

532.517.4

СТОХАСТИЧЕСКИЕ АУТОКОЛЕБАНИЯ И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ*М. И. Рабинович***СОДЕРЖАНИЕ**

Введение	123
1. Хаос в автоколебательных системах. Математические признаки стохастичности	126
а) Стохастический автогенератор (129). б) Символическая динамика (132). в) Энтропия динамических систем (134). г) Эффект бабочки (135). д) Приложения к биологии (136). е) Странные аттракторы и гиперболичность (136).	
2. Физические механизмы, приводящие к странным аттракторам	138
а) Разрушение многопериодических движений — конкуренция, синхронизация, хаос (138). б) Вынужденная синхронизация и стохастизация пульсаций в лазерах (140). в) Распадный механизм возникновения стохастичности (142). г) Стохастическая стадия параметрической неустойчивости в плазме и модель Лоренца (144). д) Аттрактор Лоренца (146). е) О консервативных механизмах (150). ж) Много мод — развитая турбулентность (151).	
3. Конечномерное описание гидродинамической турбулентности	152
а) Двумерная гидродинамика (153). б) Соотношение с экспериментом (153). в) Термоконвекция (155). г) Течение Куэтта между вращающимися цилиндрами (155). д) Пограничный слой (156). е) След за телом в потоке (156). ж) Турбулентная конвекция в ячейке Хеле — Шоу (157). з) Переход к турбулентности в течении Куэтта между цилиндрами (161). и) Роль распадов в возникновении турбулентности (164).	
Заключение	165
Цитированная литература	166

ВВЕДЕНИЕ

Проблема турбулентности возникла в середине прошлого века, когда между теоретической гидродинамикой (с ее уравнениями Навье — Стокса) и прикладными задачами о течении жидкости или газа имелось множество казавшихся непримиримыми противоречий. Например, экспериментаторам было известно, что при достаточно больших скоростях течения жидкости по трубе сопротивление движению должно расти как квадрат средней (по сечению) скорости — закон Шеши. Из теории же следовало, что сопротивление растет пропорционально первой степени скорости — закон Пуазейля. Первый шаг к примирению этих противоречий сделал Осборн Рейнольдс, опубликовавший в 1883 г. работу о результатах опытов с окрашенными струйками в потоке, где он ввел свое знаменитое число $Re = vD/\nu$ (D — диаметр, v — скорость, ν — кинематическая вязкость) и впервые связал закон Пуазейля со слоистым, ламинарным течением жидкости, а закон Шеши — с нерегулярным, случайным, турбулентным движением. Он установил, что ламинарное движение устойчиво только при $Re < 2000$, а при больших Re возникает турбулентность. Так, для воды, текущей по трубке диаметром 1 см при комнатной температуре, ламинарный режим, как правило, «кончается» уже при средней скорости течения ≤ 30 см/сек.

Возникнув почти сто лет назад, проблема турбулентности, заключающаяся в выяснении природы случайного движения нелинейной среды и нахождении способов его самосогласованного описания, остается и сейчас одной из самых притягательных и интригующих проблем в классической физике и до ее окончательного решения все еще далеко *). Проблема турбулентности, появившись в гидродинамике, является общей для физики плазмы, космологии, экологии, предсказания погоды, теории планет и звезд, химической кинетики, радиофизики и многих других наук.

Главным в проблеме турбулентности во всех ее физических и иных проявлениях всегда был и остается вопрос о ее природе, т. е. о причинах и механизмах возникновения хаоса.

В разное время появилось несколько всеелявших энтузиазм моделей, которые претендовали на объяснение механизмов возникновения турбулентности в нелинейных динамических системах, однако сравнительно быстро выяснялась их недостаточность. Наиболее долгоживущей оказалась модель Ландау — Хопфа, представляющая возникновение турбулентности как длинную цепочку последовательных неустойчивостей, в результате которых движение становится очень сложным и запутанным. И вот сейчас в вопросе о природе турбулентности наблюдается очередной подъем, связанный с формированием новых представлений о стохастичности автоколебательных динамических систем и открытием Эдвардом Лоренцом, Рюэлем и Тэкенсом, Смейлом и другими *«странных аттракторов»* (strange attractors).

Подобно тому как предельный цикл в фазовом пространстве динамической системы является образом периодических автоколебаний (А. А. Андронов²), хаотическое притягивающее множество или, как его обычно называют, *странный аттрактор*, на котором все траектории неустойчивы и ведут себя очень сложно и запутанно, — математический образ *стохастических автоколебаний*. Стохастические автоколебания и турбулентность очень тесно связаны. Эта связь обсуждалась Г. С. Гореликом еще в начале 50-х годов: «Турбулентность с ее границей самовозбуждения, с характерным гистерезисом ее возникновения и исчезновения при увеличении и уменьшении скорости порождающего потока, с первоочередной ролью нелинейности для ее развитого (стационарного) состояния — это автоколебания. Их специфика определяется тем, что это автоколебания в сплошной среде, т. е. системе с бесконечным числом степеней свободы»³.

Представление о том, что для перехода автоколебательной системы в турбулентное состояние необходимо возбуждение по крайней мере чрезвычайно большого (если не бесконечного) числа степеней свободы, является очень распространенным. Это, очевидно, связано с тем пониманием стохастичности динамических систем, которое сформировалось в статистической механике: в газе движение каждой отдельной частицы в принципе известно и предсказуемо, но движение системы из очень большого числа частиц (даже невзаимодействующих) столь сложно, что динамическое описание теряет всякий смысл (хотя в принципе и возможно!). Кроме того, не известны абсолютно точно все начальные условия. Отсюда потребность в усредненном статистическом описании. Автоколебательный характер движения системы (сплошной среды) по этим представлениям существен лишь на этапе установления стационарных пульсаций — равновесие между отбором энергии у источника (например, течения) и диссипа-

*) Говоря словами Фейнмана, «... с настоящей мокрой водой, [брызгающей из планта, справиться мы не в силах. Это центральная] проблема, которую в один прекрасный день нам понадобится решить, а мы не умеем»¹.

цией определяет интенсивность «автоколебательных мод». В установившемся же режиме такой «газ автогенераторов», как кажется, не должен отличаться от идеального газа. Аналогичные представления лежат в основе модели возникновения турбулентности, предложенной в 1944 г. Ландау^{4,5} и независимо, в несколько иной форме, в 1948 г. Хопфом⁶.

В соответствии с моделью Ландау — Хопфа турбулентность при увеличении числа Рейнольдса возникает в результате цепочки последовательных бифуркаций, благодаря которым устанавливается *квазипериодическое* движение $u(t) = F(\omega_1, t, \dots, \omega_N t)$, где функция F имеет период 2π по каждому аргументу, а ω_i — N иррационально связанных частот. Первые бифуркации из этой цепочки очень просты: вначале устойчивое состояние равновесия превращается в неустойчивое и одновременно в его окрестности рождается устойчивый предельный цикл (так появляется ω_1), затем возникшее периодическое движение теряет устойчивость и в окрестности исчезнувшего устойчивого цикла появляется двумерное многообразие — тор, частота обмотки которого не связана с основной частотой (так появляется ω_2), после чего это двухпериодическое движение становится неустойчивым и рождается трехмерный тор (возникает ω_3) и т. д. При большом N реализация такого квазипериодического процесса действительно выглядит случайной, в частности, его автокорреляционная функция быстро спадает (как $1/\sqrt{N}$), а время до ее следующего максимума (период возврата Пуанкаре⁹) есть $T \sim e^{\alpha N}$, где $\alpha \sim 1$ ⁸.

Естественная с точки зрения привычных представлений модель турбулентности в виде «газа» автоколебательных мод с несоизмеримыми частотами оказывается тем не менее верной лишь частично. Дело в том, что учет даже слабого взаимодействия «частиц» в таком газе может привести к неустойчивости интересующего нас многочастотного квазипериодического движения. В результате разрушения этого движения, представляемого в фазовом пространстве незамкнутой обмоткой тора, может возникнуть и периодическое движение — *предельный цикл*, и «настоящее» стохастическое — *странный аттрактор*. То, что в автоколебательной системе при малом изменении ее параметров квазипериодическое движение может перейти в периодическое, известно достаточно давно — это знакомое всем явление *синхронизации* *) (см. гл. 2). А вот возможность рождения странного аттрактора при разрушении квазипериодического движения, т. е. возможность установления в результате очередной бифуркации вместо движения с дискретным спектром движения, характеризующегося сплошным спектром — стохастического (!), была доказана совсем недавно Рюэлем и Тэкенсом¹⁰ (1971 г.). В рассмотренном ими примере число независимых частот, предшествовавших возникновению стохастичности, было равно 4, однако стохастичность, образом которой является странный аттрактор, может возникнуть и в автоколебательной системе всего лишь с полутора степенями свободы (трехмерное фазовое пространство) и, уж заведомо, в системе с большим числом возбужденных мод. Таким образом, для перехода автоколебательной системы в стохастическое или, как мы далее будем говорить, турбулентное состояние **) число возбужденных степеней свободы вовсе не обязательно должно быть очень велико.

Данный обзор, в основном, посвящен обсуждению именно той турбулентности, образом которой является странный аттрактор. Такая

*) Например, описанный Гюйгенсом эффект синхронизации часов использовался недобросовестными часовщиками еще в XVII веке⁶¹.

**) Такое отождествление понятий кажется естественным, если учесть, что турбулентность — хаотическое движение сплошной среды — допускает конечномерное описание.

турбулентность описывается конечным числом степеней свободы — мод, и ее физическая природа может быть различна. Различной может быть также и структура мод, на базе которых рассматривается турбулентное движение. В несжимаемой жидкости, например, элементарные возбуждения часто удобно представлять в виде системы вихрей, соответственно турбулентность вихревая. В газе, плазме, твердом теле — это, как правило, волны (не обязательно синусоидальные!). Стохастические автоколебания в ансамбле квазигармонических волн — это *слабая волновая турбулентность*⁵⁷; если волны существенно несинусоидальны — это *сильная турбулентность*. Примером волновой турбулентности в гидродинамике может служить взволнованная поверхность моря (здесь моды — поверхностные волны).

В начале статьи обсуждается возможность возникновения хаоса в автоколебательных динамических системах. При анализе уравнений, описывающих простой радиотехнический автогенератор шума, показывается, как неустойчивость траекторий приводит к стохастическому поведению. Рассмотрение основывается на введении невязанно однозначного отображения Пуанкаре отрезка в себя, которое используется затем для описания странных аттракторов, встречающихся в различных физических задачах. На примере такого отображения демонстрируется дискретное — символическое описание динамических систем. После этого обсуждаются признаки стохастичности таких систем, в частности, положительность топологической энтропии и гиперболичность. Затем рассматриваются физические механизмы, приводящие к возникновению стохастичности, образом которой являются странные аттракторы. Там, где возможно, описывается топологическая структура этих аттракторов и бифуркации, предшествующие их возникновению. «Аттракторным» моделям гидродинамической турбулентности посвящен последний раздел, где основное внимание уделяется уже не свойствам аттракторов, а построению конечномерных гидродинамических моделей, в которых аттракторы появляются, и обсуждению применимости этих моделей к классическим течениям.

1. ХАОС В АВТОКОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМАХ. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИЗНАКИ СТОХАСТИЧНОСТИ

Когда говорят о стохастичности динамических систем, сразу возникает вопрос — откуда в системе без флуктуаций, описываемой детерминированными уравнениями, может появиться случайность? Ведь теорема существования и единственности гарантирует при заданных начальных условиях вполне однозначное поведение. Если система обладает чрезвычайно большим числом степеней свободы (газ), то ситуация кажется несколько проще: систему в принципе можно описывать и динамически, однако движение столь сложно, что эта задача становится нереальной, и дальнейшая проблема сводится фактически к выбору подходящей гипотезы (например, эргодической), позволяющей перейти к усредненному описанию. Но каким образом появляется стохастичность в системах с небольшим числом степеней свободы?

Дело в неустойчивости всех или почти всех решений системы! Наиболее четко эту мысль выразили Крылов¹¹, а затем Макс Борн¹² в связи с проблемами обоснования статистической физики и предсказуемости в классической механике. В частности, данное Борном физически осмысленное понятие детерминированности заключается в том, что каждое состояние из-за флуктуаций определяется хотя и с малой, но всегда с конечной точностью ϵ , потому оно задается не числом, а некоторым вероятностным распределением, и задача механики состоит в предска-

зании распределения в момент t на основе известного начального распределения. Если данное решение устойчиво, т. е. начальные возмущения не нарастают, то более позднее состояние предсказуемо и теория может называться детерминистической¹². Борн подчеркивает, что данное определение детерминированности отличается от традиционного изменением последовательности предельных переходов при $\varepsilon \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$. Обычно сначала область начального рассеяния стягивается в точку, а затем смотрится поведение при $t \rightarrow \infty$ (и, конечно, получается полная предсказуемость). Этот путь, однако, является нефизичным и его следует заменить правилом: сначала при заданном ε определить поведение траекторий и область конечного рассеяния при любом t , а затем стремить начальное рассеяние к точке и определить, как ведет себя конечное рассеяние при $t \rightarrow \infty$. Если конечное рассеяние траекторий при $\varepsilon \rightarrow 0$ к нулю не стремится, то поведение системы «непредвычислимо». По существу, именно эти представления легли в основу и чисто математического признака *непредсказуемости* и *стохастичности* системы — положительности топологической энтропии²³ (см. ниже).

То, что неустойчивость всех или почти всех траекторий может привести к стохастичности, кажется естественным для систем, сохраняющих фазовый объем. Действительно, если сколь угодно малые изменения начальных условий приводят к сколь угодно сильному расхождению исходной и возмущенной траекторий, то при конечности фазового пространства (она может быть связана, например, с конечностью энергии), несжимаемая фазовая жидкость должна перемешиваться — траекториям некуда деваться и они начинают запутываться. Более подробно с физическими аспектами проблемы возникновения стохастичности в консервативных системах можно познакомиться по книге Заславского¹³ и обзору Заславского и Чирикова¹⁴ *).

Для автоколебательных систем (у них фазовый объем не сохраняется) запутывание траекторий в пространстве казалось если не невозможным, то по крайней мере совершенно экзотическим явлением. Причиной этому, по-видимому, служит опыт систем с двумерным фазовым пространством, где, действительно, ничего, кроме простых аттракторов — состояний равновесия и предельных циклов, — быть не может. Появилась даже гипотеза, что только такого рода системы, имеющие конечное число предельных циклов и состояний равновесия (математики их называют системами типа Морса — Смейла¹⁹⁻²¹), представляют реальный интерес и в случае, когда фазовое пространство имеет размерность > 2 . Такие системы, независимо от размерности, действительно являются грубыми²¹, т. е. качественная топологическая структура их фазового пространства не меняется при малом изменении параметров системы². Однако, как оказалось, системы Морса — Смейла с размерностью фазового пространства ≥ 3 уже не являются типичными^{20,21}. Это означает, что в пространстве параметров (пространстве систем) они уже не занимают всего пространства, оставляя для сложностей лишь бифуркационные значения параметров — границы между областями с различным простым поведением. Более того, было доказано, что в пространстве параметров уже трехмерных фазовых потоков существуют целые области, заполненные системами со сложными аттракторами и нетривиальной динамикой. Таким образом, было доказано, что сложное движение автоколебательной системы может сохраниться при изменении ее параметров, т. е. это не экзотика и не патология

*) Математическая теория подобных схем развивалась в работах Хопфа¹⁵, Аносова^{16,17}, Арнольда⁷, Синая¹⁸ и Мозера²². Добавим, что под консервативными понимаются системы с сохранением фазового объема.

(хотя сами аттракторы внутри себя могут быть и не грубыми — их сложная структура будет меняться при слабом изменении параметров).

В отличие от стохастичности в консервативных системах, в фазовом пространстве которых области стохастического поведения траекторий могут быть расположены в непосредственном контакте с областями динамического поведения — «островки динамики в море стохастичности»,²⁵ — «стохастичность автоколебательных систем *притягивающая* (attractive).

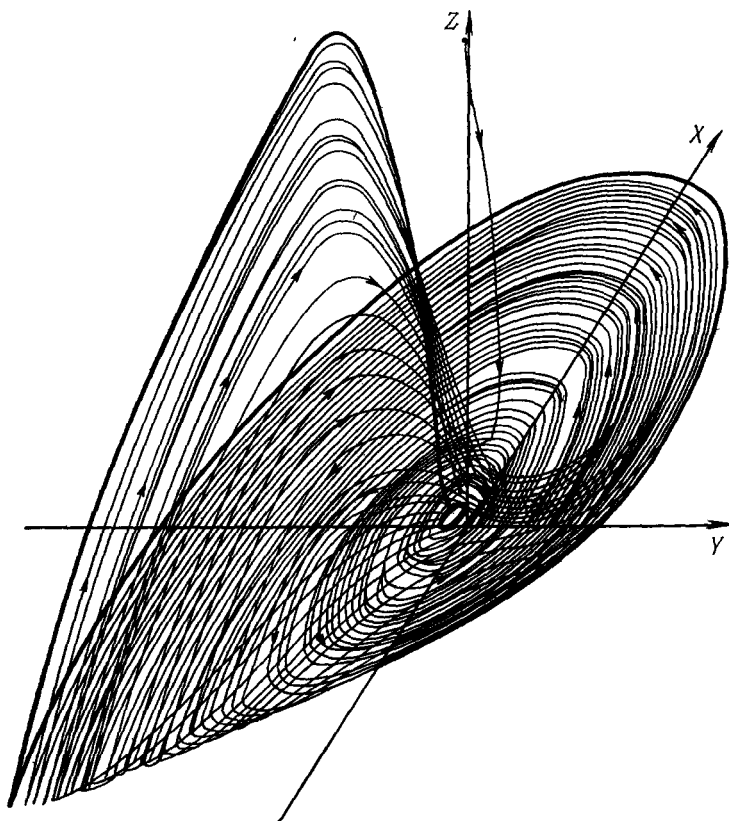


Рис. 1. Пример «простого» странного аттрактора (в системе $\dot{x} = z + y + 0,2x$, $\dot{y} = -x + 0,2y$, $\dot{z} = -2z(x + 3) + 1$).

Это означает, в частности, что хаотическому поведению может предшествовать длительный динамический переходный процесс. Сжатие же фазового объема приводит к тому, что размерность аттрактора, на который выходят траектории при $t \rightarrow \infty$, меньше размерности фазового пространства.

Для того чтобы в фазовом пространстве системы возник странный аттрактор, необходимо выполнение по крайней мере двух условий: а) все траектории из окрестности некоторой области должны в эту область входить и б) внутри этой области почти все соседние траектории должны разбегаться. Казалось бы, эти условия несовместимы. Действительно, в системах с двумерным фазовым пространством такое невозможно — чтобы неустойчивые траектории не вышли из ограниченной области на фазовой плоскости, им бы пришлось «налезать» друг на друга. Однако уже в трехмерном фазовом пространстве подобное поведение траекторий

реально: разбегаться они могут по двумерной поверхности, а возвращаться — выйдя в пространство. Траектория при этом может выглядеть, например, как раскручивающаяся плоская спираль, хвост которой, загибаясь к ее началу, вновь раскручивается (см. рис. 1, а также ⁹¹). Располагаясь таким образом, траектория заполняет аттрактор, нигде не замыкаясь. Покажем на простом примере, что система на подобном аттракторе ведет себя стохастически. При этом будем опираться на строгие математические результаты.

а) Стохастический автогенератор ²⁷

Рассмотрим автогенератор, схема которого приведена на рис. 2. Он описывается системой уравнений

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= y - \delta z, \\ \dot{y} &= -x + 2\gamma y + \alpha z + \beta, \\ \dot{\mu} z &= x - f(z), \\ x &= \frac{I}{I_0} - 1, \quad y = I_0^{-1} \left[(u_0 - u) \sqrt{\frac{c}{L}} + \dot{I} \right], \\ z &= \frac{u}{u_0} - 1, \quad \tau = t(LC)^{-1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

где $\delta = (u_0/I_0) \sqrt{c/L}$, $\gamma = (gL - rc)/2 \sqrt{LC}$, $\beta = g(u_0/I_0) - 1$, $\alpha = 1 + \beta - 2\gamma\delta$, $\mu = \delta c_1/c$, $f(z)$ — идеализированная характеристика

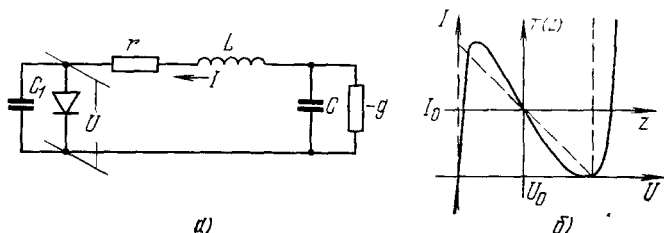


Рис. 2. а) Схема автогенератора; б) реальная и идеализированная (штриховая кривая) характеристики туннельного диода.

туннельного диода (см. рис. 2, б). Когда параметр μ при производной \dot{z} мал, все движения в фазовом пространстве этой системы разделяются на медленные, которым соответствуют траектории, лежащие на поверхности $x = f(z)$, и быстрые, — прямые $x = \text{const}$, $y = \text{const}$. В широкой области параметров α , β , γ , δ в системе имеются три состояния равновесия — одно в начале координат и два, расположенные симметрично на поверхности медленных движений, причем все три неустойчивы (рис. 3). Если раскручивание траекторий вблизи неустойчивых фокусов A и A' не слишком сильное, то изображающая точка не может покинуть область, внутри которой содержатся все три состояния равновесия: раскручиваясь от точки A и дойдя до линии изгиба поверхности медленных движений $x = \pm 1$, изображающая точка переходит в окрестность симметричного состояния равновесия A' , выходящее из которого траектории возвращают ее вновь в окрестность A и т. д. Обратим внимание на одно важное обстоятельство — две сколь угодно близкие траектории вблизи границы срыва с поверхности медленных движений ведут себя совершенно различно. Те из них, которые лежат внутри траектории, касательной

к прямой $|x| = 1$, остаются на поверхности медленных движений и совершают еще один виток. Сколь угодно близкие к ним, но лежащие снаружи этой касательной траектории, падают вниз (или взлетают вверх), переходя в окрестность симметричного состояния равновесия. Таким образом, будущее траектории зависит от тонких деталей ее прошлого.

Для строгого доказательства стохастичности в системе (1.1) положим $\mu = 0$.

Под строгим доказательством здесь понимается следующее. Если, например, удастся показать, что выдаваемая генератором в дискретные моменты времени последовательность напряжений будет в каком-либо смысле близка к последовательности независимых случайных величин, то задача решена.

Заметим, что близость решения системы к последовательности независимых случайных величин, в частности, цепи Маркова, является,

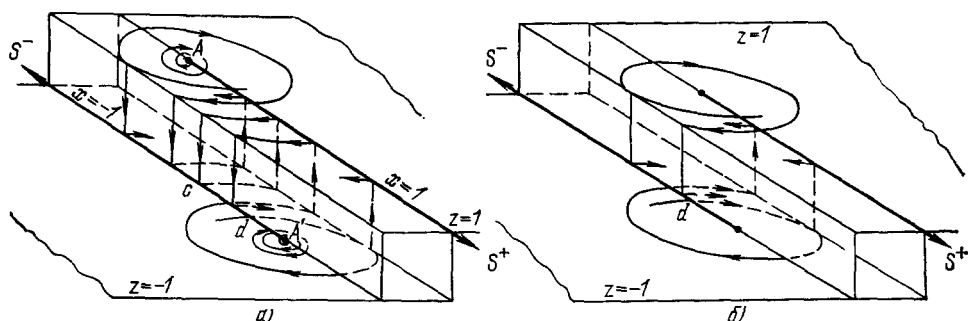


Рис. 3. Фазовое пространство системы (1.1) при $\beta = 0$, $\mu = 0$.

а) Два симметрично расположенных аттрактора, разделенных неустойчивым предельным циклом;
б) единый аттрактор.

по-видимому, свойством наиболее сильной стохастичности динамической системы. Мы еще будем пользоваться и более слабым свойством стохастичности — положительностью топологической энтропии, а также более других употребительным — спаданием автокорреляционной функции. Добавим, что если автокорреляционная функция спадает экспоненциально, то говорят, что в системе есть перемешивание. Перемешивание же заведомо свидетельствует о стохастичности динамической системы²⁴.

Для оценки поведения траекторий в фазовом пространстве часто удобнее рассматривать не сами траектории, а задаваемое ими отображение точек *секущей поверхности* Σ в себя. При этом каждой точке ставится в соответствие следующая, в которой данная траектория вновь пересекает Σ . Такое отображение, называемое *отображением последования* (или отображением Пуанкаре), можно записать как $S_k = F\{S_{k-1}\}$, где S_{k-1} и S_k — координаты предыдущей и последующей точек отображения. Траектория, таким образом, наблюдается только в дискретные моменты времени — когда она пересекает поверхность Σ . Размерность пространства отображений на единицу меньше, чем исходного пространства, что вместе с дискретностью времени является преимуществом отображений. Предельному циклу в отображениях соответствует состояние равновесия, а странный аттрактор на секущей должен проявляться как сложное множество точек.

Вернемся к примеру. При $\mu = 0$ трехмерное фазовое пространство вырождается в две перекрывающиеся в полосе $-1 < x < +1$ полуплоскости, на границах которых происходит переход изображающей точки с одной полуплоскости на другую. Поведение траекторий в этом случае

однозначно описывается отображением точек секущей $\Sigma = S^+ + S^-$ в себя (S^- — полупрямая $x = -1, z = -1, y > -\delta$, S^+ — полупрямая $x = 1, z = 1, y < \delta$). Поскольку на каждой полуплоскости движение описывается уравнением линейного осциллятора, нужное нам отображение легко находится в явном виде. Оно будет разрывным — траектории, начинающиеся и заканчивающиеся на Σ , делятся на две группы: 1) лежащие только на одной полуплоскости; для них формула отображения (считаем $\beta = 0$)

$$S_k = T_1 S_{k-1} = e^{2\pi\kappa} S_{k-1}, \quad (1.2)$$

и 2) переходящие на другую полуплоскость; для них связь

$$S_k = T_2 S_{k-1} \quad (1.3)$$

задается параметрически:

$$S_{k-1} = \frac{\omega e^{-\kappa\tau}}{\sin \tau}, \quad S_k = 2\delta - \frac{\cos \tau + \kappa \sin \tau}{\sin \tau} \quad (1.4)$$

($\omega = \sqrt{1 - \gamma^2}$, $\kappa = \gamma/a$, τ — параметр), S_k и S_{k-1} в этом случае лежат на разных полуплоскостях. Получившийся разрыв отражает ту резкую зависимость от предыстории траекторий, о которой мы говорили выше.

Однако для существования стохастичности, как мы увидим, разрыв в отображении не является обязательным, нужно другое — отображение должно быть растягивающим, т. е. нужно, чтобы сколь угодно малая полоска на Σ через достаточно большое время (многократное применение

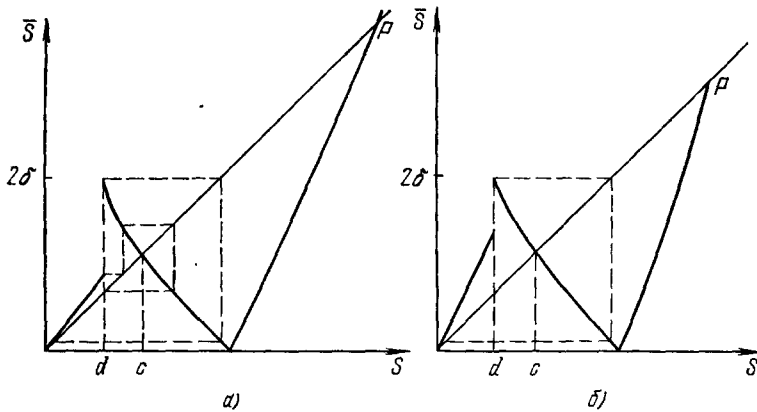


Рис. 4. Отображение последования для системы (1.2)

отображения) размазывалась на весь рассматриваемый отрезок Σ ¹³. Свойство растяжения отображения, очевидно, связано с неустойчивостью траекторий в фазовом пространстве.

Легко видеть, что отображение (1.2) — (1.4) является растягивающим. Оно изображено на рис. 4 в двух качественно различных случаях: $c > T_1 d$ (a) и $c < T_1 d$ (б), где $d = (T_2)^{-1} 2\delta$, $c = T_2 c$. И в том и в другом случаях все траектории, лежащие внутри области, ограниченной неустойчивой неподвижной точкой P (в фазовом пространстве ей соответствует неустойчивый предельный цикл) втягиваются в аттрактор, обозначенный на рис. 4 пунктиром. В случае a) имеются два симметричных аттрактора, разделенных неустойчивым предельным циклом (точка c), а в случае б) имеем один аттрактор, внутри которого находится точка c. Из (1.2), (1.4) следует, что $|dS_k/dS_{k-1}| > 1$, поэтому в аттракторе отсутствуют устойчивые периодические движения. Однако имеется счетное множество неустойчивых, между которыми бродит изображающая точка. Отобра-

жение, действующее внутри аттрактора, — это хорошо известное в теории динамических систем растягивающее отображение отрезка в себя. Оно допускает полное статистическое описание, опирающееся на существование (у всех отображений подобного типа; см. ²⁸) естественного инвариантного распределения — вероятностной меры, по отношению к которой система эргодична *).

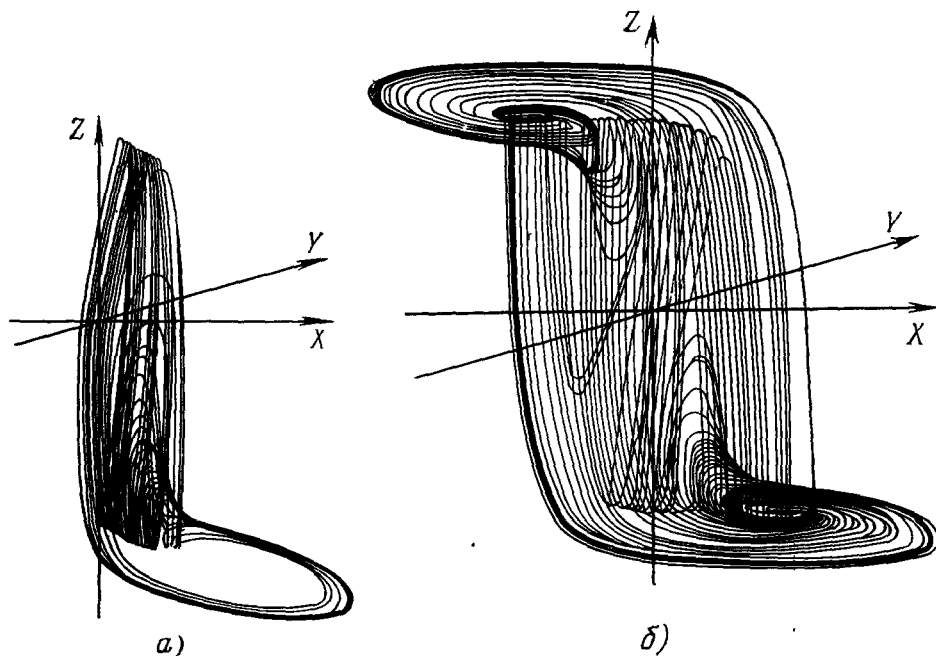


Рис. 5. Фазовые портреты аттракторов, полученные при аналоговом моделировании системы (1.2) в случае $\mu = 0,1$, $\beta = 0$ ($f(z) = z^2 - z$).

а) $\delta = 0,43$, $\alpha = -0,013$, $\gamma = 0,3$ — присутствуют два аттрактора (для ясности изображен лишь один из них), б) $\delta = 0,88$, $\alpha = -0,33$, $\gamma = 0,35$ — единственный аттрактор.

Получить строгие результаты для системы (1.1) при $\mu \neq 0$ пока не удалось. Однако машинные эксперименты показывают, что при малом μ стохастичность в системе сохраняется (см. рис. 5, где показан фазовый портрет странного аттрактора (1.1) при $\mu = 0,1$, построенный при аналоговом моделировании этой системы) **).

б) Символическая динамика

Покажем, что движение динамической системы, описываемое растягивающим отображением отрезка в себя, действительно может быть представлено как случайная последовательность. Для удобства будем говорить не об отображении (на рис. 4), а об аналогичном ему симметричном отображении (рис. 6).

Воспользуемся идущими от Адамара, Биркгофа и Морса методами символической динамики (см. ^{22, 23}). Их основная идея заключается в кодировке траекторий системы последовательностью символов. Пусть фазовое пространство разбито на конечное число областей $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{m-1}$ и «физический прибор» показывает нам только, в какой из этих областей в данный момент находится изображающая точка. Тогда

*) В данном случае эргодичность означает, в частности, что траектории почти всех точек воспроизводят весь аттрактор. Перемешивания при этом, однако, может и не быть (см. ниже).

**) Само обнаружение странного аттрактора в аналоговом эксперименте свидетельствует о том, что факт его существования не зависит от малого изменения параметров системы.

каждой точке отвечает последовательность областей, через которые проходит ее траектория в последующие моменты времени. Если каждой области поставить в соответствие «букву», обозначающую ее номер, то каждая точка изобразится «словом» — последовательностью этих символов. Если i -я буква равна S , то это значит, что в момент времени i точка попадает в Δ_S ; при этом i может меняться либо от $-\infty$ до ∞ , либо от 0 до $+\infty$.

Если движение периодическое, чередование букв в слове тоже будет периодическим, если стохастическое, то последовательность символов должна быть случайной.

Для рассматриваемого нами растягивающего отображения единичного отрезка в себя областей Δ_i можно выбрать всего две: обозначим через Δ_0 и Δ_1 интервалы $0 \leq x \leq 1/2$ и $1/2 < x < 1$ (см. рис. 6). Теперь заметим, что если координату точки разложить в двоичную дробь, то это отображение можно записать аналитически

$$x_k = \{2x_{k-1}\}, \quad (1.5)$$

где $\{\dots\}$ означает дробную часть числа, заданную в виде последовательности нулей и единиц. Например, на последовательность 0,1001011... это отображение действует просто как сдвиг (сдвиг Бернулли) и переводит ее в 0,001011... То, что последовательность получается бесконечной только в одну сторону и сдвиг, следовательно, односторонний, связано с необратимостью преобразования (отображения). Его обратимым обобщением является двумерное преобразование пекаря, напоминающее процесс раскатывания теста: квадратный лист раскатывается по одной из координат и складывается, затем снова раскатывается и т. д.

Если координата x — число рациональное, то начиная с некоторого символа (например, n -го) последовательность нулей и единиц будет повторяться — это n -кратная периодическая точка отображения. Нетрудно проверить, что число периодических точек у нашего отображения бесконечно, они всюду плотны и все неустойчивы. Здесь вскрываются свойства, типичные для странных аттракторов вообще: внутри ограниченной области, откуда траектории не выходят, имеется счетное множество неустойчивых циклов (и ни одного устойчивого), отображающих изображающую точку друг другу.

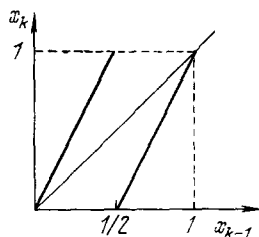


Рис. 6. Негладкое отображение отрезка, демонстрирующее стохастическое поведение.

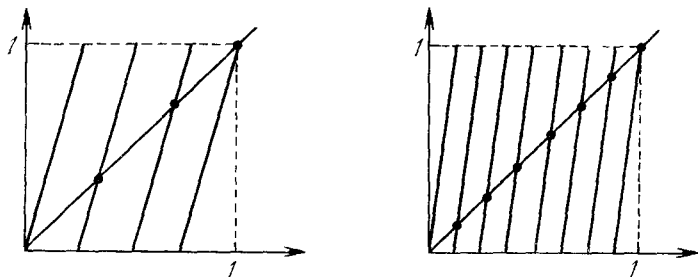


Рис. 7. Результат двух- и четырехкратного применения преобразования рис. 6. Видно, что число периодических точек растет с увеличением кратности.

Убедиться, что растягивающее отображение отрезка в себя имеет счетное множество неустойчивых периодических точек, проще всего, построив последовательные итерации этого отображения (рис. 7) — при двукратном применении отображения периодических точек будет уже четыре, при трехкратном — шесть и т. д. По этому поводу имеются строгие математические теоремы²⁹⁻³¹, из которых, в частности, следует, что если любое непрерывное (в том числе и не гладкое) растягивающее отображение отрезка в себя имеет цикл периода три, то оно имеет цикл с любым периодом *). Как известно, задаваемые (1.5) последовательности нулей и единиц будут периодическими лишь для счетного множества рациональных чисел, а для почти всех иррациональных, т. е. большинства точек отрезка $(0, 1)$, эта последовательность будет случайной в том же смысле, что и последовательность гербов и решеток в классическом вероятностном эксперименте с подбрасыванием монеты⁵⁸.

Таким образом, движения динамической системы, описываемые отображением типа рис. 4 и 6 (например, колебания в генераторе рис. 2 при $\mu = 0$), действительно сводятся к случайной последовательности, т. е. являются стохастическими.

*) Ли и Йорк в связи с этим назвали свою работу «Период три рождает хаос»³⁰.

Ясно, что при построении символической динамики статистические свойства получаемой последовательности зависят от выбора областей Δ_i , покрывающих фазовое пространство. В этом смысле даваемое ею статистическое описание неоднозначно. Существуют, однако, признаки стохастичности динамической системы, не зависящие от покрытия Δ_i . Один из них — это топологическая энтропия.

в) Энтропия динамических систем

Допустим, что система с непрерывным временем наблюдается прибором (осциллографом) с ограниченной разрешающей способностью ε (конечный размер пятна на экране). При этом за время T нельзя различить траектории $x_1(t)$ и $x_2(t)$, расстояние между которыми остается меньше ε . Обозначим через $M(\varepsilon, T)$ максимально возможное число различных траекторий, т. е. таких, расстояние между которыми больше ε . Тогда топологическая энтропия динамической системы, описываемой дифференциальными уравнениями, есть

$$h_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\log M(\varepsilon, T)}{T}. \quad (1.6)$$

Индекс 1 означает, что h_1 — это энтропия на единицу времени; для произвольного момента $h_t = |t| h_1$.

Из этого определения, в частности, сразу следует, что если траектории потока *устойчивы по Ляпунову* (т. е. близкие вначале точки не расходятся далеко), то энтропия равна нулю — $M(\varepsilon, T)$ в этом случае не растет с ростом T .

Если для системы $h > 0$, то с какой точностью и как долго мы ни «зажи-мали» бы траекторию постоянным наблюдением за ней, она тем не менее через единицу времени может дать a^h различных продолжений (a — основание логарифма в (1.6)), т. е. будет непредсказуема. Квазипериодическое движение, соответствующее незамкнутой обмотке тора (для него $h = 0$), нельзя поэтому считать стохастическим (хотя оно и эргодично).

Подчеркнем, что в (1.6) стоит предел при $\varepsilon \rightarrow 0$. Это означает сохранение конечной непредсказуемости при сколь угодно высокой (но конечной) точности наблюдения. И только при бесконечной точности наблюдения ($\varepsilon = 0$ система с $h > 0$ будет вести себя как детерминированная *). Поскольку точность наблюдения принципиально не может быть сделана бесконечной (хотя бы потому, что для этого требуется бесконечная энергия³⁴), естественно поведение динамических систем с $h > 0$ называть стохастическим.

Таким образом, формально, стохастический фазовый поток отличается от предсказуемого тем, что его топологическая энтропия > 0 , а непредсказуемость при увеличении ε от $\varepsilon = 0$ скачком принимает конечное значение > 0 . В детерминированном же случае непредсказуемость растет «мягким» образом, увеличиваясь от нуля вместе с неточностью наблюдения.

Заметим, что если в качестве признака стохастичности принять положительность топологической энтропии, то перемешивания в стохастической системе может и не быть. Отсутствие перемешивания, т. е. полного расщепления корреляций, означает лишь, что на стохастичность наложена динамическая составляющая.

Топологическая энтропия может быть введена и при символическом описании системы,

$$h = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log K_N}{N}; \quad (1.7)$$

*) По существу, это то самое «физически осмысленное» определение предсказуемости и непредсказуемости, которое дал Макс Борн¹² (см. выше).

здесь K_N характеризует разнообразие допустимых слов длины N . В случае упоминавшейся схемы Бернулли множество слов совпадает с множеством всех возможных бесконечных последовательностей из m символов, $K_N = m^N$ и, следовательно, $h = \log m$. Таким образом, растягивающее отображение отрезка рис. 6 имеет энтропию $= \log 2$.

С топологической энтропией тесно связана и введенная Колмогоровым (как обобщение работ Шеннона) энтропия динамических систем с инвариантной мерой (K -энтропия). Для широкого класса систем K -энтропия h_μ равна средней по данной мере μ скорости разбегания траекторий, более подробно см. ^{14, 23, 32, 33 *}).

г) Э ф ф е к т б а б о ч к и

Непредсказуемость поведения траекторий, выбранных заданием начальных условий со сколь угодно высокой, но конечной (!) точностью, очевидно, служит принципиальным препятствием на пути долгосрочных невероятностных прогнозов. Применительно к метеорологии Эдвард Лоренц назвал этот общий эффект непредсказуемости «баттерфляй-эффектом»: пусть атмосфера описывается динамической системой со странным аттрактором (например, аттрактором Лоренца), тогда даже незначительное изменение начальных условий, вызванное взмахами крылышек бабочки, приведет к катастрофическим для долгосрочного прогноза погоды последствиям. По этой же причине на ЭВМ можно получить лишь достаточно короткую реализацию траектории динамической системы, у которой топологическая энтропия больше нуля (конечно, можно заставить машину считать достаточно долго, но тогда траектория при больших t никак не будет связана с начальным участком — уменьшить энтропию с помощью ЭВМ нельзя!)

Расходимость близких траекторий является неременным условием стохастичности. Поэтому одномерное отображение должно быть растягивающим; и если мы хотим, чтобы траектории оставались в ограниченной области фазового пространства, мы должны, во-первых, ввести взаимную однозначность (благодаря чему можно организовать возвращение траекторий) и, во-вторых, — негладкость.

Если же мы возьмем неважнооднозначное, но гладкое отображение отрезка $0 \leq x \leq 1$, например,

$$x_{k+1} = ax_k(1 - x_k), \quad (1.8)$$

то в общем случае стохастичности не будет. Дело в том, что у таких отображений есть критическая точка, в которой $dx_{k+1}/dx_k = 0$, и поэтому могут появиться устойчивые периодические траектории. Неоднозначность может привести лишь к очень сложному переходному процессу (связанному с появлением счетного множества неустойчивых циклов при рождении точки периода ³²⁹⁻³¹). В таких системах странного аттрактора нет, но очень малые шумы могут привести к стохастичности, поскольку области притяжения устойчивых циклов малы и близко подходят друг к другу ^{**}).

*) Известно, что обычно динамическая система имеет много различных инвариантных мер. Какую из них выбрать? Ответ на это дает вариационный принцип — существует мера с максимальной K -энтропией, причем максимум как раз равен топологической энтропии. Ситуация здесь в некотором смысле аналогична обычной статистической механике, где максимальной энтропией обладает микроканоническое распределение. Поэтому меры, дающие максимальную K -энтропию, называют гиббсовскими ³³.

**) Для упоминавшегося отображения (1.8) истинная стохастичность доказана для $a = 4$; при этом топологическая энтропия равна $\log 2$.

д) Приложения к биологии

К исследованию отображений отрезка приводят многие проблемы из биологии, экологии и генетики³¹. Дискретизация времени в таких задачах может быть связана, в частности, с сезонностью или со сменой поколений.

Например, для насекомых численность популяций x_{t+1} в $(t+1)$ -м поколении связана с численностью x_t предыдущего поколения преобразованием $x_{t+1} = F(x_t)$ (в эпидемиологии x_t — часть населения, заболевшая за время t). И в экономике, и в экологии, и в биологии существует тенденция к увеличению x , если предыдущее поколение (объем производства в экономике) мал, и к уменьшению, если оно велико. Тогда $F(x)$ осуществляет гладкое однозначное отображение описанного выше типа. Интересно, что естественные популяции обладают такими механизмами, которые способны сохранить устойчивый равновесный режим (к этому приводит, например, высокая смертность). Лабораторные популяции, где эти факторы нарушены, могут эволюционизировать по колебательному закону или хаотически³¹.

е) Странные аттракторы и гиперболичность

Из проведенного выше обсуждения и примеров может сложиться впечатление, что для стохастичности динамической системы, описываемой отображением, необходимы его разрывность и невязная однозначность. Это не так. Уже упоминался пример приводящего к стохастичности взаимно однозначного отображения — преобразование пекаря. Преобразование пекаря, правда, разрывно, но совсем недавно появились

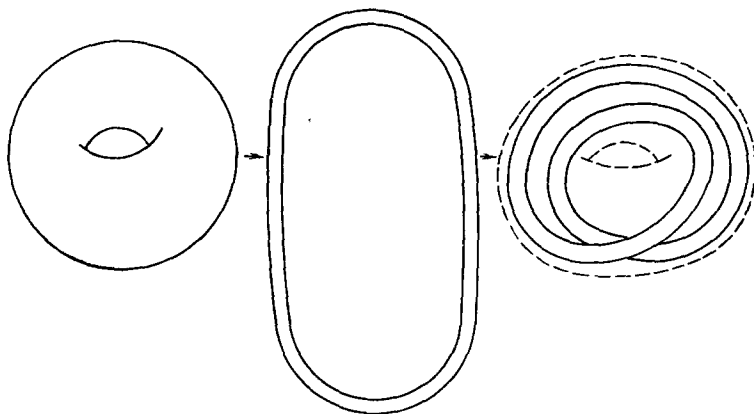


Рис. 8. Преобразование Смейла—Ван-Дандига.

Бублик сначала вытягивается вдвое, а затем вкладывается обратно в исходный.

примеры гладких плоских отображений со странными аттракторами^{37, 98, 107}. Поскольку эти отображения двумерны, есть все основания считать, что притягивающие области со стохастическим поведением могут быть в гладких динамических системах — дифференциальных уравнениях — уже с трехмерным фазовым пространством (дополнительная, по сравнению с отображениями, размерность требуется для движения по траектории).

Приведем наглядный пример странного аттрактора (в построенном Смейлом гладком отображении, совпадающем с известным соленоидом Ван-Хандига³⁶ см. 19, 20, 36). Это отображение внутренности бублика в себя — бублик растягивается вдвое и укладывается обратно в исходный (рис. 8). Действие рассматриваемого отображения вдоль азимута эквивалентно растяжению отрезка вдвое (см. рис. 6), два других измерения требуются, чтобы траектории не пересекались при помещении растянутого бублика внутрь исходного. Результат последовательного применения отображения показан на рис. 9, где изображено поперечное сечение внутренности тора. Число

пересечений образа бублика с этим сечением при каждом шаге удваивается, и в пределе сечение аттрактора Смейла-Ван-Данцига представляет собой *канторово множество* *).

В качестве критерия, позволяющего определить существование в динамической системе странного аттрактора, во многих случаях может быть использовано свойство гиперболичности. Грубо гиперболичность можно определить как комбинацию растяжения отображаемого объема в одном направлении и сжатия в другом. Растяжение, как мы видели, приводит к стохастичности, сжатие же необходимо, чтобы траектории оставались в ограниченной области фазового пространства. Более строго гиперболичность означает, что через каждую траекторию $x(t)$ проходят две поверхности, W_x^u и W_x^s ; точки, лежащие на W_x^s , экспоненциально приближаются к $x(t)$ при $t \rightarrow \infty$, а точки на W_x^u — при $t \rightarrow -\infty$. Поверхности W_x^s и W_x^u называют соответственно устойчивым и неустойчивым многообразиями траектории $x(t)$. Для гиперболичности эти

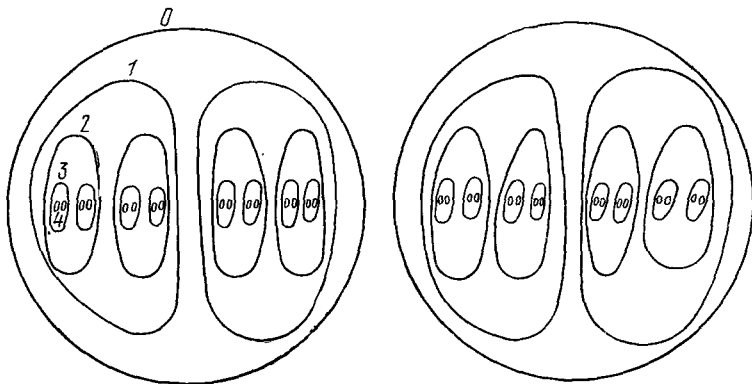


Рис. 9. Сечение аттрактора Смейла—Ван-Данцига после нескольких итераций — оно дает некоторое представление о канторовом множестве.

поверхности должны непрерывно зависеть от траекторий. Легко заметить, что гиперболичность — это перенесение на траекторию свойств седлового состояния равновесия, для которого W^u и W^s — сепаратрисы. Для обсуждавшегося аттрактора Смейла-Ван-Данцига W^u — это линия вдоль азимута, а W^s — перпендикулярная к ней поверхность.

Если свойство гиперболичности дополнить еще одним условием, то получается аксиома А. Смейла: 1) множество Ω неблуждающих точек гиперболично **) и 2) периодические точки всюду плотны в Ω . Аксиома А могла бы быть хорошим критерием стохастичности системы. Системы, удовлетворяющие этой аксиоме, удастся исследовать достаточно полно. В частности, в непрерывных динамических системах с аксиомой А могут быть только три типа аттракторов: 1) состояния равновесия, 2) предельные циклы, 3) множества, топологическая энтропия которых больше нуля, — странные аттракторы. Для аттракторов с аксиомой А существует много различных инвариантных мер и для их описания могут быть применены методы статистической механики ²⁴.

Для доказательства странности аттрактора в системах с аксиомой А, таким образом, достаточно убедиться, что он не состояние равновесия и не предельный цикл.

К сожалению, однако, аксиома А очень трудно проверяема и, кроме того, ее требования несколько завышены. Она, например, не выполняется для популярного аттрактора Лоренца (см. ниже). Поэтому в последнее время появились попытки в качестве критерия стохастичности использовать более мягкие и легко проверяемые свойства ^{13, 24}. Все они, однако, в той или иной степени аналогичны гиперболичности.

*) «Классическое» канторово множество получается так: берется отрезок и из него вынимается средняя треть. Из каждого оставшегося «отрезочка» снова вынимается средняя треть и т. д. То, что остается после бесконечного числа вырезаний, и есть канторово множество. Оно имеет лебегову меру нуль, так как сумма длин вырезанных кусков равна длине исходного отрезка: $1/3 + 2/9 + 4/27 + \dots = 1$. Канторово множество нигде не плотно, но его нельзя представить как набор изолированных точек — оно имеет мощность континуума.

**) Точка называется неблуждающей, если любая ее окрестность пересекается траекторией, начинающейся в этой точке, по крайней мере дважды, а следовательно, и бесконечное число раз. Неблуждающие точки соответствуют установившемуся режиму, а блуждающие — переходному процессу.

2. ФИЗИЧЕСКИЕ МЕХАНИЗМЫ, ПРИВОДЯЩИЕ К СТРАННЫМ АТТРАКТОРАМ

а) Разрушение многопериодических движений — конкуренция, синхронизация, хаос

Какие физические механизмы мешают существованию многопериодических движений в автоколебательных системах? Для ответа на этот вопрос рассмотрим поведение ансамбля квазигармонических автогенераторов со слабой связью:

$$\begin{aligned}\dot{A}_i &= \gamma_i A_i (A_{i0}^2 - A_i^2) + \alpha_i (A_{j,i}, \varphi_{j,i}), \\ \dot{\varphi}_i &= \omega_i + \beta_i (A_{j,i}, \varphi_{j,i}) \quad i = 1, 2, \dots, N;\end{aligned}\tag{2.1}$$

здесь добавки $\alpha(A, \varphi)$, $\beta(A, \varphi)$ отражают взаимодействие колебаний (мод). При $\alpha = \beta = 0$ все колебания независимы, и фазовое пространство системы (2.1) распадается на N фазовых плоскостей, на каждой из которых имеется единственный устойчивый предельный цикл с периодом $2\pi/\omega_i$ и амплитудой A_{i0} . В исходном $2N$ -мерном пространстве таким независимым колебаниям соответствует притяжение изображающей точки к N -мерному тору — произведению независимых циклов. Если все ω_i несоизмеримы, то фазовые траектории на торе представляют собой плотную, нигде не замыкающуюся обмотку — квазипериодическое движение. Такой аттрактор эргодичен, однако стохастичности в системе нет, поскольку нет разбегания близких траекторий.

Когда же между автогенераторами (или автоколебательными модами) появляется связь, то такое простое квазипериодическое движение, вообще говоря, должно разрушаться. В зависимости от вида и величины связи и близости частот взаимодействующих мод к кратным в системе при $t \rightarrow \infty$ может установиться либо периодический, либо стохастический режим (соответственно в фазовом пространстве предельный цикл, либо странный аттрактор). Однако хорошо известно, что эффекты, приводящие к установлению в системе взаимодействующих автоколебательных мод периодического движения, например, такие как конкуренция и взаимная синхронизация, проявляются лишь в тех случаях, когда взаимодействие между модами не слишком малое. То же самое должно относиться и к эффекту «взаимной стохастизации» мод — режим устойчивого хаоса при уменьшении взаимодействия и конечной расстройке, по-видимому, должен сменяться квазипериодическим режимом. Это означает, что модель возникновения турбулентности Ландау — Хопфа может, по-видимому, реализоваться в тех случаях, когда амплитуды последовательно возникающих разномасштабных пульсаций ограничиваются за счет диссипативных эффектов на таком уровне, что их взаимодействие с возникшими ранее оказывается несущественным.

Самые простые — одномодовые автоколебания устанавливаются в многомодовой системе в результате действия эффекта конкуренции, который связан с появлением на каждой или некоторых модах нелинейного поглощения, прогрессирующего с ростом энергии «чужих» мод. Такая ситуация обычно возникает в тех случаях, когда все моды черпают энергию из одного источника. Функция связи при этом может зависеть только от энергии мод

$$\alpha_i = -A \sum_{j \neq i} \rho_{ij} A_j^2, \tag{2.2}$$

где $\rho_{ij} > 0$ — коэффициент связи. При $\rho_{ij} < \gamma_i$ связь слабая и возможна многочастотная генерация, как, например, в газовом лазере с неоднородно уширенной линией активного вещества — разные моды резонатора «питаются» за счет разных активных молекул. Если же, например, $\rho_{ij} > \gamma_i$ (сильная связь), то независимо от числа начально возбужденных мод устанавливается режим одномодовой генерации. Как правило, торжествует та мода, для которой линейный инкремент максимален. Таким образом, замечательное обстоятельство, что в неравновесной системе (среде) из начально генерируемого шума устанавливается простой динамический режим, в первую очередь связано с эффектом конкуренции.

К разрежению и упорядочению спектра колебаний приводит и эффект синхронизации. При синхронизации моды не подавляют друг друга, но взаимно сдвигают частоты так, что с учетом нелинейных поправок они либо совпадут, либо станут соизмеримыми — на торе вместо квазипериодической обмотки появляются предельные циклы. Взаимная синхронизация мод возможна как по частотам, так и по волновым числам. В последнем случае эффект синхронизации выглядит особенно нетривиально — именно пространственной синхронизацией мод объясняется возникновение сложных упорядоченных структур в неоднородных автоколебательных системах (в частности, шестигранных призматических ячеек Бенара при термоконвекции *)).

Наглядный пример синхронизации в ансамбле большого числа автогенераторов приведен на рис. 10. Здесь представлены результаты численного эксперимента с систе-

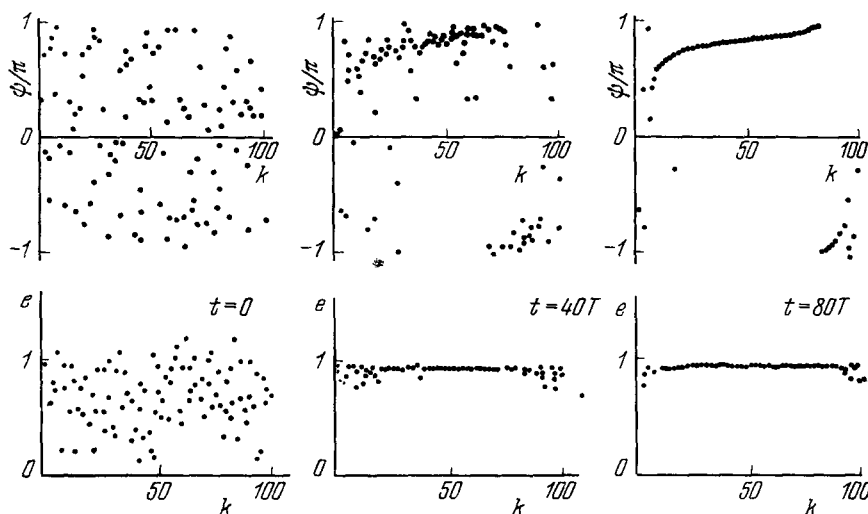


Рис. 10. Синхронизация ста связанных автогенераторов с лоренцовым распределением по частотам (ψ — полная фаза осциллятора, e — квадрат амплитуды).

мой (2.1) в случае линейной связи осцилляторов с близкими частотами при $\gamma_i = A_{i0} = 1$ ³⁹:

$$\alpha_n = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [A_k \cos(\varphi_k - \varphi_n) - A_n],$$

$$\beta_n = \frac{0,2}{N} \sum_{k=1}^N A_k \sin(\varphi_k - \varphi_n).$$
(2.3)

*) Обзор современных физических представлений о конвективной неустойчивости содержится в ¹⁰⁴.

Предполагалось, что функция распределения осцилляторов по частотам при отсутствии взаимодействия лоренцова:

$$f(\omega) = \frac{g}{\pi} [g^2 + (\omega - \omega_0)^2]^{-1}.$$

Видно, что если вначале амплитуды A_i и фазы $\psi_i = \varphi_i - \omega_0 t$ мод имели случайные значения, то уже по прошествии 80 периодов в результате синхронизации практически устанавливается одночастотный режим. Достаточно сильная связь генераторов может привести и к обратному синхронизации эффекту — хаотизации. Именно такое поведение демонстрируют два связанных автогенератора — при очень сильной связи в системе возможны стохастические автоколебания (в этом случае система переходит, например, в автогенератор со стохастическим поведением, исследованный в разделе 4).

Рассмотрим наиболее элементарные и часто встречающиеся физические механизмы, которые приводят к странным аттракторам. Если говорить о взаимодействии квазигармонических автогенераторов, то, как правило, для возникновения «маломодовой» стохастичности в диссипативных системах требуются два фактора — резонансная связь мод и мешающий взаимной синхронизации нелинейный дрейф фазы. Однако, в отличие от консервативных систем^{13,14}, хаос в автоколебательных системах может появиться и за счет чисто амплитудных механизмов^{43,86}. В частности, довольно типичным является возникновение стохастичности из-за диссипативной инерционности отдельных резонансно связанных мод. Обсуждение конкретных примеров проведем в порядке возрастания «сложности» характера связи мод. Самой простой, очевидно, является линейная связь мод с близкими частотами ω и $\omega + \Delta\omega$. На примере лазера, находящегося во внешнем периодическом поле, будет показано, что такая связь плюс инерционность среды действительно приводят к стохастичности. Затем будет рассмотрена связь мод на кратных частотах ω и 2ω и невырожденное трехмодовое взаимодействие типа

$$\omega_1 + \omega_2 = \omega_3 + \Delta\omega, \quad \mathbf{k}_1(\omega_1) + \mathbf{k}_2(\omega_2) = \mathbf{k}_3(\omega_3). \quad (2.4)$$

В заключение главы кратко обсуждаются механизмы волновой турбулентности.

б) Вынужденная синхронизация и стохастизация пульсаций в лазерах⁵⁵

Слабая линейная связь томпсоновских генераторов может привести лишь к их взаимной синхронизации⁶¹. В приближении же заданного поля одного из генераторов — это просто *захватывание частоты*². Вне полосы захватывания (синхронизации) может существовать только двухпериодический режим — биения. К стохастичности неавтономного генератора может привести, например, инерционность его нелинейной характеристики. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим простейшую модель синхронизации частоты оптического квантового генератора резонансным внешним полем.

Считая время релаксации поляризации T_2 малым по сравнению с временем релаксации поля T_c и разности населенностей T_1 , в приближении пространственно-однородного поля и одномодовой генерации можно записать для амплитуды поля ε на частоте внешней «силы» ω и разности населенностей N уравнения

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} + \left(\frac{1}{2T_c} + i\Delta\omega \right) \varepsilon &= \frac{\omega_1 d_{21}^2 T_2}{2\hbar} N \varepsilon + i \sqrt{\frac{2P_{\text{вх}}\omega}{Q_c \text{ вх}}}, \\ \dot{N} + \frac{N - N_0}{T_1} &= -\frac{d_{21}^2 T_2}{\hbar^2} N \varepsilon \varepsilon^*, \end{aligned} \quad (2.5)$$

здесь $\Delta\omega$ — расстройка частоты внешнего поля от частоты резонатора,

ω_{21} — частота перехода, $P_{вх}$ — мощность внешнего сигнала на частоте ω , $Q_{свх}$ — добротность связи внешнего поля с резонатором⁵⁶. В безразмерных переменных $X + iY = (d_{12} \sqrt{T_1 T_2 / \hbar}) \varepsilon$, $Z = \omega T_2 T_c d_{12}^2 N / \hbar$, $\tau = t / T$, $a = T_1 / 2 T_c$, $b = \Delta \omega T_1$, $H = (T_1 d \sqrt{T_1 T_2 / \hbar}) \sqrt{2 P_{вх} \omega / Q_{свх}}$ из (2.6) получается система, подобная (1.2):

$$\left. \begin{aligned} \dot{X} &= a(Z-1)X + bY, \\ \dot{Y} &= a(Z-1)Y - bX + H, \\ \dot{Z} &= Z_0 - Z(1 + X^2 + Y^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

В автономном режиме, т. е. когда $H = 0$, эта система при превышении накачки над порогом ($Z_0 > 1$) описывает, как нетрудно убедиться, генерацию регулярных затухающих пульсаций⁵⁶. При $H \neq 0$ в системе возможны три качественно различных режима: стационарная генерация (устойчивые нетривиальные состояния равновесия), периодические пульсации — пички (в фазовом пространстве (2.6) — предельные циклы) и хаотические пульсации (в фазовом пространстве — странный аттрактор).

Аналитически на плоскости параметров удается найти границу существования только простейшего из этих режимов — стационарной генерации. Нестационарные же режимы исследовались с помощью машинного

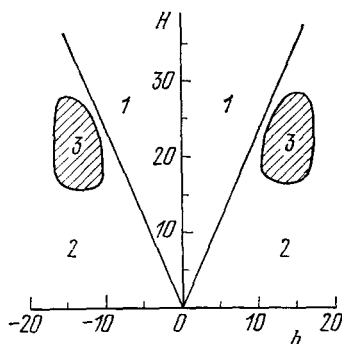


Рис. 11. Плоскость параметров «мощность внешнего поля — расстройка»,

Указаны области существования и устойчивости режима стационарной генерации (1), периодической модуляции (2) и хаотической модуляции (3) в системе (2.6).

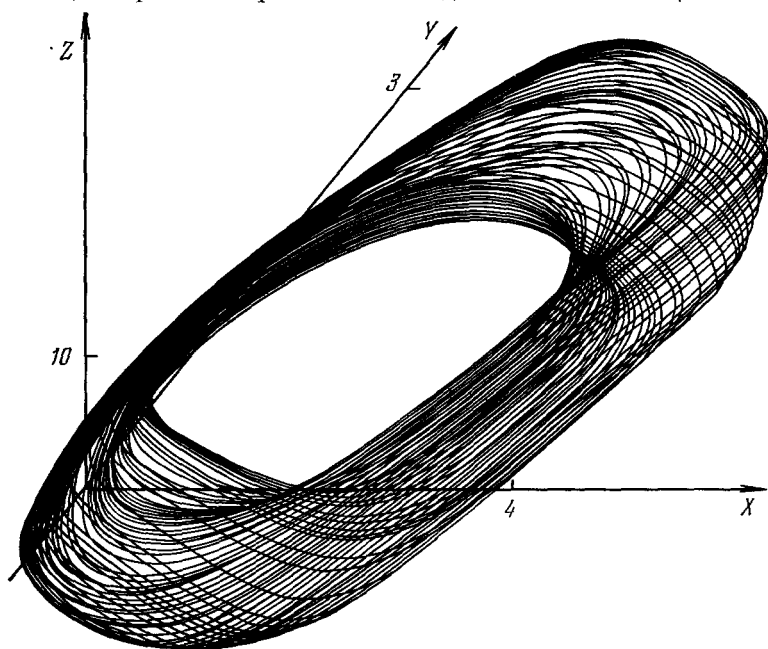


Рис. 12. Фазовый портрет аттрактора, соответствующего стохастизации лазера внешним полем.

$$a = 1000, \quad b = 40, \quad H = 85, \quad z_0 = 2.$$

эксперимента. Полученное разбиение плоскости параметров «мощность внешнего поля — расстройка» на области, где наблюдаются различные режимы, приведено на рис. 11.

Странные аттракторы, типичный фазовый портрет одного из которых дан на рис. 12, как видно, существуют лишь в области умеренных расстройек и внешних полей. При сильных полях инерционность разности населенностей не сказывается и устанавливается режим вынужденной синхронизации, как в обычном томпсоновском генераторе⁸³; при больших расстройках разность населенностей не успевает реагировать на изменение поля и наблюдается режим биений (пичков), существующий также и в обычном автогенераторе вне области захватывания. Там же, где характерные времена изменения поля и разности населенностей одного порядка, наблюдаются стохастические режимы. Параметры, при которых они существуют, довольно типичны и могут быть реализованы *) — $T_1/T_c \approx 2000$, $P_{вх} \lesssim 1$ *вт*, превышение над порогом менее.

в) Распадный механизм возникновения стохастичности⁴²

Рассмотрим эффект генерации второй гармоники в нелинейных средах. Если среда равновесна, то в процессе взаимодействия основная волна и гармоника периодически обмениваются энергией друг с другом, либо, при подходящих начальных условиях и полном синхронизме, энергия основной моды необратимо передается гармонике. В неравновесных средах взаимодействие волны и ее гармоники может быть очень разнообразным **). Ограничимся случаем, когда неравновесность среды сказывается только в появлении инкремента у гармоники, а основная волна в линейном приближении затухает. Характер нелинейной связи волн будем предполагать таким же, как в равновесной среде. Тогда для комплексных амплитуд $a_{1,2}(t)$ полей $e^{i(\omega_{1,2}t - \mathbf{k}_{1,2}\mathbf{r})}$ при выполнении условий синхронизма $\mathbf{k}_2 = 2\mathbf{k}_1$, $\omega_2 = 2\omega_1 - \delta_1$ ($\delta_1/\omega_1 \ll 1$) будем иметь

$$\begin{aligned}\dot{a}_1 &= i\sigma_1 a_2 a_1^* e^{i\delta_1 t} + i\alpha_1 a_1 (|a_1|^2 + \rho_1 |a_2|^2) - \nu a_1, \\ \dot{a}_2 &= i\sigma_2 a_1^2 e^{-i\delta_1 t} + i\alpha_2 a_2 (|a_2|^2 + \rho_2 |a_1|^2) + \gamma_2 a_2,\end{aligned}\quad (2.7)$$

где все коэффициенты действительны, а $\sigma_1 \sigma_2 > 0$. Кубические по амплитуде слагаемые описывают нелинейные сдвиги частот (нелинейную рассинхронизацию). Пусть, для простоты, волны взаимодействуют лишь резонансным образом, а самовоздействие заметно только на основной волне, т. е. $\alpha_2 = \rho_1 = 0$. В действительной форме при этом вместо (2.7) получается

$$\left. \begin{aligned}\dot{X} &= Z - 2Y^2 + (\delta - \alpha Z)Y + \gamma X, \\ \dot{Y} &= 2XY - (\delta - \alpha Z)X + \gamma Y, \\ \dot{Z} &= -2Z(X + 1);\end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

здесь $X = (\sigma_1/\nu) |a_2| \sin \psi$, $Y = (\sigma_1/\nu) |a_2| \cos \psi$, $Z = (\sigma_1 \sigma_2/\nu) |a_1|^2$, $\psi = \arg a_2 - 2 \arg a_1 - \delta$, $\gamma = \gamma_2/\nu$, $\delta = \delta_1/\nu$ характеризует линейную, а $\alpha = -(2\alpha_1/\sigma_1 \sigma_2) \nu$ — нелинейную расстройку от синхронизма. Стабилизация неустойчивой гармоники за счет передачи энергии вниз по спектру возможна лишь при $\gamma \leq 0,6$ и α или $\delta > 0$ ***). При больших расстройках — $\delta \gtrsim 2$, либо $\alpha \gtrsim 5$ — реализуется статический режим стабилизации. Ему соответствуют устойчивые состояния равновесия системы (2.8).

*) Они соответствуют твердотельным лазерам⁵⁶.

**) Упомянем, к примеру, одновременный рост гармоник, приводящий к их обращению в бесконечность за конечное время — взрывная неустойчивость^{38, 94}.

***) При $\delta = 0$ и $\alpha = 0$ стабилизация невозможна, даже если гармоника растет очень медленно, т. е. γ сколь угодно мало⁴¹.

При меньших расстройках все три состояния равновесия этой системы неустойчивы и возникает периодический режим или стохастичность⁴⁰. Поскольку при таком процессе средний поток энергии направлен вниз по спектру, механизм возникновения стохастичности в этом случае естественно назвать распадным.

На рис. 13 изображены типичные аттракторы системы (2.8), обнаруженные в численном эксперименте при $\gamma = 0,25$ и различных α и δ . Как видно, изменение α и δ

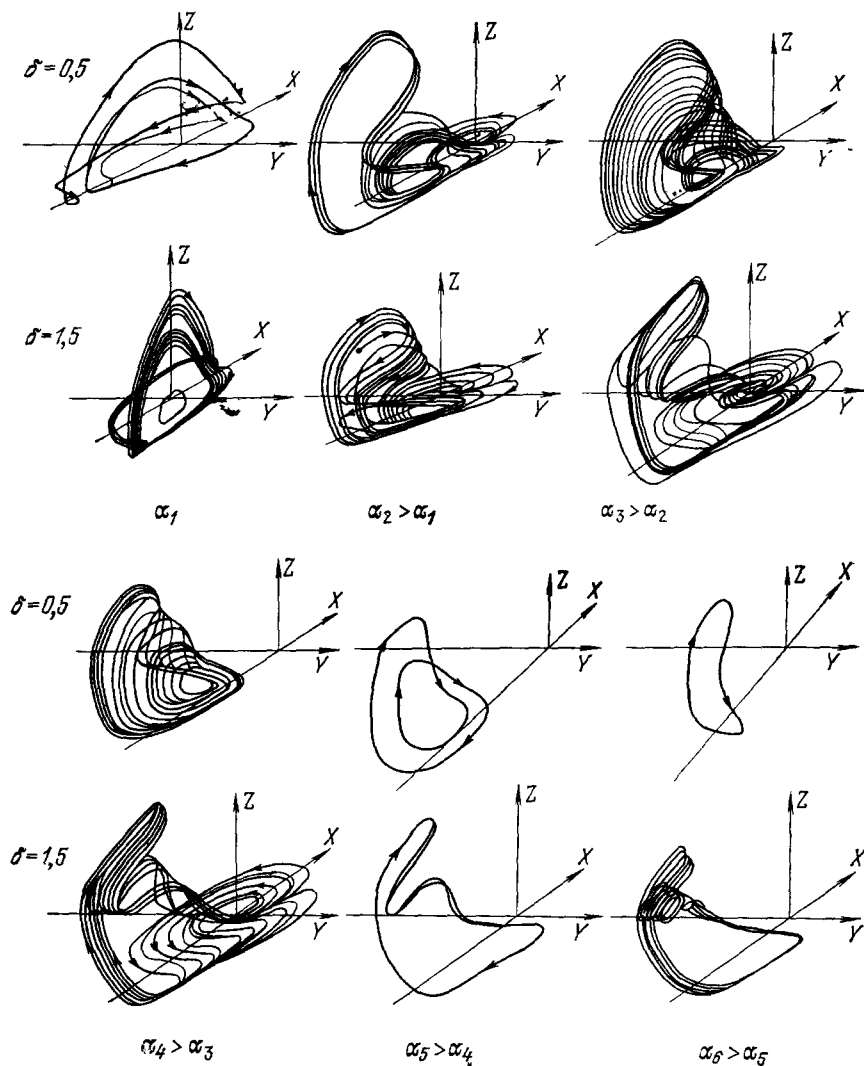


Рис. 13. Разнообразие режимов в системе (2.8).

Кажется, будто траектории лежат на поверхности; на самом деле в сечении — канторово множество.

сопровождается большим числом переходов между периодическими и стохастическими движениями. Например, при $\delta = 0,3$ и $\gamma = 0,2$ в интервале $0 \leq \alpha \leq 0,1$ реализуется статический режим стабилизации (состояние равновесия $O_1(-1, Y_1, Z_1)$, где $Y_1 \approx 1$ — устойчивый узел). С ростом α устанавливается режим периодического обмена энергией между модами — цикл (O_1 превращается в седло-фокус). Затем период движений удваивается и при дальнейшем увеличении α в динамической системе из двух резонансно связанных осцилляторов возникает стохастичность — странный аттрактор. Последующее увеличение α приводит к тому, что перечисленные переходы повторяются в обрат-

ном порядке, только устойчивым становится состояние равновесия $O_2(-1, Y_2, Z_2)$, где $Y_2 < 0$.

Структура аттракторов исследовалась с помощью отображения Пуанкаре секущей плоскости $X = -1$. В большинстве случаев случайное поведение оказалось связанным с появлением внутри аттрактора счетного множества неустойчивых периодических движений, которым соответствовали седловые циклы *). Эти циклы разных периодов удалось «наблюдать» и в численном эксперименте — на реализации рис. 14 видны случайно сменяющие друг друга участки периодических движений. Последовательное увеличение точности построения отображения позволило обнаружить, что наблюдающиеся аттракторы в сечении имеют структуру в виде произведения канторова множества на отрезок, как уже говорилось (см. гл. 1), типичную для многих странных аттракторов. Как оказалось, стохастическому поведению системы может соответствовать как

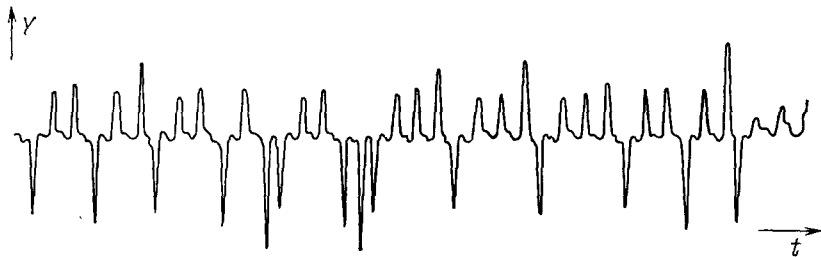


Рис. 14. Результат численного интегрирования систем (2.9) при $\gamma = 0,2$, $\delta = 0,5$, $\alpha = 0,17$.

Периодические участки соответствуют движению траектории вблизи неустойчивых циклов.

непрерывное, так и разрывное отображения плоскости $X = -1$ в себя. В последнем случае работает «сепараторный» механизм, впервые обнаруженный Ландфордом и Сиваем для аттрактора Лоренца (см. ниже).

Рассмотренный процесс взаимодействия волны и гармоники является частным случаем невырожденного трехволнового взаимодействия, для которого условия синхронизма записываются в виде (2.4). Если инкрементом обладает высокочастотная мода, а затухание низкочастотных одинаково, то моды ω_1 и ω_2 синхронизируются и задача полностью сводится к анализу системы (2.8). Стохастичность в этой системе удалось обнаружить только при ненулевой нелинейной расстройке. Если же затухание низкочастотных мод различно, то вместо (2.8) будем иметь уже систему четвертого порядка, демонстрирующую стохастическое поведение и при $\alpha = 0$. Роль нелинейной расстройки, существенно запутывающей движение, здесь играет инерционность затухающих мод.

Распадный механизм возникновения стохастичности реализуется, по существу, независимо от характера неустойчивости высокочастотной моды **). В частности, стохастичность возникает и в том случае, когда неустойчивость параметрическая.

г) Стохастическая стадия параметрической неустойчивости в плазме и модель Лоренца

Распадное взаимодействие линейно затухающих и растущих мод приводит к стохастичности и в известной модели Лоренца. Обсудим здесь свойства этой модели и ее физические приложения.

Система, которую исследовал Лоренц, получается из уравнений Буссинеска, описывающих термоконвекцию в подогреваемом снизу горизон-

*) Седловые циклы возникают в окрестности двоякоасимптотической траектории седла-фокусов в начале координат и в точке O_1 .

**) Нарастание неустойчивой моды, однако, должно быть достаточно быстрым по сравнению с затуханием субгармоники.

тальном слое (см. ниже рисунки в таблице), если ограничиться анализом лишь двумерных движений, а функцию тока ψ и изменение температуры δT представить в виде ^{35,46}

$$\begin{aligned}\psi(x, z, t) &= \psi_{11}(t) \sin \frac{\pi x a}{l} \sin \frac{\pi z}{l}, \\ \delta T(x, z, t) &= \theta_{11}(t) \cos \frac{\pi x a}{l} \sin \frac{\pi z}{l} - \theta_{02}(t) \sin \frac{2\pi z}{l}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Такое представление означает учет трех связанных пространственных мод, из которых две, ψ_{11} и θ_{11} , при $Ra > Ra_I$ нарастают за счет конвективной неустойчивости, а третья, θ_{02} , затухает. Параметр $a = 1/\sqrt{2}$ — это характерный масштаб мод, которые раньше других теряют устойчивость при $Ra \geq Ra_I$ (Ra_I — первое критическое число Рэлея; см. гл. 3).

Ограничение неустойчивости в данном случае происходит за счет передачи энергии (распада) растущих мод в моду θ_{02} , что соответствует изменению основного профиля температуры (гидродинамический аналог известного эффекта квазилинейной релаксации). Для амплитуд этих мод $X \sim \psi_{11}$, $Y \sim \theta_{11}$, $Z \sim \theta_{02}$ получается система уравнений Лоренца *) ³⁵

$$\begin{array}{l} \dot{X} = \begin{array}{|c|} \hline -\sigma X \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline +\sigma Y \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array}, \\ \dot{Y} = \begin{array}{|c|} \hline -Y \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline +rX \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline -XZ \\ \hline \end{array}, \\ \dot{Z} = \begin{array}{|c|} \hline -bZ \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline +XY \\ \hline \end{array}, \end{array}\quad (2.10)$$

I II III

где σ — число Прандтля, $r = Ra/Ra_I$ — нормированное на критическое число Рэлея, а $b = 4/(1 + a^2)$ (см. гл. 3). В колонку I здесь объединены слагаемые, ответственные за линейное затухание мод, в колонку II — за параметрическое возбуждение, а в III — за нелинейную перекачку энергии в затухающую моду Z . Эта система, в конечной области параметров демонстрирующая стохастические автоколебания, которым соответствует странный аттрактор **), очень напоминает классические уравнения трехволнового взаимодействия, но уравнения для амплитуд волн, в отличие от (2.10), комплексны. Однако это различие, как мы сейчас увидим, не всегда существенно.

Рассмотрим, к примеру, параметрическое возбуждение волн в магнито-активной плазме ⁴³. Волновой накачкой пусть является свист, распространяющийся вдоль магнитного поля. В поле свиста возбуждается ионный звук a_2 и плазменная волна a_1 на частоте нижнего гибридного резонанса. Эти волны в свою очередь образуют резонансную тройку с другой плазменной волной a_3 . В безразмерной форме при точном синхронизме уравнения для комплексных амплитуд a_1, a_2, a_3 этих волн записываются в виде ⁴³ (считаем поля пространственно-однородными)

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\nu_1 a_1 + h a_2^* - a_2 a_3, \\ \dot{a}_2 &= -\nu_2 a_2 + h a_1^* + a_1 a_3^*, \\ \dot{a}_3 &= -a_3 + a_1 a_2^*, \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

где h — пропорционально амплитуде накачки. Система (2.11) обладает замечательной особенностью — при $t \rightarrow \infty$ линейные комбинации фаз

*) Способ вывода подобных уравнений из уравнений Буссинеска обсуждается в гл. 3.

**) Лоренц обнаружил в (2.10) стохастическое поведение при $r = 27$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$.

волн обращаются в нуль, т. е. фазы синхронизируются *):

$$\begin{aligned}\arg a_1 + \arg a_2 &\rightarrow 0, \\ \arg a_1 - \arg a_2 - \arg a_3 &\rightarrow 0.\end{aligned}$$

Полагая одну из фаз равной нулю, можно, следовательно, все амплитуды $a_{1,2,3}$ считать действительными. Тогда система (2.14) будет отличаться от системы Лоренца лишь одним дополнительным слагаемым YZ в уравнении для X ($X \sim a_2$, $Y \sim a_1$, $Z \sim a_3$). Качественный анализ и численные эксперименты, однако, показывают, что это отличие не принципиально и решения (2.12), (2.11) ведут себя аналогично решениям системы Лоренца. Возникновение стохастичности в этой системе уже никак не связано с дрейфом фаз. Главную роль здесь играет инерционность параметрически связанных волн.

Непосредственно к уравнениям (2.10) сводится в простейшей постановке и задача об исследовании динамики лазера^{44,45}. Взаимодействие бегущей электромагнитной волны с инверсно заселенной двухуровневой средой, когда частота волны совпадает с частотой перехода, описывается уравнениями

$$\left. \begin{aligned}\dot{E} &= \frac{1}{T_c} (P - E), \\ \dot{P} &= \frac{1}{T_2} (EN - P), \\ \dot{N} &= \frac{1}{T_1} \left[\alpha - N - \frac{\alpha - 1}{2} (EP^* + P^*E) \right];\end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

здесь E и P — безразмерные комплексные амплитуды поля и поляризации среды; N — разность населенностей; α — отношение разности населенностей, поддерживаемой накачкой в отсутствие поля, к критической; T_c — время затухания поля, T_2 , T_1 — времена поперечной и продольной релаксации. Можно показать⁵⁶, что при $t \rightarrow \infty$ разность фаз поляризации и поля стремится к нулю, т. е. E и P можно считать действительными. Тогда заменой $N \rightarrow \alpha - Z$, $E \rightarrow [T_1/T_2 (\alpha - 1)]^{-1/2} X$, $P \rightarrow [T_1/T_2 (\alpha - 1)]^{-1/2} Y$, $t \rightarrow T_2 \tau$ система (2.23) точно сводится к системе Лоренца (2.10), где роль числа Рэлея играет превышение разности населенностей над пороговым значением — $\alpha = r$, числа Прандтля — отношение времен релаксации поляризации и поля — $T_2/T_c = \sigma$, а $T_2/T_1 = b$ — характеристика среды. Заметим сразу, что параметры, при которых Лоренц обнаружил в (2.10) стохастичность, для лазера нереальны: $\alpha = 27$ — слишком большое превышение над порогом, а $T_2/T_c = 10$ предполагает, что ширина линии вещества на порядок уже ширины линии резонатора **).

д) А т т р а к т о р Л о р е н ц а

Обсудим теперь более подробно свойства решений системы (2.10), опираясь, в основном на работы⁴⁷⁻⁵².

Система (2.10) обладает рядом свойств, существенно упрощающих исследование:

1. Эта система неустойчива на бесконечности и в фазовом пространстве существует «мешок», куда входят все траектории — положив $u = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$, из

*) Это легко показать: обозначим $\chi = \text{Im}(ha_1a_2) \sim \sin(\arg a_1 + \arg a_2)$, $\xi \sim \text{Im}(a_1^*a_2a_3) \sim \sin(\arg a_2 + \arg a_3 - \arg a_1)$. Тогда $(d/dt)(\chi + \xi) = -(v_1 + v_2) \times \chi - (1 + v_1 + v_2)\xi$, т. е. на плоскости χ, ξ все траектории входят в угол между прямыми $\chi + \xi = 0$, $(v_1 + v_2)\chi + (1 + v_1 + v_2)\xi = 0$. Но в этой области $\text{sign}[(d/dt)(\arg a_1 + \arg a_2)] = -\text{sign}[\sin(\arg a_1 + \arg a_2)]$; следовательно, $\chi \rightarrow 0$ и $\xi \rightarrow 0$, что приводит к (2.12).

**) Подобная ситуация характерна, однако, для мазеров⁵⁶.

(2.10) находим $\dot{u} \leq -C_1 u + C_2$ ($C_{1,2} > 0$), т. е. все траектории входят в сферу $u \leq C_2/C_1$.

II. Фазовый объем (2.10) равномерно сжимается

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -(1 + \sigma + b), \quad (2.14)$$

т. е. притягивающее множество — аттрактор — имеет нулевой объем.

III. Система симметрична по отношению к замене $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$.

Проследим зависимость поведения системы от параметра r (числа Рэлея). При $r < 1$ единственным состоянием равновесия является устойчивый узел в начале координат — $O(0, 0, 0)$. Когда $r > 1$, начало координат становится седлом и из него рождаются два устойчивых состояния равновесия

$$C^{\pm} = (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1),$$

соответствующие стационарной конвекции в виде валов с противоположным направлением вращения жидкости.

Эти нетривиальные состояния равновесия существуют при любых $r > 1$, но устойчивы они только при $r < r^* = \sigma(\sigma + b + 3)/(\sigma - b - 1)$ (при $\sigma = b + 1$, $r^* = \infty$).

При $r = r^*$ в состоянии равновесия C^+ и C^- влипают существовавшие в их окрестности неустойчивые циклы (обратная бифуркация Хопфа) и передают им свою неустойчивость. При $r > r^*$ эти состояния равновесия становятся седлами-фокусами: одномерная сепаратриса устойчива, а двумерная представляет собой раскручивающуюся спираль. Таким образом, при $r > r^*$ внутри упоминавшегося «мешка» в фазовом пространстве (2.10) все состояния равновесия неустойчивы. Ответ на вопрос, к чему в этом случае будут притягиваться траектории, требует существенно нелокального рассмотрения и был получен в результате численного исследования (2.10). Оказалось, что при $r > r^*$ все траектории попадают на уже «готовый», сформировавшийся еще при $r < r^*$, странный аттрактор. Понять структуру этого аттрактора и механику его появления можно с помощью сведения трехмерного фазового потока системы (2.10) сначала к двумерному отображению последования, а затем и к одномерному неважно однозначному отображению типа рис. 6⁴⁷, ⁴⁹, ⁸². Прделаем это при значениях параметров, выбранных Лоренцем, $r = 28$, $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (при этом $r^* = 24,74$), когда в системе имеется три неустойчивых состояния равновесия: O — седло-узел, к которому траектории приближаются по двумерной сепаратрисной поверхности $W^s(O)$, а уходят по одномерным усам $W^u(O)$; и C^{\pm} — седло-фокусы, к которым траектории очень быстро подходят по одномерным сепаратрисам, и медленно уходят, раскручиваясь по двумерным сепаратрисам.

В качестве секущей поверхности выберем плоскость Σ $Z = 27$, проходящую через состояния равновесия C^{\pm} . Отображение последования Φ этой плоскости в себя каждой точке, уходящей с плоскости Σ вниз ($\dot{Z} < 0$), сопоставляет точку, в которой данная траектория снова пересекает Σ сверху вниз. Как оказалось, основную роль в организации стохастического поведения траекторий играет состояние равновесия O , двумерная устойчивая сепаратриса которого $W^s(O)$ разрезает секущую плоскость Σ по линии A . Траектории, выпущенные из точек близи A , подходят очень близко к состоянию равновесия O , и дальнейшая их судьба — вдоль какой из уходящих от O сепаратрис $W^u(O)$ они двинутся, — зависит от того, с какой стороны линии A они начинались. Таким образом, отображение оказывается разрывным: точки, лежащие на одном берегу A (например, A^+ ; см. рис. 15), склеиваются и вместе с сепаратрисой

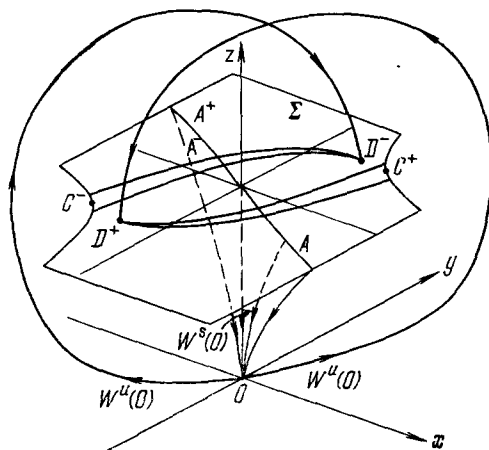


Рис. 15. Фазовое пространство системы Лоренца при $r_2 < r < r^*$.

$W^s(O)$ и $W^u(O)$ — двумерная устойчивая и одномерная неустойчивая сепаратрисы [состояния равновесия $O(0, 0, 0)$].

$W^u(O)$ переходят в точку D^+ , а лежащие на другом берегу — в симметричную точку D^- (по этой причине линию A называют сепаратором⁴⁹⁾).

Из рис. 16 видно, что в результате последовательных итераций отображения Пуанкаре начальная область сжимается к аттрактору, в виде двух дуг. Его поперечное сечение похоже на канторово множество, однако в действительности является канторовым множеством лишь при некоторых значениях параметров и при специальном выборе сечения. Отображение Φ , таким образом, представляет собой

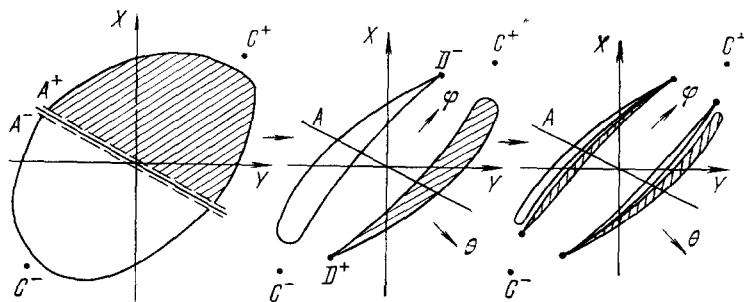


Рис. 16. Отображение, построенное Ланфордом для системы Лоренца. Для наглядности сжатие в направлении θ сильно преувеличено — на самом деле сечение аттрактора выглядит как две симметричные «дуги».

комбинацию растяжения в направлении ϕ (см. рис. 16) со сжатием по θ . Теперь огрубим задачу, перестав различать точки с одинаковым значением ϕ и разным значением θ , и рассмотрим, к чему сводится действие этого отображения только вдоль ϕ . При этом удобно отождествить и симметричные относительно замены $x, y \rightarrow -x, -y$ точки.

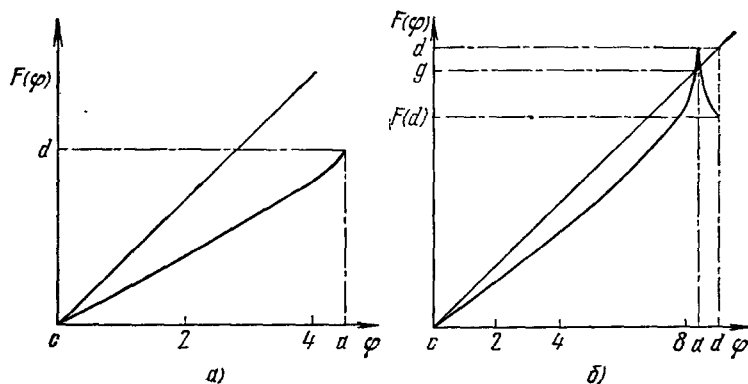


Рис. 17. Одномерное невязанно однозначное отображение, полученное для системы (2.10) (странный аттрактор отсутствует).

а) $r = 10$, б) $r = 15$.

В результате получим непрерывное (теперь D^+ и D^- совпадают), но не взаимно однозначное (!) отображение F^* (рис. 17). С отображением такого вида мы уже встречались в предыдущем разделе. Точки c, d, a отображения F соответствуют точкам C, D и линии A отображения Φ . При соответствующем выборе метрики F будет равномерно растягивающим; это означает, что отмеченный пунктиром аттрактор будет странным. Отображение Φ , как недавно доказано¹⁰⁹, является перемешивающим, а F имеет положительную топологическую энтропию. Одномерное отображение F позволяет наглядно проиллюстрировать все основные свойства аттрактора Лоренца. Из него, например, следует негрубость этого аттрактора: действительно, точка a может не быть периодической (тогда сепаратриса $W^u(O)$ всюду плотна в аттракторе) и может стать периодической при сколь угодно малом возмущении параметров (тогда $W^u(O)$ возвращается в точку O).

*) Переход от Φ к F здесь аналогичен переходу от отображения Смейла-Ван-Данцига (рис. 9) к растяжению отрезка (рис. 6). Математически строго этот переход описывается конструкцией обратного предела^{36, 51, 52}.

Проследим теперь, как возникает аттрактор с ростом r при $b = 8/3$ и $\sigma = 10$ (впервые это сделано в ⁴⁸ и независимо в ¹⁰¹).

При $1 < r < r_1 \approx 13,926$, когда $F(a) = d < a$, отображение имеет вид рис. 17, а все траектории притягиваются к точке C (т. е. к состояниям равновесия C^\pm). При $r = r_1$ происходит бифуркация — $F(a)$ становится равным a , что соответствует возвращению сепаратрисы $W^u(O)$ в седло $(0, 0, 0)$; при этом возникает неустойчивый цикл (точка g на рис. 17, б)).

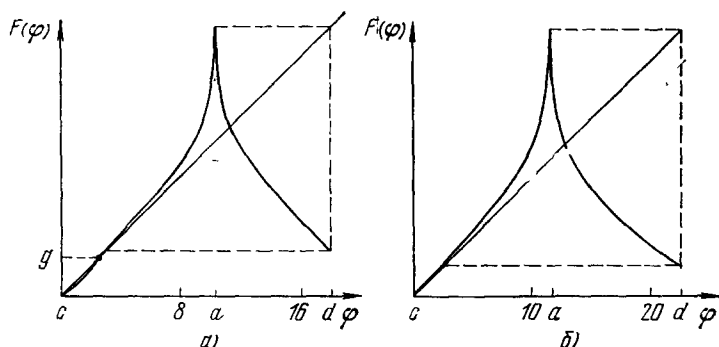


Рис. 18. Одномерное отображение для системы (2.10), когда существует странный аттрактор.

а) $r = 24,3$, б) $r = 28$.

В области $r_1 < r < r_2 \approx 24,06$ отображение F имеет вид рис. 17, б). Такое отображение уже содержит стохастичность — на участке $g < \varphi < b$ отображение растягивающее и имеется периодическая точка периода 3. Возникновение стохастичности здесь связано с появлением гомоклинического контура — траекторий, идущих от одного

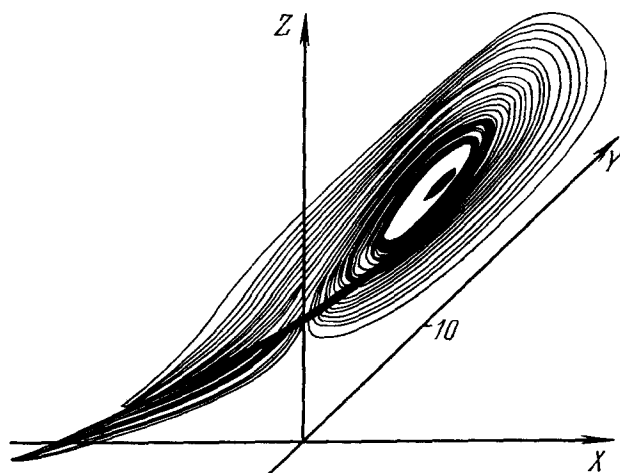


Рис. 19. Портрет странного аттрактора системы (2.12) — видны области притяжения состояний равновесия C^+ и C^- .

из неустойчивых циклов к другому (у отображения F этому соответствуют двоякоасимптотические к g точки) ^{48, 88}. Однако стохастичность в этой области параметра r еще не притягивающая, поскольку $F(d) < g$, почти все точки из области $g < \varphi < d$ уходят к устойчивому состоянию равновесия C .

Следующая бифуркация ($r = r_2$) происходит, когда $F(d) = g =$ сепаратриса $W^u(O)$ наматывается на неустойчивый цикл. Гомоклинический контур исчезает, но порожденная им стохастичность остается и становится притягивающей — возникает странный аттрактор. Таким образом, при $r_2 < r < r^*$ в системе Лоренца имеется три

аттрактора — два простых и один странный (отмеченный на рис. 18, *a* штриховой линией). Это означает, что в зависимости от начальных условий реализуется или стохастический или динамический режимы. Переход к стохастичности сопровождается гистерезисом, что характерно для жесткого режима *). При $r = r^*$ неустойчивый цикл «влипает» в состояние равновесия ($g = c$), и после этой бифуркации остается только странный аттрактор. Наконец, при $r = r_3 = 220$ возникает устойчивый предельный цикл. Условная диаграмма смены режимов приведена на рис. 20.

Асимптотику $r \rightarrow \infty$ системы Лоренца можно исследовать и аналитически, если воспользоваться предложенной В. И. Юдовичем заменой

$$x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\sigma}} X, \quad q = \frac{\varepsilon^2}{\sigma} \left(\sigma Z - \frac{1}{2} X^2 \right), \quad t = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\sigma}} t_{\text{старое}}. \quad (2.15)$$

Тогда система (2.11) сводится к уравнению «регулируемого» маятника, частота которого инерционным образом зависит от его энергии:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \varepsilon h \dot{x} + x^3 + (q - 1)x &= 0, \\ \dot{q} &= -\varepsilon a q + \varepsilon \beta x^2, \end{aligned} \quad (2.16)$$

где $h = (\sigma + 1)/\sqrt{\sigma}$, $a = b/\sqrt{\sigma}$, $\beta = (2\sigma - b)/\sqrt{\sigma}$. Большим значениям числа Рэлея в системе Лоренца соответствуют малые значения параметра ε ; при этом система (2.16) оказывается близкой к консервативной с потенциалом

$$U(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{(q-1)x^2}{2}, \quad q = \text{const}.$$

Рис. 20. Эволюция аттрактора в системе Лоренца с ростом r при $\sigma = 10$, $b = 8/3$ (— устойчивое состояние равновесия, — — странный аттрактор, = — устойчивый предельный цикл).

Такая близость дает возможность исследовать решения (2.16) с помощью метода усреднения. Из анализа усредненных уравнений¹⁰⁰ следует, что при каждом $\sigma > (2b + 1)/3$ и достаточно больших r в системе Лоренца существует устойчивый цикл, охватывающий оба нетривиальные состояния равновесия; если $b + 1 < \sigma < (2b + 1)/3$, то в окрестности этих состояний равновесия имеется еще по неустойчивому циклу. Аналитически же из этих уравнений следует при $r \rightarrow \infty$ и $\sigma = (2b + 1)/3$ существование в системе гомоклинической восьмерки (двух сепаратрис, выходящих из точки $(0, 0, 0)$ и возвращающихся в нее же), распад которой приводит к возникновению счетного множества циклов и стохастичности **).

е) О консервативных механизмах

Все обсуждавшиеся до сих пор физические механизмы, приводящие к стохастичности, принципиально связаны с диссипацией энергии одних мод и усилением за счет внешних источников других. Это — наиболее важные, например, для гидродинамики, неконсервативные механизмы возникновения хаоса. В то же время в автоколебательных системах стохастичность может возникнуть и за счет чисто консервативных механизмов (в частности, нелинейного перекрытия резонансов^{13, 14}). Роль же диссипации и внешних источников энергии при этом сведется лишь к отбору одного или нескольких из уже существующих стохастических движений, отличающихся тем, что для них диссипируемая и потребляемая энергия в среднем равны друг другу. Выделенный таким образом стохастический режим уже может быть притягивающим — в фазовом пространстве системы появится странный аттрактор ***). Возникновение странного аттрактора в подобной ситуации должно напоминать возникновение предельного цикла в близкой к нелинейному осциллятору автоколебательной системе —

*) Вид фазового пространства с тремя аттракторами для системы (2.12) приведен на рис. 19.

**) Применительно к неавтономной системе второго порядка механизм возникновения стохастичности, связанный с разрушением гомоклинической восьмерки, обсуждался в⁵⁹.

***) «Стохастичность» в автоколебательной системе, обязанная своим происхождением нелинейному перекрытию резонансов, экспериментально обнаружена в⁶⁰.

малое нелинейное трение превращает в предельный цикл одну (или несколько) из имеющихся замкнутых траекторий. Ж

Ясно, что спектральные характеристики движения на появившемся таким образом аттракторе (независимо от того, периодическое это движение или стохастическое) могут остаться такими же, как и для исходного консервативного движения. Отличить стохастические автоколебания от стохастического движения консервативной системы в установившемся режиме, вообще говоря, невозможно *) Это можно сделать, только исследуя процесс установления интересующих нас стохастических движений.

ж) М н о г о м о д — р а з в и т а я т у р б у л е н т н о с т ь

Исследовавшие до сих пор «маломодовые» странные аттракторы, существование которых замечательно само по себе, позволяют разобраться в механике возникновения хаоса в диссипативной среде. Однако к реальной турбулентности (тем ее видам, образом которой является странный аттрактор) они могут иметь отношение лишь вблизи границы возникновения. Дело в том, что с ростом степени неравновесности среды растет и число возбужденных мод, на которых базируется турбулентность, т. е. странный аттрактор становится «многомодовым». Могут ли рассмотренные физические механизмы обеспечить существование таких аттракторов? Вообще говоря, да, поскольку для проявления таких эффектов, как конкуренция или синхронизация мод, нелинейный дрейф фазы и т. д., препятствующих или способствующих возникновению устойчивого хаоса в неравновесных диссипативных средах, число взаимодействующих мод не очень принципиально. Приведем два примера из области волновой турбулентности.

Флин и Манхеймер ⁹⁷ исследовали численно стабилизацию устойчивой ионно-звуковой моды в плазме за счет передачи ее энергии вверх по спектру. Рассматривалась модель из 10 гармоник (более высокие гармоники нерезонансны из-за дисперсии). На первой моде ω был инкремент γ , а на десятой — затухание $\nu = 10\gamma$, т. е. существовал инерционный интервал ⁹⁸ шириной 9ω . Оказалось, что и при наличии дисперсии внутри этого интервала и при ее отсутствии, характерной для колмогоровской турбулентности каскадной передачи энергии по спектру не происходит и стационарные энергетические распределения не устанавливаются. Картина получилась точно такой же, как и при обсуждавшемся взаимодействии растущей и затухающей гармоник (см. также (3.9)) — энергия всех мод хаотически пульсирует, меняясь более чем на два порядка (ср. ниже рис. 30, а)). Фазы же отдельных мод оказываются связанными **).

Как показывают численные эксперименты, характер стохастичности в подобных моделях слабо зависит от числа взаимодействующих мод, меняется лишь ширина занимаемой стохастичностью области в пространстве параметров.

Роль фазовых эффектов в возникновении многомодового хаоса в диссипативной среде видна на следующем примере ⁹⁶. Рассмотрим в одномерной активной среде (линии передачи с нелинейным током утечки $j(u) = -\gamma_1 u - \gamma_2 u^2 + \gamma_3 u^3$) взаимодействие низкочастотной (Ω_0, q_0) волны и высокочастотных волн с законом дисперсии $\omega^2 = v^2 k^2 + \omega_0^2$.

*) В самом общем случае это предсказывал еще Биркгоф (см. 2).

**) Заметим, что приближение слабой турбулентности, основывающееся на гипотезе о случайных фазах индивидуальных волн, — это способ описания волновой турбулентности. Вопрос же о том, какие механизмы поддерживают стохастичность, при таком описании обычно остается открытым.

Здесь $\gamma_{1,2}$ ответственны за раскачку колебаний в неравновесной среде, а γ_3 — за линейное затухание; Ω_0 и q_0 фиксированы (определяется длиной резонатора). Взаимодействие НЧ и ВЧ волн происходит за счет их резонансной связи на квадратичной нелинейности ($\gamma_2 \neq 0$) тока утечки (синхронизмы типа $\omega_i \pm \Omega_0 = \omega_{j,l} + \Delta_{j,l}$, $k_i \pm q_0 = k(\omega_{j,l})$). На рис. 21 приведены полученные экспериментально ⁹⁶ спектры ВЧ колебаний в такой «среде» при различных соотношениях между величиной квадратичной и кубической нелинейности *). При малой квадратичной нелинейности преобладает эффект конкуренции мод и устанавливается маломодовый динамический режим (рис. 21, а)). С ростом γ_2 спектр ВЧ колебаний непрерывно обогащается (рис. 21, б) — на начальном этапе процесса число мод N за счет взрывной неустойчивости ⁹⁴ растет по закону $\dot{N} \sim N^2$. Однако сейчас для нас принципиально важно другое — как видно из рис. 21, спектр ВЧ колебаний оказывается эквидистантным,

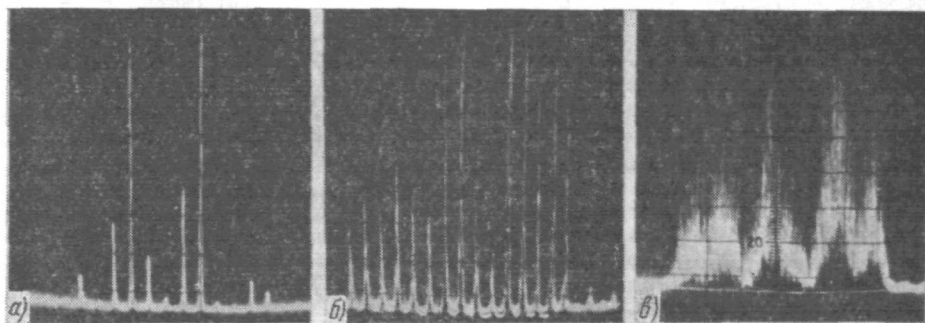


Рис. 21. Скачкообразный переход от дискретного спектра к сплошному при разрушении режима синхронизации мод ⁹⁶.

несмотря на наличие в этой области частот сильной дисперсии. Виною этому уже обсуждавшийся нами эффект синхронизации мод. Однако дальнейшее увеличение квадратичной нелинейности приводит к появлению новых мод с несоизмеримыми частотами, под действием которых режим взаимной синхронизации мод резко, вдруг, разрушается и устанавливаются хаотические автоколебания, характеризующиеся сплошным спектром (см. рис. 21, в). Возникновение стохастичности при этом происходит жестким образом (что, в частности, доказывает ее притягивающий характер) — при увеличении отношения $R = \gamma_2/\gamma_3$ хаос возникает при значении R_2 , большем, чем R_1 , при котором он исчезает, когда это отношение уменьшается. В области гистерезиса $R_1 < R < R_2$ в зависимости от начальных условий устанавливается либо режим с эквидистантным спектром, либо турбулентность (см. рис. 21, б, в).

3. КОНЕЧНОМЕРНОЕ ОПИСАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Гидродинамическая турбулентность, описываемая уравнениями Навье — Стокса, на первый взгляд имеет мало общего с движением динамических систем, т. е. с обыкновенными дифференциальными уравнениями, о которых в основном и шла речь выше. Связь эта, однако, существует и очень тесная. Хопфом даже была высказана гипотеза о том, что

*) Это соотношение легко изменять, управляя постоянным смещением на туннельных диодах, используемых в качестве элементов нелинейной утечки.

все множество траекторий уравнения Навье — Стокса (его фазовое пространство бесконечномерно) притягивается к конечномерному множеству. Отсюда сразу следует, что при $t \rightarrow \infty$ движение жидкости можно описывать конечномерными уравнениями. Эта гипотеза, правда, до сих пор не доказана, но она кажется совершенно естественной, если учесть, что вязкость препятствует существованию мелкомасштабных возмущений. Добавим, что уже обнаруженные для уравнения Навье — Стокса основные бифуркации носят конечномерный характер¹⁰⁸. Это, например, переход стационарного устойчивого течения в периодическое (рождение из состояния равновесия предельного цикла), установление двухпериодического течения (рождение двумерного тора) и другие. Поэтому есть все основания считать, что и очередная бифуркация — переход к неупорядоченному течению для многих гидродинамических задач также окажется конечномерной. Это, по-видимому, справедливо как для двумерных, так и для трехмерных течений. Однако строгие результаты имеются пока только для двумерной гидродинамики, когда движение не зависит от одной из координат.

а) Д в у м е р н а я г и д р о д и н а м и к а

Согласно результатам Ладыженской⁶³, все предельные (при $t \rightarrow \infty$) режимы двумерных уравнений Навье — Стокса

$$\mathbf{v}_t - \nu \Delta \mathbf{v} + \sum_{k=1}^2 v_k \mathbf{v}_{x_k} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{f}(x), \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}|_S = 0 \quad (3.1)$$

(S — граничный контур) описываются динамической системой, которая эквивалентна конечномерной. Более точно этот результат заключается в следующем. Если представить $\mathbf{v}(x, t)$ в виде $\mathbf{v}(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(t) \Phi_k(x)$, то указанные движения (3.1) восстанавливаются по их проекции (*галеркинскому приближению*) — $\mathbf{v}_N(x, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \Phi_k(x)$ в N -мерном евклидовом пространстве, где $a_k(t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\dot{a}_k = \sum_{l, m} \sigma_k^{lm} a_l a_m + \sum_i \gamma_k^i a_i + f_k. \quad (3.2)$$

Важно, что характер исходного решения $\mathbf{v}(x, t)$ строго совпадает с поведением $\mathbf{v}_N(x, t)$: если $\mathbf{v}_N(x, t)$ не зависит от t , то и $\mathbf{v}(x, t)$ не зависит; если \mathbf{v}_N — периодическое по t , то периодически и \mathbf{v} ; если $\mathbf{v}_N(x, t)$ имеет сплошной спектр, то сплошным спектром будет обладать и $\mathbf{v}(x, t)$. Таким образом, возникновение двумерной турбулентности может быть строго установлено на основе исследования конечномерной проекции, т. е. системы (3.2). Естественно, что с ростом R число N растет. Физически этот результат довольно понятен и связан с ролью вязкости, прогрессирующей с уменьшением масштабов и обеспечивающей подслеживание мелкомасштабных возмущений за интенсивными крупномасштабными.

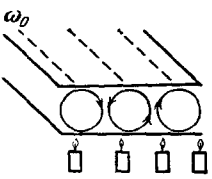
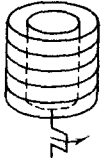
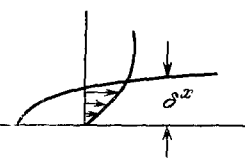
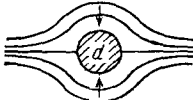
б) С о о т н о ш е н и е с э к с п е р и м е н т о м

В эксперименте турбулентность, образом которой является странный аттрактор, должна отличаться характером своего возникновения — небольшим числом предшествующих ей переходов и резким, «катастро-

фическим» *) появлением случайных пульсаций, имеющих сплошной спектр. Посмотрим с этой точки зрения на результат экспериментов по возникновению турбулентности в классических гидродинамических течениях. Как мы убедились, возникновение турбулентности при термоконвекции, в течении Куэтта между цилиндрами, пограничном слое и следе за обтекаемым телом действительно во многих случаях оказывается очень похожим на картину, предписываемую «аттракторной моделью» — при увеличении надкритичности более сложные движения сменяют более простые и после небольшого числа переходов скачком возникает турбулентность.

Аналогия между упомянутыми переходами видна из таблицы ⁶⁵, однако они достаточно интересны и их стоит хотя бы кратко описать **).

Таблица I

<p>Конвекция:</p> 	$Ra = \frac{g\beta\Delta T h^3}{\nu\kappa}$ $Pr = \nu/\kappa$	Равновесный режим	Стационарные конвективные вали	Колебательный режим конвекции	Турбулентность
<p>Течение Куэтта:</p> 	$Te = \frac{\Omega r l^3}{\nu^3}$	Ламинарное течение	Вихри Тейлора	Азимутальные моды	Турбулентность
<p>Пограничный слой:</p> 	$Re = \frac{V\delta^*}{\nu}$	Ламинарное течение	Двумерные волны Толмина — Шлихтинга	Вихри Бенни	Турбулентность
<p>След:</p> 	$Re = \frac{Vd}{\nu}$	Ламинарное обтекание	Пара вихрей	Дорожка Кармана	Турбулентность

*) Сейчас существует очень интересная топологическая теория — «теория катастроф», развиваемая Томом ⁶⁴ и другими, в рамках которой могут быть описаны многие скачкообразные переходы в самых разнообразных системах.

**) Подробное обсуждение картины переходов к турбулентности в различных гидродинамических течениях содержится в опубликованной в этом же номере статье А. С. Моница (см. с. 97). Автор выражает признательность А. С. Моницу за возможность ознакомления с его статьями до опубликования.

в) Термоконвекция

Конвективные движения в горизонтальном подогреваемом снизу слое жидкости или газа, исследующиеся вот уже более семидесяти лет ⁶⁶ (Бенар, 1900; Рэлея, 1916), описываются двумя безразмерными параметрами — числом Рэлея $Ra = g\Delta T h^3 \beta / \nu \kappa$ и числом Прандтля $Pr = \nu / \kappa$ (здесь g — ускорение свободного падения, $\Delta T > 0$ — разность температур на нижней и верхней границе слоя, h — его толщина, ν — вязкость, κ — температуропроводимость среды, а β — коэффициент теплового расширения). На рис. 22 изображено разбиение плоскости параметров Ra , Pr на области, где реализуются конвективные движения различных типов. Это разбиение построено Кришнамурти ⁶⁷ на основе обработки экспериментов с различными жидкостями и газами, что позволило охватить интервал изменения Pr от 10^{-2} (для ртути) до 10^4 (для силиконовых масел). Первый переход от гидродинамического равновесия к стационарной

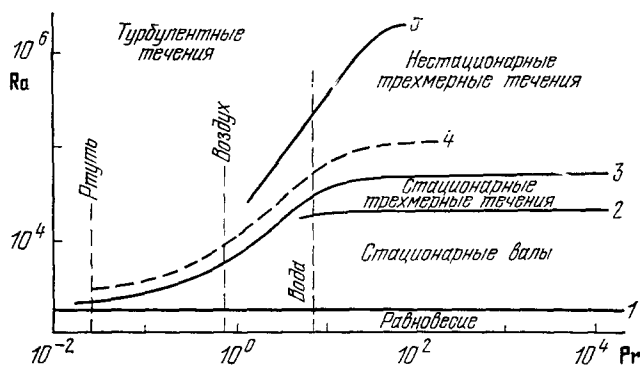


Рис. 22. Области существования различных конвективных режимов в горизонтальном слое подогреваемой снизу жидкости.

двумерной конвекции не зависит от Pr и при $Ra > Ra_I$ *) приводит к возникновению устойчивых структур в виде конвективных валов — двумерных вихрей. С дальнейшим ростом Ra происходит второй переход — при $Ra > Ra_{II}$ двумерные движения сменяются трехмерными стационарными режимами, которые соответствуют возбуждению уже многих степеней свободы системы, т. е. возникают многомодовые структуры; для $Pr \leq 7$ $Ra_{II} \approx 12 Ra_I$. Затем этот стационарный режим переходит в колебательный, $Ra > Ra_{III}$. При малых Pr — $Pr < 5$ стационарная многомодовая конвекция не возникает ⁶⁷ и стационарный одномодовый режим сразу сменяется нестационарным. Структура колебательных режимов в области между границами 3 и 5 усложняется (опять-таки дискретным образом) по мере роста неравновесности системы, т. е. Ra . При переходе Ra в область $Ra > Ra_V$ возникают беспорядочные колебания со сплошным спектром пульсаций — турбулентность. По мере дальнейшего увеличения Ra структура турбулентности меняется — по-видимому, в движение включаются новые степени свободы системы. Например, в ⁶⁸ в опытах с водой внутри турбулентной области обнаружилось восемь переходов при $1,05 \cdot 10^5 > Ra > 2,76 \cdot 10^5$; аналогичные переходы наблюдались в экспериментах с низкотемпературным гелием ^{69, 70}. Таким переходам соответствуют изломы в зависимости теплового потока через слой (числа Нуссельта Nu) от числа Рэлея.

г) Течение Куэтта между вращающимися цилиндрами

Это течение очень похоже на конвекцию в слое и возникающая здесь картина последовательного усложнения движений и скачкообразного возникновения турбулентности аналогична только что описанной. Границы переходов для случая, когда вращается только внутренний цилиндр, ясны из рис. 23, где приведена зависимость момента вращения внешнего цилиндра от числа Тейлора $T = \Omega r^2 / \nu^2$, определяющего характер течения (Ω , r — скорость вращения и радиус внутреннего цилиндра,

*) Для слоя с изотермическими твердыми границами $Ra_I = 1700$, а для слоя со свободными $Ra_I = (27/4) \pi^4 / 4 \approx 657$.

l — зазор между цилиндрами). Первые из этих переходов наблюдались еще самим Тейлором ⁷² полвека назад: при $T \gtrsim T_I$ «гладкое» течение становится неустойчивым и возникают структуры в виде нанизанных на внутренний цилиндр торов — вихри

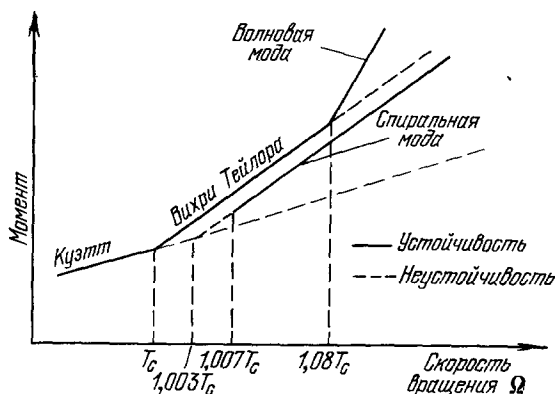


Рис. 23. Зависимость момента, прикладываемого к внутреннему цилиндру, от числа Тейлора.

Изломам соответствует изменение структуры течения.

сложнее ^{71, 74, 75 **}). Точки переходов указаны на рис. 24, где приведена зависимость $Re_\delta = V\delta^*/\nu$ (δ^* — характерная толщина пограничного слоя) от числа Рейнольдса $Re = Vx/\nu$, растущего вдоль по потоку. В точке I возникает неустойчивость, ведущая к нарастанию двумерных волн Толлмина — Шлихтинга ⁷⁶. Затем (точка II) сильно сказываются нелинейные эффекты и в результате взаимодействия двумерных и трехмерных волн Толлмина — Шлихтинга течение становится вихревым — образуются так называемые вихри Бенни ⁷⁶, а в профиле скорости появляется точка перегиба. Ниже по течению (точка III) в результате развития вторичной неустойчивости появляются мелкомасштабные возмущения и в точке IV вдруг появляются небольшие турбулентные области — пятна турбулентности, которые расширяются, перемещаясь с потоком, и при Re^* (точка V) образуется поток с развитой турбулентностью. Структура турбулентного слоя довольно сложна, многослойна (содержит подслей, суперслей и т. д. ^{71, 74}) и до конца еще не понятна.

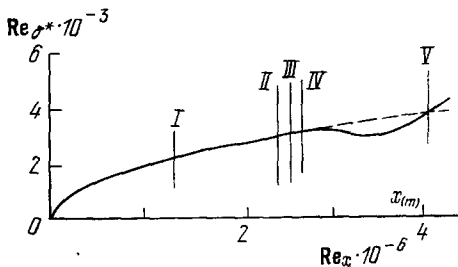


Рис. 24. Диаграмма переходов к турбулентности в пограничном слое.

д) Пограничный слой

Конечное число переходов предшествует возникновению турбулентности и в пограничном слое, однако здесь картина значительно

е) След за телом в потоке

Эскиз вихревой дорожки за обтекаемым телом составил еще Леонардо да Винчи ⁷⁷, однако систематические исследования этого течения начались примерно 60 лет назад с работ Кармана ^{78, 79}. Вязкое обтекание существует до $Re = 4$. При $Re > 4$ пограничный слой отрывается с двух сторон и образуются два симметричных вихря (рис. 25), прилипающие затем к поверхности цилиндра. При $Re > 40$ в оторвавшемся пограничном слое (цилиндр здесь служит лишь для образования свободного пограничного слоя) между «верхним» и «нижним» потоками нарастает волновое возмущение. Его эволюция с ростом x напоминает эволюцию простой волны в нелинейной среде без дисперсии: вначале профиль волны укручивается, а затем волна «прокидывается», образуя вихревую «дорожку Кармана» ($Re \gtrsim 80$). Дальнейшее изменение структуры происходит уже при $Re \sim 10^5$, когда возникают турбулентные области в следе. При $Re \approx 5,5 \cdot 10^5$ след за телом в потоке становится полностью турбулентным ⁷⁹.

*) В случае, когда вращается не внутренний, а внешний цилиндр, картина перехода к турбулентности иная ⁷³.

**) См. также обзор А. С. Монина, помещенный в этом же номере (с. 97).

Итак, действительно, если отвлечься от некоторых деталей, во многих из упомянутых течений турбулентность возникает не спектрально-эволюционным (что соответствовало бы модели Ландау — Хопфа), а катастрофическим образом, причем турбулентности предшествует небольшое число качественно различных режимов. Сейчас трудно сказать, какое отношение имеет странный аттрактор к возникновению турбулентности, например, в пограничном слое. Однако для течения Куэтта и термоконвекции этот образ турбулентности является вполне реальным. Рассмотрим для этих течений конечномерные математические модели, в рамках которых удастся обнаружить возникновение случайных пульсаций.

Наиболее простым и общим методом построения конечномерной аппроксимации уравнений гидродинамики является метод Галеркина^{80, 110}. Его суть заключается

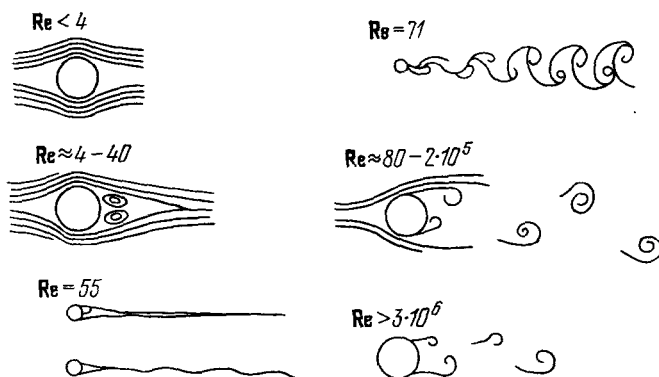


Рис. 25. Переход к турбулентности в следе за цилиндром в потоке.

в разложении полей скорости, давления, температуры по конечному набору ортогональных функций (чаще всего собственных функций линейной задачи), коэффициенты a_i при которых зависят от времени. Для них из условия минимума ошибки приближения получается система обыкновенных дифференциальных уравнений вида (3.2).

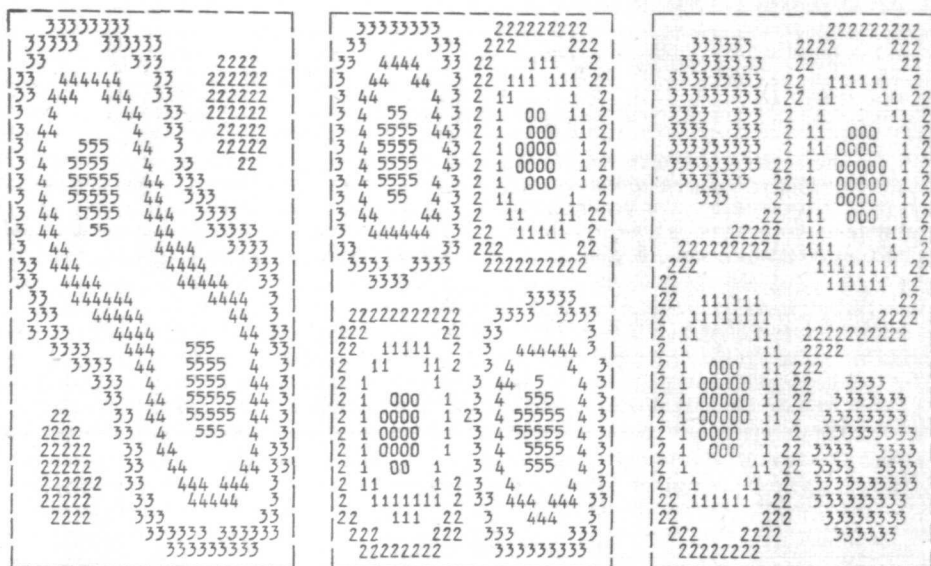
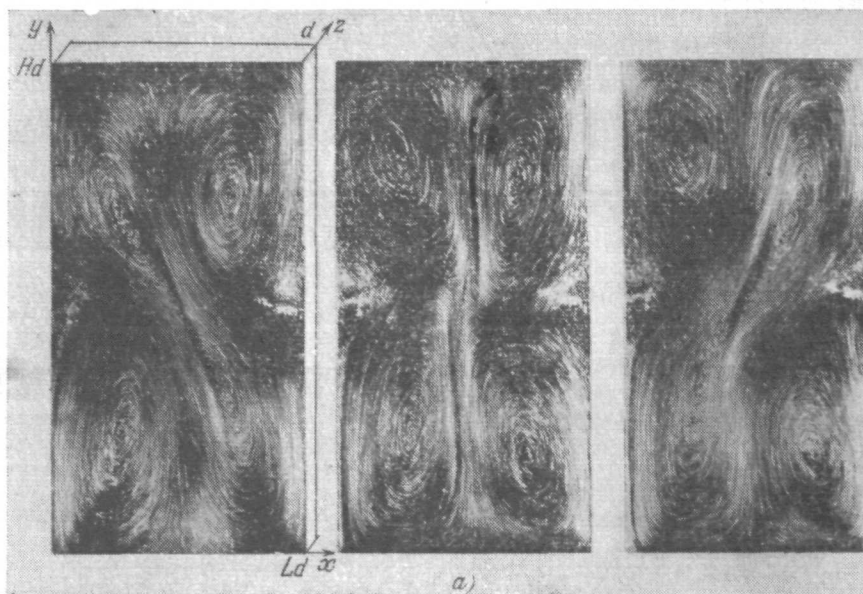
Проще всего применить такой подход к конвекции, где в линейном приближении жидкость покоится и задача оказывается самосопряженной. Несколько более сложная ситуация в течении Куэтта между цилиндрами. Для пограничного слоя и следа за телом линейная краевая задача приводит к уравнению Орра — Зоммерфельда и нахождение собственных функций само по себе становится нетривиальным.

ж) Турбулентная конвекция в ячейке Хеле — Шоу⁸¹

Ячейка Хеле — Шоу — это параллелепипед, один из горизонтальных размеров которого (d на рис. 26, а) много меньше двух других; она очень удобна для проведения наглядных экспериментов. В то же время конвективные движения в такой ячейке — щели, будучи двумерными, допускают подробное теоретическое описание и последующее сравнение с экспериментом⁸¹. На сегодняшний день конвекция в ячейке Хеле — Шоу — один из немногих экспериментов, позволяющих апробировать конечномерные модели возникновения гидродинамической турбулентности не только качественно, но и количественно!

В эксперименте⁸¹ на широких твердых гранях ячейки поддерживался постоянный градиент температуры G , не зависящий от интенсивности движения внутри щели. В ряде экспериментов одна из широких стенок щели была прозрачна, что позволило наблюдать переход от одних движений к другим при увеличении Ra . При $Ra > Ra_1$ в полости возникало стационарное одновихревое конвективное движение, существующее до $Ra = Ra_{II}$. Дальнейшее увеличение числа Рэлея (т.е. вертикального

градиента температуры) приводило к установлению при $Ra > Ra_{II}$ стационарной двух- или четырехвихревой конвекции. При последующем



б)

Рис. 26. Полученные экспериментально (а) и численно (б) линии тока в ячейке Хеле — Шоу в различные моменты времени.

увеличении Ra стационарная ячеистая конвекция сменялась динамическим колебательным режимом. Следующий переход приводил к установлению (при $Ra > Ra_I$) нерегулярных вихревых движений, для которых было характерно случайное попарное перезамыкание вихрей. На рис. 27

показаны соответствующие этому турбулентному режиму пульсации разности температур внутри полости.

Модель, в рамках которой объясняются все наблюдавшиеся экспериментально переходы, оказываются естественным обобщением (а точнее, расширением) модели Лоренца. Уравнения свободной конвекции в приближении Буссинеска имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla p}{\rho_0} + \nu \Delta \mathbf{v} - g\beta T, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) T &= \kappa \Delta T, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

(обозначения прежние). Полагая структуру течения по z заданной, можно ввести функцию тока $\psi: v_x = -\partial\psi/\partial y, v_y = \partial\psi/\partial x$; тогда в безразмерных переменных $x = x_{\text{стар}}/d, t = (\kappa/d^2) t_{\text{стар}}, \theta = (T/d) G, \psi = \psi_{\text{стар}}/\kappa$ исходными будут уравнения

$$\frac{1}{Pr} [\omega_t + J(\psi, \omega)] = \Delta \omega + Ra \theta_x, \quad (3.4)$$

$$\theta_t + J(\psi, \theta) = \Delta \theta + \psi_x,$$

где $\omega = -\psi_{xx} - \psi_{yy}$ — завихренность, θ — отклонение температуры от равновесной, $Ra = g\beta G d^4 / \nu \kappa$ — число Рэлея, J — якобиан. Отыскивая далее общее решение в виде

$$\begin{aligned} \psi &= \sum \psi_{nm}(t) \sin \frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \frac{m\pi}{H} y \cdot \cos \frac{\pi}{2} z, \\ \theta &= \sum \theta_{nm}(t) \cos \frac{n\pi}{L} x \cdot \sin \frac{m\pi}{H} y \cdot \cos \frac{\pi}{2} z, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где H и L — безразмерный вертикальный и горизонтальный размеры ячейки (в эксперименте было $H = 20, L = 10$), получим для ψ_{nm}, θ_{nm} уравнения вида (3.2) с $f_h = 0$.

Тривиальное решение этой системы $\psi_{nm} = \theta_{nm} = 0$ соответствует механическому равновесию, которое устойчиво при

$$Ra < Ra_0 = \pi^4 \left[1 + \left(\frac{L}{H} \right)^2 \right] \left(\frac{1}{L^2} + \frac{1}{H^2} + \frac{1}{4} \right). \quad (3.6)$$

При $Ra > Ra_0$ возникает стационарная одноячейстая конвекция — моды $\psi_{11}, \theta_{11}, \theta_{02}$ отличны от нуля, а остальные по-прежнему не возбуждены. Система уравнений для этих мод совпадает с уже хорошо знакомой нам системой Лоренца. В принципе турбулентный режим мог бы возникнуть и при такой одноячейстой конвекции, если бы в рамках устойчивого одновихревого режима удалось превысить критическое число Рэлея Ra_T *). Однако стохастичность, описываемая системой Лоренца, возникнуть не успевает — гораздо раньше при $Ra = Ra_c < Ra_T$ возбуждаются моды $\psi_{22}, \theta_{22}, \psi_{31}, \theta_{31}, \theta_{04}$, т. е. может установиться режим трех или четырехячейстой конвекции. Система уравнений для этих мод представляет собой три связанные системы лоренцова типа: $(\psi_{11} \sim X_1, \theta_{11} \sim Y_1, \theta_{02} \sim Z_1, \psi_{31} \sim X_2, \theta_{31} \sim Y_2, \theta_{04} \sim Z_2, \psi_{22} \sim X_3,$

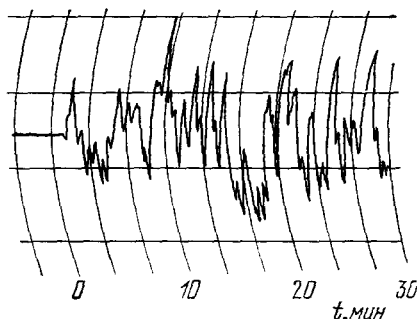


Рис. 27. Показания термопары, помещенной в среднем сечении ячейки Хеле — Шоу (стохастический режим).

*) Именно такая ситуация имеет место в конвективной петле ⁸⁹.

$\theta_{22} \sim Y_3$) *):

$$\left. \begin{aligned} \dot{X}_1 &= Y_1 - X_1 & + X_2 X_3 & , \\ \dot{Y}_1 &= X_1 - Y_1 - Y_1 Z_1 & + Y_2 X_3 + Y_3 X_2 & , \\ \dot{Z}_1 &= -Z_1 + X_2 Y_2 & - Z_1 + X_1 Y_1 & , \\ \dot{X}_2 &= Y_2 - X_2 & + X_1 X_3 & , \\ \dot{Y}_2 &= X_2 - Y_2 - X_2 Z_1 & - Y_1 X_3 + Y_3 X_1 & , \\ \dot{Z}_2 &= -Z_2 + X_3 Y_3 & & , \\ \dot{X}_3 &= Y_3 - X_3 & - X_1 X_2 & , \\ \dot{Y}_3 &= X_3 - Y_3 - X_3 Z_2 & - Y_1 X_2 - Y_2 X_1 & . \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

Эта система исследовалась численно. Было обнаружено, что при $Ra > Ra_c$ в узкой области по Ra устанавливаются регулярные колебания (в фазовом пространстве (3.7) — предельный цикл), амплитуда которых монотонно растет с увеличением Ra , затем возникает стохастический режим. Совпадения численных и экспериментальных результатов оказалось чрезвычайно убедительным. В частности, значения чисел Рэлея, при которых экспериментально возникают стационарное — Ra_0 , регулярное колебательное — Ra_c и турбулентное — Ra_T движения, совпадали с расчетными с точностью до 5%! На рис. 26 приведены полученные экспериментально и вычисленные линии тока при одних и тех же параметрах.

Подчеркнем одно чрезвычайно важное обстоятельство. Если были отличны от нуля начальные условия для большого числа мод (3.5), то после сложного переходного процесса моды, не обладающие симметрией (например, ψ_{12} , ψ_{21} , θ_{12} , θ_{21} , θ_{01} и т. д.), затухали, а поведение остальных не зависело от начальных условий

Уравнения Лоренца оказываются элементарным блоком при построении многих систем гидродинамического типа, описывающих различные конвективные движения. В частности, самому Лоренцу удалось описать турбулентные течения, наблюдаемые в экспериментах по конвекции жидкости внутри вращающегося цилиндрического канала, с помощью 14 уравнений. Аналогичную модель конвекции в подогреваемом снизу эллипсоиде построили Должанский и Плешанова. Они исследовали модель из 6 уравнений — две связанные системы Лоренца⁸⁰:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Omega}_1 &= -\frac{I_3 - I_2}{I_1} \Omega_2 \Omega_3 - \sigma \Omega_1 + \frac{I_2}{I_1} \sigma \theta_2, \\ \dot{\Omega}_2 &= +\frac{I_3 - I_1}{I_2} \Omega_1 \Omega_3 - \sigma \Omega_2 + \sigma \theta_1, \\ \dot{\Omega}_3 &= -\frac{I_2 - I_1}{I_3} \Omega_1 \Omega_2 - \sigma \Omega_3, \\ \dot{\theta}_1 &= -\Omega_2 \theta_3 - \Omega_3 \theta_2 + r \Omega_2 - \theta_1, \\ \dot{\theta}_2 &= \Omega_3 \theta_1 - \Omega_1 \theta_3 + r \Omega_1 - \theta_2, \\ \dot{\theta}_3 &= \Omega_1 \theta_2 + \Omega_2 \theta_1 - \theta_3; \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

*) Для наглядности положительные коэффициенты в (3.7) опущены.

здесь Ω_j и θ_j пропорциональны проекциям угловой скорости жидкого вращения и градиента отклонения температуры от равновесной на главные оси эллипсоида, $\sigma \sim Pr$, $r \sim Ra$. Малая ось эллипсоида (x_3) направлена параллельно силе тяжести и $I_3 > I_2 > I_1$. При отсутствии подогрева $\theta_{1,2,3} = 0$ (3.8) описывает затухающие колебания «жидкого волчка». При подогреве устойчивые трехмодовые движения отсутствуют, в частности, неустойчив и аттрактор Лоренца, возникающий, когда $\Omega_1 = \theta_2 = \Omega_3 = 0$ (или $\theta_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = 0$) при $r = 17$ (для $\sigma = 6$). В рамках этой модели удастся одновременно рассмотреть и баротропный и бароклиный механизмы неустойчивости *). Обнаружилось, что появление дополнительной, баротропной, неустойчивости может подавить имевшуюся в трехмодовой модели стохастичность, превратив движение в регулярное.

Как мы видели, стохастичность может возникнуть в диссипативной системе, содержащей всего лишь три моды. Однако к реальной турбулентности такая стохастичность может иметь только качественное отношение (как механизм возникновения хаоса). Сколько нужно мод, чтобы получить количественное описание перехода к турбулентности? Например, при анализе конвективной петли трех мод достаточно (одновихревое движение)⁸⁹, в ячейке Хеле — Шоу турбулентная конвекция возникает на «базе» 8—9 мод. Для обеспечения переходов к турбулентности в подогреваемом снизу слое Мартину и Маклафлину⁴⁶ потребовалось 39 мод — при $Pr = 1$ они обнаружили следующие переходы: 1. При $r = Ra/Ra_1 = 1,25$ — стационарная конвекция; 2. $1,25 < r < 1,45$ — периодический режим; 3. $1,45 < r < 1,5$ — слабая стохастичность; 4. $1,5 < r < 1,6$ — вновь периодический режим и 5. $r > 1,6$ — развитая стохастичность. Эти переходы (за исключением режима 3) соответствуют реально наблюдавшимся при малых числах Прандтля (см. рис. 22).

Можно утверждать, что число мод, на базе которых возникает турбулентность, зависит от геометрии задачи и характера неустойчивости — вида нейтральной кривой. Действительно, конвективная петля — это, по существу, одномерный резонатор с очень бедным спектром, ячейка Хеле — Шоу — двумерный резонатор, а в подогреваемом снизу плоском слое, помимо двумерных, достаточно быстро увеличивающихся с ростом Ra инкрементов обладают и трехмерные возмущения. Учет таких возмущений в связи с описанием турбулентной термоконвекции в слое впервые был проведен Лоренцом⁹⁰, Мартином и Маклаfliном⁴⁶ и Герценштейном и Шмидтом^{84,99}. В последних работах был обнаружен стохастический режим конвекции во вращающемся слое.

з) Переход к турбулентности в течении Куэтта между цилиндрами

Совсем недавно Суинни, Голлуб и Фенстермахер^{85,102} исследовали возникновение турбулентности в течении Куэтта при вращении внутреннего цилиндра. С помощью лазера на основе эффекта Доплера измерялась радиальная компонента скорости жидкости V_r . Для повышения точности в воду добавлялись полистироловые шарики размером $4,8 \cdot 10^{-5}$ см. На основании зависимости $V_r(t)$ строился спектр мощности, с помощью которого и идентифицировались различные переходы. При всех наблюдавшихся переходах (после возникновения азимутальных волн) авторам не удалось обнаружить изменения пространственной структуры течения — число вихрей по вертикали было 17, а число длин волн по азимуту

*) Бароклиная неустойчивость, типичная для термоконвекции, связана с взаимодействием мод скорости и температуры, баротропная — с взаимодействием различных мод скорости. Такая неустойчивость определяется специальной геометрией полости, в частности, сделав полость сферической, баротропный механизм можно исключить.

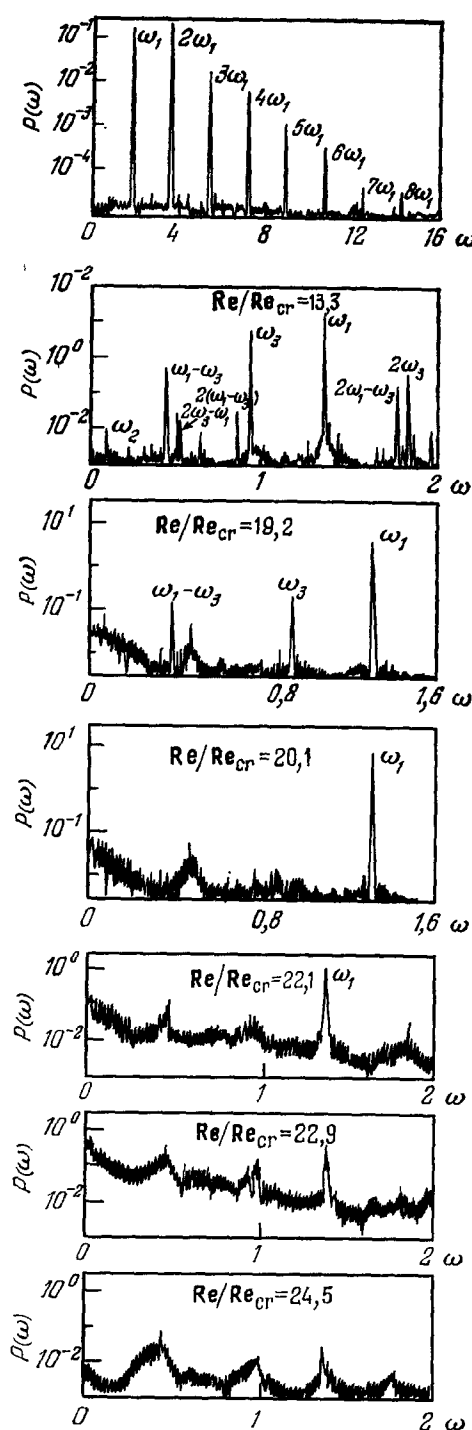


Рис. 28. Результаты эксперимента по переходу к турбулентности в течении Куэтта между цилиндрами ¹⁰².

Число Рейнольдса отнормировано на критическое, при котором возникают вихри Тейлора.

оставалось равным четырем. Состояние ^{17/4}, будучи достигнутым, оставалось устойчивым в интервале изменений числа Re : $2 < Re/Re_{cr} < 45$, где Re_{cr} — значение Re , при котором возникают вихри Тейлора и V_r становится периодической функцией z . То обстоятельство, что видимая структура течения, как и вращательный момент, при наблюдавшихся переходах не изменяются, объясняет, почему эти переходы не были замечены в более ранних экспериментах. Эволюция спектра мощности пульсаций $V_r(t)$ при переходах видна из рис. 28: 1) при $Re > Re_{cr}$ возникали вихри Тейлора; вблизи перехода интенсивность пульсаций росла с ростом Re в соответствии с предсказанной Ландау зависимостью — $\sqrt{Re - Re_{cr}}$ при больших Re , когда нужно было учитывать поправку следующего приближения, проявлялась зависимость $(Re - Re_{cr})^{3/2}$, впервые найденная Деви ¹⁰⁵; 2) при $Re/Re_{cr} = 1,3$ возникла периодическая частота ω_1 азимутальная волна с $m = 4$ (см. рис. 28 — все частоты нормированы на частоту вращения внутреннего цилиндра); 3) при увеличении Re в отдельных экспериментах появлялась низкочастотная спектральная компонента $\omega_2 = 0,2$. Возможно, что ее появление связано с модуляционной неустойчивостью вихрей Тейлора ¹⁰² (см. также ⁷³); 4) при $Re/Re_{cr} = 10,0 \pm 0,2$ мягко без гистерезиса появляется дискретная составляющая на частоте $\omega_3 = (2/3,3) \omega_1$ и составляющие на комбинационных частотах $\omega_1 - \omega_3$, $2\omega_3 - \omega_1$, $\omega_1 - (2\omega_3 - \omega_1)$, $2\omega_1 - \omega_3$ — на рис. 28 они изображены при $Re/Re_{cr} = 13,3$; 5) с ростом Re амплитуда ω_3 , а вместе с ней и амплитуды комбинационных составляющих, падают, и при $Re/Re_{cr} = 19,8 \pm 0,1$ все дискретные компоненты, кроме ω_1 , исчезают, однако остается размытый пик на частоте $\omega \approx \omega_1/3$, впервые появляющийся при $Re/Re_{cr} = 17$. Расстояние между частотами ω_1 и ω_3 с ростом Re непрерывно уменьшалось: ω_1/ω_3 при $Re/Re_{cr} = 10,0$ равнялось $1,63$, а при $Re/Re_{cr} = 19,8$ — $1,41$; 6) На-

конец, при $Re/Re_{cr} = 22,4 \pm 0,2$ исчезает последняя из оставшихся дискретная составляющая ω_1 и течение из квазипериодического становится случайным, характеризуемым сплошным спектром и спадающей автокорреляционной функцией (см. рис. 29). Течение исследовалось до значений $Re/Re_{cr} = 45$ и больше переходов не наблюдалось. Ширина дискретных пиков была $\Delta\omega \approx \approx 0,001$, величина частоты ω_1 совпадала с найденной Коулсом⁷³. Авторы эксперимента также подчеркивают, что после перехода к турбулентности в спектре оставались размытые пики на частотах, кратных $\omega_1/3$.

Тот факт, что возникновение сплошного спектра в данном случае связано не с появлением большого числа несоизмеримых частот, а, наоборот, с исчезновением узких дискретных компонент и образованием размытых пиков, свидетельствует о возможности описания наблюдавшегося перехода к турбулентности в рамках конечномерной модели. Для детального описания всех переходов*) число мод в такой модели должно быть не слишком мало. Не пытаясь смоделировать все наблюдавшиеся переходы, остановимся на одном, самом важном — скачкообразном превращении дискретной составляющей ω_1 в раз-

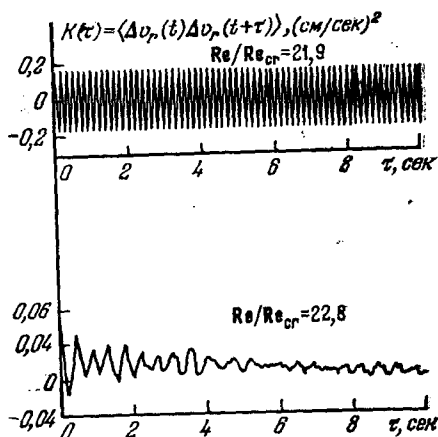


Рис. 29. Автокорреляционная функция скорости перед и после исчезновения дискретной спектральной компоненты (при $Re/Re_{cr} = 22,4$).

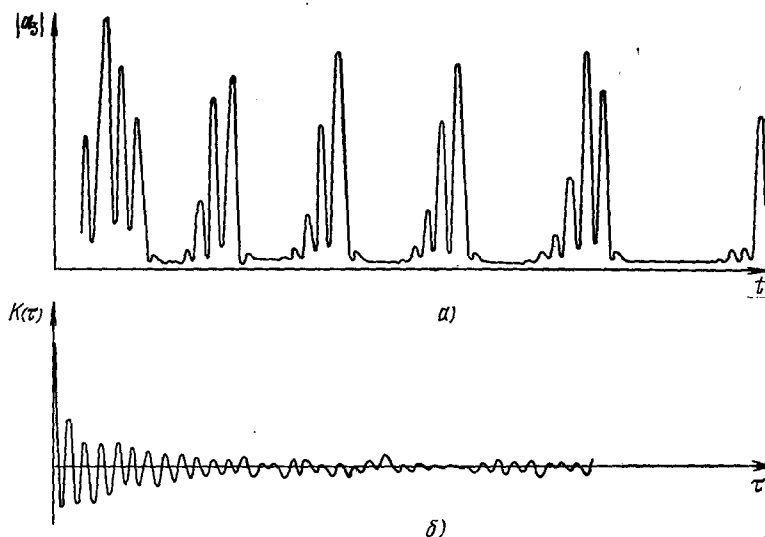


Рис. 30. Реализация (a) и ее корреляционная функция (б), полученные при численном исследовании модели (3.9) при $\rho = 0,2$.

мытый пик. Воспользовавшись тем, что непосредственно перед переходом, помимо ω_1 , в спектре наблюдались еще размытые пики на частотах $\omega_1/3$ и $(2/3)\omega_1$ **),

*) Первые переходы — возникновение вихрей Тейлора и периодических азимутальных волн — удовлетворительно объясняются в рамках простой «нерезонансной» модели типа (2.1). Впервые такое объяснение было дано Стюартом⁷¹.

**) Размытие пиков на этих частотах может быть связано, например, с усилением роли флуктуаций вблизи бифуркации, соответствующей исчезновению инкремента на частоте ω_3 .

смоделируем переход в рамках максимально простой системы — трех резонансно связанных квазигармонических во времени мод с частотами ω_1 , $(2/3)\omega_1$ и $\omega_1/3$. Уравнения для комплексных амплитуд a_3 , a_2 и a_1 таких мод записываются в виде

$$\left. \begin{aligned} \dot{a}_3 &= \gamma a_3 - 3a_1 a_2 - \rho |a_3|^2 a_3, \\ \dot{a}_2 &= \kappa a_2 - a_1^2 + 2a_1^* a_3 - \rho |a_2|^2 a_2, \\ \dot{a}_1 &= -\nu a_1 + a_2 a_1^* + a_3 a_2^*. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Здесь квадратичные слагаемые описывают резонансное взаимодействие мод на квадратичной гидродинамической нелинейности, а кубичные характеризуют нелинейное затухание, связанное с эффектами самовоздействия и передачи энергии затухающим гармоникам, $\gamma > 0$ — характеризует инкремент основной моды ω_1 , а $\nu > 0$ — затухание на частоте $\omega_1/3$, κ может быть как положительно, так и отрицательно.

Передача энергии от интенсивно растущей моды ω_1 субгармоникам, описываемая системой (3.9), исследовалась численно в работах ^{86, 106}. Оказалось, что поток энергии вниз по спектру при таком распадном процессе (в зависимости от соотношения коэффициентов γ , κ , ν) может быть стационарным — в фазовом пространстве (3.9) устойчивое состояние равновесия, периодически модулированным — в фазовом пространстве устойчивый предельный цикл, и случайно модулированным — при этом решение (3.9) характеризовалось сплошным спектром и спадающей автокорреляционной функцией (рис. 30). Поскольку здесь речь идет о квазигармонических процессах, переходу от динамического к стохастическому процессу в спектре самих полей (скорости) соответствует превращение дискретных составляющих в размытые пики. То обстоятельство, что компоненты $\omega_1/3$ и $(2/3)\omega_1$ были уширены и до перехода, по-видимому, не должно качественно сказаться на факте возникновения стохастичности, который описывается в рамках (3.9), в том числе и при $\kappa < 0$.

и) Роль распадов в возникновении турбулентности

Как мы только что видели, распады — передача энергии от высокочастотных растущих возмущений вниз по спектру, обсуждавшиеся подробно в гл. 2, играют важную роль при возникновении турбулентности и при термоконвекции, и в течении Куэтта. По-видимому, довольно

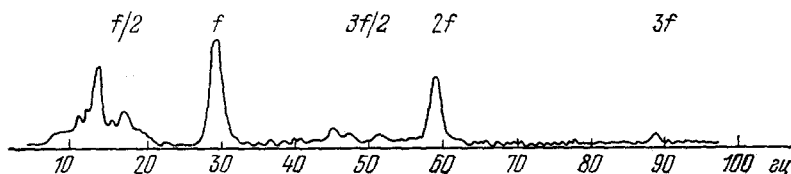


Рис. 31. Спектр пульсаций в слое сдвига ⁸⁷.

общий для автоколебательных систем распадный механизм возникновения хаоса имеет непосредственное отношение к природе гидродинамической турбулентности вблизи границы ее зарождения.

Это подтверждается также и экспериментами по переходам к турбулентности в следе ^{87, 88}. Сато ⁸⁷ исследовал возникновение турбулентности в симметричном потоке с градиентом скорости и обнаружил, что при наличии двух неустойчивых возмущений на частотах f_1 и f_2 возникает эффективная перекачка энергии в моду разностной частоты $f_2 - f_1$, сопровождаемая хаотизацией этих низкочастотных колебаний. Аналогичные результаты получил Миксад ⁸⁸ при анализе перехода к турбулентности в плоскопараллельном потоке. В поток вносились возмущения на частоте, соответствующей максимальному инкременту. Основным, наблюдавшимся в такой ситуации эффектом, была генерация субгармоники и сильное «шумовое» уширение спектра (рис. 31).

Генерация субгармоники, предшествующая возникновению турбулентности, наблюдалась также в численных экспериментах Герценштейна, Сухорукова и Шкадова⁶², моделировавших след кусочно-линейным профилем скорости, и в недавних экспериментах Качанова, Козлова и Левченко с пограничным слоем¹⁰³. В этой работе исследовалась эволюция волн Толлмина — Шлихтинга конечной амплитуды на пластине. Эксперименты проводились в аэрогидродинамической трубе с очень низким уровнем собственной турбулентности — 0,04%, что позволило обнаружить тонкие особенности предтурбулентного режима. Оказалось, что вблизи перехода к турбулентности рост основной волны и ее гармоник вначале стабилизируется, а затем их амплитуды уменьшаются, однако при этом нарастают низкочастотные пульсации, которые согласно линейной теории должны затухать. Во всех экспериментах в спектре этих пульсаций выделяется пик на половинной частоте основной волны. С ростом числа Рейнольдса этот пик упирается и затем исчезает. В этом же эксперименте была обнаружена низкочастотная составляющая в спектре, частота которой существенно зависела от амплитуды основной волны. Возможно, что пульсации с такой частотой возникают в результате распадных процессов более высокого порядка и соответствуют, например, модуляционной неустойчивости волн Толлмина — Шлихтинга.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Возникновение стохастичности в диссипативных системах (как, впрочем, и в консервативных) до недавнего времени интуитивно связывалось лишь с возбуждением в системе очень большого числа степеней свободы. Действительно, экспериментально воспроизвести какое-либо движение системы, скажем, из 10^{23} мод (или молекул) можно только в принципе; практически же оно невоспроизводимо, хотя бы потому,¹ что невозможно задать дважды одни и те же начальные условия для столь большого числа частиц *). Сейчас, однако, стало ясно, что существуют диссипативные системы с небольшим числом степеней свободы, поведение которых (при сколь угодно высокой, но конечной точности задания начальных условий) столь же невоспроизводимо. Причина этого заключается в неустойчивости (расходимости) и запутывании траекторий внутри аттрактора — притягивающей области в фазовом пространстве системы. Существование таких аттракторов, названных странными, в фазовом пространстве разнообразных физических (и не только физических^{26,31,91,92,96}) систем оказалось почти столь же распространенным, как, например, существование предельных циклов.

2. С точки зрения усредненного описания системы со странными аттракторами чрезвычайно интересно нахождение статистики поведения системы по известной структуре странного аттрактора. Возможно, наиболее естественным здесь окажется путь, связанный с переходом от фазовых потоков к отображениям и с использованием символического описания. Однако даже для популярной системы Лоренца эта задача находится еще в стадии решения^{51, 52, 54, 109}.

3. Весьма важным, в связи с упомянутой проблемой, представляется тот факт, что имеющиеся во всякой физической системе малые флуктуации

*) Будет ли ансамбль из большого числа мод демонстрировать динамическое или статистическое поведение, зависит, конечно, не только от числа мод, но и от характера связи между ними. Стационарные нелинейные волны в сплошной среде — пример динамического поведения системы из бесконечного числа мод. В средах с дисперсией такие волны представляют собой результат взаимной синхронизации частот бесконечного числа пространственных гармоник.

не в состоянии разрушить странный аттрактор. Более того, они, по-видимому, очень слабо влияют на статистику системы «на странном аттракторе» — экспоненциальная расходимость траекторий внутри аттрактора оказывается «важнее» случайной внешней силы⁹⁵.

4. Турбулентность — стохастические автоколебания сплошной среды или поля — связана с неустойчивостью решений уравнений уже не в обыкновенных, а в частных производных. Естественно поэтому, что странный аттрактор является непосредственным образом лишь такой турбулентности, которая допускает конечномерное представление. Применительно к гидродинамике это справедливо, например, для двумерных течений или движений жидкости или газа в ограниченной полости (резонаторе). Здесь, в частности, имеется замечательный эксперимент с ячейкой Хеле — Шоу, подтверждающий «аттракторную» модель турбулентности при термомоноконвекции.

5. То, что странный аттрактор — непосредственный образ «конечномерной» турбулентности, характеризуемой сплошным спектром во времени, но дискретным в пространстве, — это лишь одна, сейчас более других ясная сторона его связи с теорией турбулентности. Возможно, роль странных аттракторов в теории стохастических автоколебаний распределенных систем и теории гидродинамической турбулентности, в частности, шире и подобна роли периодических или уединенных стационарных волн в теории регулярных автоколебаний. Так, в неравновесной диссипативной среде, в принципе, могут существовать «случайные» стационарные волны, которым в фазовом пространстве системы, описывающей стационарные (или другие автомодельные) движения, соответствует странный аттрактор. Однако исследования в этом направлении еще только начинаются и какие-либо конкретные результаты нам неизвестны.

Автор выражает свою признательность А. А. Андронову, А. В. Гапонову, В. Р. Когану, О. А. Ладыженской, А. С. Пиковскому, Я. Г. Синаю, А. Л. Фабриканту и В. И. Юдовичу за многократные плодотворные обсуждения и замечания и А. С. Пиковскому за большую помощь в подготовке обзора.

Институт прикладной физики
АН СССР, Горький

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА *)

1. Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс, Фейнмановские лекции по физике, вып. 1, М., «Мир», 1967.
2. А. А. Андронов, Собрание трудов, М., Изд-во АН СССР, 1956.
3. С. М. Рытов, УФН 62, 493 (1971).
4. Л. Д. Ландау, ДАН СССР 44, 339 (1944).
5. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1953.
6. E. Norf, Comm. Pure and Appl. Math. 1, 303 (1948).
7. В. И. Арнольд, Математические методы классической механики, М., «Наука», 1974.
8. P. C. Hemmer et al., Phys. Rev. 111, 689 (1958).
9. С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, М., ИЛ, 1947.
10. D. Ruelle, F. Takken, Comm. Math. Phys. 20, 167 (1971).
11. Н. С. Крылов, Работы по обоснованию статистической физики, М.—Л., Изд-во АН СССР, 1950.
12. М. Борн, УФН 69, 2 (1959).
13. Г. М. Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, М., «Наука», 1970.
14. Г. М. Заславский, Б. В. Чириков, УФН 105, 3 (1971).
15. Э. Хопф, УМН 4 (1), 113 (1949).

*) Данный список не претендует на полноту, в частности здесь не отражены многие математические работы, ссылки на которые можно найти в ¹⁷, ¹⁹, ²³; последние работы в этой области отражены в ¹¹¹, ¹¹².

16. Д. В. Аносов, ДАН СССР 151, 1250 (1963).
17. Д. В. Аносов, Геодезические потоки на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны (Тр. МИАН СССР, т. 90), М., «Наука», 1967.
18. Я. Г. Синай, Лекции по статистической теории, Ереван, Изд-во ЕГУ, 1975.
19. S. Smale, Bull. Amer. Math. Soc. 73, 747 (1967) (имеется перевод: УМН 25 (1), 113 (1970)).
20. В. М. Алексеев, А. Б. Като́к, А. Г. Кушнеренко, Гладкие динамические системы, в кн. IX летняя математическая школа, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1972.
21. З. Нитецки, Введение в дифференциальную динамику, М., «Мир», 1975.
22. J. Moser, Stable and Random Motions in Dynamical System, Princeton, New-Jersey, 1973.
23. В. М. Алексеев, Символическая динамика, в кн. XI летняя математическая школа, Киев, Ин-т математики АН УССР, 1976.
24. Я. Г. Синай, в кн. Нелинейные волны, под ред. А. В. Гапонова, М., «Наука», 1978.
25. M. Hénon, C. Heiles, Astron. J. 69, 73 (1964).
26. O. E. Rössler, Zs. Naturforsch. 31a, 259 (1976).
27. А. С. Пиковский, М. И. Рабинович, ДАН СССР 239, 314 (1978).
28. А. А. Косякин, Е. А. Сандлер, Изв. вузов, сер. «Математика» 3, 32 (1972).
29. А. Н. Шарковский, УМЖ 16, 61 (1964).
30. T. Y. Li, J. A. Yorke, Am. Math. Monthly 82, 985 (1975).
31. R. M. May, Nature 262, 459 (1976).
32. П. Биллингсли, Эргодическая теория и информация, М., «Мир», 1969.
33. Я. Г. Синай, УМН 27 (4), 21 (1972).
34. Л. Бриллюэн, Наука и теория информации, М., Физматгиз, 1960.
35. E. Lorenz, J. Atmos. Sci. 20, 130 (1963).
36. Van Danzig, Fund. Math. 15, 102 (1930).
37. Р. В. Плыкин, Матем. сб. 94 (136), 243 (1974).
38. М. И. Рабинович, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 17, 477 (1974).
39. Y. Aizawa, Prog. Theor. Phys. 56, 703 (1976).
40. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, ЖЭТФ 72, 557 (1976).
41. С. Я. Вышкинд, М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 20, 2 (1977).
42. В. И. Дубровин, В. Р. Коган, М. И. Рабинович, Физ. плазмы 4, 920 (1978).
43. А. С. Пиковский, М. И. Рабинович, В. Ю. Трахтенгерц, ЖЭТФ 74, 1366 (1978).
44. H. Haken, Phys. Lett. A53, 77 (1975).
45. R. Graham, ibid. A58, 440 (1976).
46. J. B. McLaughlin, P. C. Martin, Phys. Rev. A12, 186 (1975).
47. O. Lanford, Preprint, 1976.
48. В. С. Афраймович, В. В. Быков, Л. П. Шильников, ДАН СССР 234, 336 (1977).
49. Е. Б. Вул, Я. Г. Синай, в кн. Многокомпонентные случайные системы, М., «Наука», 1978.
50. J. Guckenheimer, in: J. E. Marsden, M. McCracken, The Hopf Bifurcation and Its Applications, N. Y., Springer-Verlag, 1976, p. 368.
51. R. F. Williams, Preprint, 1976.
52. J. Guckenheimer, Preprint, 1976.
53. Л. П. Шильников, Матем. сб. 76 (116), 378 (1967).
54. M. Lusk, J. Stat. Phys. 15, 455 (1976).
55. А. В. Гапонов, М. И. Рабинович, М. Ф. Шапиро, Вестн. Моск. ун-та, сер. «Физика, астрономия», вып. 4, 42 (1978).
56. Я. И. Ханин, Динамика квантовых генераторов, М., «Сов. радио», 1975.
57. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН 103, 193 (1971).
58. К. Якобс, в сб. Машины Тьюринга и рекурсивные функции, М., «Мир», 1972, с. 183.
59. Ю. И. Неймарк, Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний, М., «Наука», 1972.
60. В. В. Папко, М. И. Рабинович, А. Ю. Соколов, Письма ЖТФ 3, 436 (1977).
61. И. И. Блехман, Синхронизация динамических систем, М., «Наука», 1971.
62. С. Я. Герценштейн, А. Н. Сухоруков, В. Я. Шкадов, Изв. АН СССР, сер. «Механика жидкости и газа», № 3, 10 (1977).
63. О. А. Ладженская, Зап. науч. семинаров. ЛО МИАН СССР, вып. 27, Л., «Наука», 1972, с. 91.
64. R. Tom, SIAM Rev. 19, 189 (1977).
65. P. C. Martin, J. de Phys. 37, 57 (1976).

66. Г. З. Гершуни, Е. М. Жуковичский, Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости, М., «Наука», 1972.
67. R. Krishnamurti, J. Fluid. Mech. 60, 285 (1973).
68. T. Y. Chu, R. J. Goldstein, *ibid.*, p. 285.
69. D. C. Threlfall, *ibid.* 67, 17 (1975).
70. G. Ahlers, Phys. Rev. Lett. 33, 1185 (1974).
71. J. T. Stuart, in: Fluid Dynamics Transactions, v. 5, Warsaw, Inst. of Fundamental Techn. Research, Polish Academy of Sciences, pt. 1,
72. G. I. Taylor, Phil. Trans. Roy. Soc. A223, 285 (1923).
73. D. Coles, J. Fluid. Mech. 21 (pt. 3), 385 (1965).
74. А. С. Монин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 1, М., «Наука», 1965.
75. Г. Шлихтинг, Теория пограничного слоя, М., «Мир», 1974.
76. Р. Бетхов, В. Криминале. Вопросы гидродинамической устойчивости, М., «Мир», 1971.
77. Леонардо да Винчи, Избранные естественно-научные произведения, М., Изд-во АН СССР, 1955.
78. Th. von Karman, Phys. Zs. 13, 49 (1912).
79. Y. V. Chen, Schweizerische Bauzeitung 13, 49 (1972); 91 (44), 1049 (1973).
80. Ф. В. Должанский, В. И. Клячкин, А. М. Обухов, М. А. Чусов, Нелинейные системы гидродинамического типа, М., «Наука», 1974.
81. Д. В. Любимов, Г. Ф. Путиц, В. И. Чернатынский, ДАН СССР 234, 534 (1977).
82. Turbulence Seminar (Lecture Notes in Mathematics. 615), N. Y., Springer-Verlag, 1977.
83. Л. И. Мандельштам, Собрание трудов, т. II, М., Изд-во АН СССР, 1947, с. 13.
84. С. Я. Герценштейн, В. М. Шмидт, Изв. АН СССР, сер. «Механика жидкости и газа», № 2, 9 (1977).
85. J. P. Gollub, H. L. Swinney, Phys. Rev. Lett. 35, 927 (1975).
86. М. И. Рабинович, А. Г. Сазонов, А. Л. Фабрикант, в кн. Теория дифракции и распространения волн. Тексты докладов, т. 1, М., Океанографическая комиссия АН СССР, 1977, с. 25.
87. H. Sato, J. Fluid. Mech. *ibid.* 44, 741 (1970).
88. R. W. Miksad, *ibid.* 56, 695 (1972); 59, 1 (1973).
89. H. F. Creveling et al., J. Fluid. Mech. 67, 65 (1975).
90. E. Lorenz, J. Atmos. Sci. 30, 448 (1963).
91. O. E. Rossler, Phys. Lett. A57, 397 (1976).
92. O. E. Rossler, Zs. Naturforsch. 31a, 1168 (1976).
93. Б. Б. Кадомцев, В. М. Конторович, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 17, 511 (1974).
94. М. И. Рабинович, А. Л. Фабрикант, *ibid.* 19, 721 (1976).
95. Ю. И. Кифер, Изв. АН СССР, сер. матем. 38, 1091 (1974).
96. С. В. Княшко, М. И. Рабинович, ЖЭТФ 66, 1626 (1974).
97. R. V. Flury, W. M. Manheimer, Phys. Fluids 14, 2063 (1971).
98. Ф. М. Израйлев, Б. В. Чириков, Препринт ИЯФ СО АН СССР № 12-73, Новосибирск, 1973.
99. С. Я. Герценштейн, В. М. Шмидт, ДАН СССР 225, № 1 (1975).
100. В. И. Юдович, Асимптотика предельных циклов системы Лоренца при больших числах Рэлея, Ростов, РГУ, 1977.
101. J. L. Kaplan, J. A. York, Preturbulence: a Regime Observed in a Fluid Flow Model of Lorenz. Preprint, March 1977.
102. H. L. Swinney et al., Preprint for Symp. on Turbulent Shear Flows, USA, 1977.
103. Ю. С. Качанов, В. В. Козлов, В. Я. Левченко, Изв. АН СССР, сер. «Механика жидкости и газа», № 3, 49 (1977).
104. C. Normand et al., Rev. Mod. Phys. 49, 581 (1977).
105. A. Davey, J. Fluid. Mech. 14, 436 (1962).
106. А. Н. Караштин, А. Г. Сазонов, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 21, 213 (1978).
107. M. Hemon, Comm. Math. Phys. 50, 69 (1976).
108. В. И. Юдович, в кн. Функциональный анализ и его применения. Труды 6-й школы по математическому программированию и смежным вопросам, М., АН СССР, 1975, с. 44.
109. Л. А. Бунимович, Я. Г. Синай, приложение к 24.
110. О. И. Богоявленский, ДАН СССР 232, 1289 (1977).
111. А. Б. Каток, Я. Г. Синай, А. М. Степин, в кн. Математический анализ, т. 13 (Итоги науки и техники), М., ВИНТИ, 1975, с. 129.
112. Гладкие динамические системы, М., «Мир», 1977.

ФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

537.512.62+539.12

СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ*)*Д. А. Киржниц***1. ВВЕДЕНИЕ**

Возникнув около полувека назад, квантовая механика сразу же дала два могучих победителя. Один из них — квантовая теория многих тел — стал теоретическим фундаментом спектроскопии, квантовой химии, физики твердого тела, физики атомного ядра и других наук, имеющих прямое практическое значение для человечества. Другой — квантовая теория поля — лег в основу физики элементарных частиц, открыв пути описания фундаментальных закономерностей строения вещества. За время совместного существования эти две важнейшие физические теории оказали друг на друга значительное воздействие, которое приняло наиболее яркие формы в последние годы, став одним из источников нынешнего прогресса в физике элементарных частиц.

На протяжении 30—50-х годов в теории элементарных частиц безраздельно господствовал подход, основанный на квантовой теории поля. Этот путь привел теорию к целому ряду выдающихся достижений: предсказанию античастиц и процессов рождения и аннигиляции пар, предсказанию мезонов, устранению расходимостей в квантовой электродинамике и созданию теории радиационных эффектов и др.

Несмотря на эти успехи, к концу 50-х годов появились серьезные сомнения в самой возможности квантовополевого описания элементарных частиц, порожденные рядом трудностей, с которыми столкнулась тогда теория. Сюда можно отнести невозможность устранить расходимости для некоторых классов взаимодействий (в том числе для слабого взаимодействия), аргументы в пользу исчезновения самого взаимодействия между частицами («нуль-заряд») во всех известных тогда моделях теории поля, трудности описания сильного взаимодействия вне рамок теории возмущений.

Одновременно всплыл, усугубив неуверенность в пригодности обычного квантовополевого подхода, и ряд старых «проклятых» вопросов, о которых в периоды успешного развития теории, как правило, забывают. Эти вопросы относятся, главным образом, к проблеме измерений в релятивистской квантовой физике: имеет ли смысл говорить о развитии процесса взаимодействия частиц во времени или же допустимо рассматривать только переход из начального в конечное состояние системы, закономерно ли

*) Расширенный текст доклада на семинаре Отдела теоретической физики ФИАН, посвященном памяти И. Е. Тамма, в апреле 1977 г.

считать взаимодействие между частицами точечным (локальным) или же это неправомерная идеализация и т. п.?

Все сказанное, казалось бы, заставляло с полной серьезностью воспринимать высказанный в те же годы афоризм: «Гамильтонов метод — труп, хотя мы и должны похоронить его со всеми почестями, которые он заслужил». И действительно, успехи теории элементарных частиц в последующие 60-е годы были почти целиком связаны с направлениями, далекими от квантовой теории поля, — с групповым, дисперсионным, аксиоматическим подходами, с феноменологической теорией Редже и др.

Однако в последние годы — к радостному удивлению многих теоретиков старшего поколения — на наших глазах происходит подлинное возрождение и подъем квантовопольевых направлений в теории элементарных частиц. Одновременно меняется и лицо этой теории, которая становится все менее формализованной и все больше наполняется непосредственным физическим содержанием. Разрыв между теорией элементарных частиц и другими разделами теоретической физики, который остро чувствовался еще совсем недавно, сейчас заметно смягчился, уступая место взаимопониманию и взаимообогащению *).

Одно из наиболее значительных достижений, имеющих на счету возрожденного квантовопольевого подхода, состоит в создании моделей, в которых слабое, электромагнитное и (в предварительной форме) сильное взаимодействия элементарных частиц рассматриваются единым образом. В рамках таких моделей исчезли те расхожимости слабого взаимодействия, с которыми прежде не могла справиться процедура перенормировки. Соответственно теория слабого взаимодействия вышла на уровень квантовой электродинамики в смысле возможности выполнить расчет любого эффекта высшего порядка по взаимодействию. В более практическом плане единые теории частиц привели к предсказанию нейтральных токов слабого взаимодействия, ведущих к упругим процессам уже в низшем порядке по слабому взаимодействию. Кроме того, единые теории частиц подкрепили предположения о существовании нового свойства элементарных частиц — «очарования». Впоследствии и то и другое было обнаружено на опыте.

Оказалось, таким образом, что квантовая теория поля не умерла, а пребывала, как Спящая Красавица, в состоянии летаргии. Чтобы ее разбудить, понадобилось, конечно, нечто большее, чем поцелуй сказочного принца. Здесь сказались воздействие многих факторов, среди которых далеко не последнюю роль сыграло привлечение физических идей, заимствованных из теории многих тел и, в частности, из теории сверхпроводимости.

Нелишне подчеркнуть, что явление сверхпроводимости — это не просто один из многочисленных эффектов физики твердого тела, а, без преувеличения, ярчайший физический феномен, в котором квантовые закономерности проявляются в макроскопическом масштабе. Соответственно и теория сверхпроводимости — это не просто одна из рядовых твердотельных моделей, а фундаментальная физическая теория, основанная на глубоких и весьма общих идеях, уже нашедших себе применение в других разделах теории твердого тела, в теории атомного ядра, в теоретической астрофизике. Недаром появления микроскопической теории сверхпроводимости пришлось ожидать несколько десятилетий.

*) Достаточно сказать, что доклад о современной теории элементарных частиц в аудитории теоретиков-«твердотельцев» вызывает сейчас живую заинтересованную реакцию, от которой получает пользу и сам докладчик, а не вежливое молчание, как это было прежде.

В этой статье делается попытка обрисовать общую картину взаимных воздействий теории многих тел (в особенности, теории сверхпроводимости) и теории элементарных частиц за последние четверть века. Основное внимание уделяется той линии взаимных контактов этих теорий, которая прямо ведет к современным единым теориям элементарных частиц. Других важных линий, относящихся, например, к теории фазовых переходов вблизи критической точки, мы практически не касаемся. С другой стороны, мы стремились, чтобы материал статьи, лежащий на стыке теории многих тел и квантовой теории поля, был доступен специалистам и в той и в другой области. По этой причине изложение не содержит многих существенных деталей и ведется на полукачественном уровне, имея своей главной целью дать читателю общее представление о сущности идей и их эволюции. Подробности, относящиеся к изложенным вопросам, можно найти в цитированной литературе.

2. КВАНТОВОПОЛЕВЫЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ МНОГИХ ТЕЛ

Успехи радиоспектроскопии в первые послевоенные годы привели к экспериментальному обнаружению радиационных эффектов (эффектов высшего порядка по взаимодействию электронов и фотонов) в квантовой электродинамике — сдвига атомных уровней Лэмба и аномального магнитного момента электрона. В те же годы начали вступать в строй первые ускорители, способные рождать элементарные частицы (пионы и др.).

Все это стимулировало мощное развитие аппарата релятивистской квантовой теории поля. «Старый» аппарат, копирующий в своей основе нерелятивистскую квантовую механику, оказался плохо приспособленным для расчета эффектов высшего порядка и для проведения программы перенормировки — выделения физически осмысленной части бесконечных выражений.

Методический прогресс, достигнутый в теории элементарных частиц к середине 50-х годов, был огромен (см. переводы оригинальных работ¹ и курсы квантовой теории поля²). Физики — теоретики и экспериментаторы — получили в свои руки такой простой, наглядный и емкий образ, как диаграмма Фейнмана³). Расчет эффектов высшего порядка свелся к применению простых и единообразных правил на уровне почти полного автоматизма. Если Вайскопфу в его классической работе⁴ для вычисления собственной энергии электрона в низшем порядке теории возмущений понадобились десятки страниц (причем ответ возникал как итог почти полной компенсации многих слагаемых — продольной, поперечной, магнитной и др. энергий), то сейчас расчет той же величины может даваться студенту в виде задачи у доски. Был предложен и ряд «точных» методов, дающих возможность выходить за рамки теории возмущений и проводить исследования общего характера — методы функций Грина, функциональных интегралов, ренормализационной группы и др.

Эти достижения недолго оставались локализованными в рамках теории элементарных частиц. Начиная с середины 50-х годов новые методы квантовой теории поля стали распространяться на теорию многих тел. Понадобились считанные годы для создания гибкого, экономного и эффективного аппарата, приспособленного для решения широкого круга задач макро- и микрофизики (см., например, ^{4, 5}).

Нужно отметить, что сама возможность использования техники квантовой теории поля опирается на применение в теории многих тел метода вторичного квантования, который был предложен именно в теории многих тел, но затем долгие годы применялся только в теории элементарных частиц. В рамках этого метода различия между системой, состоящей из фиксированного числа нерелятивистских частиц, и релятивистским квантованным полем становятся не принципиальными. Метод вторичного квантования непосредственно имеет дело не с частицами, а с квантованным полем, рождающим или уничтожающим частицы в данной точке пространства; сами же частицы проявляются как кванты этого поля. По этой причине описание системы многих частиц и квантованного поля элементарных частиц проводится одинаковым путем. Это подобие простирается весьма далеко: например, важный процесс возбуждения ферми-системы (переход частицы из занятого на более высокий свободный уровень) принимает вид процесса рождения пары — частицы и «дырки» в распределении Ферми; обратный процесс отвечает аннигиляции этой пары.

Как и в теории элементарных частиц, квантовополевые методы в сильной степени упростили и автоматизировали расчеты эффектов высшего порядка в динамиче-

¹ *) Прообраз диаграмм Фейнмана (в частности, важное условие попятного во времени движения античастицы) появился еще в довоенных работах Зисмана⁶.

ских, статистических и кинетических задачах, относящихся к системам многих частиц. В «старой» теории многих тел практиковался целый ряд приближенных методов (методы Хартри — Фока, Дебая — Хюккеля и многих др.), каждый из которых обосновывался по-своему и имел недостаточно ясную область применимости. Теперь эти методы получили единую основу и приобрели смысл различных приближений к точным полевым уравнениям, отвечающих малости соответствующих безразмерных параметров. Соответственно стала выполнимой задача улучшения перечисленных методов и расширения области их применимости.

Широкое применение в теории многих тел получили и упомянутые выше «точные» методы, в особенности метод функций Грина. Эти функции содержат в себе обширную и многостороннюю информацию о системе многих тел, относящуюся как к внутренним свойствам системы (распределения вероятностей физических величин, энергетический спектр), так и к результатам воздействия на нее различных внешних факторов (сечения рассеяния, вероятности возбуждения и т. д.).

Особенно существенно, что функции Грина прямо отвечают важному понятию квазичастицы, с введением которого был связан целый ряд достижений теории многих тел. Благодаря взаимодействию между частицами можно говорить не о состояниях отдельных частиц, а лишь о состоянии системы в целом. Однако при выполнении некоторых условий оказывается возможным перейти на язык особых коллективных образований — квазичастиц, которые ведут себя уже в значительной мере независимым образом. Их квантовые числа те же, что и у исходных частиц, но их спектр (связь между энергией и импульсом) зависит от закона взаимодействия, температуры и т. п.

К числу квазичастиц относят также и коллективные образования с иными квантовыми числами, представляющие собой как бы связанные состояния двух, трех и т. д. «обычных» квазичастиц; например, экситон в твердом теле можно рассматривать как связанное состояние электрона и «дырки». Зная, какие квазичастицы имеются в системе и каков их спектр, — а именно эти данные заключены в функциях Грина, — можно получить достаточно полное описание системы многих тел (подробнее см. 4, 5).

В результате внедрения квантовополевого метода значительно усовершенствовались как вычислительный аппарат, так и система образов и язык теории многих тел. Все это привело к существенному прогрессу во многих разделах этой теории. Наиболее яркий пример, относящийся к достижениям последних лет, — успехи в решении проблемы фазовых переходов вблизи критической точки (см. 7).

Сказанное в полной мере относится и к теории сверхпроводимости. Квантово-полевые методы сыграли важную роль в создании микроскопической теории сверхпроводимости (методы Боголюбова, Горькова — Намбу) и, особенно, в ее дальнейшем развитии 4, 8. Сегодня трудно найти статью или монографию по соответствующей тематике, где не встречались бы диаграммы Фейнмана, функции Грина и т. п.

Квантовополевые методы — это была ссуда, которую теория многих тел получила от теории элементарных частиц. Далее речь будет идти о том, как теория многих тел погашает эту ссуду. Расплачивается она не менее, а, пожалуй, более ценной валютой — физическими идеями.

3. ЕДИНАЯ ТЕОРИЯ, МАТЕРИИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Выше уже говорилось, что к концу 50-х годов возникли сомнения в возможности квантовополевого описания элементарных частиц. Перед многими людьми, задумывавшимися тогда о судьбах теории элементарных частиц, вставал вопрос — не коренятся ли соответствующие трудности в том, что мы пытаемся строить независимые теории отдельных типов взаимодействий (электромагнитного, сильного и т. д.) вместо единой теории, объединяющей все частицы и их взаимодействия. Другими словами, высказывалась надежда на взаимную компенсацию трудностей, присущих теориям отдельных типов взаимодействий, при их объединении в рамках всеобщей теории частиц.

Это, вероятно, было одной из причин того энтузиазма, с которым была встречена программа построения единой теории материи, предложенная в те же годы Гейзенбергом (см. 9). Он поставил перед собой задачу воплотить неравноправный, «аристократический» принцип строения вещества — ввести некоторые первичные частицы («праматерию»), а все остальные частицы получить как связанные состояния различного числа первичных частиц. Иными словами, все имеющиеся в природе элементарные частицы должны были проявиться как квазичастицы в системе взаимодействующих первичных частиц (см. гл. 2).

Первичные частицы должны иметь спин $1/2$ (чтобы получить весь необходимый набор спинов $0, 1/2, 1 \dots$) и обязаны взаимодействовать друг с другом (чтобы возникли их связанные состояния). Поэтому фундаментальное уравнение теории Гейзенберга, которому должно подчиняться поле первичных частиц, имеет вид нелинейного уравнения для спинорного поля ψ . Отправляясь от обычного уравнения Дирака *)

$$(i\gamma\partial - m)\psi = 0 \quad (1)$$

(γ — матрицы Дирака, m — масса частиц, ∂ — четырехмерный градиент), мы приведем уравнение Гейзенберга в его простейшей форме

$$[i\gamma\partial - \lambda(\bar{\psi}\psi)]\psi = 0, \quad (2)$$

где λ — некоторая константа связи.

Нужно специально подчеркнуть, что в уравнении (2) отсутствует член с массой частицы (см. (1)). Этим достигнута не только простота уравнения. Дело в том, что уравнение (2), как фундаментальное уравнение природы, должно обладать наивысшей возможной симметрией (см. также ниже гл. 8). Между тем член с массой нарушал бы инвариантность уравнения относительно целого ряда преобразований (преобразования $\psi \rightarrow \gamma_5\psi$, где γ_5 — пятая матрица Дирака, масштабного преобразования $x \rightarrow \theta x$, $\psi \rightarrow \theta^{-1/2}\psi$, где θ — некоторое число, и др.). Забегая вперед, отметим, что отсюда вовсе не следует, что первичные частицы, поле которых удовлетворяет уравнению (2), обязательно будут безмассовыми; этот вопрос специально обсуждается в гл. 8.

На пути осуществления программы Гейзенберга встретились большие трудности, связанные главным образом с невозможностью устранить присущие уравнению (2) расходимости с помощью обычного метода перенормировок. Поэтому, несмотря на отдельные успехи (например, получение близкого к опытному значения постоянной тонкой структуры), программа Гейзенберга осталась нереализованной (см., однако, ниже гл. 8). Тем не менее, она оказала немаловажное идейное воздействие на последующее развитие теории элементарных частиц и послужила одним из звеньев в той цепи событий, которые привели к сегодняшнему прогрессу в этой теории. Одна из наиболее существенных идей такого рода связана с проблемой симметрии.

Гейзенберг с самого начала столкнулся со следующей трудностью. Все было бы относительно просто, если бы все типы взаимодействий элементарных частиц обнаруживали одинаковую степень симметрии. Тогда нужно было бы подчинить этой симметрии фундаментальное уравнение теории; одновременно та же симметрия проявилась бы во взаимодействии любых квазичастиц. Но хорошо известно, что взаимодействия элементарных частиц характеризуются как раз неодинаковой степенью симметрии: при переходе от сильного взаимодействия к электромагнитному теряется изотопическая симметрия, при последующем переходе к слабому взаимодействию перестает работать закон сохранения четности и т. д. Гейзенберг прекрасно понимал, что немислимо придумать сколько-нибудь простое фундаментальное уравнение, которое бы автоматически обнаруживало разную степень симметрии во взаимодействии квазичастиц различного типа.

Но недаром Гейзенберг был автором теории ферромагнетизма и делал (правда, неудачные) попытки создать теорию сверхпроводимости. Именно эти теории и подсказали ему выход из положения, который состоял в привлечении идеи о спонтанном нарушении симметрии, уже давно разрабаты-

*) Используется система единиц, в которой $\hbar = c = 1$.

вавшейся в тех разделах теории многих тел, где изучаются упорядоченные состояния, фазовые переходы и т. п.

Сейчас нам придется сделать довольно длинное отступление в область теории многих тел и рассмотреть с необходимой для дальнейшего степени подробности общую теорию спонтанного нарушения симметрии и ее конкретную реализацию в теории сверхпроводимости. К теории Гейзенберга мы еще вернемся в гл. 8.

4. СПОНТАННОЕ НАРУШЕНИЕ СИММЕТРИИ

Теория многих тел рассматривает особый класс упорядоченных состояний систем многих частиц, когда возникает некоторая макроскопическая величина (параметр порядка), понижающая симметрию таких состояний. Простейшим примером упорядоченного состояния может служить ферромагнетик; его суммарный магнитный момент, играя роль параметра порядка, выделяет определенное направление в пространстве и нарушает тем самым вращательную симметрию. Другой пример — кристаллическое состояние твердого тела, где параметром порядка служит отклонение плотности ионов, образующих кристаллическую решетку, от однородного распределения. Здесь благодаря выделенному положению в пространстве узлов решетки нарушается трансляционная (а также и вращательная) симметрия системы. Более важный для дальнейшего, но одновременно и более сложный пример сверхпроводника будет рассмотрен отдельно в гл. 7.

Существенно, что симметрия упорядоченного состояния ниже симметрии, которой обладает гамильтониан системы. Так, в простейшем случае микроскопические уравнения теории ферромагнетизма и теории кристалла полностью однородны и изотропны. Поэтому упорядоченные состояния отвечают таким решениям уравнений динамики, которые менее симметричны, нежели сами эти уравнения.

В том, что это возможно, убеждает уже следующий элементарный пример. Рассмотрим уравнение Ньютона для свободной материальной точки $\ddot{x} = 0$, которое, очевидно, и трансляционно и вращательно инвариантно. Однако его решение $x = x_0 + vt$ выделяет и определенную точку в пространстве (x_0) и определенное направление ($n = v/v$). Здесь одной и той же энергии частицы отвечает целый набор ее возможных движений, отличающихся значениями x_0 и n . В целом этот набор симметричен относительно трансляций и вращений, но начальные условия «выбирают» из него движение с выделенными значениями x_0 и n .

Применительно к упорядоченному состоянию системы многих частиц речь должна идти о вырождении состояния системы (при нулевой температуре — основного состояния, вакуума), когда ему отвечает целый набор состояний той же энергии. В целом этот набор обладает полной симметрией гамильтониана, но под воздействием данного преобразования симметрии состояния этого набора не остаются неизменными, а переходят в другие состояния того же набора. Именно в условиях вырождения система оказывается неустойчивой, аномально чувствительной по отношению к малым внешним воздействиям, снимающим вырождение *). Поэтому существует такое воздействие, которое, несмотря на свою малость, приведет к вполне ощутимым последствиям — выделит и реализует лишь

*) Формально это можно видеть, рассматривая отклик системы на малое возмущение по теории возмущений: переходам внутри указанного набора отвечают малые энергетические знаменатели, величина которых определяется расщеплением уровней, т. е. величиной порядка самого внешнего воздействия.

одно из состояний полного набора, имеющее более низкую симметрию, чем сам гамильтониан.

В случае изотропного ферромагнетика такой набор объединяет состояния со всевозможными направлениями магнитного момента: свободно-подвешенному ферромагнетику можно придать любое направление, не затрачивая на поворот энергии, что и отражает вырождение состояния системы. Малое внешнее магнитное поле снимает вырождение и реализует такое состояние ферромагнетика, которому отвечает направление магнитного момента, совпадающее с направлением поля. В случае кристалла объединены его состояния, отвечающие всевозможным расположениям решетки в пространстве. Малое внешнее электрическое поле снимает вырождение и фиксирует положение решетки.

Сказанное и приводит нас к картине спонтанного нарушения симметрии, которое возникает не благодаря асимметрии динамики системы и не из-за асимметрии макроскопических внешних воздействий, а вследствие реализации лишь одной из составляющих (в целом симметричного) набора состояний одинаковой энергии.

Явление спонтанного нарушения симметрии на первый взгляд противоречит общему закону П. Кюри «Симметрия следствия не ниже симметрии причины». Однако, понимая под следствием само спонтанное нарушение, мы должны считать причиной не только симметричную динамику, но и то малое воздействие, которое выделяет одно из состояний полного набора. Как ни мало это воздействие в энергетическом смысле, оно играет роль «спускового крючка» и ведет к вполне конечным последствиям.

5. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ УПОРЯДОЧЕННЫХ СОСТОЯНИЙ И ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Макроскопические (сильные) внешние воздействия на систему многих тел влияют на степень ее упорядоченности. Одни из таких воздействий влияют на параметр порядка непосредственно, меняя его величину в обе стороны — увеличивая или уменьшая этот параметр в упорядоченном состоянии, а также приводят к появлению параметра порядка в неупорядоченном без внешнего воздействия состоянии системы (вынужденное нарушение симметрии). Примером может служить воздействие сильного магнитного поля на ферромагнетик. Воздействия другого типа не сказываются прямо на параметре порядка, но, меняя характеристики системы, влияют в конечном счете и на величину этого параметра. Важнейший пример — воздействие достаточно высокой температуры $T \geq T_c$ (T_c — критическая температура), ведущее к исчезновению (из-за тепловых флуктуаций) параметра порядка и к восстановлению симметрии. Это прямо следует из условия минимума свободной энергии $F = E - TS$: при больших T , независимо от вида энергии E , выгодно увеличение энтропии S , т. е. разупорядочение системы.

Такой фазовый переход от упорядоченного к неупорядоченному состоянию, как и сами эти состояния, удобно описывать на языке простой феноменологической модели. Рассмотрим свободную энергию $F(\Psi)$, как функцию параметра порядка Ψ , которая имеет минимум по Ψ в состоянии равновесия; при $T = 0$ нужно говорить об энергии системы. Интересуясь спонтанным нарушением симметрии относительно некоторого преобразования, следует считать динамическую характеристику системы — величину $F(\Psi)$ — не меняющейся при таком преобразовании, т. е. зависящей только от его инвариантов, выраженных через параметр порядка. Зададимся целью построить простейшее выражение для $F(\Psi)$, которое вело бы при одних условиях к неупорядоченному состоянию $\Psi = 0$, а при других — к упорядоченному состоянию с нарушением рассматриваемой симметрии. Это же выражение будет, очевидно, описывать и сам фазовый переход от одного из таких состояний к другому.

Самый простой случай отвечает симметрии относительно отражения $\Psi \rightarrow -\Psi$, где Ψ — действительная скалярная величина. Считая вначале, что Ψ не зависит от координат, имеем единственный инвариант преобразования — величину Ψ^2 . Если его значения относительно малы, то можно ограничиться разложением функции $F(\Psi)$ в ряд

$$F(\Psi) = F_0 + \alpha \Psi^2 + \beta \Psi^4. \quad (3)$$

Считая $\beta > 0$, легко видеть, что при $\alpha > 0$ равновесное значение Ψ равно нулю и мы имеем дело с неупорядоченным состоянием (рис. 1, I). Однако при $\alpha < 0$ состояние системы вырождено по знаку Ψ — имеется два минимума одинаковой глубины,

отвечающие $\Psi = \pm (-\alpha/2\beta)^{1/2}$ (рис. 1,2). Малое внешнее воздействие, делающее один из минимумов хотя бы чуть глубже другого, реализует состояние со спонтанным нарушением исходной симметрии. Для случая, когда Ψ — медленно меняющаяся функция координат, добавляется инвариант $(\nabla\Psi)^2$ и вместо (3) возникает разложение

$$F(\Psi) = F_0 + \alpha\Psi^2 + \beta\Psi^4 + \gamma(\nabla\Psi)^2. \quad (3')$$

Более важна для дальнейшего симметрия относительно «глобального» калибровочного преобразования $\Psi \rightarrow \Psi \exp(i\chi)$, где χ — постоянная действительная фаза; о такой симметрии можно говорить, если Ψ — комплексный параметр порядка. Это преобразование, относящееся, в отличие от отражения, к разряду непрерывных, имеет инварианты $|\Psi|^2$ и $|\nabla\Psi|^2$. Соответственно разложение (3') заменяется следующим:

$$F = F_0 + \alpha|\Psi|^2 + \beta|\Psi|^4 + \gamma|\nabla\Psi|^2; \quad (4)$$

здесь имеется вырождение по фазе θ параметра порядка $\Psi = |\Psi| \exp(i\theta)$, а спонтанное нарушение отвечает фиксации этой фазы. Геометрически мы должны теперь рассматривать тело вращения, получающееся из кривой рис. 1 ее вращением вокруг оси ординат. Кривой 2 рис. 1 отвечает теперь круговой желоб («донышко бутылки»), глубина которого не зависит от азимутального угла, совпадающего с фазой θ . Малая ямка на дне

желоба при некотором значении угла фиксирует соответствующую величину фазы θ . Изложенные соображения лежат в основе феноменологической теории Ландау (см. ¹⁰), описывающей широкий круг фазовых переходов 2-го рода. В этой теории величина α принята равной простейшей функции $a(T - T_c)$ ($a > 0$), переходящей с ростом T от отрицательных значений к положительным в точке $T = T_c$. При приближении к этой точке параметр порядка плавно стремится к нулю, оставаясь равным нулю при больших температурах. Это и означает принадлежность перехода ко 2-му роду (рис. 2,а).

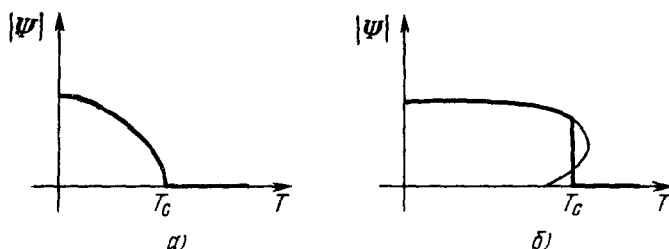


Рис. 2.

Альтернативное описание фазового перехода основано на том, что кривая 1 рис. 1 при $T = 0$ имеет смысл эффективной потенциальной энергии системы. Максимум этой кривой отвечает неустойчивому неупорядоченному основному состоянию системы, минимумы — перестроенному благодаря появлению параметра порядка устойчивому, основному состоянию; глубина этих минимумов определяет выигрыш в энергии в результате такой перестройки. Пока $T > T_c$, средняя энергия системы, с учетом ее тепловой составляющей, лежит выше центрального горба кривой и реализуется симметричное состояние с $\Psi = 0$ (система проводит одинаковое время в состояниях, отличающихся знаком Ψ). Однако при $T < T_c$ энергия опускается ниже центрального горба и состояние системы попадает в один из минимумов кривой, что и соответствует спонтанному нарушению симметрии.

Теория Ландау, исходящая из малости Ψ , несправедлива далеко от критической точки. Непригодна она и в самой окрестности T_c . Дело в том, что в этой области упорядоченная и неупорядоченная фазы вещества отличаются друг от друга столь мало, что на передний план выдвигаются не учитываемые теорией Ландау флуктуации параметра порядка, переводящие одну фазу в другую. Именно в описании таких флуктуаций и состоял тот успех теории многих тел, о котором упоминалось в гл. 2.

Флуктуации параметра порядка могут привести к превращению фазового перехода 2-го рода (плавное исчезновение Ψ , отсутствие скрытой теплоты перехода) в фазовый переход 1-го рода (скачкообразное исчезновение Ψ , наличие хотя бы малой скры-

той теплоты). В простейшем случае дело сводится к такому нарушению неявного предположения об аналитичности функции $F(\Psi)$ (оно делалось выше при разложении этой функции в ряд по инвариантам), которое проявляется в возникновении в правой части (3) дополнительного члена $(\Psi^2)^{3/2}$ с отрицательным коэффициентом. Благодаря этому функция $F(\Psi)$ приобретает дополнительный минимум (рис. 3), который касается оси абсцисс при конечном значении Ψ . Это и ведет к скачкообразному исчезновению параметра порядка в точке T_c (рис. 2, б). Мы столкнемся с эффектом такого рода ниже.

Отметим в заключение этого раздела, что спонтанное нарушение симметрии относительно непрерывного преобразования сопровождается появлением квазичастицы, энергия которой обращается в нуль вместе с импульсом. Говорят также об акустическом (бесщелевом) спектре квазичастицы или, имея в виду релятивистскую формулу $E = \sqrt{p^2 + m^2}$, о равной нулю ее массе. Это — известная теорема Голдстоуна (см. также ниже). На классическом языке частица Голдстоуна отвечает колебаниям того параметра, по которому вырождена энергия системы. Именно поэтому для рождения такой частицы с нулевым импульсом не требуется затраты энергии*). Для ферромагнетика частицей Голдстоуна служит спиновая волна (колебания направления магнитного момента), для кристалла — звук (колебания положений ионов решетки).

Иногда говорят, что появление частицы Голдстоуна ведет к восстановлению спонтанно нарушенной симметрии. Это нужно понимать следующим образом. Как уже говорилось, суть спонтанного нарушения состоит в выделении одного из состояний, входящих в симметричный в целом набор. Частица же Голдстоуна отвечает переходам внутри этого набора и ее появление ведет к перемешиванию входящих в него состояний. Теорему Голдстоуна легко проиллюстрировать на примере упорядоченной системы с комплексным параметром порядка (см. выше), для которой частица Голдстоуна отвечает колебаниям фазы θ этого параметра. Вырождение по θ означает, что свободная энергия не зависит от постоянной фазы θ и потому, будучи разложена по малым отклонениям фазы $\delta\theta$, содержит член $(\nabla\delta\theta)^2$, но не просто $(\delta\theta)^2$. Минимизация F по $\delta\theta$ дает статическое (отвечающее равной нулю энергии) уравнение колебаний $\nabla^2\delta\theta = 0$, которое и ведет к выводу о равенстве нулю импульса квазичастицы.

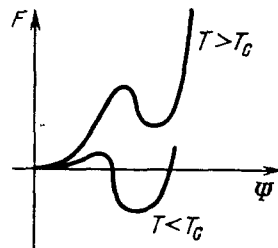


Рис. 3.

6. БОЗЕ-КОНДЕНСАЦИЯ

С простейшим примером упорядоченного состояния с комплексным параметром порядка мы сталкиваемся в явлении бозе-конденсации идеального нерелятивистского газа, состоящего из большого, но фиксированного числа бозе-частиц (см. ¹⁰). Рассмотрев здесь это явление, мы перейдем затем к родственному, но более сложному явлению сверхпроводимости.

Введем оператор бозе-поля

$$\psi(x) = \sum_p a_p \exp(ipx), \quad (5)$$

где a_p — оператор уничтожения частицы в состоянии с импульсом p и энергией $E_p = p^2/2m$. Заполнение уровней при произвольной температуре T дается числами заполнения

$$n_p = \langle a_p^\dagger a_p \rangle = \left[\exp\left(\frac{E_p - \bar{\mu}}{T}\right) - 1 \right]^{-1}, \quad (6)$$

где $\bar{\mu}$ — химический потенциал, определяемый равенством $\sum_p n_p = N$, N — полное число частиц. Символ

$$\langle \dots \rangle = \frac{\text{Sp}[\dots \exp(-H/T)]}{\text{Sp}[\exp(-H/T)]}$$

означает усреднение по распределению Гиббса (H — гамильтониан); при $T = 0$ этот символ переходит в среднее по основному состоянию системы $\langle \dots | 0 \rangle$, где $| 0 \rangle$ — волновая функция этого состояния.

Сущность явления бозе-конденсации выясняется, если устремить величину N к бесконечности и следить за поведением в этом пределе доли полного числа частиц

*) Теорема Голдстоуна может быть несправедлива для систем с дальнедействующими (кулоновскими) силами, где как раз при малых импульсах резко нарастает роль взаимодействия между частицами.