

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

535.14

СКОРОСТЬ СИГНАЛА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

М. И. Широков

1. Введение. Принцип релятивистской причинности	697
2. История задачи о скорости сигнала в квантовой электродинамике	699
3. Внешний ток как источник сигнала и нерелятивистский электрон как детектор	703
4. Общее доказательство конечности скорости сигнала в квантовой электродинамике	707
Приложения	711
А. Вычисление амплитуды вероятности возбуждения атома-детектора сигнала (711). Б. Точное вычисление разностей $A_J - A$ и $\psi_J - \psi$ (713).	
Цитированная литература	714

1. ВВЕДЕНИЕ. ПРИНЦИП РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ПРИЧИННОСТИ

Принцип: «скорость сигнала не должна превосходить скорость света» — не гарантируется одной только релятивистской инвариантностью теории. Он является синтезом обычного условия причинности (следствие не может наступить раньше причины) и специальной теории относительности. Если сигнал можно передать со сверхсветовой скоростью, то найдется лоренцова система координат, в которой причина (включение источника сигнала) окажется позже следствия (приход сигнала). И тогда может возникнуть чисто логическое противоречие типа «следствие может отменить свою причину» (см. § 2.7 книги ¹). В этом обзоре сформулированный выше принцип называется принципом релятивистской причинности (РП).

Распространено мнение, что локальная коммутативность *) (ЛК) квантовой теории поля обеспечивает выполнение РП. Две полевые величины, определенные в точках x и y , локально коммутативны, если их коммутатор (или антикоммутатор) исчезает, когда x и y разделены пространственноподобным интервалом (математически более корректную формулировку см., например, в гл. 3, § 1 книги ²). Таковы, например, выписываемые в любом учебнике коммутационные соотношения для гейзенберговских операторов E (электрическое поле), H (магнитное) и ψ (электронно-позитронное) в лоренцевой калибровке квантовой электродинамики.

РП из локальной коммутативности выводят, например, так. Локальность коммутационных соотношений для E и H означает, что возможны независимые точные измерения полей в двух соседних пространственно-подобных областях: одно измерение не мешает другому. Если бы поля распространялись со сверхсветовой скоростью, то это было бы невозможно (см. конец § 48 в книге ³).

Тем не менее в теориях, где выполняется ЛК, имеют место явления, которые свидетельствуют о том, что одна только ЛК не обеспечивает РП. Приведем примеры.

Общезвестно явление мгновенного расщепления волнового пакета релятивистской частицы. Например, в рамках теории квантованного свободного скалярного поля (в которой условие ЛК, конечно, выполнено) можно поставить и решить задачу о движении пакета соответствующей частицы. Вначале, при $t = t_0$, частица локализована в конечном объеме V , так что вероятность найти частицу вне V равна нулю (финитный пакет). Оказывается, что в момент $t_0 + \tau$ с ненулевой вероятностью можно найти частицу в области, отстоящей от V на расстоянии R , большем, чем $c\tau$ (см., например, ⁴). В работе ⁴ предлагается такой вывод из полученного противоречия с РП:

*) Вытекающая из условия причинности Боголюбова; см. гл. 4, § 3 книги ².

финитные пакеты невозможны. Однако это означает преодоление трудности с помощью введения в теорию нового постулата, так что РП должна обеспечиваться теперь не только условием ЛК, но и этим постулатом.

Рассмотрим теперь распространение не частицы, а свободного квантованного поля (скалярного, электромагнитного и т. п.). Из классической электродинамики известно, что если электромагнитное поле в момент $t = t_0$ каким-то образом было локализовано в области V_S , то потом оно распространяется со скоростью c . Поэтому детектор, регистрирующий, например, электрическое поле (неподвижный пробный заряд) в области V_D на расстоянии R от V_S , сработает только спустя время R/c . В квантовом случае постановка соответствующей задачи должна быть несколько иной. Мы не можем считать, что вне V_S при $t = t_0$ и E и H равнялись нулю: в силу одновременного коммутационного соотношения

$$[E_x(x, t), H_y(x', t)] = i \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - x'), \quad (1.1)$$

поля $E(x, t)$ и $H(x, t)$ в любой точке x не могут одновременно принимать точные, в частности, нулевые значения. Будем считать, что вне V_S при $t = t_0$ равно нулю электрическое поле E . Если к тому же в точках $x_S \in V_S$ оно принимает некоторые определенные значения, то начальное состояние определено полностью. Это состояние нестационарно, поскольку E не коммутирует с гамильтонианом $\int d^3x (E^2 + H^2)$.

Поэтому распределение по E в области V_D должно как-то меняться со временем. Это изменение можно найти с помощью решения гейзенберговских уравнений (свободные уравнения Максвелла) для полей E и H , см., например, далее гл. 4. Вместо этого мы приведем качественные соображения, приводящие к тому же результату, что и точное решение. Раз H вне V_S в момент $t = t_0$ принимает ненулевые значения, как говорилось выше, то в силу уравнений Максвелла это ненулевое H порождает сразу после момента t_0 электрическое поле всюду вне V_S , в том числе и в области V_D . Заметим, что мы использовали частное (одновременное) значение одного из локальных перестановочных соотношений при выводе этого парадоксального результата.

Однако он не означает в данном случае, что E распространяется мгновенно. Дело в том, что если бы E при $t = t_0$ равнялось нулю всюду, то и в этом случае мы имели бы ненулевое E всюду сразу после момента t_0 (на основании тех же качественных соображений). Если этот «фон» квантовых флуктуаций E вычесть, то скорость распространения E окажется конечной (см. далее гл. 4). Однако необходимость учитывать этот «фон» не вытекает из ЛК. Одной из причин существования «фона» являются одновременные перестановочные отношения, которые имеют место как в теории, где есть ЛК, так и в теории, где ЛК нет (как, например, в нелокальных теориях).

Наконец, приведем пример теории со взаимодействием, в которой условие ЛК выполнено, но имеются трудности с РП. Это теория «конечной квантовой электродинамики» Ли и Вика (см. ⁵, в частности раздел VIII статьи Ли и Вика). Особенностью этой теории является существенное использование indefinitной метрики. Подчеркнем в связи с этим примером, что наиболее популярный вариант обычной квантовой электродинамики — формулировка Гупта — Блейлера — тоже использует indefinitную метрику (другая же известная формулировка — кулоновская калибровка или калибровка излучения — содержит мгновенное кулоновское взаимодействие и не является локальной теорией).

Кроме ЛК, известны другие общие критерии, призванные обеспечивать РП. Упомянем, например, принцип «групповая скорость не может превосходить c ». Его недостатком является то, что он «не работает» в случае среды с аномальной дисперсией (см. ^{6, 7}). Другой поучительный в связи с этим примером случай обсужден в разделе 4 сборника ⁸. Для квантовой теории поля в работе ⁹ предлагается другой критерий: РП теории обеспечивается «причинным» видом уравнений для гейзенберговских операторов в представлении когерентных состояний. Однако в гл. 2 будет показано, что решение некоторых задач о передаче сигнала приводит к результатам, не согласующимся с РП, несмотря на то, что уравнения квантовой электродинамики имеют «причинный вид». Выбор того или иного представления теории не может изменить эти результаты. Как мы покажем, они определяются не способом решения, но прежде всего особенностями постановки этих задач.

На основании изложенного мы считаем, что ни ЛК, ни характер гейзенберговских уравнений не гарантируют РП. Будет показано, что для рассмотрения вопроса о РП теории существенны многие другие ингредиенты теории: способ описания источника сигнала, выбор наблюдаемых, которые регистрирует детектор сигнала и т. п. В этом обзоре вместо попыток дать какие-либо другие общие критерии, гарантирующие РП, обсуждаются теоретические описания конкретных опытов по передаче сигнала. При этом автоматически учитываются все существенные аспекты теории. Рассмотрение будет обладать достаточной степенью общности, чтобы утверждать, что всевозможные квантовоэлектродинамические способы передачи сигнала не ведут к нарушению РП.

На основании^{78, 10} и других работ можно сформулировать два общих требования, которым должна удовлетворять правильно поставленная задача о передаче сигнала:

- 1) речь должна идти о передаче информации из одной конечной области пространства V_S (источник) в другую конечную область, V_D , где локализован детектор;
- 2) тот, кто передает сигнал, может по своей воле послать (или не послать) сигнал в какой-либо произвольный момент t_0 (см. § 7 статьи¹⁰). В частности, не может быть использован для передачи сигнала периодический процесс.

Таким образом, речь идет о существенно нестационарной задаче, которую надо решить в квантовой теории поля.

В главе 2 дается критический обзор известных в литературе постановок задачи о скорости сигнала в квантовой электродинамике. Основной его целью является введение в проблему, он не претендует на исчерпывающую полноту. В гл. 3 решается задача, близкая к тем, которые рассматривались в гл. 2, а именно, рассматривается довольно простая, но достаточно реалистическая модель квантовой электродинамики. Источником сигнала служит внешний ток, локализованный в S . Приход сигнала в D регистрируется по изменению привычных наблюдаемых: координаты, импульса и энергии заряженной частицы, локализованной в D . Показано, что для доказательства РП необходим надлежащий учет квантовомеханических и, в частности, квантовоэлектродинамических особенностей постановки задачи о передаче сигнала. В гл. 4 дается общая постановка и точное решение задачи о передаче сигнала в квантовой электродинамике, в которой и заряженные частицы описываются вторично квантованным полем.

2. ИСТОРИЯ ЗАДАЧИ О СКОРОСТИ СИГНАЛА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

а) Вскоре после создания квантовой электродинамики С. Кикучи в 1930 г. по предложению Гейзенберга рассчитал следующую задачу¹¹. Источником сигнала служит возбужденный атом S . Точнее, в момент $t = 0$ задано такое начальное состояние: атом S возбужден, фотонов нет. Вычисляется плотность энергии электромагнитного

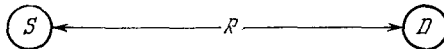


Рис. 1.

поля в момент $t > 0$ на расстоянии R от атома. В работе Ферми¹² 1932 г. вместо этого вычислялась вероятность возбуждения в момент $t > 0$ второго атома D , находящегося на расстоянии R от первого (рис. 1). В обеих работах был получен причинный результат — плотность энергии или вероятность возбуждения D равна нулю до момента $t = R/c$.

Расчеты были сделаны в первом исчезающем порядке теории возмущений. Кроме этого приближения использовалось еще два. Поясним, в чем они состояли. Ферми вычислял амплитуду вероятности $a_{SD*}(t)$ того, что начальное состояние S^*D (S возбужден, D не возбужден, фотонов нет) перейдет к моменту t в состояние SD^* (S не возбужден, D возбужден, фотонов нет). Основной механизм передачи возбуждения таков: S испускает (виртуальный) фотон, D его поглощает (подробности см. в приложении А, где изложено решение задачи Ферми по «ковариантной» теории возмущений¹³). Первое упрощающее приближение можно изложить так: интегрирование по модулю импульса k фотона, переносящего возбуждение от S к D , можно производить не от 0 до ∞ , а от $-\infty$ до $+\infty$. Позже в работе¹⁴ было показано, что причинный ответ является в основном следствием этого предположения: более точный расчет интегралов по k не дает нуля до момента $t < R/c$.

Второе приближение называется обычно дипольным. Предполагается, что электрон атома S испускает или поглощает фотон не в той точке, где находится электрон, а в центре связывающего электрон потенциала. Это гораздо более слабое предположение, чем первое; см. приложение А. Если его не делать, то в амплитуде $a_{SD*}(t)$ появится тривиальный непричинный вклад следующего происхождения. В случае реальных связывающих электрон потенциалов есть исчезающая вероятность обнаружить электрон атома S далеко от центра потенциала, в частности, вблизи атома D . Поэтому последний может возбуждаться сразу после момента $t = 0$. Однако вероятность этого экспоненциально мала, если R много больше размеров атомов l (для атома водорода она пропорциональна $e^{-R/l}$). Можно утверждать, что дипольное приближение действительно допустимо, поскольку освобождает результат от тривиального непричинного вклада. Заметим, что непричинный эффект, обнаруженный в¹⁴, пропорционален некоторой обратной степени отношения R/λ , где λ — средняя длина

воли обменного фотона, $\lambda \gg l$, т. е. несравненно больше обсужденного тривиального вклада.

б) Задача Ферми еще раз была решена в 1949 г. с учетом затухания^{15,16}. На основании этих расчетов Гайтлер в конце § 20 своей книги¹⁷ утверждает относительно вероятности $w = |a_{SD*}(t)|^2$: «вероятность w в точности равна нулю при любом $t < R/c$ ». Однако на самом деле этот причинный результат является следствием той же

замены $\int_0^\infty dk$ на $\int_{-\infty}^{+\infty} dk$. В действительности в работах^{15, 16} было только показано, что в теории затухания положение дел с РП не хуже, чем в обычной теории возмущений.

в) После создания ковариантной теории возмущений обсуждение РП в квантовой электродинамике продолжалось в рамках той же задачи Ферми, но в несколько других терминах. В приложении А показано, что амплитуда $a_{SD*}(t)$ задачи Ферми пропорциональна выражению

$$\int d^4x \int d^4y \sum_{mn} j_{D*D}^m(y) D_{mn}^c(y-x) j_{SS*}^n(x), \quad (2.1)$$

где j_{D*D} есть матричный элемент тока электрона атома D . Цель обсуждаемых далее работ состояла в доказательстве следующего утверждения: несмотря на то, что функция распространения D^c не исчезает вне светового конуса, выражение (2.1) тем не менее не ведет к нарушению РП. Идея аргументации в наиболее общей форме представлена в работе¹⁸. Возьмем выражение (2.1), но будем считать, что интегрирование по x_0 и y_0 ведется от $-\infty$ до $+\infty$ (а не от 0 до t , как в задаче Ферми; см. в приложении А после (А.3)). Принимаем лоренцевскую калибровку, когда $m, n = 1, 2, 3, 4$ и $D_{mn}^c = \delta_{mn} D^c$. Получим выражение

$$M = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_0 \int d^3x \int_{-\infty}^{+\infty} dy_0 \int d^3y j_{D*D}^\mu(y) D^c(y-x) j_{SS*}^\mu(x), \quad (2.2)$$

которое и рассматривается в работе¹⁸. Можно показать, что $D^c = D_{adv}^{(-)} + D_{ret}^{(+)}$, где $(-)$ и $(+)$ означают соответственно отрицательно-частотную и положительно-частотную части соответствующей функции^{*} (т. е., например, в импульсный образ D_{adv} добавлена функция $\theta(-k_0)$). Для любых функций Δ и j , разлагающихся в интеграл Фурье, имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^{(\pm)}(x-y) j^{(\mp)}(y) dy_0 \sim \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Delta}(k_0) \theta(\pm k_0) \tilde{j}(k_0) \theta(\mp k_0) dk_0 = 0. \quad (2.3)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M &= \iint d^4x d^4y j_\mu(y) [D_{adv}^{(-)} + D_{ret}^{(+)}] [j_\mu^{(+)}(x) + j_\mu^{(-)}(x)] = \\ &= \iint d^4x d^4y j_\mu(y) [D_{adv} j_\mu^{(-)}(x) + D_{ret} j_\mu^{(+)}(x)]. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Если ток $j_\mu(x)$ такой, что $j_\mu(x) = j_\mu^{(+)}(x)$, то

$$M = \iint d^4x \int d^4y j_\mu(y) D_{ret}(y-x) j_\mu(x), \quad (2.5)$$

и тогда взаимодействие между токами чисто-запаздывающее, причинное. Матричный элемент тока, для которого $j_\mu = j_\mu^{(+)}$ содержит только положительно-энергетические составляющие, энергия начального состояния больше энергии конечного и может

^{*}) Из соотношений

$$D_{ret}(x) = \theta(x_0) D(x) = \theta(x_0) D^{(-)} + \theta(x_0) D^{(+)}, \quad D_{adv}(x) = -\theta(-x_0) D(x),$$

$$D^c(x) = \theta(x_0) D^{(+)}(x) - \theta(-x_0) D^{(-)}(x)$$

вытекают два равенства: $D_{ret} = D^c + D^{(-)}$ и $D_{adv} = D^c - D^{(+)}$. Положительно-частотная часть первого равенства имеет вид $D_{ret}^{(+)} = D^{c(+)}$, отрицательно-частотная часть второго $D_{adv}^{(-)} = D^{c(-)}$, откуда и следует $D^c = D_{adv}^{(-)} + D_{ret}^{(+)}$.

быть испущен фотон (с положительной энергией). Для частного случая

$$j_{SS^*}(x) \exp[i(E_S - E_{S^*})x_0], \quad E_{S^*} > E_S,$$

результат (2.5) доказан в § 37 книги ¹⁹. Обобщение способа рассмотрения Ахиезера и Берестецкого см. в конце гл. 12 книги ²⁰. Сходные соображения можно найти и в других работах. Покажем, что они не имеют отношения к проблеме скорости сигнала. Первая предпосылка вывода (2.5) — бесконечные (а не конечные) пределы интегрирования по времени. Вторая предпосылка — $j_\mu(x) = j_\mu^{(+)}(x)$. Она исключает возможность локализованных во времени токов (равных, например, нулю до момента $t = 0$ *). Это означает, что рассматривается, в сущности, стационарная задача взаимодействия двух токов типа рассеяния электронов. В такой задаче нет распространения сигнала. Для передачи сигнала надо в какой-то момент времени изменить ток $j_\mu(x)$ (не изменяя его при ранних временах). Такой источник сигнала не описывается положительно-частотным током.

г) Остановимся еще на работе Фирца ²¹. Часто высказывается мнение, что в ней показано следующее: если и имеет место непричинное поведение выражения (2.1), то соотношение неопределенностей время — энергия не позволяет говорить о том, что оно действительно наблюдаемо.

Чтобы пояснить это утверждение, допустим, что вероятность возбуждения атома D в задаче Ферми до момента R/c заметна только, если t меньше R/c на время порядка λ/c , где λ — длина волны фотона, испускаемого атомом S , $1/\lambda \sim E_{S^*} - E_S$. Заметим далее, что в задаче Ферми процесс приготовления возбужденного состояния атома S не рассматривается (далее мы остановимся на работах, где этот недостаток исправляется). Фотон, возбуждающий D , может, однако, появиться вблизи S во время возбуждения S , до момента $t = 0$. Продолжительность возбуждения имеет порядок λ/c . Это видно, например, из известного выражения для вероятности возбуждения (см. ³, § 29)

$$|b(t)|^2 = \left[4 |H_{B3}|^2 \sin^2(E_B - E_0) \frac{t}{2} \right] (E_B - E_0)^{-2}.$$

Получается, что непричинное опережение сигнала сравнимо с неопределенностью в моменте реального испускания сигнала.

Однако точное вычисление (2.1) показывает, что при $t < R/c$ амплитуда $a_{SD^*}(t)$ зависит от t через посредство величины $(R - t)$ по степенному закону: $a_{SD^*}(t) \sim \lambda/(R - t)$, если $|R - t|/\lambda \gg 1$; см. ¹⁴ и конец приложения А. Такое убывание $a_{SD^*}(t)$ с ростом $R - t$ слишком медленное, чтобы можно было сказать, что непричинное опережение имеет порядок λ/c (мы могли бы так сказать, если бы, например, $a_{SD^*}(t) \sim \exp(-|R - t|/\lambda)$). Заметим, что Фирц в своих вычислениях использовал, в частности, обсужденную выше недопустимую замену D^c на D_{ret} . Поэтому нельзя считать, что он показал иллюзорность непричинного опережения.

Добавим, что можно так видоизменить задачу Ферми, что время возбуждения и величина непричинного опережения будут совершенно независимыми величинами. Пусть, например, атом S есть трехуровневая система с уровнями $E_0 < E_S < E_{S^*}$ такими, что $E_{S^*} - E_S \ll E_{S^*} - E_0$ ¹⁴. Такая система может быть возбуждена за время $\sim 1/(E_{S^*} - E_0)$. Уровень E_{S^*} может быть метастабильным и высвечиваться сначала преимущественно на уровень E_S , испуская фотон энергии $\Delta = E_{S^*} - E_S$, который и поглощается атомом D .

д) Значение уже упоминавшейся выше работы ¹⁴ 1964 г. состоит в том, что в ней было показано, что решение задачи Ферми приводит к непричинному результату, который в рамках квантовой механики должен считаться наблюдаемым эффектом. (Такой же непричинный результат был получен в работе ²² в рамках несколько иной, но в принципе близкой постановки задачи.)

Придерживаясь такого же мнения, Б. Ферретти в 1968 г. обратил внимание на то, что решенная Ферми задача не совсем соответствует задаче о передаче сигнала ²³. Условие отсутствия фотонов в конечном состоянии SD^* на самом деле подразумевает, что всюду в пространстве есть приборы, которые регистрируют фотоны и отбираются случаи, когда эти приборы ничего не зарегистрировали. Но детектор сигнала должен быть локализован в конечном объеме V_D (см. гл. 1). Например, надо измерять только состояние атома D безотносительно к состоянию других частей системы. Задаче о передаче сигнала более соответствует величина

$$S_{n\gamma} |\langle SD^* n\gamma | U(t, 0) | S^* D \rangle|^2, \quad (2.6)$$

*) Фурье-образ функции $j(k_0) \theta(k_0)$ является аналитической функцией времени и не может обращаться в нуль в каком-либо интервале времен (например, $(-\infty, 0)$). Наоборот, локализованный в конечном интервале ток не может быть чисто положительно-частотным.

где $U(t, 0)$ — оператор эволюции, $SD^*n\gamma$ — состояние с n фотонами, а $S_{n\gamma}$, кроме суммирования по n , означает также интегрирование по импульсам фотонов и суммирование по их поляризациям. Выражение (2.6) не равно

$$|a_{SD^*}(t)|^2 = |\langle SD^* | U(t, 0) | S^*D \rangle|^2 \quad (2.7)$$

даже в первом исчезающем порядке теории возмущений. Действительно, раз мы описываем начальные и конечные состояния, как обычно, собственными функциями свободной части H_0 полного гамильтониана (т. е. «голыми» состояниями), то состояние S^*D может перейти в состояние $SD^*\gamma\gamma$: S испустил фотон, D тоже испустил (другой) фотон и к тому же возбудился. Это происходит в том же порядке теории возмущений ϵ^2 . Хотя соответствующая амплитуда гораздо меньше (2.7), но малы и обсуждаемые непричинные эффекты.

Однако, начав изменять так предмет вычисления, мы должны тогда учесть и другое следствие употребления «голого» формализма: в момент $t > 0$ атом D может быть найден возбужденным, даже если S вначале не был возбужден (D может возбудиться с *испусканием* фотона). Поэтому из (2.6) Ферретти вычитает «фон». Он его определяет как величину, аналогичную (2.6), но в случае, когда атом S отсутствует,

$$S_{n\gamma} |\langle D^*n\gamma | U(t, 0) | D \rangle|^2. \quad (2.8)$$

(На самом деле, по-видимому, достаточно было бы вычесть величину типа (2.8) с начальным состоянием SD — атом S не возбужден). Ферретти получил причинный результат: разность (2.6) и (2.8) в первом исчезающем приближении точно равна нулю при $t < R/c$. К сожалению, расчет был произведен для случая, который в обычной $3 + 1$ -мерной электродинамике может быть описан следующим образом. В качестве «атомов» источника и детектора берутся два бесконечных плоских (тонких) слоя. Тогда задача сводится к пространственно-одномерному случаю и упрощается. Но установление факта возбуждения такого бесконечного «атома» требует бесконечного времени. В задаче о скорости сигнала источник и детектор должны быть локализованы в конечных объемах. Можно, конечно, считать, что Ферретти показал РП для двумерной электродинамики. Но вопрос о РП электродинамики в случае реальной размерности $3 + 1$ остался открытым.

е) В работах ²⁴⁻²⁵ была сделана попытка усовершенствовать постановку задачи о скорости передачи возбуждения от атома S к атому D посредством другого способа описания возбужденных состояний атомов, учитывающего наличие взаимодействия. Вместо «голых» операторов рождения — уничтожения (фотонов и квантов возбуждения атомов) были введены «физические» операторы (бесчастичный вектор которых совпадает с физическим вакуумом). Результат, в отличие от ²³, оказался непричинным. Однако в основном, он может быть объяснен тем обстоятельством, что в терминах «физических» операторов взаимодействие оказывается нелокальным; см. раздел 4 работы ²⁶. Возможно введение других «физических» операторов, с которыми величина непричинного эффекта уменьшится. Той же причиной объясняется и результат работы ²⁷. В отличие от всех обсуждавшихся до сих пор работ, в ней теоретически описывался процесс возбуждения атома S (при помощи изменения потенциала, связывающего электрон атома). Однако приход сигнала определялся по переходу атома D в возбужденное состояние, описываемое с помощью «физических» операторов.

ж) В работе ²⁸, кроме только что описанного источника сигнала рассматривался источник в виде внешнего тока, локализованного в области V_S и включаемого в момент $t = 0$. Использовался прием вычитания «фона». Вместо амплитуды перехода вычислялись изменения распределений по координате q , импульсу p и энергии электрона атома D , вызванные источником сигнала. Все расчеты производились без использования теории возмущений в рамках точно решаемых моделей квантовой электродинамики (один или два нерелятивистских электрона в осцилляторном потенциале, взаимодействующие дипольно с квантованным электромагнитным полем). Было показано, что распределение по q (или квадрат модуля $|u(q)|^2$ волновой функции электрона D в координатном представлении) начинает изменяться только после момента R/c . В то же время импульсное распределение (или фаза функции $u(q)$), а вместе с ним и распределение по энергии электрона начинает изменяться сразу после включения источника. В следующей главе эти результаты будут воспроизведены на другой модели и будет показано, что непричинное изменение фазы $u(q)$ следует считать столь же ненаблюдаемым, как изменение вектор-потенциала на градиент скалярной функции. Таким образом, все только что описанные задачи приводят к передаче сигнала со скоростью, не превышающей c .

з) Конечно, источник сигнала в виде локализованного включаемого внешнего тока или потенциала удовлетворяет условиям 1) и 2) на источник сигнала, изложенным в конце гл. 1. Казалось бы, им удовлетворяет (в разумной мере) и источник Ферми

в виде просто заданного в начальный момент возбужденного состояния атома. Однако в гл. 5 работы²⁸ было показано, что координатное распределение электрона D ведет себя непричинно в случае источника Ферми, даже если вычтен «фон». В отличие от расчета Ферретти, это было показано для обычного пространства-времени $3+1$. Можно связать этот результат с мгновенным распылением волнового пакета; см. введение. Сигнал в этом случае передается в основном одним фотоном. Тот факт, что этот фотон испускается атомом S , означает, что сразу после испускания фотон может считаться достаточно хорошо локализованным в области с размерами атома. Возбуждение атома D в момент t показывает, что вероятность нахождения фотона в области V_D в этот момент не равна нулю. Непричинный результат, как в случае распыливания пакета, так и в случае задачи Ферми, обязан исчезновению вне светового конуса функции D^c (совпадающей с функцией $D^{(+)}$ в задаче о распыливании пакета).

В отличие от источника Ферми, локализованный ток рождает состояние электромагнитного поля (с неопределенным числом фотонов), не распыляющееся мгновенно (см. работы^{29, 30}; в них эти состояния названы «строго локализованными», в работах⁹ — когерентными). Следует признать, что для постановки задачи о скорости сигнала весьма существенно, чтобы источник сигнала описывался включаемым током или потенциалом.

и) Общее решение вопроса о РП в квантовой электродинамике будет изложено в гл. 4 на основании работ^{31, 32}. Другой возможный общий подход намечен Беллом в³³, раздел 7.

к) Наш обзор не претендует на полноту. Мы не обсуждаем, в частности, работы^{10, 34-36}. Исключена литература, посвященная мгновенному распылению пакетов свободных релятивистских частиц. Можно думать, что теория свободных частиц слишком бедна, чтобы описывать задачу о передаче сигнала *).

3. ВНЕШНИЙ ТОК КАК ИСТОЧНИК СИГНАЛА И НЕРЕЛЯТИВИСТСКИЙ ЭЛЕКТРОН КАК ДЕТЕКТОР

Рассмотрим задачу о скорости сигнала, в которой выполнены условия 1) и 2) передачи сигнала, изложенные в конце гл. 1. Она довольно близка к той, которую предложил Ферми (см. гл. 2, а) — д)), но решена будет по-другому. Эта задача может служить введением в общую постановку, излагаемую в гл. 4, в которой используются не совсем привычные полевые описания наблюдаемых физических величин.

а) Источником сигнала служит внешний ток J_μ , локализованный в некоторой области V_S и включаемый в момент $t = 0$. Ток испускает квантованное электромагнитное поле. Приход сигнала детектируется с помощью нерелятивистской бесспиновой заряженной частицы, которую для краткости называем электроном. Этот электрон локализован в области V_D внешним потенциалом и взаимодействует с квантованным электромагнитным полем. Подразумевается, что есть прибор, который измеряет как-то состояние электрона.

Вектор состояния $\Phi(t)$ рассматриваемой системы описывает и электрон и поле (фотоны). Состояние же электрона может быть описано матрицей плотности (получаемой надлежащим суммированием и интегрированием $|\Phi(t)|^2$ по фотонным переменным). Зная ее, можно найти вероятность того, что координата электрона равна q , а импульс равен p , т. е. распределения по q и по p . Мы будем находить непосредственно эти распределения с помощью вычисления средних значений, средних квадратов и прочих моментов операторов \hat{q} и \hat{p} (напомним, что распределение по q равно $\sum_n q^n \langle \Phi | \hat{q}^n | \Phi \rangle$). Точнее, будут вычисляться изменения этих распределений, вызванные включением внешнего тока. Естественно считать, что сигнал пришел в тот момент времени, когда появились эти изменения.

Рассмотрим среднее от любого шрёдингеровского оператора A (A может равняться \hat{q} , \hat{q}^2 , ..., \hat{p} , \hat{p}^2 и т. д.) в состоянии $\Phi(t)$, связанном с начальным состоянием Φ_0 соотношением $\Phi(t) = U(t, 0)\Phi_0$ (где U подчиняется уравнению Шрёдингера: $i\partial_t U = H U$)

$$\langle \Phi(t), A\Phi(t) \rangle = \langle U\Phi_0, AU\Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, U^\dagger A U \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, A_\Gamma(t) \Phi_0 \rangle. \quad (3.1)$$

Как видно, это среднее равно среднему от соответствующего гейзенберговского оператора $A_\Gamma(t) = U^\dagger(t, 0) A U(t, 0)$ в начальном состоянии Φ_0 (Φ_0 здесь фигури-

*) В частности поэтому из факта мгновенного распыливания пакета нельзя делать вывод о невозможности финитных пакетов (когда волновая функция частицы обращается в нуль вне некоторой конечной области)⁴.

рует в качестве постоянного вектора состояния гейзенберговской картины). Вместо того, чтобы вычислять $U(t, 0)$ и $\Phi(t)$, мы будем находить $A_\Gamma(t)$. Это оказывается более простой задачей и к тому же решение ее имеет более наглядный смысл, как мы далее увидим.

Сравним моменты оператора q в момент t в том случае, когда ток включался и когда он не включался:

$$\langle \Phi_J(t), q^n \Phi_J(t) \rangle - \langle \Phi(t), q^n \Phi(t) \rangle = \langle \Phi_0, [q_J^n(t) - q^n(t)] \Phi_0 \rangle. \quad (3.2)$$

Здесь использовано соотношение (3.1). В случае, когда ток включался, полный гамильтониан явно зависит от времени, и имеем

$$\Phi_J(t) = U_J(t, 0) \Phi_0, \quad q_J(t) = U_J^\dagger q U_J, \\ \frac{i \partial U_J}{\partial t} = \mathcal{H}_J(t) U_J. \quad (3.3)$$

Если ток не включался в момент $t = 0$, то гамильтониан не зависит от времени (и равен, например, $\mathcal{H}_J(t = 0)$).

Из (3.2) видно, что моменты (и распределение по q) начнут отличаться тогда, когда гейзенберговский оператор $q_J(t)$ начнет отличаться от гейзенберговского оператора

$$q(t) = \exp[it\mathcal{H}_J(t=0)] q \exp[-it\mathcal{H}_J(t=0)]. \quad (3.4)$$

б) Задачу нахождения гейзенберговских операторов мы сначала рассмотрим в кулоновской калибровке (лоренцова калибровка обсуждается позже). Гамильтониан $\mathcal{H}(t)$ имеет вид

$$\mathcal{H}(t) = \frac{1}{2m} [p - eA_\perp(q)]^2 + W(q) + \frac{1}{8\pi} \int d^3x [E_\perp^2(x) + H^2(x)] + \\ + \int_{V_S} d^3x (J(x, t) A_\perp(x)) + e \int_{V_S} \frac{d^3x J_0(x, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{q}|}, \quad \text{div } A_\perp = 0 \quad (3.5)$$

(см., например, ¹⁷, § 13, или ⁸⁸, § 17). Найдём уравнения для $q_J(t)$ и $p_J(t)$. Сначала вычисляем

$$\frac{\partial q_J(t)}{\partial t} = -i [q_J(t), \mathcal{H}_\Gamma(t)]; \quad (3.6)$$

здесь $\mathcal{H}_\Gamma(t) = U_J^\dagger \mathcal{H}(t) U_J$ — гейзенберговский оператор гамильтониана. Ввиду соотношений вида $U_J^\dagger p^2 U_J = U_J^\dagger p U_J U_J^\dagger p U_J^\dagger = p_J^2$ он так же зависит от гейзенберговских операторов $q_J(t)$, $p_J(t)$ и т. д., как $\mathcal{H}(t)$ (см. (3.4)) зависит от шрёдингеровских q , p , ... Одновременные перестановочные соотношения для гейзенберговских операторов тоже такие же, как для шрёдингеровских. Поэтому (3.6) легко вычисляется:

$$\frac{\partial q_J(t)}{\partial t} = \frac{1}{m} [p_J(t) - eA_\perp^\Gamma(q_J(t), t)] \equiv v. \quad (3.7)$$

Далее вычислим $\partial^2 q_J / \partial t^2 = -i [v, \mathcal{H}_\Gamma]$. Вычисление $[v, \mathcal{H}_\Gamma]$ сильно упрощается, если предварительно с помощью коммутационных соотношений кулоновской калибровки (см., например, § 48—49 книги ³) найти перестановки

$$[v_i, v_j] = \frac{ie}{m^2} \varepsilon_{ijk} H_k \quad (i, j, k = x, y, z), \quad (3.8)$$

$$\left[v_i, \frac{1}{8\pi} \int d^3x E_\perp^2 + e \int \frac{d^3x J_0(x, t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{q}|} \right] = ie E_i(q, t), \quad (3.9)$$

$$E(x) = -\frac{\partial A_\perp(x)}{\partial t} - \text{grad}_x \int \frac{d^3y J_0(y, t)}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|}. \quad (3.10)$$

С их помощью получаем

$$m \frac{\partial^2 q_J(t)}{\partial t^2} = -\text{grad } W(q_J(t)) + e E_J(q_J(t), t) + \\ + \frac{e}{2} \{ [v H_J(q_J(t), t)] - [H_J(q_J(t), t) v] \}. \quad (3.11)$$

В правой части (3.11) фигурирует оператор силы Лоренца. Аналогичное уравнение получается для $q(t)$ без индекса J . Уравнение (3.11) надо решать совместно с уравне-

ниями для операторов E_J и H_J . Эти уравнения (Максвелла) не будем выписывать. Нужные нам сведения об операторах E и H мы заимствуем из приложения Б.

Для приближенного решения полученных гейзенберговских уравнений разложим $q_J(t)$, E_J , H_J и $q(t)$, E , H по константе связи e : $q_J = \sum_n e^n q_J^{(n)}$ и т. д. Подставим эти разложения в уравнения и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях e . Получаем в нулевом приближении

$$\begin{aligned} m \frac{\partial^2 q_J^{(0)}(t)}{\partial t^2} &= -\text{grad } W(q_J^{(0)}(t)), \\ m \frac{\partial^2 q^{(0)}(t)}{\partial t^2} &= -\text{grad } W(q^{(0)}(t)). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Нам нужны решения гейзенберговских уравнений в виде конкретных выражений гейзенберговских операторов через одни и те же шрёдингеровские операторы, т. е. те операторы, с которыми должны совпадать гейзенберговские при $t = 0$, когда ток J_μ еще не был включен. В частности,

$$q_J(t=0) = q(t=0) = q \quad (3.13)$$

(см. (3.3) и (3.4)). Мы будем считать, что с шрёдингеровским оператором q совпадают в момент $t = 0$ операторы $q_J^{(0)}(t)$ и $q^{(0)}(t)$, а остальные $q_J^{(n)}(t)$, $q^{(n)}(t)$ с $n \geq 1$ равны нулю при $t = 0$. В этом случае (3.13), конечно, будет выполнено.

Поскольку уравнения (3.12) для $q_J^{(0)}(t)$ и $q^{(0)}(t)$ одинаковые и начальные условия тоже *, то $q_J^{(0)}(t) = q^{(0)}(t)$ при всех t .

Уравнение для $q_J^{(1)}$ имеет вид

$$m \frac{\partial^2 q_J^{(1)}}{\partial t^2} = E_J^{(0)} + \frac{1}{2} \{ [\partial_t q^{(0)} H_J^{(0)}] - [H_J^{(0)} \partial_t q^{(0)}] \}. \quad (3.14)$$

Поскольку $E(q^{(0)} + eq^{(1)}) = E(q^{(0)}) + eq^{(1)} E'(q^{(0)}) + \dots$, то можно считать, что $E_q^{(0)}$ и $H_J^{(0)}$ в (3.14) зависят от $q^{(0)}(t)$.

Уравнение для $q^{(1)}(t)$ по форме такое же, только все величины лишены индекса J . Пусть ток J_μ локализован в области V_s вблизи начала координат, а электрон в области V_D **, расположенной на расстоянии R от V_s . Из результатов приложения Б следует, что разности $E_J^{(0)}(x, t) - E^{(0)}(x, t)$ и $H_J^{(0)}(x, t) - H^{(0)}(x, t)$ суть запаздывающие функции тока J_μ . Поэтому они обращаются в нуль при $x \in V_D$ и $t < R/c$. Ввиду этого правая часть (3.14) равна правой части аналогичного уравнения для $q^{(1)}(t)$, откуда вытекает, что $\partial^2 [q_J^{(1)}(t) - q^{(1)}(t)] / \partial t^2 = 0$ при $t < R/c$. В силу нулевых начальных условий имеем $q_J^{(1)}(t) - q^{(1)}(t) = 0$ при $t < R/c$, т. е. в первом приближении получаем, что

$$q_J(t) = q(t), \quad t < \frac{R}{c}. \quad (3.15)$$

Точное решение (более общей задачи) обсуждается в следующей главе. Сейчас заметим только, что результат (3.15) был получен в работе ²⁸ без использования теории возмущений (но в дипольном приближении и для частного случая $W(q) \sim q^2$). Обращаясь к (3.2), заключаем, что распределение по координате электрона не изменяется до момента R/c .

Поведение же распределения по импульсу p электрона оказывается не причинным. Действительно, из (3.6) следует, что

$$p_J(t) - p(t) - e [A_{J\perp}(q_J(t), t) - A_\perp(q(t), t)] = m \frac{\partial}{\partial t} [q_J(t) - q(t)]. \quad (3.16)$$

* Уравнения (3.12) второго порядка, поэтому, кроме (3.13), надо еще учесть, что $(\partial q_J / \partial t)_{t=0} = (\partial q / \partial t)_{t=0}$ в силу $p_J(t=0) = p(t=0)$ и $A_{J\perp}(t=0) = A_\perp(t=0)$ (см. (3.7)).

** Если потенциал $W(q)$ в (3.5) бесконечно высокий на границе области V_D , то все собственные функции $(p^2/2m) + W(q)$ равны нулю вне V_D и электрон локализован строго внутри V_D . В случае реалистических потенциалов можно говорить о локализации электрона в V_D , лишь пренебрегая экспоненциально малой вероятностью того, что электрон может быть найден и вне V_D . Тогда и (3.15) следует считать верным при условии того же пренебрежения.

Покажем, что разность $A_{J\perp} - A_{\perp}$ в (3.16) не равна нулю при $t < R/c$. Поперечный вектор-потенциал A_{\perp} следующим образом выражается через вектор-потенциал A лоренцовой калибровки (см., например, § 80 в ³⁹):

$$\begin{aligned} A_{\perp}(\mathbf{x}, t) &= A(\mathbf{x}, t) - \nabla u(\mathbf{x}, t), \\ u(\mathbf{x}, t) &= -\frac{1}{4\pi} \int d^3y \operatorname{div} A(\mathbf{y}, t) |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{-1}; \end{aligned} \quad (3.17)$$

здесь $u(\mathbf{x}, t)$ есть потенциал продольной части A_{\perp} вектор-потенциала. С помощью

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} = -4\pi \delta^{(3)}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (3.18)$$

можно проверить, что дивергенция выражения $A - \nabla u$ действительно равна нулю. В приложении Б показано, что A изменяется в V_D только после момента R/c . Однако u в (3.17) нелокально выражается через A и поэтому $A_{J\perp}(\mathbf{x}, t) - A_{\perp}(\mathbf{x}, t)$ не равно нулю при $\mathbf{x} \in V_D$ и $t < R/c$:

$$\begin{aligned} A_{J\perp}^{(0)}(\mathbf{x}, t) - A_{\perp}^{(0)}(\mathbf{x}, t) &= \nabla(u^{(0)} - u^{(g)}) = \\ &= \nabla \frac{1}{4\pi} \int d^3y \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \sum_k \frac{\partial}{\partial y_k} \int d^4z \operatorname{Ret}(y - z) J_k(z) \equiv \nabla \lambda(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (3.19)$$

(использовано (3.17) и (Б.8)).

Обращаясь теперь к (3.16) и учитывая, что правая часть (3.16) исчезает при $t < R/c$ ввиду (3.15), устанавливаем, что

$$\mathbf{p}_J(t) - \mathbf{p}(t) = e \nabla \lambda(\mathbf{q}(t), t), \quad (3.20)$$

что не равно нулю при $t < R/c$.

Однако формулы (3.19) и (3.20) при $t < R/c$ имеют вид градиентного преобразования

$$A'_{\perp} = A_{\perp} + \nabla \lambda, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} + e \nabla \lambda, \quad \Delta \lambda = 0. \quad (3.21)$$

допустимого в рамках кулоновской калибровки, поскольку оно сохраняет поперечность вектор-потенциала. Действительно, $\operatorname{div} A_{\perp} = \operatorname{div} A_{\perp} = 0$, потому что $\operatorname{div} \operatorname{grad} \lambda = \Delta \lambda(\mathbf{x}, t) = 0$ при $\mathbf{x} \in V_D$ и $t < R/c$ (с помощью (3.18) убеждаемся, что $\Delta \lambda(\mathbf{x}, t)$ есть запаздывающая функция тока, равная нулю при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_s| > tc$ для всех $\mathbf{x}_s \in V_S$). Как видно, (3.19) и (3.20) является градиентным преобразованием только при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S| > tc$. Дальнейшее отличие от обычного градиентного преобразования состоит в том, что (3.19) и (3.20) имеют динамическое происхождение: функция λ не произвольная (гармоническая) функция, но определяется внешним током. Наконец, можно показать, что уравнения теории в кулоновской калибровке не инвариантны относительно (3.19), (3.20) даже при $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_S| > tc$. Несмотря на все эти отличия, (3.19), (3.20) являются только частным случаем (3.21) с точки зрения наблюдателя, находящегося вместе со своими приборами в V_D и не способного что-либо регистрировать вне V_D . На этом основании можно утверждать, что преобразования (3.19), (3.20) от $A_{J\perp}$, \mathbf{p}_J к A_{\perp} , \mathbf{p} не ведут к наблюдаемым следствиям в V_D , пока $t < R/c$. Мы назовем такие преобразования квазиградиентными. Преобразования (3.19), (3.20) могут быть записаны в виде:

$$A'_{\perp} = A_{\perp} + \nabla \lambda, \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p}, \quad \Phi' = \Phi e^{ie\lambda}, \quad (3.22)$$

т. е. вместо преобразования гейзенберговского оператора p можно преобразовывать волновую функцию системы, умножая ее на фазовый множитель, зависящий лишь от координаты электрона (в частности, именно так записывается градиентное преобразование в § 18 книги ³⁸). Поэтому можно говорить, что (3.20) означает «преждевременное» (но ненаблюдаемое) изменение фазы волновой функции электрона в координатном представлении (строго говоря, речь должна идти о фазах элементов $\langle q_1 | p | q_2 \rangle$ матрицы плотности электрона, (см. пункт а) этой главы).

Продemonстрируем, как можно получить кажущийся не причинный результат с помощью обычной теории возмущений. Пусть связанные состояния электрона описываются собственными функциями оператора $\mathcal{H}_e = (p^2/2m) + W(q)$. Распределение по \mathcal{H}_e ведет себя не причинно, как и распределение по p . Это значит, что если атом D до момента $t = 0$ был в основном состоянии, то сразу после включения тока он уже может быть найден в возбужденном состоянии. Как этот факт согласуется с тем, что было сказано выше (до и после (3.22))? Дело в том, что изменение волновой функции $\Phi \rightarrow \Phi \exp[ie\lambda(\mathbf{x}, t)]$ имеет легко распознаваемый вид градиентного преобразования, если Φ есть функция координаты электрона \mathbf{x} (и каких-либо фотонных

переменных). То же преобразование, записанное, например, в представлении импульса p электрона, уже не сводится к умножению на фазовый множитель: меняется и модуль волновой функции, т. е. меняется и распределение по p . С помощью теории возмущений фактически устанавливается, что в представлении собственных функций \mathcal{H}_e волновая функция изменяется при включении тока так, что сразу изменяется распределение по собственным значениям \mathcal{H}_e . Выше нам удалось показать, что это изменение в x -представлении имеет вид ненаблюдаемого квазиградиентного преобразования (3.22). Этот результат можно сформулировать еще и так: гейзенберговские операторы $p_J^2(t)/2m + W(q_J)$ и $(p^2(t)/2m) + W(q)$ описывают одну и ту же наблюдаемую, пока $t < R/c$ (аналогично тому, как $A_{J\perp}$ и A_\perp описывают одни и те же напряженности E и H).

в) В лоренцовой калибровке гамильтониан $\mathcal{H}(t)$ имеет другой вид. В (3.5) надо опустить индекс \perp у A_\perp и E_\perp , последние два члена заменить на $\int d^3x J_\mu A_\mu$, а оператор энергии электромагнитного поля заменить на выражение (17.7) из ³⁸. Кроме этого, надо учесть дополнительные условия Лоренца: физически реализующимся состояниям могут соответствовать лишь такие векторы Φ , которые удовлетворяют уравнению $\mathcal{L}\Phi = 0$. Оператор \mathcal{L} в гейзенберговской картине равен или $\partial_\mu A_\mu$ в той форме дополнительного условия, которую предложил Ферми и использует Дирак в книге ³⁹ или $(\partial_\mu A_\mu)^{(-)}$ (форма Гупты—Блейлера). В гейзенберговской картине в качестве Φ можно брать начальный вектор Φ_0 . Поскольку $\square \partial_\mu A_\mu = 0$ ^{17, 39}, то дополнительное условие выполняется в любой момент времени, если оно выполнено в начальный момент

$$\partial_\mu A_\mu(x, 0) \Phi_0 = 0,$$

$$\partial_t (\partial_\mu A_\mu) \Phi_0 = [\text{div } E(x, 0) - j_0(x, 0)] \Phi_0 = 0. \quad (3.23)$$

Как пример действия (3.23), укажем, что нельзя в качестве Φ_0 брать вектор, являющийся собственной функцией оператора $(p_L^2/2m) + W(q)$. Дело в том, что оператор импульса p_L лоренцовой калибровки не коммутирует с оператором $\text{div } E - j_0$ из-за $j_0 \sim \delta(x - q)$. Поэтому не коммутирует с $\text{div } E - j_0$ и оператор $(p_L^2/2m) + W$; его собственные функции не могут быть собственными функциями $\text{div } E - j_0$ с нулевым собственным значением, т. е. не могут удовлетворять дополнительному условию. Исходя из этого и более общих аргументов, Дирак ³⁹ (см. § 77 и 80) указывает, что наблюдаемые в лоренцовой калибровке могут описываться только операторами O , удовлетворяющими условию $[\mathcal{L}, O]\Phi = 0$ (в частности, коммутирующими с \mathcal{L}). Такие операторы Дирак называет «физическими». Например, «физическими» являются операторы p_c и A_\perp кулоновской калибровки, которые можно выразить через операторы лоренцовой калибровки (см. (3.17)) и

$$p_c = p_L - eA_L, \quad A_L = \nabla u. \quad (3.24)$$

Исходя из гамильтониана, описанного в начале этого пункта, можно получить уравнение для $q_J(t)$ и получить результат (3.15). Вместо (3.7) будем иметь $m \partial q / \partial t = p_L - eA$. Поскольку A ведет себя «причинно», то так же ведет себя и p_L . Однако, как мы только что сказали, p_L не может описывать наблюдаемую. Если импульсу электрона сопоставить оператор p_c , то с помощью (3.24) получаются, конечно, те же результаты, что и в кулоновской калибровке; см. предыдущий пункт, где p_c обозначалось просто через p .

4. ОБЩЕЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОНЕЧНОСТИ СКОРОСТИ СИГНАЛА В КВАНТОВОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Общая постановка задачи о передаче сигнала сначала будет описана схематически. В п. е) гл. 4 мы покажем, что она на самом деле является общей, пригодной для описания широкого класса реальных опытов по передаче сигнала.

а) Внешний ток J_μ , локализованный в области S и включаемый в момент t_0 , будет служить источником сигнала (точнее, первоисточником, см. далее пункт 4е, там же см. по поводу термина «внешний»). Приход сигнала детектируется прибором, локализованным в области D , находящейся на расстоянии R от S (см. рис. 1). Предполагается, что он регистрирует некоторую физическую величину, например, электрическое поле E (с помощью классического «пробного» заряда). В теоретическом описании возможно частично отразить устройство прибора. Например, можно ввести в гамильтониан переменные пробного заряда (или электрона, как это сделано в гл. 3). Но тогда снова потребуются предположение о существовании некоторого устройства, регистрирующего координату и скорость заряда. Невозможность обойтись без предположения о существовании некоторой конечной части прибора, не описываемой в рамках квантовой механики, есть общее положение теории измерений.

Как в областях S и D , так и в остальной части пространства могут находиться фотоны и электроны (свободные или связанные постоянными внешними потенциалами). Состояние всего этого устройства для передачи сигнала в момент t_0 описывается вектором Φ_0 . Естественно считать, что Φ_0 стационарно при $t < t_0$ (но это оказывается не обязательным).

Мы уже неоднократно подчеркивали необходимость учета особенностей квантовомеханического описания опыта по передаче сигнала. Нельзя, например, считать, что до момента t_0 электрическое поле E внутри D было равно нулю. Состояние с определенным, например, нулевым значением E не является стационарным, поскольку оператор E не коммутирует даже с гамильтонианом свободного электромагнитного поля. По той же причине в стационарных состояниях (описываемых собственными векторами полного гамильтониана \mathcal{H} рассматриваемой системы при $t < t_0$) E не может иметь определенных значений, а характеризуется некоторым распределением. Будем считать, что сигнал пришел в тот момент времени t , когда распределение по рассматриваемой локальной наблюдаемой изменилось внутри D по сравнению с «фоновым» распределением, которое имело бы в момент t , если бы внешний ток не был включен.

Величину «распределение по E в момент t в ситуации, когда ток был включен минус распределение по E в момент t , когда ток не включался», можно найти, если вычислить моменты этой разности, т. е. среднее значение, средний квадрат и т. д. Задача сводится к вычислению выражений вида

$$\langle U_J(t, t_0) \Phi_0, O(x) U_J(t, t_0) \Phi_0 \rangle - \langle \exp[-i(t - t_0) \mathcal{H}(0)] \Phi, O(x) \exp[-i(t - t_0) \mathcal{H}(0)] \Phi_0 \rangle, \quad (4.1)$$

где $O(x)$ может обозначать $E^m(x)$ ($m = 1, 2, 3, 4, \dots$), $x \in V_D$, или магнитное поле и т. д. $U_J(t, t_0)$ — оператор эволюции системы: $i\partial_t U_J = \mathcal{H}(t) U_J$. Через $\exp[-i(t - t_0) \mathcal{H}(0)]$ обозначен оператор эволюции той же системы, но когда внешний ток не включается и полный гамильтониан не зависит явно от времени (все время равен $\mathcal{H}(t_0)$). Поскольку

$$\langle U_J(t, t_0) \Phi_0, O U_J(t, t_0) \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, U_J^\dagger O U_J \Phi_0 \rangle, \quad (4.2)$$

а $U_J^\dagger O U_J$ есть гейзенберговский оператор $O_J(t)$ (который при $t = t_0$ совпадает с шрёдингеровским оператором O), то (4.1) можно переписать в виде

$$\langle \Phi_0, [O_J(x, t) - O(x, t)] \Phi_0 \rangle, \quad (4.3)$$

$$O(x, t) = \exp[i(t - t_0) \mathcal{H}(0)] O \exp[-i(t - t_0) \mathcal{H}(0)].$$

б) Задача сведена к вычислению гейзенберговских операторов и средних от них. Все гейзенберговские операторы квантовой электродинамики можно выразить через $A_\mu(x, t)$ и $\psi(x, t)$. В приложении Б показано, что

$$\psi_J(x, t) = \psi(x, t), \quad A_{J\mu}(x, t) = A_\mu(x, t), \quad (x, t) \notin S_J, \quad (4.4)$$

если точка (x, t) лежит вне будущего светового конуса S_J , построенного на области локализации J_μ (рис. 2), т. е. (x, t) должно удовлетворять условию $(x - x_S)^2 - (t - t_0)^2 > 0$ для всех $x_S \in V_S$. Поскольку $E_J = E = -\partial_t(A_J - A) = \nabla(A_{J0} - A_0)$,

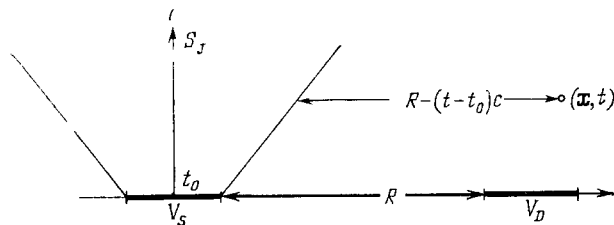


Рис. 2.

то и $E_J(x_D, t) = E(x_D, t)$ при $t - t_0 < R/c$. Обращаясь к (4.3), видим, что распределение по электрическому полю внутри V_D изменяется внешним током только спустя время R/c после включения тока. Магнитное поле H , плотность вектора Пойнтинга и плотность тока j_μ имеют такое же причинное поведение.

в) Только что перечисленными величинами не исчерпываются все возможные наблюдаемые. Теория действительно удовлетворяет принципу РП, если причинное поведение доказано для достаточно широкого класса наблюдаемых (чтобы быть уверенным, что таким поведением обладают все наблюдаемые).

Примером наблюдаемой, которую нельзя построить из E , H , j_μ , является число электронов в конечном объеме V . Поскольку существуют приборы, способные зарегистрировать такую величину (это можно сделать, например, с помощью камеры Вильсона), то и в теории мы должны иметь оператор, сопоставляемый этой наблюдаемой.

Число электронов в объеме V характеризует средний квадрат модуля волновой функции электронов $|\psi(x)|^2$ в этом объеме. Состояние электрона характеризуется еще фазой $u(x)$. В гл. 3 о модуле и фазе u мы судили по распределениям по q и p . И во вторично квантованной теории релятивистских электронов мы должны как-то описать наблюдаемые характеристики состояния электронов.

Введем оператор числа электронов в макроскопическом объеме V . Такого рода оператор был определен Вайтманом и Швебером⁴⁰ с помощью оператора плотности числа частиц (см. (53) и (54)⁴⁰). Они рассматривали разные определения координаты частицы. Здесь будет использоваться та координата x , которая естественно возникает в теории поля. Можно показать, что выбор координаты несуществен, если нам нужен интеграл от плотности по макроскопически большому объему *).

Возьмем в качестве оператора плотности числа электронов выражение $\psi^{(-)+}(x)\psi^{(-)}(x)$, где $\psi^{(-)}$ — та часть электронно-позитронного поля ψ лоренцовой калибровки, которая уничтожает электроны. В Приложении Б показано, что поведение $\int_V \psi^{(-)+}\psi^{(-)} d^3x$ не противоречит РП. Однако важной особенностью квантовой

электродинамики является тот факт, что оператор $\int \psi^{(-)+}\psi^{(-)}$ не может описывать наблюдаемое число электронов, потому что он (как можно показать) не коммутирует с оператором дополнительного условия Лоренца, не является «физическим»; см. пункт в) гл. 3.

Примером «физической» плотности числа электронов может служить оператор $\psi^{(-)+}(x)\psi^{(-)}(x)$, построенный с помощью «физического» оператора электронно-позитронного поля ϕ кулоновской калибровки

$$\phi(x, t) = \psi(x, t) e^{-ie u(x, t)} \quad (4.5)$$

(см. § 80 в книге³⁹; у нас e — заряд электрона; оператор $u(x, t)$ выписан в (3.17)).

Проиллюстрируем физический смысл оператора плотности $N^{(-)}(x) = \phi^{(-)+}(x)\phi^{(-)}(x)$. Вычислим среднее от него в одноэлектронном состоянии $\alpha_n^+ \Omega$. Шрёдингеровский оператор α_n определяется разложением шрёдингеровского оператора $\phi(x)$ по полной системе собственных функций гамильтониана уравнения Дирака (с произвольным постоянным внешним потенциалом)

$$\phi(x) = S_n u_n(x) \alpha_n + S_p v_p(x) \beta_p^+ \equiv \phi^{(-)}(x) + \phi^{(+)}(x).$$

Символ S_n означает суммирование по дискретным значениям n и интегрирование по непрерывным. Имеем

$$\langle \alpha_n^+ \Omega, \phi^{(-)+}(x) \phi^{(-)}(x) \alpha_n^+ \Omega \rangle = \sum_{\mu=1}^4 u_n^+(x, \mu) u_n(x, \mu). \quad (4.6)$$

Получаем плотность распределения вероятности по координатам в рассматриваемом состоянии (в (4.6) явно выписан спинорный индекс μ). Среднее от $N^{(-)}$ в состоянии $\alpha_n^+ \alpha_m^+ \beta_p^+ \Omega$ равно сумме плотностей $|u_n|^2 + |u_m|^2$ (плотность позитронов выпадает). В состоянии, где есть одни позитроны и/или фотоны, среднее от $N^{(-)}$ равно нулю. В общем случае получаем не сумму квадратов модулей волновых функций электронов, а диагональные элементы $\langle x | \rho | x \rangle$ матрицы плотности.

Оказывается, что сведения о фазе волновой функции электрона дает среднее от оператора плотности импульса $P(x)$ электронно-позитронного поля **). Берем «физический» оператор $P(x)$, построенный из $\phi(x)$:

$$P(x) = \frac{1}{2} : [\phi^+(x) (-i\nabla) \phi(x) + (-i\nabla \phi)^+ \phi] : \quad (4.7)$$

*) Действительно, переход к другой (скажем, ньютон-вингеровской) координате q осуществляется с помощью функции $\langle x | q \rangle$, которая экспоненциально мала при $|x - q| \gg \hbar/mc$.

**) Казалось бы, трудно дать физическое толкование $P(x)$, поскольку в квантовой механике невозможно говорить об импульсе электрона в точке x . Но мы уже демонстрировали в гл. 3, что импульсное распределение дает сведения о поведении фазы волновой функции $u(x)$ в координатном представлении.

Вычислим среднее от (4.7) в состоянии $\alpha_n^+ \Omega$:

$$\langle \alpha_n^+ \Omega, \mathbf{P}(\mathbf{x}) \alpha_n^+ \Omega \rangle = \sum_{\mu} |u_n(\mathbf{x}, \mu)|^2 \nabla \eta_n(\mathbf{x}, \mu), \quad u_n = |u_n| e^{i\eta_n} \quad (4.8)$$

Правая часть (4.8) отличается от (4.6) наличием градиента фазы $u_n(\mathbf{x})$.

На основании (4.6) и (4.8) можно считать, что операторы $N^{(-)}$ и $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ играют роль, аналогичную операторам q и p одного электрона в гл. 3.

г) Чтобы вычислить изменение числа электронов в V_D и изменение фазы их волновой функции, надо согласно (4.1) и (4.3), вычислить средние от разностей гейзенберговских операторов $N_J^{(-)} - N^{(-)}$ и $\mathbf{P}_J(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x})$ в начальном состоянии Φ_0 . Для этого в свою очередь надо вычислить φ_J и φ . С помощью (4.4) и (4.5) получаем

$$\varphi_J(\mathbf{x}) = \psi_J e^{-ie u_J} = \psi e^{-ie u_J} = \varphi(\mathbf{x}) e^{ie(u - u_J)}, \quad \mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}, t) \notin S_J. \quad (4.9)$$

В работе ³² показано, что из (4.9) следует, что $N_J^{(-)}(\mathbf{x}) - N^{(-)}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{P}_J(\mathbf{x}) - \mathbf{P}(\mathbf{x})$ не равны нулю при $\mathbf{x} \in V_D$ и $t - t_0 < R/c$, а именно они пропорциональны $(t - t_0)/R^3$ (см. ³¹). Однако это макро-непричинное поведение должно считаться ненаблюдаемым. Дело в том, что (4.9) и (3.19) имеют вид квазиградиентного преобразования

$$\varphi_J(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) \exp ie \lambda(\mathbf{x}), \quad A_{J\perp} = A_{\perp} + \Delta\lambda, \quad \mathbf{x} \notin S_J, \quad \mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}, t), \quad (4.10)$$

$$\lambda(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x}, t) - u_J(\mathbf{x}, t), \quad \Delta\lambda(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (\mathbf{x}, t) \notin S_J,$$

о котором говорилось в пункте 3б. Поэтому следует считать, что $\int N_J^{(-)}(\mathbf{x}) d^3x$ описывает ту же наблюдаемую, что и $\int N^{(-)}(\mathbf{x}) d^3x$, пока $\mathbf{x} \notin S_J$. То же самое относится и к $\mathbf{P}_J(\mathbf{x})$ и $\mathbf{P}(\mathbf{x})$.

Заметим, что в разности $N_J^{(-)}(\mathbf{x}) - N^{(-)}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \notin S_J$ содержится еще экспоненциально-малый непричинный член того же происхождения, что и в $\psi_J^{(-)} + \psi^{(-)} - \psi^{(-)} + \psi^{(-)}$ (см. раздел 3 в работе ³¹ и конец приложения Б). Однако наличие таких членов не противоречит РП.

д) В работе ³² показано, что для оператора плотности числа дираковских электронов можно предложить выражение, являющееся «физическим» оператором и обладающее вместе с тем (макро) причинным поведением. Там же обсуждаются и другие выражения для плотности импульса.

Поскольку электрон обладает спином, то для окончательной демонстрации РП квантовой электродинамики надо еще показать, что и спиновое состояние не изменяется в V_D «преждевременно». Не останавливаясь на доказательстве, заметим только, что это можно сделать с помощью выражения для плотности спиновой части тензора момента количества движения (которое приводится, например, в § 20.5 книги ¹⁹).

е) Изложенное доказательство того, что скорость сигнала в квантовой электродинамике не превосходит скорости света, является достаточно общим и применимо ко вполне реальным экспериментам по передаче сигнала. Для демонстрации этого утверждения мы используем два основных факта.

1) Математически доказательство сводится в основном к выводу операторных равенств (4.4). В приложении Б оно произведено для случая, когда имеются любые постоянные внешние потенциалы W_{μ} . Его можно провести и для нескольких сортов заряженных частиц, кроме электронов и позитронов (протоны и т. п.).

2) Конкретный вид вектора начального состояния Φ_0 нам не понадобился.

Покажем, что доказательство годится и в случае реального источника сигнала, например, состоящего из атомов, способных возбуждаться и высвечиваться. Возбуждать их можно, например, с помощью пучка электронов. Эти атомы и электроны можно теоретически описать с помощью Φ_0 ; W_{μ} может описывать потенциалы, связывающие электроны атомов или формирующие возбуждающие пучки.

Подчеркнем, что понятие включаемого тока J_{μ} необходимо для описания и такого источника сигнала. В опыте по передаче сигнала мы должны иметь возможность начать возбуждать атомы источника (надвигая на них возбуждающий пучок) в произвольный, выбираемый нами, момент времени t_0 . Ток J_{μ} призван описывать «первопричину» сигнала *). Конкретную зависимость J_{μ} от времени после момента t_0 для наших целей знать не надо. Поэтому J_{μ} может гораздо лучше описывать реальный

*) Может быть «первопричиной», скорее, является нажатие кнопки. Последствием этого нажатия, однако, практически всегда будет изменение некоторого тока, которое и можно отразить в теоретическом описании.

ток, чем то, что называется «внешним током». Последний, по определению, зависит от времени предписанным образом, в то время как на зависимость реального тока от времени влияет, конечно, тот факт, что он излучает. Вместо J_μ можно было бы использовать и аналогичное понятие включаемого потенциала.

Аналогично можно аргументировать применимость доказательства для таких источников сигнала как радар, устройство с затвором Керра и т. п.

Общее рассмотрение этой главы (в отличие от гл. 3) показывает, что в области V_D до момента R/c не будут изменяться такие непосредственно наблюдаемые величины, как токи на выходе фотоумножителей, счетчиков и прочих частях детектора сигнала. Наконец, источник S и детектор D могут быть разделены не вакуумом, но какой-либо материальной средой (жидкость, кристалл). Доказательство годится и для этого случая в той мере как Φ_0 и W_μ могут описывать электроны и протоны этой среды.

ПРИЛОЖЕНИЯ

А. ВЫЧИСЛЕНИЕ АМПЛИТУДЫ ВЕРОЯТНОСТИ ВОЗБУЖДЕНИЯ АТОМА-ДЕТЕКТОРА СИГНАЛА

В картине взаимодействия амплитуда $a_{SD^*}(t)$ задачи Ферми имеет вид

$$a_{SD^*}(t) = \langle SD^* | U(t, 0) | S^* D \rangle, \quad (A.1)$$

где U подчиняется уравнению $i\partial U/\partial t = \mathcal{H}_{\text{вз}} U$, а состояния $|S^* D\rangle$ и $|SD^*\rangle$, как обычно, считаются двухэлектронными собственными функциями свободной части \mathcal{H}_0 полного гамильтониана $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{вз}}$. Попытка вычисления (A.1) с помощью теории, записанной в лоренцовой калибровке, сразу наталкивается на трудность, описанную в гл. 3, в): собственные функции \mathcal{H}_0 не удовлетворяют дополнительному условию Лоренца и поэтому не могут описывать физические состояния. В кулоновской калибровке этой трудности нет и поэтому мы ее выбираем (см. также конец § 13.2 в 17). Принимается система единиц, в которой $\hbar = 1$ и $c = 1$. Имеем

$$\mathcal{H}_{\text{вз}} = \mathcal{H}_\perp + \mathcal{H}_c = - \int (j_A)_\perp d^3x + \int \frac{j_0(x) j_0(x') d^3x d^3x'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (A.2)$$

Как и Ферми 12, мы обсуждаем далее только часть амплитуды перехода (A.1), обязанную \mathcal{H}_\perp , т. е. обмену поперечным фотоном. Вклад от \mathcal{H}_c в обычных условиях оказывается меньшим, чем от \mathcal{H}_\perp (см. далее (A.13)). Поскольку в начальном и конечном состояниях отсутствуют фотоны, то можно выделить из $U(t, 0)$ оператор U' , связывающий именно такие состояния в e^2 -приближении (так же, как это сделано в § 37 книги 19)

$$U'_\perp(t, 0) = -\frac{1}{2} \int \int d^4x d^4y \sum_{\mu\nu} j_\mu(y) D_{\mu\nu}^c(y-x) j_\nu(x). \quad (A.3)$$

Интегрирование по временам x_0 и y_0 ведется в пределах от 0 до t . Функция распространения поперечных фотонов имеет вид

$$D_{mn}^c = \left(\delta_{mn} + \frac{\partial_m \partial_n}{\Delta} \right) D_0^c \quad (m, n = 1, 2, 3), \quad (A.4)$$

$$D_{0n}^c = D_{m0}^c = D_{00}^c = 0, \quad \Delta = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

$$D_0^c(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi i} \left[\delta(t^2 - \mathbf{x}^2) - \frac{t}{\pi} P \frac{1}{t^2 - \mathbf{x}^2} \right]. \quad (A.5)$$

(См., например, формулу (14.54) в книге 41). Входящие в токи j_μ, j_ν операторы электронно-позитронного поля $\psi, \bar{\psi}$ раскладываются по собственным функциям электронной части \mathcal{H}_0 , в частности, по функциям $w(x)$ связанных состояний электронов в атомах. Оператор $\psi_\mu^*(x)$, например, уничтожает электрон в состоянии $w_{S^*}(x) = \exp(-iE_{S^*}x_0) u_{S^*}(\mathbf{x})$ и рождает его в состоянии w_S . Поэтому часть амплитуды (A.1), соответствующая (A.3), принимает такой вид:

$$\begin{aligned} a_\perp(t) &= \left\langle SD^* \left| \frac{e^2}{2} \int \int d^4x d^4y N[\bar{\psi}(y) \gamma_m \psi(y)] D_{mn}^c(y-x) N[\bar{\psi}(x) \gamma_n \psi(x)] \right| S^* D \right\rangle = \\ &= e^2 \int \int d^4x d^4y w_{D^*}^\dagger(y) \alpha_m w_D(y) D_{mn}^c(y-x) w_S^*(x) \alpha_n w_{S^*}(x) - \text{обменный член}, \end{aligned} \quad (A.6)$$

Обменный член очень мал, если R много больше размеров атома l (перекрывание волновых функций электронов в этом случае ничтожно). Амплитуду (А.6) можно вычислять по-разному. Чтобы привести ее к виду, в котором Ферми сделал свои упрощающие допущения, воспользуемся представлением D^c , приведенным в § 17.3 книги¹⁹:

$$D_{mn}^c(y-x) = \theta(y_0 - x_0) D_{mn}^{(+)}(y-x) + \theta(x_0 - y_0) D_{mn}^{(+)}(x-y), \quad (\text{А.7})$$

$$D_{mn}^{(+)}(x-y) = \frac{i}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k} \exp\{i[\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - k(x_0 - y_0)]\} \left(\delta_{mn} - \frac{k_m k_n}{k^2} \right).$$

Полагая для простоты, что $E_{S*} - E_S = E_{D*} - E_D \equiv \Delta$, получаем из (А.6) и (А.7)

$$\begin{aligned} a_{\perp}(t) = & \frac{-e^2}{2(2\pi)^3} \sum_{mn} \int d^3y u_{D*}^*(\mathbf{y}) \alpha_m u_D(\mathbf{y}) \times \\ & \times \int d^3x u_S^*(\mathbf{x}) \alpha_n u_{S*}(\mathbf{x}) \int \frac{d^3k}{k} \left\{ \int_0^t dy_0 \int_0^{y_0} dx_0 \exp(i[\mathbf{k}(\mathbf{y}-\mathbf{x}) - k(y_0 - x_0)]) + \right. \\ & \left. + \int_0^t dx_0 \int_0^{x_0} dy_0 \exp(i[\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) - k(x_0 - y_0)]) \right\} [\delta_{mn} - k_m k_n / k^2] \exp[i\Delta(y_0 - x_0)]. \quad (\text{А.8}) \end{aligned}$$

Далее сначала можно проинтегрировать по x_0 и y_0 (перемена порядка интегрирования оправдывается так же, как при доказательстве равенства Парсеваля в теории интегральных преобразований Фурье):

$$\begin{aligned} a_{\perp}(t) = & \frac{-e^2}{2(2\pi)^3} \int \frac{d^3k}{k} \sum_{mn} (\delta_{mn} - k_m k_n / k^2) \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{t}{i(k-\Delta)} - \frac{e^{-i(k-\Delta)t} - 1}{(k-\Delta)^2} \right] \int d^3y u_{D*}^*(\mathbf{y}) \alpha_m e^{i\mathbf{k}\mathbf{y}} u_D(\mathbf{y}) \times \right. \\ & \times \int d^3x u_S^*(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \alpha_n u_{S*}(\mathbf{x}) + \\ & \left. + \left[\frac{t}{i(k+\Delta)} - \frac{e^{-i(k+\Delta)t}}{(k+\Delta)^2} \right] \int d^3y u_{D*}^*(\mathbf{y}) \alpha_m e^{-i\mathbf{k}\mathbf{y}} u_D(\mathbf{y}) \times \right. \\ & \left. \times \int d^3x u_S^*(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \alpha_n u_{S*}(\mathbf{x}) \right\}. \quad (\text{А.9}) \end{aligned}$$

Интеграл по k быстро сходится при больших k и поэтому основной вклад вносят k , не большие величины порядка Δ ($k < 2\Delta$, например). При условии $l\Delta \ll 1$ можно заменить $e^{\pm i\mathbf{k}\mathbf{x}}$ на 1 (электрон S локализован вблизи начала координат, а $e^{(\pm i\mathbf{k}\mathbf{y})}$ на $\exp(\pm i\mathbf{k}\mathbf{R})$ (центр потенциала, связывающего электрон D , находится в точке R , лежащей на оси z). Это приближение называется дипольным. Пропедевывая обратные преобразования от (А.9), где сделана описанная замена, к (А.6), получаем формулу (А.6), где $D^c(\mathbf{y} - \mathbf{x}, y_0 - x_0)$ заменено на $D^c(R, y_0 - x_0)$. Таким образом, дипольное приближение можно изложить так: считается, что фотон испускается не в той точке, где находится электрон, а в центре связывающего электрон потенциала. После дипольного приближения введем обозначения

$$j_D^m = \int d^3y u_{D*}^*(\mathbf{y}) \alpha_m u_D(\mathbf{y}), \quad j_S^n = \int d^3x u_S^*(\mathbf{x}) \alpha_n u_{S*}(\mathbf{x}). \quad (\text{А.10})$$

Эти величины можно выразить через матричные элементы дипольных моментов: $j_S = id_S(E_{S*} - E_S)$ (см. гл. I, § 7 книги³⁷). Далее интегрируем по углам \mathbf{k} ($d^3k = k^2 dk d\Omega$) и получаем

$$\begin{aligned} a_{\perp}(t) = & \frac{i\alpha}{(2\pi)^2} \int_0^\infty k dk 4\pi \left\{ (j_D j_S) \left[\frac{\sin kR}{kR} + \frac{\cos kR}{(kR)^2} - \frac{\sin kR}{(kR)^3} \right] - \right. \\ & \left. - \frac{1}{R^2} (j_S R) (j_D R) \left[\frac{\sin kR}{kR} + \frac{3 \cos kR}{(kR)^2} - \frac{3 \sin kR}{(kR)^3} \right]^{-1} \right\} \times \\ & \times \left\{ \left[\frac{t}{k-\Delta} + \frac{\exp[-i(k-\Delta)t] - 1}{i(k-\Delta)^2} \right] + \left[\frac{t}{k+\Delta} + \frac{\exp[-i(k+\Delta)t] - 1}{i(k+\Delta)^2} \right] \right\}. \quad (\text{А.11}) \end{aligned}$$

Для вычисления интеграла по k Ферми делает гораздо более сильное предположение, чем то, которым оправдывается дипольное приближение: допускается, что из-за наличия $k - \Delta$ в знаменателе главный вклад дают значения k , примерно равные Δ . Тогда членами с $k + \Delta$ в знаменателе вообще следует пренебречь и интегрировать по k можно от $-\infty$ до $+\infty$. Кроме того, из-за условия $(kR) \approx (\Delta R) \gg 1$ можно пренебречь членами порядка $1/(kR)^2$ и $1/(kR)^3$ в первой фигурной скобке в (A.11). После этого интеграл вычисляется с помощью вычетов

$$a_{\perp}^{\Phi}(t) = \frac{i\alpha}{\pi R} \left[(j_D j_S) - \frac{(j_D R)(j_S R)}{R^2} \right] \int_{-\infty}^{\infty} dk \left[t - \frac{e^{-i(k-\Delta)t} - 1}{i(k-\Delta)} \right] \frac{\sin kR}{k-\Delta} = \\ = \frac{i\alpha}{\pi R \Delta} \left[(j_D j_S) - \frac{(j_D R)(j_S R)}{R^2} \right] \pi e^{-iR\Delta} [(t-R)\Delta] \theta(t-R). \quad (A.12)$$

Функция $\theta(t-R)$ равна нулю при $t < R$ и поэтому $a_{\perp}^{\Phi}(t) = 0$ при $t < R$.

Однако интеграл (A.11) можно вычислить и без предположения Ферми: он сводится к интегральным синусам и косинусам. При $R\Delta \gg 1$ и $(R-t)\Delta \gg 1$ член в фигурной скобке в (A.12) тогда дополняется слагаемыми порядка $1/R\Delta$ и $[1/(R-t)\Delta + 1/(R+t)\Delta]$, см. ¹⁴, так что амплитуда $a_{SD}^*(t)$ при $t < R$ уже не равна нулю. Отношение $a_{\perp}(t_-)$ в момент времени $R/c - \tau = t_-$ (меньший R/c на некоторую величину $\tau \ll R/c$) к $a_{\perp}(t_+)$, где $t_+ = R/c + \tau$, равно по порядку величины $1/(\tau\Delta)^2$, если $1 \ll \tau\Delta \ll R\Delta$. Можно показать, что причина такого результата заложена в факте неисчезновения D^c вне светового конуса, см. (A.5).

Приведем еще часть амплитуды $a_{SD}^*(t)$, обязанную кулоновскому взаимодействию \mathcal{H}_c :

$$a_c(t) \approx ie^2 \frac{t}{R} \frac{1}{(R\Delta)^2} [(j_S j_D) - 3(j_S R)(j_D R)/R^2]. \quad (A.13)$$

При $R\Delta \gg 1$ она оказывается гораздо меньшей, чем часть (A.11), вычисленная без приближения Ферми.

Б. ТОЧНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ РАЗНОСТЕЙ $A_J - A$ И $\psi_J - \psi$

Мы принимаем обозначения книги ¹⁹. Выпишем уравнения для A_{μ} и ψ при наличии постоянного внешнего потенциала $W_{\mu}(x)$ и нестационарного внешнего тока $J_{\mu}(x, t)$:

$$(\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m) \psi_J(x) = ie [A_{J\mu}(x) + W_{\mu}(x)] \gamma_{\mu} \psi_J(x), \quad (B.1)$$

$$\square A_{J\mu}(x) = -[j_{J\mu}(x) + J_{\mu}(x)]; \quad (B.2)$$

здесь x обозначает (x, x_0) . В уравнениях для операторов A_{μ} и ψ без индекса J (случай отсутствия внешнего тока) надо положить $J_{\mu} = 0$. Под j_{μ} в (B.2) понимается антисимметризованное выражение $ie\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi$.

Решить эти уравнения — значит узнать, как гейзенберговские операторы выражаются через начальные, т. е. шрёдингеровские, операторы. Операторы ψ_J, A_J и ψ, A согласно их определению (см. гл. 2) должны при $t = t_0$ совпадать с одними и теми же шрёдингеровскими операторами:

$$\psi_J(x, t_0) = U^+(t_0, t_0) \psi(x) U(t_0, t_0) = \psi(x) = \psi(x, t_0), \quad (B.3)$$

$$A_{J\mu}(x, t_0) = A_{\mu}(x) = A_{\mu}(x, t_0).$$

Для решения разложим $\psi_J, A_J; \psi, A$ в ряды по константе связи e (Г. Челлен; см. § 23 книги ¹⁹):

$$\psi_J(x) = \sum_n e^n \psi_J^{(n)}(x), \quad A_{J\mu} = \sum_n e^n A_{J\mu}^{(n)}, \quad (B.4)$$

и аналогично для ψ и A_{μ} . Начальным условиям (B.3) мы удовлетворим, если

$$\psi_J^{(0)}(x, t_0) = \psi^{(0)}(x, t_0) = \psi(x), \quad A_{J\mu}^{(0)}(x, t_0) = A_{\mu}^{(0)}(x, t_0) = A_{\mu}(x), \quad (B.5)$$

а операторы $\psi_J^{(n)}(x, t_0)$ и $A_{J\mu}^{(n)}(x, t_0)$ с $n \geq 1$ равны нулю. Внешний ток не считаем малым. Решения уравнений (B.1), (B.2) в нулевом приближении

$$(\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m) \psi^{(0)} = 0, \quad \square A_{\mu}^{(0)} = -J_{\mu} \quad (B.6)$$

хорошо известны. Первое уравнение свободное, поэтому при всех временах $\psi_J^{(0)}(x) = \psi^{(0)}(x)$ и оба совпадают со свободным оператором $\psi_0(x)$:

$$\psi_0(x) = -i \int d^3x' \dot{S}(x - x') \gamma_0 \psi(x'), \quad x'_0 = t_0 \quad (B.7)$$

(см. (8.67) в книге ¹³). Решение второго уравнения имеет вид

$$A_{j\mu}^{(0)}(x) = A_{0\mu}(x) + \int d^4x' D_{\text{ret}}(x-x') J_{\mu}(x'), \quad (\text{Б.8})$$

$$A_{0\mu}(x) = \int d^3y \left[\frac{\partial}{\partial y_0} D(x-y) A_{\mu}(y) - D(x-y) \frac{\partial}{\partial y_0} A_{\mu}(y) \right], \quad y_0 = t_0. \quad (\text{Б.9})$$

Действительно, (Б.8) удовлетворяет уравнению $\square A_{j\mu} = -J_{\mu}$, удовлетворяет обычным одновременным перестановочным соотношениям (потому что $A_{0\mu}$ им удовлетворяет), наконец, при $x_0 = t_0$ $A_{j\mu}^{(0)}(x)$ превращается в шрёдингеровский оператор $A_{\mu}(x, t_J)$ (второй член в (Б.9) при $x_0 = t_0$ равен нулю). Получаем

$$A_{j\mu}^{(0)}(x) - A_{\mu}^{(0)}(x) = \int D_{\text{ret}}(x-x') J_{\mu}(x') d^4x' = \int d^3x' \frac{J_{\mu}(x', x_0 - |x-x'|)}{|x-x'|}, \quad (\text{Б.10})$$

что равно нулю, если $x \in V_D$ и $x_0 - t_0 < R/c$ (напомним, что ток $J_{\mu}(x')$ сосредоточен в V_S и равен нулю при $x'_0 < t_0$).

Далее выпишем уравнения (Б.1) и (Б.2) для операторов первого приближения, составим их разности и запишем результат в таком виде:

$$(\gamma_{\mu} \partial_{\mu} + m)(\psi_j^{(1)} - \psi^{(1)}) = i[(A_{j\mu}^{(0)} + W_{\mu}) \gamma_{\mu} (\psi_j^{(0)} - \psi^{(0)}) + (A_{j\mu}^{(0)} - A_{\mu}^{(0)}) \gamma_{\mu} \psi^{(0)}], \quad (\text{Б.11})$$

$$\square(A_{j\mu}^{(1)} - A_{\mu}^{(1)}) = -i[\bar{\psi}_j^{(0)} \gamma_{\mu} (\psi_j^{(0)} - \psi^{(0)}) + (\bar{\psi}_j^{(0)} - \bar{\psi}^{(0)}) \gamma_{\mu} \psi^{(0)}]; \quad (\text{Б.12})$$

здесь $\psi_j^{(0)} - \psi^{(0)} \equiv 0$, а $A_{j\mu}^{(0)} - A_{\mu}^{(0)}$ равно нулю при $x_0 - t_0 < R$. Правые части (Б.11) и (Б.12) поэтому равны нулю при $x_0 - t_0 < R$. Поскольку и начальные условия для $\psi_j^{(1)} - \psi^{(1)}$ и $A_{j\mu}^{(1)} - A_{\mu}^{(1)}$ нулевые, то и решение для этих разностей нулевое при $x_0 - t_0 < R$, $x \in V_D$. Относительно выражения решений уравнений (Б.11) и (Б.12) через заданную правую часть и через начальные условия см. соответственно § 23 книги ¹⁹ и соотношения (Б.7)₂ и (Б.9).

Правые части уравнений вида (Б.11) и (Б.12) для следующего приближения выражаются через операторы нулевого и первого приближений. При $x_0 - t_0 < R$ эти правые части исчезают, поскольку при $x \notin S_J$ равны нулю фигурирующие в правых частях разности $\psi_J - \psi$ и $A_J - A$ в нулевом и первом приближениях. Поэтому $\psi_j^{(2)} - \psi^{(2)}$ и $A_{j\mu}^{(2)} - A_{\mu}^{(2)}$ равны нулю при $x \notin S_J$. По индукции получаем, что при $x \notin S_J$ (см. рис. 2) во всех порядках по e разности операторов $\psi_J(x) - \psi(x)$ и $A_{j\mu}(x) - A_{\mu}(x)$ равны нулю (и в отличие от входящих в них операторов не содержит никаких бесконечностей).

Посмотрим, как ведет себя величина $\int_{V_D} \psi^{(-)+}(x) \psi^{(-)}(x) d^3x$ (см. раздел 4в) при включении тока J_{μ} в V_S . Запишем $\psi^{(-)}$ в виде $\psi^{(-)} = \Pi^{(-)}\psi$, где $\Pi^{(-)}$ выделяет из ψ часть, уничтожающую электроны.

$$\int_{V_D} \psi_J^{(-)+} \psi_J^{(-)} d^3x - \int_{V_D} \psi^{(-)+} \psi^{(-)} d^3x = \int d^3y' \int d^3y'' \Pi^{(-)}(y', x) \Pi^{(-)}(x, y'') \times \\ \times [\psi_J^{\dagger}(y') \psi_J(y'') - \psi^{\dagger}(y') \psi(y'')], \quad y'_0 = y''_0 = x_0. \quad (\text{Б.13})$$

Квадратная скобка не равна нулю при $x_0 < R/c$, потому что под интегралом есть точки y', y'' , расположенные в будущем конусе S_J тока J ; см. рис. 2 (для таких точек $\psi_J \neq \psi$). Их расстояние до точек $x \in V_D$ равно или больше $|R - (t - t_0)c|$; см. рис. 2. Проектирующий оператор $\Pi^{(-)}(x, y) = -iS^{(-)}(x, x_0; y, x_0)$ при $|x - y| \gg \lambda_e$ убывает быстрее $\exp(-|x - y|/\lambda_e)$ (здесь λ_e — комптоновская длина волны электрона $\lambda_e = h/mc$). Поэтому точки y', y'' , для которых $\psi_J \neq \psi$, представлены под интегралом с весом $\sim \exp[-|R - (t - t_0)c|/\lambda_e]$ и правая часть (Б.13) имеет порядок величины $\exp[-R(t - t_0)c/\lambda_e]$. Такой неперчинный эффект не означает нарушения РП, поскольку нельзя локализовать частицу Дирака в области с размером $\leq \lambda_e$.

Объединенный институт ядерных исследований, Дубна (Московская область)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. К. Мёллер, Теория относительности, М., Атомиздат, 1975.
2. Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, И. Т. Тодоров, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля, М., «Наука», 1969.
3. Л. Шифф, Квантовая механика, М., ИЛ, 1957.

4. G. C. Hegerfeldt, Phys. Rev. D10, 3320 (1974).
5. T. D. Lee, G. C. Wick, *ibid.* D2, 1033 (1970).
T. L. Trueman, Nucl. Phys. B26, 83 (1971).
6. L. Brillouin, Wave Propagation and Group Velocity, N.Y., Academic Press, 1960.
7. В. Л. Гинзбург, Теоретическая физика и астрофизика, М., «Наука», 1975, гл. 8.
8. Д. А. Киржниц, В. Н. Сазонов, в кн. Эйнштейновский сборник. 1973. М., «Наука», 1974, с. 84.
9. И. В. Полубаринов, Сообщения ОИЯИ P2-7896, P2-8362, Дубна, 1974.
10. D. Gromes, Zs. Phys. 236, 276 (1970).
11. S. Kikuchi, *ibid.* 66, 558 (1930).
12. E. Fermi, Rev. Mod. Phys. 4, 87 (1932).
13. С. Швебер, Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, М., ИЛ, 1963.
14. М. И. Широков, Препринт ОИЯИ P-1719, Дубна, 1964; ЯФ 4, 1077 (1966).
15. W. Heitler, S.T.Ma, Proc. Roy. Ir. Acad. 52, 123 (1949).
16. J. Hamilton, Proc. Phys. Soc. 62, 12 (1949).
17. В. Гайтлер, Квантовая теория излучения, М., ИЛ, 1956.
18. S. T. Ma, Nucl. Phys. 7, 163 (1958).
19. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., Физматгиз, 1959.
20. В. Тирринг, Принципы квантовой электродинамики, М., «Высшая школа», 1964.
21. M. Fierz, Helv. Phys. Acta 23, 731 (1950) (имеется перевод в сб. Новейшее развитие квантовой электродинамики, М., ИЛ, 1954).
22. Б. А. Зон, М. И. Широков, ЯФ 7, 1316 (1968).
23. B. Ferretti, in: Old and New Problems in Elementary Particles, N.Y., Acad. Press, 1968, p. 108.
24. И. А. Еганова, М. И. Широков, Препринт ОИЯИ P2-4645, Дубна, 1969.
25. И. А. Еганова, Препринт ОИЯИ P2-4936, Дубна, 1970; Изв. АН Азерб. ССР, сер. физ.-матем. 1, 94 (1971).
26. М. И. Широков, ЯФ 31, 674 (1975).
27. М. И. Широков, Препринт ОИЯИ P2-5338, Дубна, 1970.
28. М. И. Широков, Сообщения ОИЯИ P2-8022, Дубна, 1974.
29. J. M. Knight, J. Math. Phys. 2, 459 (1961).
30. A. L. Licht, *ibid.* 4, 1443 (1963).
31. М. И. Широков, ЯФ 23, 1131 (1976).
32. М. И. Широков, Препринт ОИЯИ P2-9723, Дубна, 1976.
33. J. S. Bell, The Theory of Local Beables. Preprint TH 2053 CERN, 1975.
34. B. Gerlach, D. Gromes, J. Petzold, P. Rosenthal, Zs. Phys. 208, 381 (1968).
35. B. Gerlach, D. Gromes, J. Petzold, *ibid.* 221, 141 (1969).
36. J. Petzold, Ann. d. Phys. 31, 361, 372, 381 (1974).
37. А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, т. II, М., Гостехиздат, 1956.
38. Т. Вентцель, Введение в квантовую теорию волновых полей, М., Гостехиздат, 1947.
39. П. А. М. Дирак, Принципы квантовой механики, М., Физматгиз, 1960.
40. A. S. Wightman, S. S. Schweber, Phys. Rev. 98, 812 (1955).
41. J. Bjorken, S. Drell, Relativistic Quantum Fields, N.Y., McGraw-Hill, 1965.