1978 г. Июль *Том 125, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

531.112

О ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ГРУППОВОЙ СКОРОСТИ

В. Г. Полевой, С. М. Рытов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Групповая скорость принадлежит к тем физическим понятиям, к которым по разным поводам возвращаются вновь и вновь, хотя, казалось бы, все, что можно о ней сказать, давно выяснено и написано. Это связано, по-видимому, с тем, что групповая скорость является одним из фундаментальных понятий кинематики (и не только кинематики) волнового движения и существенна для распространения волн любой физической природы, включая и «волны материи» в квантовой механике.

Впервые, задолго до Стокса и Рэлея, понятие группой скорости ввел Гамильтон [1] (см. статью М. Л. Левина в этом же номере). Дальнейшая история, связанная с именами Сто́кса [2] и Рэлея [3] (им долгое время приписывалось введение понятия групповой скорости), а также с классическими работами Зоммерфельда [4] и Бриллюэна [5], известна достаточно хорошо. Мы не перечисляем множества последующих работ, небольшая часть которых будет упомянута ниже.

Как известно, групповая скорость характеризует движение волнового пакета в среде с дисперсией, если рассматривать не слишком большие дистанции, т. е. при условии, что пакет еще сохраняет свою «индивидуальность», свои форму и размеры. В пределах этого ограничения групповая скорость пакета «в целом» подобна скорости тела в классической механике. Но в тех же пределах, т. е. когда вообще имеет смысл пользоваться понятием групповой скорости, последняя, в случае достаточно плавно неоднородной и (или) достаточно медленно меняющейся со временем среды,— может не оставаться постоянной, т. е. может описывать не только равномерное и прямолинейное движение пакета.

При наличии анизотропии, связанной либо со структурой тел (кристаллы, гиротропные среды), либо с их движением (например, в случае аберрации и движущейся диспергирующей среде [6]), групповая скорость выступает в качестве так называемой лучевой скорости.

В других явлениях представляет интерес связь групповой скорости с динамическими характеристиками рассматриваемого волнового поля, а также вопрос о четырехмерном (релятивистски-инвариантном) обобщении самого понятия групповой скорости. По обоим вопросам существует довольно обширная литература, а цель данной методической статьи состоит лишь в том, чтобы привести некоторые дополнительные соображения (не выходящие за пределы специальной теории относительности).

Четырехмерное обобщение групповой скорости, будучи чисто кинематической задачей, рассматривается для произвольного волнового поля (гл. 2), роль же 4-вектора этой скорости в динамике иллюстрируется на электромагнитных волнах. В гл. 3 мы коротко напоминаем четырехмерную запись уравнений Максвелла и рассматриваем движение волнового пакета в общем случае электрически- и магнитно-анизотропной среды, обладающей пространственно-временно́й дисперсией и, кроме того, плавно неоднородной в пространстве и медленно меняющейся во времени. Затем мы обращаемся к некоторым динамическим соотношениям для электромагнитного поля (гл. 4), и показываем, в частности, что 4-тензор энергии-импульса очень просто связан с 4-вектором групповой скорости. В гл. 5 затронут вопрос об адиабатическом инварианте (условиях ортогональности для уравнений первого приближения) и высказаны некоторые заключительные замечания.

2. ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ

При описании в линейном приближении любых волновых полей в однородных и неизменных во времени средах часто используется разложение Фурье, т. е. разложение по плоским гармоническим волнам $\exp(i\varkappa_n x^n)$ *). При этом из уравнений для рассматриваемого поля следует так называемое дисперсионное уравнение — соотношение между компонентами 4-вектора $\varkappa$:

$$\Delta(\varkappa) = 0. \tag{1}$$

В отсутствие поглощения вещественные решения $\varkappa = K$ уравнения (1) выделяют те плоские гармонические волны с волновым 4-вектором $K^j = \left\{\mathbf{k}, \frac{\omega}{c}\right\}$, которые могут распространяться в данной однородной и неизменной среде, не содержащей источников, так называемые собственные волны. Только такие (вещественные в отсутствие поглощения) решения мы и будем рассматривать далее.

Волновая группа (или пакет) — это некоторая суперпозиция собственных волн с близкими значениями K. Если группа описывается интегралом

$$f(\mathbf{r}, t) = \int g(\varkappa)\, e^{i[\varkappa\mathbf{r} - \omega(\varkappa)t]} d^3\varkappa,$$

где частота ω взята из (1) как функция $\varkappa$, а $g(\varkappa)$ отлично от нуля лишь в достаточно малой окрестности $\varkappa = \mathbf{k}$, то, ограничиваясь линейным членом разложения

$$\omega(\varkappa) = \omega(\mathbf{k}) + \frac{\partial\omega(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}}(\varkappa - \mathbf{k}) + \ldots,$$

получаем

$$f(\mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{r}, t)\, e^{i[\mathbf{kr} - \omega(\mathbf{k})t]},$$

*) Греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, а латинские — 1, 2, 3, 4, причем нижние и верхние латинские индексы обозначают, как обычно, ко- и контравариантные компоненты, связанные между собой обычным образом при помощи псевдоевклидова метрического тензора.

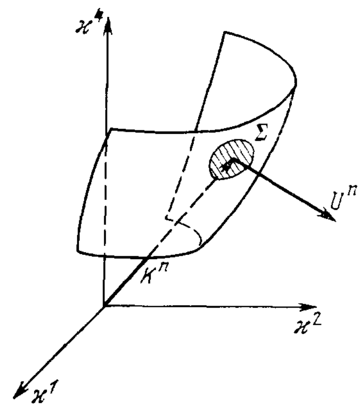
причем

$$f_0(\mathbf{r}, t) = \int g(\varkappa)\, e^{i(\varkappa-\mathbf{k})(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)}\, d^3\varkappa \equiv \mathcal{F}(\mathbf{r}-\mathbf{u}t),$$

где

$$\mathbf{u} = \frac{\partial\omega(\mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}}. \tag{2}$$

Таким образом, в указанном приближении группа представляет собой квазимонохроматическую квазиплоскую волну с «несущей» exp $(i\,[\mathbf{kr} - \omega(\mathbf{k})\,t])$, которая «вписана» в плавную «огибающую» $\mathcal{F}(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)$, движущуюся с групповой скоростью $\mathbf{u}$. Именно в этом приближении, не учитывающем деформаций огибающей при ее движении, и имеет смысл введение групповой скорости.



Групповая скорость допускает четырехмерное обобщение, которое и вводилось в ряде работ по электродинамике. При этом 4-вектор U определялся из энергетических соотношений [7,8]. Представляется, однако, более естественным определять кинематическое понятие скорости, не прибегая к динамическим величинам. Это можно сделать следующим образом.

В 4-пространстве $\varkappa$ вещественные решения дисперсионного уравнения (1) изображаются трехмерной (вообще говоря, многолистной) гиперповерхностью, часть которой показана на рисунке, где по понятным причинам число измерений снижено на единицу. Группа состоит из собственных волн с достаточно близкими значениями K, т. е. описывается интегралом Фурье

$$f(x) = \int g(\varkappa)\, e^{i\varkappa_n x^n} d^4\varkappa, \tag{3}$$

котором интегрирование распространяется фактически лишь на достаточно малый участок Σ одного из листов дисперсионной поверхности $\Delta(\varkappa) = 0$ *).

Определим U^n как 4-вектор, направленный по нормали к дисперсионной поверхности в точке K_n:

$$U^n = A \left.\frac{\partial\Delta(\varkappa)}{\partial\varkappa_n}\right|_{\Delta=0}, \tag{4}$$

и выберем скалярный множитель $A(\varkappa)$ так, чтобы, как и в случае тел, было $U^n U_n = -c^2$. Для того чтобы не писать во всех последующих

*) Это означает, что функция $g(\varkappa)$ содержит множитель $\delta[\Delta(\varkappa)]$. На малой площадке Σ

$$\Delta(\varkappa) = \Delta(K) + \left.\frac{\partial\Delta}{\partial\varkappa_n}\right|_{\Delta=0} (\varkappa_n - K_n) + \ldots,$$

и, поскольку $\Delta(K) \equiv 0$, получаем с точностью до первого порядка по $(\varkappa_n - K_n)$, что

$$\delta[\Delta(\varkappa)] = \delta\left[\left.\frac{\partial\Delta}{\partial\varkappa_n}\right|_{\Delta=0} (\varkappa_n - K_n)\right].$$

Вектор $(\partial\Delta/\partial\varkappa_n)_{\Delta=0}$ направлен по нормали к Σ в точке K_n, так что интегрирование распространяется лишь на те $(\varkappa_n - K_n)$, которые лежат на площадке Σ (ортогональны к нормали).

формулах знак $|_{\Delta=\varkappa}$, показывающий, что после дифференцирования по $\varkappa_n$ надо подставить вместо $\varkappa_n$ решение $\varkappa_n = K_n$ дисперсионного уравнения (1), мы будем писать просто K_n вместо $\varkappa_n$, помня, что в эту запись вложен именно указанный смысл.

Согласно (4) вектор U^n имеет компоненты

$$U^n = A\left\{\frac{\partial\Delta}{\partial K_\alpha}, \frac{\partial\Delta}{\partial K_4}\right\} = A\frac{\partial\Delta}{\partial K_4}\left\{\frac{\partial\Delta/\partial K_\alpha}{\partial\Delta/\partial K_4}, 1\right\}.$$

Но в силу дисперсионного уравнения (1) компоненты трехмерной групповой скорости $\mathbf{u}$, в соответствии с ее определением (2), равны

$$u_\alpha = -c\frac{\partial\varkappa_4}{\partial\varkappa_\alpha}\bigg|_{\varkappa=K} = c\frac{\partial\Delta/\partial K_\alpha}{\partial\Delta/\partial K_4},$$

так что

$$U^n = A\frac{\partial\Delta}{\partial K_4}\left\{\frac{\mathbf{u}}{c}, 1\right\}.$$

Условие нормировки дает при этом

$$U^nU_n = A^2\left(\frac{\partial\Delta}{\partial K_4}\right)^2\left(\frac{u^2}{c^2}-1\right) = -c^2,$$

откуда

$$A\frac{\partial\Delta}{\partial K_4} = \frac{c}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}.$$

В результате компоненты групповой 4-скорости, такие же, как и 4-скорости, тела:

$$U^n = \left\{\frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}, \frac{c}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\right\}. \tag{5}$$

Заметим, что в случае вырождения, т. е. той или иной кратности решения $\varkappa_n = K_n$ дисперсионного уравнения производные $\partial\Delta/\partial\varkappa_n$ обращаются в нуль при $\varkappa_n = K_n$ вместе с $\Delta(\varkappa)$. Очевидно, нормировка $U^nU_n = -c^2$ приведет к тому, что скалярный множитель A в формуле (4) будет соответствующим образом стремиться в точке K_n в бесконечность, так что компоненты U^n групповой скорости по-прежнему будут определяться выражением (5) *).

Как известно [10], 3-скорость $\mathbf{u}$ в изотропной среде направлена по волновому вектору $\mathbf{k}$ и в отсутствие поглощения меньше скорости света в вакууме. В анизотропной же среде векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{k}$ не коллинеарны. Однако, так как и в этом случае (в средах без поглощения) групповая скорость определяет скорость распространения сигнала, ясно, что она должна быть меньше c. Компоненты 4-вектора групповой скорости при этом вещественны.

3. ПАКЕТ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Если объединить напряженности электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, а также индукции $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ в антисимметричные 4-тензоры F_{lm} и H^{jk} с компонентами

$$F_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma, \quad F_{\alpha4} = F_\alpha,$$
$$H_{\alpha\beta} = e_{\alpha\beta\gamma}H_\gamma, \quad H_{\alpha4} = D_\alpha,$$

*) Быть может, стоит отметить, что аргумент в огибающей пакета $\mathcal{F}(\mathbf{r}-\mathbf{u}t)$ после введения 4-скорости U^n можно записать в виде 4-вектора $x^j - U^j\tau$, где $\tau = t\sqrt{1-(u^2/c^2)}$ — собственное время пакета. Четвертая компонента этого 4-вектора равна нулю.

где $e_{\alpha\beta\gamma}$ — полностью антисимметричный единичный тензор ($e_{123} = 1$), и ввести 4-вектор плотности тока J^i с компонентами $J^i = \{\mathbf{j}, c\rho\}$, то уравнения Максвелла записываются в виде

$$\frac{\partial F_{jk}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^j} + \frac{\partial F_{lj}}{\partial x^k} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial H^{jk}}{\partial x^k} = \frac{4\pi}{c} J^j. \tag{7}$$

Как известно, эта система уравнений должна быть дополнена материальными уравнениями, связывающими тензоры H^{jk} и F_{lm}. Мы будем рассматривать квазиоднородные и квазистационарные среды. Для описания полей и самой среды удобно ввести в этом случае наряду с координатами $x \equiv \{x^j\}$ еще и «медленные координаты» $\xi \equiv \{\xi^j\} = \{\mu x^j\}$, где безразмерный параметр μ, имеющий порядок $(ka)^{-1}$ (a — масштаб неоднородностей) достаточно мал ($\mu \ll 1$). Следует заметить, что одинаковый порядок относительно μ у всех четырех координат ξ вовсе не означает, что среда, будучи, например, пространственно-квазиоднородной, обязательно должна квазистационарно меняться и во времени. Ясно, однако, что такая асимметрия возможна лишь в одной системе отсчета. Во всех других системах, в соответствии с лоренцевым преобразованием, возникает в том же порядке μ и специального вида зависимость от времени, а именно — дрейф «замороженных» неоднородностей. Естественно и в общем случае не «замороженных» неоднородностей считать, что все медленные координаты имеют один и тот же порядок относительно параметра μ.

Линеаризованные материальные уравнения можно в общем случае пространственно-временнóй нелокальности связей между индукциями и напряженностями записать в виде

$$H^{jk}(x) = \int \varepsilon^{jklm}(\xi, x') F_{lm}(x - x')\, d^4x'. \tag{8}$$

Неоднородность и нестационарность среды учтены здесь зависимостью 4-тензора проницаемостей $\varepsilon^{jklm}(\xi, x')$ не только от x'^j, но и от медленных координат $\xi^j = \mu x^j$ *).

В силу антисимметричности тензоров H^{jk} и F_{lm} из (8) следует, что тензор ε^{jklm} должен быть антисимметричен в первой паре индексов (jk) и всегда может считаться антисимметричным и во второй паре индексов (lm):

$$\varepsilon^{jklm} = -\varepsilon^{kjlm} = -\varepsilon^{jkml}. \tag{9}$$

При $\mu = 0$ среда становится однородной и неизменной во времени. В инерциальной системе отсчета, связанной с этой средой, компоненты 4-тензора ε^{jklm} выражаются через компоненты 3-тензоров диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\alpha\beta}(x')$ и обратной магнитной проницаемости $\gamma_{\alpha\beta}(x') = \mu^{-1}_{\alpha\beta}(x')$ следующим образом [11]:

$$\varepsilon^{4\alpha\beta\gamma}(0, x') = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma 4}(0, x') = 0, \qquad 2\varepsilon^{4\alpha\beta 4}(0, x') = \varepsilon_{\alpha\beta}(x'), \tag{10}$$
$$2\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\nu}(0, x') = e_{\alpha\beta\tau} e_{\gamma\nu\sigma} \gamma_{\tau\sigma}(x').$$

*) В недиспергирующей среде ядро $\varepsilon^{jklm}(\xi, x')$ принимает вид $\varepsilon^{jklm}(\xi)\,\delta(x')$. Если же среда, сверх того, однородна и стационарна, то $H^{jk} = \varepsilon^{jklm} F_{lm}$, где тензор ε постоянен. Впервые 4-тензор проницаемостей четвертого ранга (DM-тензор) был введен для такой среды Мандельштамом и Таммом [9] (первоначально — в рамках специальной теории относительности). Несущественное отличие состоит в том, что они ввели тензор s_{lmjk}, обратный ε^{jklm} в том смысле, что с его помощью напряженности выражались через индукции: $F_{lm} = s_{lmjk} H^{jk}$.

Разумеется, утверждая, что ε^{jklm} является 4-тензором, мы считаем тем самым, что он определен в любой инерциальной системе отсчета по обычным формулам лоренцева преобразования.

В дальнейшем нам придется иметь дело с трансформантой Фурье (по «быстрым» координатам x') от ядра $\varepsilon^{jklm}(\xi, x')$:

$$\tilde{\varepsilon}^{jklm}(\xi, \varkappa) = \int \varepsilon^{jklm}(\xi, x') e^{-i\varkappa_s x'^s} d^4x'. \tag{11}$$

Заметим сразу же, что если среда не обладает поглощением, т. е. 3-тензоры $\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta}(\varkappa)$ и $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta}(\varkappa)$ эрмитовы ($\tilde{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \tilde{\varepsilon}^*_{\beta\alpha}$, $\tilde{\gamma}_{\alpha\beta} = \tilde{\gamma}^*_{\beta\alpha}$), то, согласно (10) 4-тензор $\tilde{\varepsilon}^{jklm}(0, \varkappa)$ удовлетворяет условию

$$\tilde{\varepsilon}^{jklm}(0, \varkappa) = \tilde{\varepsilon}^{*lmjk}(0, \varkappa). \tag{12}$$

Обратимся теперь к распространению волнового пакета, т. е. группы собственных волн ($J^j = 0$), в среде, описываемой материальными уравнениями (8). Решение уравнений Максвелла ищется в этом случае в виде квазимонохроматической квазиплоской волны

$$F_{lm} = \mathcal{F}_{lm}(\xi) e^{i\psi(x)} \tag{13}$$

где $\mathcal{F}_{lm}(\xi)$ — медленно меняющиеся амплитуды, а $\psi(x)$ — квазилинейная по быстрым координатам фаза, градиент которой представляет собой локальный волновой 4-вектор, зависящий только от медленных координат ξ:

$$K_j(\xi) = \frac{\partial\psi}{\partial x^j}. \tag{14}$$

Отметим, что из определения (14) тотчас же следует, что

$$\frac{\partial K_j}{\partial \xi^s} = \frac{\partial^2\psi}{\partial\mu x^s\, \partial x^j} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^s\, \partial\mu x^j} = \frac{\partial K_s}{\partial \xi^j},$$

или, если ввести для производных по медленным координатам более лаконичное обозначение

$$\partial_s \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^s}, \tag{15}$$

то

$$\partial_s K_j = \partial_j K_s. \tag{16}$$

Посмотрим сначала, к чему приводят для полей вида (13) материальные уравнения (8). Подставляя (13) в (8), разложим предварительно $\mathcal{F}_{lm}$ и ψ в ряды по степеням x', удержав при этом члены не выше первого порядка относительно μ:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{F}_{lm}(\xi - \xi') \exp[i\psi(x - x')] = \\
&= [\mathcal{F}_{lm}(\xi) - \mu x'^s \partial_s \mathcal{F}_{lm}(\xi)] \exp\left[i\psi(x) - iK_s(\xi) x'^s + \frac{1}{2} i\mu x'^n x'^s \partial_s K_n(\xi)\right] \approx \\
&\approx \left[\mathcal{F}_{lm} - \mu x'^s \partial_s \mathcal{F}_{lm} + \frac{1}{2} i\mu \mathcal{F}_{lm} x'^n x'^s \partial_s K_n(\xi)\right] \exp[i\psi(x) - iK_s x'^s].
\end{aligned}$$

Из (8) следует тогда, что

$$H^{jk} = \mathcal{H}^{jk}(\xi) e^{i\psi(x)}, \tag{17}$$

где

$$\mathcal{H}^{jk} = \tilde{\varepsilon}^{jklm} \mathcal{F}_{lm} - i\mu \left(\frac{\partial \tilde{\varepsilon}^{jklm}}{\partial K_s} \partial_s \mathcal{F}_{lm} + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{lm} + \frac{1}{2} \mathcal{F}_{lm} \frac{\partial^2 \tilde{\varepsilon}^{jklm}}{\partial K_n\, \partial K_s} \partial_s K_n \right), \tag{18}$$

и где использована трансформанта Фурье (11). Поскольку всюду далее будет фигурировать только эта трансформанта $\tilde{\varepsilon}^{jklm}(\xi, K)$, мы отбросим значок тильду и будем писать просто ε^{jklm}, называя эту величину 4-тензором проницаемостей и помня, что это функция медленных координат ξ и локального волнового вектора $K(\xi)$.

Для основных интересующих нас вопросов достаточно ограничиться нулевым приближением по малому параметру μ. В этом приближении (18) имеет вид

$$\mathscr{H}^{jk} = \varepsilon^{jklm}\mathscr{F}_{lm}, \tag{19}$$

и, вообще, медленные координаты ξ входят во все величины и соотношения квазистатически, просто как параметры, от которых зависит ε^{jklm}, а значит и решения $\varkappa_n = K_n(\xi)$ дисперсионного уравнения. Другими словами, в нулевом приближении все выглядит так же, как и в однородной неизменной среде *).

Установив (17) и (19), обратимся теперь к уравнениям Максвелла с тем, чтобы получить дисперсионное уравнение.

В отсутствие источников ($J^j = 0$) постановка (13) и (17) в (6) и (7) дает в нулевом приближении

$$\mathscr{F}_{jk}K_l + \mathscr{F}_{kl}K_j + \mathscr{F}_{lj}K_k = 0, \tag{20}$$

$$\mathscr{H}^{jk}K_k = 0, \tag{21}$$

откуда следует, между прочим, что **)

$$\mathscr{F}_{jk}\mathscr{H}^{*jk} = 0. \tag{22}$$

В силу (19) уравнения (21) принимают вид

$$\varepsilon^{jklm}K_k\mathscr{F}_{lm} = 0. \tag{23}$$

Так как восемь уравнений (20) и (23) для шести величин $\mathscr{F}_{lm}$ заведомо не независимы, целесообразно уже на данной стадии перейти от 4-тензора F_{lm} к 4-вектору потенциала $A^m = \{\mathbf{A}, \varphi\}$, полагая

$$F_{lm} = \frac{\partial A_m}{\partial x^l} - \frac{\partial A_l}{\partial x^m}. \tag{24}$$

Уравнения (6) удовлетворены при этом тождественно, а подстановка в (24) выражения $A_m = \mathscr{A}_m(\xi)\, e^{i\psi(x)}$ для 4-потенциала и (13) для F_{lm} дает в нулевом приближении следующую связь между медленными амплитудами $\mathscr{F}_{lm}$ и $\mathscr{A}_m$:

$$\mathscr{F}_{lm} = i(K_l\mathscr{A}_m - K_m\mathscr{A}_l). \tag{25}$$

С учетом этого соотношения уравнение (23) принимает вид

$$S^{jm}\mathscr{A}_m = 0, \tag{26}$$

где введен тензор второго ранга

$$S^{jm} = \varepsilon^{jklm}K_kK_l. \tag{27}$$

Из антисимметричности ε^{jklm} в индексах (jk) следует, что $K_jS^{jm} \equiv 0$, т. е. между строками матрицы S^{jm} имеется линейная связь, в силу чего

$$\det \| S^{jm} \| \equiv 0. \tag{28}$$

---

*) Члены первого порядка по μ, как это видно, скажем, из (18), уже содержат производные по ξ. Первое приближение понадобится нам только в гл. 5.

**) Свертка (20) с $\mathscr{H}^{*jk}$ дает $\mathscr{F}_{jk}\mathscr{H}^{*jk}K_l + \mathscr{F}_{kl}\mathscr{H}^{*jk}K_j + \mathscr{F}_{lj}\mathscr{H}^{*jk}K_k = 0$. В силу (21) и антисимметрии $\mathscr{H}^{jk}$ последние два члена равны нулю (напомним, что мы рассматриваем только вещественные K_n).

Таким образом, детерминант уравнений (25) равен нулю и, следовательно, они всегда имеют отличное от нуля решение для $\mathcal{A}_m$, но это, конечно, не означает, что отличны от нуля и напряженности $\mathcal{F}_{lm}$.

Для того чтобы сделать условия отличия от нуля $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{F}_{lm}$ равносильными, подчиним 4-потенциал инвариантной лоренцевой калибровке $\partial A^m/\partial x^m = 0$, откуда для амплитуд $\mathcal{A}_m$ в нулевом приближении имеем

$$K_m\mathcal{A}^m = 0. \tag{29}$$

Из равенства (25) тогда следует, что

$$K^m\mathcal{F}_{lm} = -iK^mK_m\mathcal{A}_l.$$

Так как мы рассматриваем поле в среде, а не в вакууме, т. е. $K^mK_m = k^2 - \omega^2/c^2 \neq 0$, становится очевидным, что при $\mathcal{A}_l \neq 0$ невозможно, чтобы все амплитуды $\mathcal{F}_{lm}$ равнялись нулю.

Условие (29), означающее, что из всех нетривиальных решений уравнений (26) мы выделяем решения, ортогональные к 4-вектору K_m, позволяет записать уравнения (26) в виде *)

$$L^{jm}\mathcal{A}_m = 0, \qquad L^{jm} = S^{jm} + K^jK^m. \tag{30}$$

Нетривиальные решения этих уравнений уже автоматически влекут за собой отличие от нуля и полей $\mathcal{F}_{lm}$. Условием существования нетривиальных решений является дисперсионное уравнение

$$D(K, \xi) = \det \| L^{jm} \| = \det \| S^{jm} + K^jK^m \| = 0.$$

Учитывая (28), можно преобразовать определитель D к виду

$$D = 2K^mK_m(3SS_l^mS_m^l - 2S_l^mS_m^pS_p^l - S^3), \tag{31}$$

где $S \equiv S_l^l$ и $S_l^m = g_{ln}S^{nm}$(g_{ln} — метрический тензор).

Итак, дисперсионное уравнение для рассматриваемой анизотропной среды с пространственно-временной дисперсией записывается в следующей четырехмерной форме:

$$\Delta(K) = 3SS_l^mS_m^l - 2S_l^mS_m^pS_p^l - S^3 = 0, \tag{32}$$

причем плавная неоднородность и медленная нестационарность среды учтены зависимостью от медленных координат $\xi = \mu x$, входящего в S_l^m тензора проницаемостей [см. (27)].

Согласно (27) выражение (32) для $\Delta(K)$ имеет вид

$$\Delta(K) = \Delta^{abcdef}(K)\,K_a \ldots K_f,$$

где коэффициенты $\Delta^{abcdef}(K)$ — суммы тройных произведений компонент $\varepsilon^{jklm}(K)$. Применяя к этому выражению оператор $K_s(\partial/\partial K_s)$ и учитывая (32), получаем

$$K_s\frac{\partial\Delta(K)}{\partial K_s} = K_s\frac{\partial\Delta^{abcdef}}{\partial K_s}K_a \ldots K_f + 6\Delta = K_s\frac{\partial\Delta^{abcdef}}{\partial K_s}K_a \ldots K_f.$$

Отсюда следует, что в отсутствие дисперсии, т. е. при независимости ε^{jklm}, а значит, и Δ^{abcdef}, от K, векторы K и U взаимно ортогональны:

$$K_sU^s = 0. \tag{33}$$

Через трехмерные величины это записывается в виде

$$\mathbf{ku} = \omega,$$

*) Перед произведением K^jK^m в (30) можно было бы ввести множителем произвольный скаляр C, но он просто дал бы в (31) множитель C.

или же, если ввести фазовую скорость $\mathbf{v} = \omega\mathbf{k}/k^2$ и угол α между $\mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$, то в виде

$$u \cos \alpha = v.$$

Это соотношение, хорошо известное в оптике недиспергирующих кристаллов (см., например, [12]) сохраняет силу, как это ясно из вывода, при наличии не только электрической, но и магнитной анизотропии (с произвольной взаимной ориентацией осей 3-тензоров $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и $\gamma_{\alpha\beta} = \mu_{\alpha\beta}^{-1}$).

Приведем еще выражение для U^s через тензор S_m^l (27), получаемое в соответствии с определением (4), если продифференцировать по K_s непосредственно выражение для $\Delta(K)$:

$$U^s = 3A\left(P\frac{\partial S}{\partial K_s} - 2P_m^l\frac{\partial S_l^m}{\partial K_s}\right),$$

где

$$P_m^l \equiv S_m^n S_n^l - S S_m^l, \quad P \equiv P_l^l = S_l^m S_m^l - S^2.$$

Так как само дисперсионное уравнение (32) записывается через вспомогательный тензор P_m^l следующим образом:

$$\Delta(K) = PS - 2P_m^l S_l^m = 0,$$

можно, взяв отсюда выражение для P, представить U^s в виде

$$U^s = 6A\frac{P_m^l}{S}\left(S_l^m\frac{\partial S}{\partial K_s} - S\frac{\partial S_l^m}{\partial K_s}\right) = -6ASP_m^l\frac{\partial}{\partial K_s}\frac{S_l^m}{S}. \tag{34}$$

4. ТЕНЗОР ЭНЕРГИИ-ИМПУЛЬСА

Обратимся теперь к динамическим величинам, т. е. величинам билинейным относительно поля. Свертка тензора F_{jl} с вектором плотности тока J^l дает, как известно, 4-вектор плотности силы f_j:

$$f_j = \frac{1}{c}F_{jl}J^l, \tag{35}$$

с компонентами $f^j = \left\{\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}, \mathbf{B}], \ \frac{1}{c}\mathbf{jE}\right\}$. Таким образом, пространственная часть (f_α) — это плотность лоренцевой силы, действующей на свободные заряды и токи, а временна́я компонента (f_4) равна (деленной на c) плотности мощности, развиваемой полем. Если исключить из (35) J^l при помощи (7) и воспользоваться затем уравнениями (6), то можно выразить f_j только через напряженности поля F_{lm} и индукции H^{jk}, причем в разных, но эквивалентных друг другу формах. Одно из таких равносильных представлений есть

$$f_j = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(F_{jl}H^{lk} + \frac{1}{4}\delta_j^k F_{lm}H^{lm}\right) + \frac{1}{16\pi}\left(H^{lm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^j} - F_{lm}\frac{\partial H^{lm}}{\partial x^j}\right), \tag{36}$$

где δ_j^k — единичный тензор. Это общее выражение, конечно, не зависит от вида материальных уравнений. Применим его к интересующему нас случаю свободных волн ($J^l = 0$ и, соответственно, $f_j = 0$) и распространению группы таких волн в случае материальных уравнений (18), но сначала сделаем некоторые предварительные замечания.

Если бы мы рассматривали уравнения Максвелла совместно с уравнениями движения среды, учитывая действие поля на среду, то мы должны были бы требовать, чтобы в замкнутой системе, лишенной диссипации, сохранялись общие (механические + электромагнитные) энергия и импульс. Но мы не рассматриваем механику среды, а считаем, что ее пространственно-временные изменения или движения заданы. Тем самым, речь может идти только об электромагнитных энергии и импульсе системы {среда + поле}. Очевидно, в прозрачной, однородной, неизменной во времени и не содержащей свободных токов и зарядов среде, т. е. в случае, когда $f_j = 0$, а трехмерные тензоры проницаемостей не зависят от $\xi = \mu x$ и эрмитовы, электромагнитная энергия и импульс должны в замкнутой системе сохраняться. Это означает, что равенства

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(F_{jl}H^{kl}-\frac{1}{4}\delta_j^k H^{lm}F_{lm}\right)-\frac{1}{16\pi}\left(H^{lm}\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^j}-F_{lm}\frac{\partial H^{lm}}{\partial x^j}\right)=0, \qquad (37)$$

должны принимать при указанных условиях вид уравнений непрерывности

$$\frac{\partial T_j^k}{\partial x^k}=0, \qquad (38)$$

в которых естественно считать билинейный по полю тензор T_j^k тензором энергии-импульса системы {поле + среда}. Конечно, сами уравнения (38) определяют T_j^k не однозначно, а лишь с точностью до добавки R_j^k, для которого $\partial R_j^k/\partial x^k \equiv 0$. При наличии же поглощения и (или) пространственно-временных вариаций ε^{jklm} уравнения (37) должны содержать, кроме членов вида $\partial T_j^k/\partial x^k$, еще добавочные члены, не приводимые к такому виду, но исчезающие в случае непоглощающей, однородной и стационарной среды. Имея сказанное в виду, применим равенство (37) к волновому пакету, записав вещественные напряженности и индукции в виде

$$F_{lm}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{F}_{lm}e^{i\psi}+\mathcal{F}_{lm}^{*}e^{-i\psi}\right), \quad H^{lm}=\frac{1}{2}\left(\mathcal{H}^{lm}e^{i\psi}+\mathcal{H}^{*lm}e^{-i\psi}\right). \qquad (39)$$

Подставляя это в (37), учитывая при этом (14) и то, что для медленных амплитуд (зависящих от $\xi = \mu x$) $\partial/\partial x^k = \mu\partial/\partial\xi^k \equiv \mu\partial_k$, мы получаем после усреднения по длине волны или периоду высокой частоты (члены с $\exp(\pm i2\psi)$ обращаются при таком усреднении в нуль) равенство

$$\mu\partial_k\left(\frac{\mathcal{F}_{jl}\mathcal{H}^{*kl}+\mathcal{F}_{jl}^{*}\mathcal{H}^{kl}}{16\pi}-\delta_j^k\,\frac{\mathcal{F}_{lm}\mathcal{H}^{*lm}+\mathcal{F}_{lm}^{*}\mathcal{H}^{lm}}{16\pi}\right)+$$
$$+\frac{\mu}{64\pi}\left(\mathcal{F}_{lm}\partial_j\mathcal{H}^{*lm}-\mathcal{H}^{*lm}\partial_j\mathcal{F}_{lm}+\mathcal{F}_{lm}^{*}\partial_j\mathcal{H}^{lm}-\mathcal{H}^{lm}\partial_j\mathcal{F}_{lm}^{*}\right)+$$
$$+\frac{iK_j}{32\pi}\left(\mathcal{F}_{lm}^{*}\mathcal{H}^{lm}-\mathcal{F}_{lm}\mathcal{H}^{*lm}\right)=0. \qquad (40)$$

Допустим теперь, что среда обладает слабым поглощением, т. е. у тензора проницаемостей ε^{jklm} имеется малая (порядка μ) антиэрмитова часть *)

$$\varepsilon^{jklm}=\alpha^{jklm}+i\mu\beta^{jklm}. \qquad (41)$$

Очевидно, при такой записи тензоры α^{jklm} и β^{jklm} эрмитовы, т. е.

$$\alpha^{*jklm}=\alpha^{lmjk}, \quad \beta^{*jklm}=\beta^{lmjk}. \qquad (42)$$

Подставим в (40) выражение (41) и материальное уравнение (18). При этом содержащуюся в (18) поправку порядка μ надо учитывать только

*) В этом случае корни $K_j = \partial\psi/\partial x^j$ дисперсионного уравнения (32) комплексны (как и фаза ψ), но их мнимые части порядка μ. Поскольку разность в последнем члене (40) порядка μ, учет мнимых частей K_j дал бы добавку порядка μ^2. Поэтому вместо $K_j + K_j^*$ мы сразу написали $2K_j$ в (40), считая K_j вещественными. По той же причине мы считаем и ψ в выражениях (39) вещественным.

при вычислении последнего члена (40), а в остальные, уже содержащие множитель μ, достаточно подставить нулевые приближения, т. е. $\varepsilon^{jklm} = \alpha^{jklm}$ и (19). В результате простых преобразований равенство (40) приводится к виду

$$\partial_k T_j^k = \frac{1}{32\pi}\left(2K_j\beta^{lmpq} - \hat{\partial}_j\alpha^{lmpq} + K_j\hat{\partial}_s \frac{\partial\alpha^{lmpq}}{\partial K_s}\right)\mathcal{F}^*_{lm}\mathcal{F}_{pq}, \tag{43}$$

где

$$T_j^k = \frac{1}{16\pi}\left[\mathcal{F}^*_{jl}\mathcal{H}^{kl} + \mathcal{F}_{jl}\mathcal{H}^{*kl} - \frac{\delta_j^k}{4}(\mathcal{F}^*_{lm}\mathcal{H}^{lm} + \mathcal{F}_{lm}\mathcal{H}^{*lm}) + \right.$$
$$\left. + \frac{K_j}{2}\mathcal{F}^*_{lm}\mathcal{F}_{pq}\frac{\partial\alpha^{lmpq}}{\partial K_k}\right], \tag{44}$$

а $\hat{\partial}_s$ — производная по явно выходящему ξ^s, т.е. для функции $f(\xi, K(\xi))$ имеем

$$\partial_s f = \hat{\partial}_s f + \frac{\partial f}{\partial K_n}\partial_s K_n.$$

Как сказано, здесь всюду входят амплитуды $\mathcal{F}_{lm}$ и $\mathcal{H}^{jk}$, взятые из уравнений нулевого приближения. Члены с δ_j^k в (40) и (44) можно было бы и не писать, так как в нулевом приближении справедливо (22).

Правая часть (43) обращается в нуль, как только мы переходим к однородной и стационарной среде (α^{lmpq} не зависит от ξ), лишенной поглощения ($\beta^{lmpq} = 0$), и тогда вступают в силу законы сохранения для тензора T_j^k. Таким образом, мы можем считать T_j^k тензором энергии-импульса. Отметим, что последний член в (44) является чисто дисперсионным: если α^{lmpq} не зависит от компонент волнового вектора K, этот член исчезает *).

Мы покажем теперь, что тензор энергии-импульса, взятый именно в виде (44), может быть записан в очень компактной форме через групповую 4-скорость U. Прежде всего, пользуясь формулами (19) (где $\varepsilon^{jklm} = \alpha^{jklm}$) и (25), выразим все напряженности и индукции в (44) через 4-потенциал $\mathcal{A}$. Нетрудно убедиться, что с учетом (29) и (42) результат приводится к виду

$$T_j^k = -\frac{K_j}{8\pi}\frac{\partial}{\partial K_k}(\alpha^{lpqm}K_pK_q\mathcal{A}^*_l\mathcal{A}_m).$$

В силу (27) и выражения (30) для L^{lm} это можно записать и иначе:

$$T_j^k = -\frac{K_j}{8\pi}\frac{\partial S^{lm}\mathcal{A}^*_l\mathcal{A}_m}{\partial K_k} = -\frac{K_j}{8\pi}\frac{\partial L^{lm}\mathcal{A}^*_l\mathcal{A}_m}{\partial K_k}, \tag{45}$$

причем эрмитовость S^{lm} и L^{lm} и уравнения (26) и (30) позволяют выносить $\mathcal{A}_m\mathcal{A}^*_l$ из-под знака производной по K_k, т. е. в равной мере справедливы и выражения

$$T_j^k = -\frac{K_j}{8\pi}\frac{\partial S^{lm}}{\partial K_k}\mathcal{A}^*_l\mathcal{A}_m = -\frac{K_j}{8\pi}\frac{\partial L^{lm}}{\partial K_k}\mathcal{A}^*_l\mathcal{A}_m. \tag{46}$$

Запишем теперь для $\varkappa_n \neq K_n$ неоднородные уравнения

$$L^{lm}(\varkappa)\,\mathcal{A}_m = B^l(\varkappa)\,D(\varkappa), \tag{47}$$

*) Выражение (44) для T_j^k, отвечающее наличию у среды пространственно-временно́й дисперсии, было получено Герценштейном [13], который впервые ввел и самый термин «пространственная дисперсия» для случая, когда проницаемости среды зависят не только от $\omega(\mathbf{k})$, но и от самого волнового вектора $\mathbf{k}$ [14].

где $B^l(\varkappa)$ — произвольный 4-вектор, не обращающийся в нуль, в случае $\varkappa_n = K_n$, когда уравнения (47) переходят в однородные уравнения (30). Поскольку $D(\varkappa) \neq 0$, существует единственное решение (47), а именно:

$$\mathcal{A}_m = \frac{D_{mp}}{D} B^p D = D_{mp} B^p,$$

где через D_{mp} обозначены детерминанты 3-го порядка — адъюнкты элементов L^{mp}, так что $L^{lm} D_{mp} = \delta^l_p D$. Билинейная форма $L^{lm} \mathcal{A}^*_l \mathcal{A}_m$ равна при этом выражению

$$L^{lm} \mathcal{A}^*_l \mathcal{A}_m = L^{lm} D_{mp} B^p D^*_{lq} B^{*q} = D^*_{pq} B^p B^{*q} D(\varkappa),$$

или, с учетом (31),

$$L^{lm} \mathcal{A}^*_l \mathcal{A}_m = 2\varkappa_r \varkappa^r D^*_{pq} B^p B^{*q} \Delta(\varkappa) \equiv \Phi(\varkappa) \Delta(\varkappa). \tag{48}$$

Если решение $\varkappa_n = K_n$ дисперсионного уравнения не вырождено, т. е. не все адъюнкты $D_{pq}(\varkappa)$ обращаются в нуль вместе с $D(\varkappa)$ при $\varkappa_n = K_n$, то скаляр $\Phi(\varkappa) = 2\varkappa_r \varkappa^r D^*_{pq} B^p B^{*q}$ отличен от нуля при $\varkappa_n = K_n$. Поэтому, дифференцируя (48) по $\varkappa_k$ и полагая затем $\varkappa_k = K_k$, получаем в соответствии с (4), что

$$\frac{\partial L^{lm} \mathcal{A}^*_l \mathcal{A}_m}{\partial K_k} = \frac{\Phi(K)}{A(K)} U^k \equiv \widetilde{\Phi}(K) U^k. \tag{49}$$

В результате тензор (45), если записать его не в смешанной, а в полностью контравариантной форме (т. е. поднять индекс j), будет

$$T^{jk} = -\frac{\widetilde{\Phi}(K)}{8\pi} K^j U^k. \tag{50}$$

Очевидно, при кратном корне K_n, когда все $D_{pq}(K) = 0$, всегда можно выбрать 4-вектор $B(\varkappa)$ так, чтобы его компоненты бесконечно нарастали при $\varkappa_n \to K_n$, обеспечивая в точке K_n отличное от нуля значение $\widetilde{\Phi}(K)$. Тем самым результат (50) остается в силе и в случае вырождения.

Таким образом, электромагнитный тензор энергии-импульса системы {среда + поле} пропорционален диаде, образованной из двух 4-векторов — волнового и групповой скорости.

Как известно, в непоглощающей среде трехмерные плотность энергии w, поток энергии S_α, плотность импульса g_α и максвелловский тензор натяжений $\theta_{\alpha\beta}$ совпадают со следующими компонентами 4-тензора энергии-импульса:

$$w = T^{44}, \quad S_\alpha = cT^{4\alpha}, \quad g_\alpha = \frac{1}{c} T^{\alpha 4}, \quad \theta_{\alpha\beta} = T^{\alpha\beta}. \tag{51}$$

Для определения в (50) скалярного множителя, зависящего от интенсивности поля, можно воспользоваться любой из компонент T^{jk} *), но лучше всего взять компоненту T^{44}, поскольку плотность энергии отлична от нуля при любой структуре поля. Разделив (50) на $T^{44} = w = -(\widetilde{\Phi}(K)/8\pi) K^4 U^4$, подставив $K^4 = \omega/c$ и взяв U^4 из (5), получаем

$$T^{jk} = \frac{w}{\omega} \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} K^j U^k. \tag{52}$$

*) Однако след $T = T^l_l$ неудобен, так как согласно (33) в отсутствие дисперсии он обращается в нуль.

В трехмерной записи из (51) и (52) следует, что

$$S_\alpha = wu_\alpha, \quad \theta_{\alpha\beta} = g_\alpha u_\beta, \quad g_\alpha = \frac{w}{\omega} k_\alpha. \tag{53}$$

Первое равенство, связывающее поток энергии с трехмерной групповой скоростью, известно давно [15]. Второе же равенство было получено в работе [11] для сред без пространственной дисперсии. На случай ее наличия оба соотношения были обобщены в [13]. Таким образом, (52) объединяет в четырехмерной форме соотношения (53).

Свертка T^{jk} либо с K_j, либо с U_k позволяет ввести два 4-вектора, которые мы запишем с определенной нормировкой, а именно:

$$I^k = \frac{K_j T^{jk}}{K_q K^q}, \quad G^j = \frac{T^{jk} U_k}{U^q U_q}. \tag{54}$$

В силу (5), (52) и (53) компоненты этих векторов следующие:

$$\begin{gathered} I^j = \frac{w}{\omega}\{\mathbf{u}, c\} = \frac{1}{\omega}\{\mathbf{S}, wc\}, \\ G^j = \frac{w}{\omega}\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left\{\mathbf{k}, \frac{\omega}{c}\right\} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\left\{\mathbf{g}, \frac{w}{c}\right\}. \end{gathered} \tag{54a}$$

Вектор I связан с плотностью адиабатического инварианта поля (см. гл. 5), а G — с плотностью импульса и энергии. Сам тензор T^{jk} можно записать через эти векторы в двух видах:

$$T^{jk} = G^j U^k = K^j I^k, \tag{55}$$

а 4-вектор полных энергии и импульса волнового пакета $P^j = \int T^{j4} dV$ ($dV = dx^1 dx^2 dx^3$) выражается соответственно как

$$P^j = \int G^j U^4 dV = \int K^j I^4 dV = \left\{c\int \mathbf{g} dV, \int w\, dV\right\}.$$

Как это ясно уже из первоначального выражения (44) для T^{jk}, так, в особенности, и из выражения (52) через K и U, электромагнитный тензор энергии-импульса системы {поле + среда} в общем случае *несимметричен*. Вместе с тем, значения всех его компонент в точке ξ *локальны по полю*, т. е. являются локальными функциями напряженностей $\mathcal{F}$ и индукций $\mathcal{H}$ в *этой* точке.

Нетрудно показать, что любой тензор $T^{jk}(\xi)$ всегда можно симметризовать, не меняя значения его дивергенции $\partial_k T^{jk}$. Это можно сделать, добавляя к $T^{jk}(\xi)$ тензор вида $\partial_l R^{jkl}(\xi)$, где R^{jkl} — тензор третьего ранга, антисимметричный в индексах (kl) и билинейный относительно $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$. В случае однородной, стационарной и непоглощающей среды остаются при этом в силе законы сохранения $\partial_k T^{jk} = 0$, однако утрачивается *локальность по полю* у компонент тензора T^{jk}, поскольку они будут содержать члены с интегралами по ξ^j от билинейных функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$. Следует ли при таком положении вещей требовать симметрии T^{jk} и тем самым жертвовать обычной (локальной по полю) связью T^{jk} с $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$?

Для полного тензора энергии-импульса автономной (и нелинейной) системы {поле + среда}, который зависит не только от электромагнитного поля, но и от механического состояния среды, условие симметрии, возможно, было бы и оправдано. Но мы ограничились приближением заданных изменений (движений) среды, т. е. отбросили обратное влияние поля на движение среды. При такой постановке задачи стремиться к симметрии T^{jk} нет физических оснований.

Интересно выяснить, при каких условиях тензор (52) все же симметричен? Очевидно, для его симметрии необходима коллинеарность K и U:

$$K^j = aU^j,$$

т. е. среда должна быть изотропной и обязательно диспергирующей (в противном случае K и U ортогональны; см. (33)). В трехмерной форме написанное равенство означает коллинеарность $\mathbf{k}$ и $\mathbf{u}$ и следующие равенства для k, u и ω:

$$k = \frac{au}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}, \quad \frac{\omega}{c} = \frac{ac}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}.$$

Исключая отсюда $a/\sqrt{1-(u^2/c^2)}$, получаем

$$k = \frac{\omega}{c^2} u.$$

Поскольку фазовая скорость есть $v = \omega/k$, это равенство можно записать также в виде $vu = c^2$. Из этого же равенства, подставляя в него $u = d\omega/dk$, получаем

$$\frac{\omega\, d\omega}{k\, dk} = c^2,$$

откуда $\omega^2 = k^2c^2 + b$, где $b = \mathrm{const}$. В результате, если ввести показатель преломления $n = c/v$, мы приходим к закону дисперсии

$$n^2(\omega) = 1 - \frac{b}{\omega^2},$$

причем $b \geqslant 0$, так как $u/c = n \leqslant 1$. Таким образом, изотропная среда с «ленгмюровским» законом дисперсии — единственная, в которой тензор T^{jk} (52) симметричен и, как легко показать, имеет вид

$$T^{jk} = \frac{w}{c^2}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) U^j U^k.$$

5. ПЕРВОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы ограничивались выше нулевым приближением относительно малого параметра μ, характеризующего неоднородность и нестационарность среды, а также величину поглощения. Не представляет труда записать все уравнения с учетом членов первого порядка по μ. Тогда для поправок $\mathcal{A}_m^{(1)}$ в разложении $\mathcal{A}_m = \mathcal{A}_m^{(0)} + \mu\mathcal{A}_m^{(1)} + \ldots$ (индекс 0 мы для краткости опускали, что будем делать и далее) получается система неоднородных уравнений

$$L^{jm}\mathcal{A}_m^{(1)} = i\left[\partial_k(\alpha^{jklm}K_l\mathcal{A}_m) + \alpha^{jklm}K_k\partial_l\mathcal{A}_m + \frac{\partial\alpha^{jklm}}{\partial K_s}K_k\partial_s(K_lA_m) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\alpha^{jklm}}{\partial K_s\,\partial K_n}K_kK_l\mathcal{A}_m\partial_sK_n - \beta^{jklm}K_kK_l\mathcal{A}_m\right] \equiv iX^j(\mathcal{A}). \quad (56)$$

Условие совместности уравнений (56), детерминант которых равен нулю, состоит, как известно, в том, чтобы правая часть $X^j(\mathcal{A})$, в которую подставлено общее решение $\mathcal{A}_m$ однородных уравнений (30), была ортогональна к каждому из линейно-независимых частных решений транспонированных уравнений (30). Число таких частных решений зависит от степени вырождения, т. е. кратности корня K_n дисперсионного уравнения. В силу эрмитовости L^{jm} решения транспонированной системы просто комплексно сопряжены с решениями уравнений (30).

Пусть K_n — однократный корень и, тем самым, решение транспонированной системы $\mathcal{A}_j^*$ — с точностью до скалярного множителя единственное. Условия ортогональности сводятся тогда к одному (комплексному) скалярному уравнению

$$X^j(\mathcal{A})\mathcal{A}_j^* = 0. \tag{57}$$

Разделяя вещественную и мнимую части (57), получаем два вещественных условия, которые при учете эрмитовости α^{jklm} и β^{jklm} записываются следующим образом:

$$\partial_k(\alpha^{jklm}K_l\mathcal{A}_m\mathcal{A}_j^*) + \partial_l(\alpha^{jklm}K_k\mathcal{A}_m\mathcal{A}_j^*) + \frac{\partial\alpha^{jklm}}{\partial K_s}\partial_s(K_kK_l\mathcal{A}_m\mathcal{A}_j^*) + \\ + \frac{\partial^2\alpha^{jklm}}{\partial K_s\,\partial K_n}K_kK_l\mathcal{A}_m\mathcal{A}_j^*\,\partial sK_n - 2\beta^{jklm}K_kK_l\mathcal{A}_m\mathcal{A}_j^* = 0, \tag{58}$$

$$\mathcal{A}_j^*\left[\partial_k(\alpha^{jklm}K_l\mathcal{A}_m) + \alpha^{jklm}K_k\partial_l\mathcal{A}_m + \frac{\partial\alpha^{jklm}}{\partial K_s}K_k\partial_s(K_l\mathcal{A}_m)\right] - \\ - \mathcal{A}_m\left[\partial_l(\alpha^{jklm}K_k\mathcal{A}_j^*) + \alpha^{jklm}K_l\partial_k\mathcal{A}_j^* + \frac{\partial\alpha^{jklm}}{\partial K_s}K_l\partial_s(K_k'\mathcal{A}_j^*)\right] = 0. \tag{59}$$

Сделаем в (58) замену $\partial_k \equiv \partial_s\delta_s^k = \partial_s(\partial K_k/\partial K_s)$ (аналогично для ∂_l). С учетом (46) условие (58) приводится тогда к виду

$$-8\pi\partial_s\left(\frac{K_pT^{ps}}{K_qK^q}\right) = \left[\hat{\partial}_s\left(\frac{\partial\alpha^{jklm}}{\partial K_s}\right) + 2\beta^{jklm}\right]K_kK_l\mathcal{A}_m\mathcal{A}_j^*. \tag{60}$$

Пользуясь (25) и эрмитовостью α^{jklm} и β^{jklm} нетрудно убедиться, что произведение $K_kK_l\mathcal{A}_m\mathcal{A}_j^*$ в правой части (60) можно заменить на $-1/4\mathcal{F}_{lm}\mathcal{F}_{jk}^*$. Что касается 4-вектора, стоящего в левой части (60) под знаком производной, то это не что иное, как введенный выше вектор I^s (см. (54) и (54а)). В результате (60) принимает вид

$$\partial_sI^s = \frac{1}{32\pi}\left[\hat{\partial}_s\left(\frac{\partial\alpha^{jklm}}{\partial K_s}\right) + 2\beta^{jklm}\right]\mathcal{F}_{lm}\mathcal{F}_{jk}^*. \tag{61}$$

В среде без дисперсии (α^{jklm} не зависит от K)и без поглощения ($\beta^{jklm} = 0$) равенство (61) представляет собой уравнение непрерывности для плотности адиабатического инварианта w/ω (см. [16]). В общем случае условие сохранения адиабатического инварианта состоит в равенстве нулю тензора, стоящего в квадратных скобках в (61):

$$\hat{\partial}_s\left(\frac{\partial\alpha^{jklm}}{\partial K_s}\right) + 2\beta^{jklm} = 0.$$

При тех же условиях, но при стационарной среде и $\omega = \text{const}$ (61) переходит в уравнение непрерывности для плотности энергии w.

Второе условие ортогональности (59) определяет закон изменения дополнительного набега фазы волновой группы. Этот набег оказывается существенным только в неоднородной гиротропной среде и подробно рассмотрен (в трехмерной форме) в работе [17].

Мы не будем останавливаться на случае поляризационного вырождения (двукратного корня K_n дисперсионного уравнения), который для изотропной пространственно-неоднородной среды был исследован в [18], а при слабой анизотропии, когда применимо так называемое «квазиизотропное» приближение,— в работе [19].

Как уже было подчеркнуто ранее, понятие групповой скорости имеет смысл лишь при достаточно малой кривизне области интегрирования Σ на дисперсионной гиперповерхности, когда в разложении

$$\Delta(\varkappa) \approx \frac{\partial\Delta(K)}{\partial K_n}(\varkappa_n - K_n) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\Delta(K)}{\partial K_n\,\partial K_m}(\varkappa_n - K_n)(\varkappa_m - K_m) + \ldots$$

можно пренебречь по крайней мере членами со вторыми производными. В свою очередь это ограничивает длину 4-интервала или промежутка собственного времени пакета τ, в пределах которых огибающая пакета еще не успевает заметно измениться. Эти условия хорошо известны и подробно исследованы, например, в работе [20] для случая однородной и неизменной среды.

В среде, плавно неоднородной и медленно меняющейся со временем, помимо этого дисперсионного расплывания пакета действует и другой механизм — искажение волновых фронтов (искривление лучей и эффект Допплера) из-за пространственно-временны́х неоднородностей. Очевидно, эта «неоднородностная» деформация пакета обладает своими характерными масштабами, бесконечно возрастающими при $\mu \to 0$.

Конечно, при наличии обоих видов деформаций пакета оба указанных механизма взаимодействуют, но в принципе они независимы. Первый (дисперсионный) сохраняется и в однородной среде, а второй «неоднородностный» не связан с обязательным наличием дисперсии.

В заключение нам хотелось бы сказать несколько слов о четырехмерной записи исходных уравнений и соответствующей форме всех выводов. Этот аппарат, используемый в очень многих работах, был применен, в частности, в работах [11,13]. В более поздней работе [21] для случая диспергирующей электрически анизотропной среды результаты работ [11,13], были выведены в трехмерной форме. При этом авторы работы [21] высказали следующее суждение: «Что же касается формы записи и вывода соотношений, то это конечно, является вопросом вкуса и привычки. Однако приведенный выше [т. е. трехмерный.— *Авторы*] вывод представляется нам настолько простым, что переход к редко используемым в макроскопической электродинамике релятивистским уравнениям оказывается сложнее самого доказательства и уже поэтому нецелесообразен».

О вкусах, конечно, не спорят, но в отношении целесообразности четырехмерной записи приведенная точка зрения вряд ли справедлива. Четырехмерные тензоры и оперирование с ними в высшей степени лаконичны и наиболее адекватным образом отражают релятивистскую инвариантность интересующих нас соотношений. Непривычными их можно было считать разве что в начале века. Работы [11, 13] скорее можно было бы упрекнуть не в самом использовании четырехмерной формы записи, а в недостаточно последовательном ее применении, обусловленном тем, что в них не была введена явным образом групповая 4-скорость. Именно поэтому введение такой скорости наряду с четырехмерным описанием анизотропии и пространственно-временно́й дисперсии представляет, на наш взгляд, оправданный методический интерес.

Мы благодарны М. Л. Левину за полезные советы и замечания.

Радиотехнический институт
Академии наук СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Hamilton W. R.— Proc. Roy. Irish Acad. 1839, v. 1, p. 267, 341.
2. Stokes G. Smith's Prize Examination (1876).— In: Sci. Papers — V. V, p. 362.
3. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука — 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1955.— Т. 1, § 191; Дополнение (с. 493): О бегущих волнах.— Proc. Lond. Math. Soc., 1877, v. 9, p. 21.— То же: In: Scientific Papers.— V. I, p. 537; V. IV, p. 41. См. также статью для «Encyclopedia Britannica»: Волновая теория света (1888), изданную в переводе отдельной книгой.— М.: Гостехиздат, 1940.
4. Sommerfeld A.— Ann. d. Phys., 1914, Bd. 44, H. 10, S. 177.
5. Brillouin L.— Ibid., S. 203.
6. Ehrenfest P.— Ibid., 1910, Bd. 33, S. 1571.
Свешникова М. П.— Ж. русск. физ.-хим. о-ва. Ч. физ., 1927, т. 59, с. 377.

См. также: Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике.— М.: Наука, 1972.— С. 51.
7. Мёллер К. Теория относительности.— 2-е изд.— М.: Атомиздат, 1975.— § 6.1.
8. Brevik I. Electromagnetic Energy-Momentum Tensor within Material Media, 1. Minkowski's Tensor.— Mat. Fys. Medd. Vid. Selsk, Kobenhavn, 1970, Bd. 37, Nr. 1.
9. Тамм И. Е. Собрание научн. трудов. М.: Наука, 1976.— Ч. I, статьи 1 и 3.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред.— М.: Физматгиз, 1959.
11. Рытов С. М.— ЖЭТФ, 1947, т. 17, с. 930.
12. Борн М., Вольф Э. Основы оптики.— М.: Наука, 1970.— С. 733.
13. Герценштейн М. Е.— ЖЭТФ, 1954, т. 26, с. 680.
14. Герценштейн М. Е.— ЖЭТФ, 1952, т. 22, с. 303.
15. Reynolds O.— Nature, 1877, v. 16, p. 343.— То же: In: Papers.— V. I, p. 198.— См. также Дополнение в «Теории звука» (ссылка [3]).
16. Кравцов Ю. А., Степанов Н. С.— ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 1730.
17. Зайцев Ю. А., Кравцов Ю. А., Яшин Ю. Я.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1968, т. 11, с. 1802.
18. Рытов С. М.— ДАН СССР, 1938, т. 18, с. 263.
19. Кравцов Ю. А.— Ibid., 1968, т. 183, с. 74.
20. Вайнштейн Л. А.— УФН, 1976, т. 118, с. 339.
21. Гершман Б. Н., Гинзбург В. Л.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1962. т. 6, с. 31.