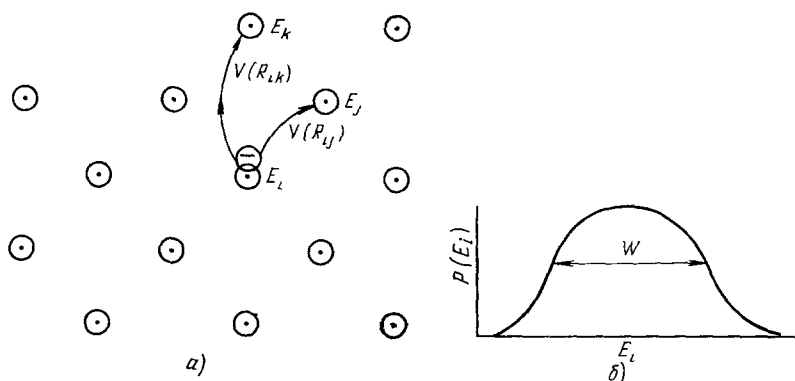


Рис. 14. Модель диффузии в случайной решетке.

а) Узлы и интегралы перехода, б) функция распределения величин E_i

на примесях, приводящее к сопротивлению. С другой стороны, в случае $W \gg V$ модель описывала бы нашу систему локальных сверхтонких полей, больших сравнительно с J_{ij} , или же систему, в которой кулоновские и деформационные энергии велики по сравнению с интегралами перехода электрона с донора на донор.

Очевидно, что при этом в одном случае надо рассматривать как возмущение W , а в другом — V_{ij} ; однако заранее совершенно не очевидно, что поведение теории возмущений в этих двух случаях совершенно различно. Для определенности будем в дальнейшем говорить в терминах операторов «резольвенты» или «гриниана», которые описывают все точные волновые функции φ_α и их энергии E_α :

$$G = \frac{1}{E - H}, \quad \text{т.е.} \quad G(r, r') = \sum_\alpha \varphi_\alpha(r) \frac{1}{E - E_\alpha} \varphi_\alpha(r'), \quad (11)$$

где φ_α и E_α — точные собственные функции и энергии гамильтониана (9). В обычном, «кинетическом» случае при построении теории возмущений мы исходим из состояний типа плоских волн,

$$\varphi_k^0 = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_i e^{ikR_i} \varphi_i$$

с энергиями

$$E_k = \sum_{(i,j)} V_{ij} \cos k(R_i - R_j),$$

и считаем, что они только слабо возмущаются рассеянием, вызванным случайно флуктуирующими величинами E_i . Энергии E_k в пределе большой системы образуют непрерывный спектр, и мы воспользуемся этим, чтобы перестроить теорию возмущений и получить функцию Грина в виде

$$G_{kk} = \frac{1}{E - E_k - \Sigma(k, E)}, \quad (12)$$

где Σ , «собственная энергия», сама дается рядом теории возмущений (рис. 15, а),

$$\Sigma = \sum_{k' \neq k} (V_{kk'})^2 \frac{1}{E - E_{k'}} + \sum_{k'', k' \neq k} \frac{V_{kk''} V_{k''k'} V_{k'k}}{(E - E_{k'}) (E - E_{k''})} + \dots \quad (13)$$

Вследствие того, что E_k образуют непрерывный спектр, при стремлении E к действительной оси Σ имеет конечную мнимую часть:

$$\lim_{\text{Im} E \rightarrow \pm 0} \text{Im} \Sigma = \pm \pi \int |V_{kk'}|^2 \delta(E_{k'} - E) + \dots \quad (14)$$

(Заметьте, что в этом случае величины $V_{kk'}$ возникают из ширины « W », а не из V_{ij} .)

Из этого уравнения следует, что уровни E_k имеют конечную ширину, и $\text{Im} G$, плотность состояний, является конечной непрерывной функцией E (рис. 16)

$$\lim_{s \rightarrow \pm 0} G_k(E \pm is) =$$

$$= \frac{1}{E - E_k - \text{Re} \Sigma \mp i \Delta(E)}.$$

(15)

На действительной оси G имеет постоянный разрез, и на каждом центре имеется континуум энергетических состояний, со всеми энергиями из зоны; это те состояния, которые мы теперь называем делокализованными. Иными словами, из определения G (11) следует, что

$$\text{Im} G(i, i; E) = \sum_{\alpha} |\varphi_{\alpha}(i)|^2 \delta(E - E_{\alpha}). \quad (16)$$

Преобразовав выражение (15) и найдя отсюда G_{ii} , мы получаем, что каждая из величин $\varphi_{\alpha}(i)$ оказывается бесконечно малой, порядка $1/\sqrt{N}$, образуя в пределе $N \rightarrow \infty$ истинный континуум состояний на центре i при любой энергии. Конечно, существуют правила сумм, которые показывают, что любое состояние где-нибудь существует и ни одно из них не потеряно:

$$\sum_i |\varphi_{\alpha}(i)|^2 = \sum_{\alpha} |\varphi_{\alpha}(i)|^2 = 1; \quad (17)$$

эти соотношения удовлетворяются при $\varphi_{\alpha}(i) \sim (V\sqrt{N})^{-1}$, где N есть как число центров i , так и уровней энергии α .

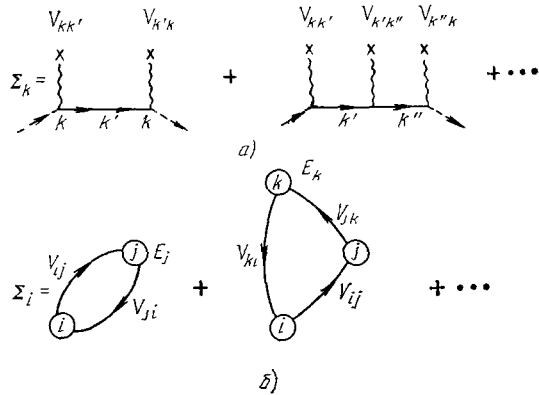


Рис. 15. а) Диаграммы для собственной энергии в обычной «пропагаторной» теории; б) диаграммы для собственной энергии в теории «локалонов».

Мой результат заключался в том, что я показал, что это — не единственная возможность, отличающаяся от случая пустой зоны или группы дискретных состояний, могущих существовать вблизи одного притягивающего потенциала, как в случае атома водорода. Я показал, что возможна

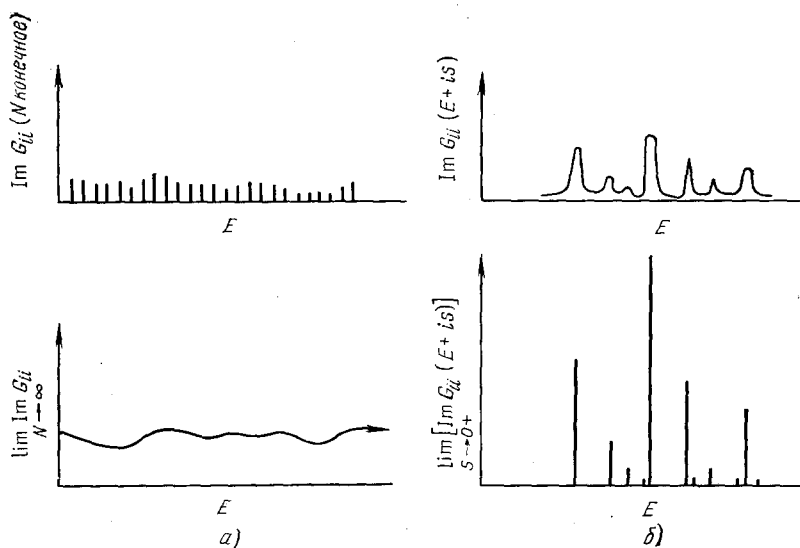


Рис. 16. а) $\text{Im } G_{ii}$ в случае делокализации; б) $\text{Im } G_{ii}$ при локализации.

ситуация, когда существует континуум состояний по энергии, но не в пространстве. Это сразу можно увидеть, если развить теорию возмущений в обратном порядке.

В этом случае мы считаем E_i большой величиной, и исходные собственные функции и собственные энергии — это просто

$$\varphi_i^0 = \varphi_i, \quad E_i^0 = E_i, \quad (18)$$

а V_{ij} является возмущением. В этом случае (Ларри Уокер предложил называть его «циспорт» (cisport) *) мы пользуемся «локаторным» рядом для «локатора» **) G_{ii} , а не для пропагатора G_{hk} :

$$G_{ii}(E + is) = \frac{1}{E + is - E_i - \Sigma_i(E + is)}, \quad (19)$$

где теперь собственная энергия Σ дается рядом, внешне напоминающим (13) (см. рис. 16, б)

$$\Sigma_i = \sum_{j \neq i} \frac{(V_{ij})^2}{E - E_j} + \sum_{j, k \neq i} \frac{V_{ij} V_{jk} V_{ki}}{(E - E_j)(E - E_k)} + \dots \quad (20)$$

Если на этом этапе мы сделаем крошечную ошибку, мы тотчас же вернемся к ответу Портиса (8): а именно, если провести усреднение, то мы получим

$$\text{Ave} \left\{ \lim_{s \rightarrow +0} [\text{Im } \Sigma(E + is)] \right\} = \frac{\langle V_{ij}^2 \rangle}{W}. \quad (21)$$

*) Слово образовано по контрасту с термином «transport» — перенос, перемещение, и означает примерно «отсутствие переноса, сохранение объекта на том же месте». (Прим. перев.)

**) От английского слова «locate» — локализовать, указывать местонахождение в пространстве. — в противоположность «propagate» — распространяться. (Прим. перев.)

При рассмотрении неупорядоченных систем нужно, однако, все время иметь в виду одну важнейшую фундаментальную вещь: *ни один реальный атом не является усредненным атомом, и ни один эксперимент никогда не производится над ансамблем образцов*. То, что нам нужно на самом деле — это *распределение вероятностей* $\text{Im } \Sigma$, а не среднее значение, поскольку реально мы интересуемся именно каждой данной конкретной реализацией. Я хотел бы подчеркнуть, что здесь сделан важный и принципиально новый шаг: мы работаем с *распределениями*, а не со *средними*. Большая часть недавних успехов в физике аморфных материалов связана с подобным же подходом; он означает, что неупорядоченная система рассматривается не просто как грязная регулярная, а принципиально иным образом.

Если принять эту точку зрения, то оказывается, что в ряде (20) достаточно ограничиться только первым членом. Будем сначала считать величину s конечной, а затем возьмем предел $s \rightarrow 0$. При конечном s

$$\text{Im } \frac{\Sigma}{s} = \sum_j \frac{|V_{ij}|^2}{(E - E_j)^2 + s^2}.$$

Для того, чтобы E_j соответствовало пику в $\text{Im } (\Sigma/s)$, надо, чтобы E_j отстояло от E не больше чем на s и чтобы $V_{ij} > s$. Чтобы оценить вероятность того, что V_{ij} достаточно велико, мы используем физически разумное предположение об экспоненциальном характере волновых функций:

$$V(R) = V_0 e^{-R/R_0}.$$

В интервале энергий s имеется Ns/W уровней энергии E_j в единице объема (N — плотность центров в единице объема); из условия же $V > s$ следует, что

$$V > s: R < R_0 \ln \frac{s}{V_0}.$$

Отсюда вероятность того, что одновременно $V > s$ и $E - E_j < s$, есть

$$P(V > s, |E - E_j| < s) = N \frac{4\pi R_0^3}{3} \frac{s}{W} \left(\ln \frac{s}{V_0} \right)^3, \quad P(s \rightarrow 0) = 0.$$

Легко сделать это рассуждение более строгим: можно показать, что функция распределения вероятностей $\text{Im } \Sigma$ равна

$$\lim_{s \rightarrow 0} P\left(\text{Im } \frac{\Sigma}{s} = X\right) dX = \frac{dX}{X^{3/2}} e^{-s/X}. \quad (22)$$

Среднее от этого выражения расходится, как и должно быть; тем не менее само оно конечно, так что $\text{Im } \Sigma \propto s$ и на действительной оси нет конечного разреза.

Если на минуту остановиться и подумать, что все это значит, то оказывается, что все чрезвычайно просто. Дело в том, что можно удовлетворить правилу сумм, беря не бесконечно малые $\varphi_\alpha(i)$, а взяв дискретный ряд конечных величин: наибольшее из $\varphi_\alpha(i)$ оказывается порядка 1, следующее порядка 1/2 и т. д. (см. рис. 16, б). Таким образом, $\text{Im } G_{ii}$ дается суммой бесконечного дискретного ряда δ -функций со сходящимися коэффициентами. Это соответствует *локализованной* ситуации.

Математики здесь уже больше чем достаточно, и это все, что нам понадобится. Все дальнейшее упирается только в вопрос, когда оправдано это рассмотрение, ограниченное низшим порядком теории возмущений, и как и когда оно нарушается.

Значительная часть самой исходной статьи была посвящена исследованию того, как обращаться с высшими членами ряда, и доказательству,

что они качественно не меняют ситуацию: их роль фактически сводится только к *перенормировке* величин V_{ij} и E_j , так что если даже вначале V_{ij} были короткодействующими, они эффективно становятся спадающими экспоненциально; кроме того, конечно, учет V_{ij} приводит к уширению спектра. Если это действительно так, легко понять, что делокализация может появиться только тогда, когда нарушается применимость теории возмущений. Это происходит по мере того, как высшие члены теории возмущений «перенормируют» величину $V(R_{ij})$ и делают ее все более и более

дальнодействующей, так что экспоненциально спадающие локализованные функции становятся все менее локализованными, пока в конце концов не достигается «порог подвижности» и не происходит «переход Андерсона».

Здесь наша теория начинает смыкаться с некоторыми идеями, о которых будет говорить профессор Мотт. Прежде всего, ясно, что ряды для собственной энергии являются функциями от E , т. е. зависят от того, в каком месте на действительной оси мы находимся, так что в результате эти ряды впервые перестанут сходиться при некоторой конкретной энергии E — «пороге подвижности». Для каждой конкретной модели естественно ждать, — фактически это обычно и происходит, — что для некоторых энергий состояния будут локализованными, а для других — делокализированными; они будут разделены «порогом подвижности». Важность этого обстоятельства была впервые осознана Моттом.

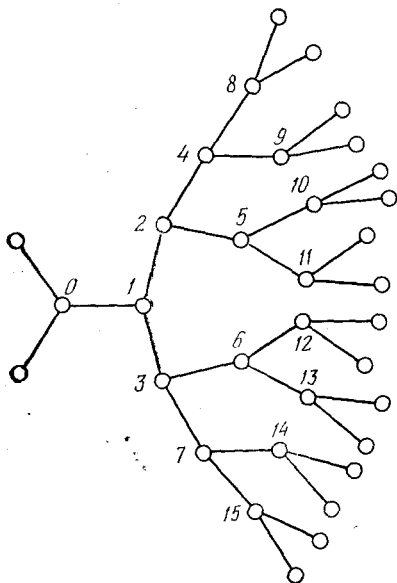


Рис. 17. «Дерево Кэли», на котором теория локализации является точной.

только немного позже было осознано⁴¹, что этот расчет является *точным* на «дереве Кэли», или на решетке Бете (рис. 17). Задолго до этого Борланд⁴² и Мотт и Туз⁴³ показали, что в одномерном случае (также дерево Кэли, с $K = 1$) локализация происходит всегда. Поскольку можно считать, что дерево Кэли — это решетка бесконечной размерности (из-за конечного числа соседей), естественно думать, что делокализация впервые произойдет при некоторой нижней критической размерности d_c ; на основании скейлинговой теории Таулеса⁴⁴ мы сейчас думаем, что $d_c = 2$. Эта аргументация с размерностью (или эквивалентные ей соображения Таулеса) успокоила меня относительно того, что мой диаграммный подход был неточен: фактически он скорее *недооценивал* локализацию, а не наоборот. Другой причиной моего беспокойства в то время было то, что я не мог представить себе, как ввести в проведенное рассмотрение взаимодействия, и я опасался, что оно также приведет к делокализации. Осознание того факта, что в моттовском диэлектрике локализация возникает именно за счет взаимодействия, без всякой неупорядоченности, освободило меня от этих опасений: легко видеть, что эффекты Мотта и Андерсона действуют совместно, а не ослабляют друг друга, как я отметил в статье о «фермистеклах»⁴⁵; примерно тогда я вернулся к этой проблеме. В настоящее время меня вдохновляет в этой области то, что, по моему ощущению, как

в работах моей группы, так и в тех, о которых будет говорить профессор Мотт, начинает вырисовываться теория локализации с учетом взаимодействия. Замечательно, что хотя почти во всех случаях взаимодействия играют жизненно важную роль, многие результаты от их учета скольконибудь существенно не меняются.

На этом я заканчиваю и оставляю завершение этой истории профессору Мотту. Я, однако, хотел бы сделать два дополнения: прежде всего,

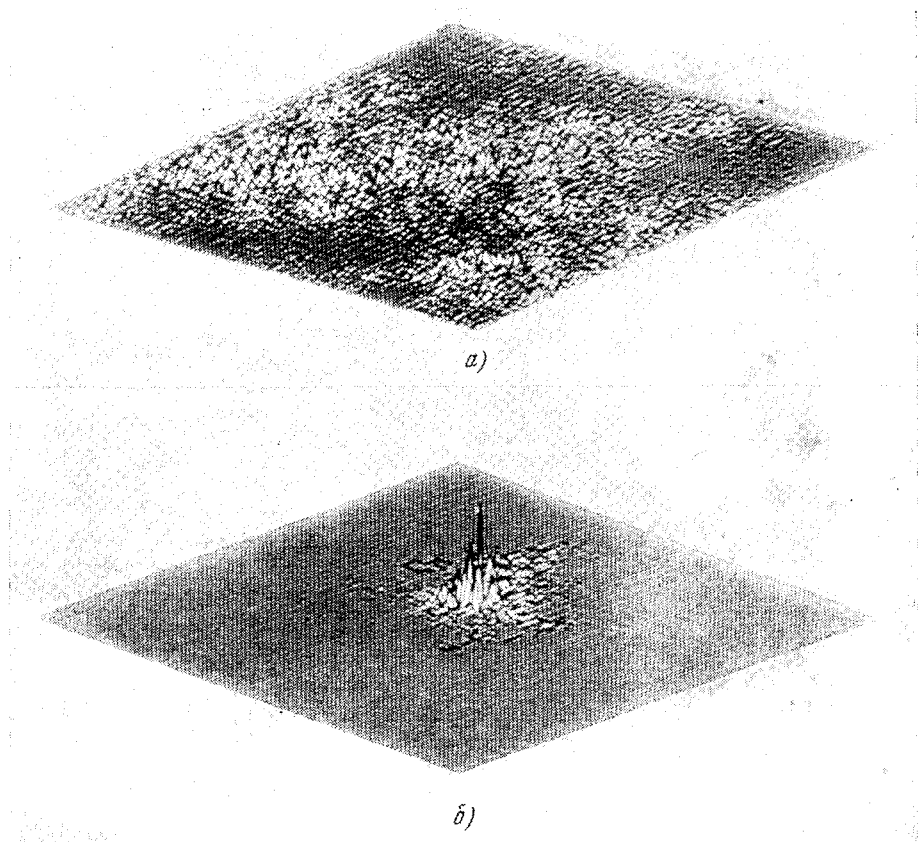


Рис. 18. Пример локализации, полученный с помощью моделирования на ЭВМ (рисунки любезно предоставлены Йошино и Оказaki).

а) $W/V=5,5$, б) $W/V=8,0$.

показать результаты красивого численного моделирования Йошино и Оказaki⁴⁶, которые даже заядлых скептиков должны убедить в том, что локализация действительно происходит. Величины W для этих двух рисунков различаются в полтора раза, причем, как вы видите, типичная волновая функция при этом меняется от делокализованной до чрезвычайно сильно локализованной (рис. 18).

И, в заключение, вы могли заметить, что нам пришлось проделать весьма долгий путь только для того, чтобы заставить в одном случае наши

магнитные моменты, а в другом — наши электроны оставаться на одном месте. Подобную ситуацию предвидел в своих работах замечательный

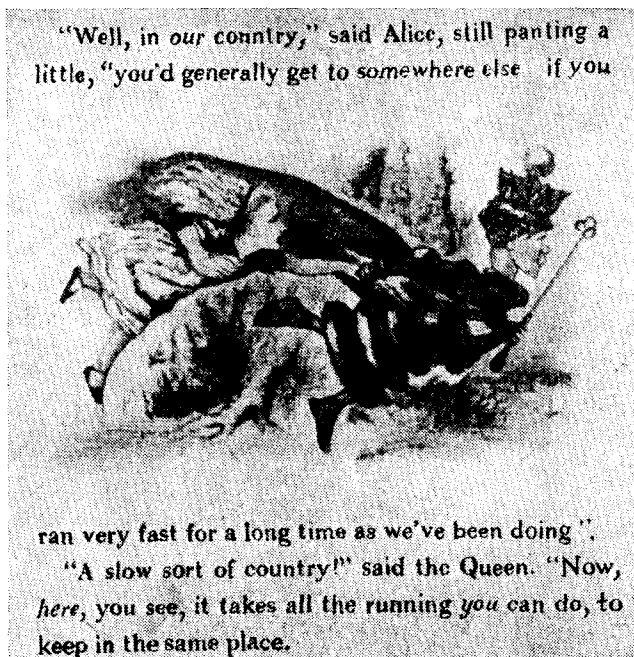


Рис. 19. Попытки избежать локализации (по Доджсону).

математик XIX века по фамилии Доджсон*), что показано на последнем рисунке (рис. 19): «Здесь, видишь ли, приходится бегать во всю мочь, чтобы только удержаться на том же самом месте!»

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Anderson P. W.— Phys. Rev., 1959, v. 115, p. 2.
2. Anderson P. W.— In: Sol. State Phys./Ed. F. Seitz and D. Turnbull. —N. Y.: Academic Press, 1963,—V. 14, p. 99.
3. Hurwitz H. Unpubl. Doctoral Thesis.— Harvard: 1941.
4. Van Vleck J. H.— Rev. Mod. Phys., 1953, v. 25, p. 220.
5. Friedel J.— Can. J. Phys., 1956, v. 34, p. 1190; Suppl. Nuovo Cimento, 1958, No VII, p. 287.
6. Blandin A., Friedel J.— J. Phys. et Radium., 1959, t. 20, p. 160.
7. Suhl H., Matthias B. T.— Phys. Rev., 1959, v. 114, p. 977.
8. Clogston A. M., Matthias B. T., Peter M., Williams H. J., Corenzwit F., Sherwood R. C.— Ibid., 1962, v. 125, p. 541.— (Перевод в кн. Теория ферромагнетизма металлов и сплавов.— М.: ИЛ, 1963.— С. 444.)
9. Owen J., Browne M., Knight W. D., Kittel C.— Ibid., 1956, v. 102, p. 1501.
10. Crane L. T., Zimmerman J. E.— Ibid., 1961, v. 123, p. 113.
11. Yosida K.— Ibid., 1957, v. 106, p. 893.
12. Anderson P. W.— Ibid., 1961, v. 124, p. 41.— (Перевод как в ⁸, с. 444.)
13. Anderson P. W., McMillan W. L.— In: Proc. of Varenna School of Physics. XXXVII, 1966.— N. Y.: Academic Press, 1967.—P. 50.

*) Более известный под псевдонимом Льюис Карролл. (Прим. перев.)

14. Caroli B., Blandin A.— *J. Phys. and Chem. Sol.*, 1966, v. 27, p. 503.
15. Alexander S., Anderson P. W.— *Phys. Rev. Ser. A.* 1964, v. 133, p. 1594.
16. Moriya T.— Цитир. в ¹³ сб.— P. 206.
17. Grimley T. B.— *Proc. Phys. Soc.*, 1967, v. 90, p. 757; v. 92, p. 776. См. также: Bennett A. J., Falicov L. M.— *Phys. Rev.*, 1966, v. 151, p. 512.
18. Newns D. M.— *Ibid.*, 1969, v. 178, p. 1123.
19. Haldane F. D. M., Anderson P. W.— *Ibid. Ser. B*, 1976, v. 13, p. 2553.
20. Haldane F. D. M. Thesis.— Cambridge: 1977.
21. Anderson P. W., Clogston A. M.— *Bull. Am. Phys. Soc.*, 1961, v. 6, p. 124.
22. Schrieffer J. R., Wolff P. A.— *Phys. Rev.*, 1966, v. 149, p. 491.
23. Kondo J.— *Progr. Theor. Phys.*, 1964, v. 32, p. 37.
24. Suhl H.— *Phys. Rev. Ser. A*, 1965, v. 138, p. 515. Abrikosov A. A.— *Physics*, 1965, v. 2, p. 21.
25. Schrieffer J. R., Mattis D. C.— *Phys. Rev. Ser. A.* 1965, v. 140, p. 1412.
26. Anderson P. W.— In: *Proc. of Conference on Gauge Theories*. Northeastern University/Ed. Arnowitt and Nath.— The MIT Press, 1976.— P. 311.
27. Anderson P. W., Yuval G., Hamann D. R.— *Phys. Rev. Ser. B.*, 1970, v. 1, p. 4464.
28. Wilson K. G.— *Rev. Mod. Phys.*, 1975, v. 47, p. 773.
29. Krishna-Murthy H. R., Wilkins J. W., Wilson K. G.— *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 35, p. 1101.
30. Fletcher R. C., Yager W. E., Holden A. N., Read W. T., Merritt F. R.— *Phys. Rev.*, 1954, v. 94, p. 1392.
31. Feher G., Fletcher R. C., Gere E. A.— *Ibid.*, 1955, v. 100, p. 1784.
32. Feher G.— *Ibid.*, 1959, v. 114, p. 1219.
33. Pines D., Bardeen J., Slichter C. P.— *Ibid.*, 1957, v. 106, p. 489. См. также: Abrahams E.— *Ibid.*, 1957, v. 107, p. 491.
34. Feher G., Gere E. A.— *Ibid.*, 1959, v. 114, p. 1245.
35. Pollak M., Geballe T. H.— *Ibid.*, 1961, v. 122, p. 1742.
36. Bloembergen N.— *Physica*, 1949, v. 15, p. 386.
37. Portis A. M.— *Phys. Rev.*, 1953, v. 91, p. 1071.
38. Portis A. M.— *Ibid.*, 1956, v. 104, p. 584.
39. Anderson P. W.— *Ibid.*, 1958, v. 109, p. 1492.
40. См., например: Kohn W., Luttinger J. M.— *Ibid.*, 1957, v. 108, p. 590.
41. Anderson P. W., Abou-Chacra R., Thouless D. J.— *J. Phys.*, Ser. C, 1973, v. 6, p. 1734.
42. Borland R. E.— *Proc. Roy. Soc. Ser. A.* 1963, v. 274, p. 529.
43. Mott N. F., Twose W. D.— *Adv. Phys.*, 1961, v. 10, p. 107.— (Перевод: УФН, 1963, т. 79, с. 691.)
44. Licciardello D. C., Thouless D. J.— *Phys. Rev. Lett.*, 1975, v. 35, p. 1475.
45. Anderson P. W.— *Comm. Sol. State Phys.*, 1970, v. 2, p. 193.
46. Yoshino S., Okazaki M.— *J. Phys. Soc. Japan*, 1977, v. 43, p. 415.