

531.112(09)

КАК СВЕТ ПОБЕЖДАЕТ ТЬМУ

(У. Р. Гамильтон и понятие групповой скорости)

М. Л. Левин

Последние десятилетия в научной и научно-исторической литературе стали появляться упоминания о том, что еще до Стокса и Рэлея понятие групповой скорости было известно Гамильтону. Четверть века назад об этом писалось довольно глухо: «Гамильтон в 1839 г. сделал сообщение в Ирландской академии, обещал напечатать подробнее, но доклад не был опубликован»¹. Сейчас пишут так: «Впервые понятие групповой скорости волны было введено Гамильтоном^{2, 3}, а затем получило свое развитие в трудах Рэлея»⁴. Ссылками подобного рода исчерпывается информация о работах Гамильтона, и остается неясным, что из сделанного им опубликовано и в какой мере его результаты предвосхищают работы Рэлея⁵.

При жизни Гамильтон напечатал только два кратких сообщения^{2, 3}, в которых весьма сжато и неполно привел выводы своих исследований о скорости распространения волн. Очень ясное изложение своих взглядов и результатов он дал в письме к Джону Гершелю (февраль 1839 г.), опубликованном сто лет спустя во втором томе собрания работ Гамильтона⁶. В этом же томе впервые напечатаны две рабочие тетради (125 страниц большого формата), чтение которых убеждает в том, что Гамильтон примерно на эти самые сто лет опередил свое время. Впрочем, это видно и из прижизненных публикаций^{2, 3} и из письма к Гершелю, носившего по теперешним понятиям характер препринта.

В качестве модели среды Гамильтон рассматривал, как и большинство исследователей того времени, — дискретную решетку, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений. Волны в таких решетках изучались многими, однако до Гамильтона рассматривали только установившиеся колебания всей решетки (собственные волны). Основное внимание уделялось выбору закона взаимодействия между центрами решетки, позволяющего хотя бы качественно правильно описать наблюдаемую на опыте дисперсию света. Но никто даже не ставил задачи о проникновении возмущения в первоначально покоящуюся область среды. Говоря словами Гамильтона: «Much had been done, perhaps, in the dynamics of light; little I thought, in the dynamics of darkness». Впервые эта задача была поставлена и решена Гамильтоном.

Задача ставилась так. Пусть в начальный момент времени возмущение, имеющее структуру собственной волны решетки, занимает ограниченную область среды, а остальная среда находится в покое. Что будет по прошествии достаточно большого

интервала времени? Эта задача была рассмотрена Гамильтоном для решеток разного типа (одномерных, двумерных, трехмерных и даже n -мерных — не следует забывать, что Гамильтон был и замечательным математиком!) и для разных типов связи между центрами. Наиболее подробно была разобрана, естественно, простейшая одномерная решетка (цепочка Лагранжа), поперечные колебания в которой описываются уравнениями вида

$$\ddot{z}_{x,t} = a^2 (z_{x+1,t} - 2z_{x,t} + z_{x-1,t}), \quad (1)$$

где x — целочисленная координата (единица длины выбрана равной периоду решетки), так что постоянная a имеет размерность скорости. Собственные волны в такой решетке имеют вид

$$z = A \cos(2xv - 2at \sin v + \psi),$$

т. е. их фазовая скорость равна

$$V = a \frac{\sin v}{v}, \quad (2)$$

где v — постоянная, определяемая частотой или длиной волны.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ левая часть решетки ($x < 0$) возмущена по волновому закону

$$\begin{aligned} z_{x,0} &= 1 - \cos 2xv, \\ \dot{z}_{x,0} &= -2a \sin v \cdot \sin 2xv, \end{aligned} \quad (x < 0) \quad (3)$$

а правая часть ($x > 0$) находится в покое. Тогда при $t > 0$ решение уравнений (1) при начальных условиях (3) в записи самого Гамильтона имеет вид

$$z_{x,t} = \sin^2(xv - at \sin v) - \frac{\sin^2 v}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(2x\theta - 2at \sin \theta)}{\sin \theta (\cos \theta - \cos v)} d\theta. \quad (4)$$

Аналогичные решения строятся Гамильтоном и для более сложных решеток (в том числе и многомерных), как при начальных условиях вида (3) (полубесконечный пуг), так и для начального возмущения, занимающего конечную область.

Далее рассматривается поведение решений вида (4) при больших значениях величины at , т. е. говоря современным языком, исследуется асимптотическое поведение этих решений. Окончательные выводы этого исследования, занимающего большую часть рабочих тетрадей Гамильтона и подытоженного в статьях ^{2, 3}, состоят в следующем. В решетке общего вида, допускающей собственные волны типа

$$\cos(kx - st + \psi),$$

скорость распространения волнового движения (velocity of propagation of vibratory motion) равна ds/dk и отличается от скорости передачи фазы (velocity of transmission of phase), равной s/k . Кроме того, есть еще третья скорость, характеризующая приход первого возмущения в первоначально покоящуюся среду. Для цепочки Лагранжа — это входящая в уравнения движения (1) константа a . На современном языке — это скорость предвестника.

В наиболее подробно рассмотренном Гамильтоном случае цепочки Лагранжа при начальных условиях (3) даны оценки ширины предвестника *), переходной области и фронта собственно волнового движения, распространяющегося с групповой скоростью. В частности, ширина фронта имеет порядок

$$p \sqrt{at \sin \frac{\pi}{\lambda}},$$

где λ — длина волны, а p — достаточно большое число, такое, что интеграл

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\Phi \pm \frac{\psi^2}{p^2}\right) \frac{\sin \psi}{\psi} d\psi \approx \cos \Phi.$$

Кроме того, рассмотрено распыливание (diffusion) конечного волнового пакета в такой решетке.

*) Выбор начальных условий вида (3), содержащих постоянный общий сдвиг, позволял Гамильтону четко отличить предвестник от собственно волнового распространения.

К сожалению, эти оценки не вошли в опубликованные при жизни Гамильтона работы. Но и то, что опубликовано, существенно превосходит результаты классических работ Бриллюэна — Зоммерфельда и их последователей.

В заключение заметим, что вынесенные в название слова взяты из статьи Гамильтона³, в которой о групповой скорости говорится как о «velocity wherewith light conquers darkness».

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. М а н д е л ь ш т а м Л. И. Лекции по некоторым вопросам теории колебаний (1944).— Полное собр. трудов — М.: Изд-во АН СССР, 1950.— Т. 5.
2. H a m i l t o n W. R. Researches on the Dynamics of Light.— Proc. Roy. Irish. Acad., 1839, v. 1, p. 267.
3. H a m i l t o n W. R., Researches on Vibration Connected with the Theory of Light.— Ibid., p. 341.
4. С т и к с Т. Теория плазменных волн.— М.: Атомиздат, 1965.
5. С т р э т т Дж. В. (лорд Рэлей). Волновая теория света.— М.; Л.: Гостехиздат, 1940.
6. The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton. V. II. Dynamics.— Cambridge: Univ. Press, 1940.