

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

538.566.2

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ПЕРЕХОДНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ПЕРЕХОДНОГО РАССЕЯНИЯ *)

В. Л. Гинзбург, В. Н. Цытович

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	553
2.	Переходное излучение	560
	а) Переходное излучение на границе раздела двух сред (560). б) Переходное излучение в нестационарной среде (570). в) Зона формирования. Энергетический баланс при переходном излучении (потери, перенормировка массы, излучение) (574). г) Переходное излучение в вакууме при наличии сильного магнитного поля. Переходное излучение в нелинейных средах (580).	
3.	Переходное рассеяние	585
	а) Переходное рассеяние на движущемся и неподвижном заряде. Связь между переходным рассеянием и резонансным переходным излучением (585). б) Переходное рассеяние в плазме. Переходное излучение при столкновениях частиц. Переходное рассеяние высшего порядка (594). в) Переходное рассеяние в вакууме при наличии сильного электромагнитного или гравитационного поля (599).	
4.	Заключительные замечания	604
	Цитированная литература	606

1. ВВЕДЕНИЕ

Тот факт, что равномерно и прямолинейно движущийся заряд может излучать, стал ясен лишь сравнительно поздно — после открытия эффекта Вавилова — Черенкова и создания в 1937 г. Таммом и Франком ¹ теории этого явления. Как известно, излучение Вавилова — Черенкова (ниже В.—Ч.) имеет место, если заряд (или другой источник с равной нулю собственной частотой, например, постоянный электрический или магнитный диполь) движется со скоростью v , превышающей фазовую скорость света в рассматриваемой прозрачной среде $c_{ph} = c/n(\omega)$, где $n(\omega)$ — показатель преломления на частоте ω . Угол θ , под которым происходит излучение (угол между v и волновым вектором волны k) определяется при этом условием

$$\cos \theta = \frac{c}{n(\omega) v}. \quad (1.1)$$

Это условие носит, по сути дела, кинематический характер — при его соблюдении волны любой природы, имеющие фазовую скорость c_{ph} и испускаемые вдоль траектории источника, находятся в фазе на соответствующую

*) Статья представляет собой сокращенный вариант обзора, печатающегося на английском языке в «Physics Reports (Physics Letters, section C)». Сокращения хоснулись конца раздела в) и раздела г) гл. 2 и, особенно, всей гл. 3.

щей конической поверхности (рис. 1). Поэтому естественно, что условно (1.1), переписанное в виде $\cos \theta = c_{ph}/v$, было давно известно в акустике, как определяющее угол раствора так называемого конуса Маха — конической волны, испускаемой сверхзвуковым источником (в акустике, разумеется, c_{ph} есть скорость звука). Тем более поразительно и поучительно, что эффект В.—Ч. не был открыт значительно раньше, а его объяснение было отнюдь не очевидно и потребовало больших усилий². По-видимому, причиной являлась глубоко укоренившаяся догма, согласно которой «равномерно движущийся электрон не излучает». В действительности же

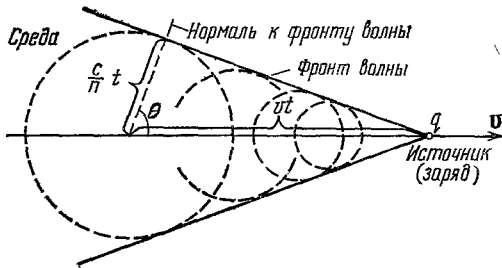


Рис. 1. Образование излучения Вавилова — Черенкова.

$(c/n)t$ — путь, проходимый светом за время t , vt — путь, проходимый за это время источником.

подобное утверждение даже при движении в вакууме, не говоря уже о движении в среде, справедливо лишь при соблюдении целого ряда ограничений, на чем мы здесь подробнее останавливаться не будем (см. ³, гл. 1). Излучение Вавилова — Черенкова занимает сейчас в физике видное место, ему посвящено огромное число работ (см. ²⁻⁷ и указанную там литературу). При этом не меньшую, а быть может, и большую роль играет не эффект В.—Ч. в собственном смысле слова (оптическое излучение заряда, равномерно движущегося в среде со скоростью $v > c/n(\omega)$), а связанные с ним представления и аналогии или, как можно сказать, «черенковская идеология». В качестве типичного примера приведем интерпретацию так называемого затухания Ландау и, конкретно, затухания продольных (плазменных) волн в бесстолкновительной плазме. Вывод о существовании такого затухания был сделан⁸ при решении задачи с начальными условиями о распространении продольных возмущений в бесстолкновительной плазме на базе использования кинетического уравнения. Возникающее бесстолкновительное затухание, появляющееся и в целом ряде других задач физики плазмы и плазмоподобных сред (например, в случае «твердотельной плазмы» — электронной жидкости в металлах и т. п.), можно интерпретировать (или, если угодно, понимать физически) на разных путях. Один из них таков: условие бесстолкновительного поглощения волны электронами плазмы, имеющее вид

$$\omega = kv, \quad (1.2)$$

представляет собой просто условие излучения (1.1) для волн (в данном случае — продольных плазменных волн) с фазовой скоростью

$$c_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n_l}, \quad n_l(\omega) = \frac{ck}{\omega}, \quad (1.3)$$

где $n_l(\omega)$ — показатель преломления для рассматриваемых продольных волн (по сколько скорость продольных волн c_{ph} от c не зависит, введение показателя n_l носит, правда, довольно формальный характер). Таким образом, бесстолкновительное поглощение Ландау есть не что иное, как обратный эффект В.—Ч. для плазменных волн (кинематические условия для поглощения и для излучения волн при пренебрежении отдачи совпадают). Именно такое понимание сейчас, по-видимому, наиболее распространено и для многих делает бесстолкновительное поглощение вполне наглядным и понятным (сказанное не нужно, разумеется, понимать как отрицание

полнейшей законности других «наглядных» картин, иного физического языка).

В общем довольно естественно, что развитие физики сверхсветовых источников (источников, движущихся со скоростью, большей скорости света в данной среде) продолжается и, как мы уверены, будет происходить и далее. Приведем здесь один пример, сравнительно недавний, но уходящий корнями в довольно далекое прошлое. Дело в том, что возможность появления излучения типа В.—Ч. в какой-то мере обсуждалась за несколько десятилетий до его открытия. Не говоря уже о более ранних замечаниях Хевисайда⁹ и Кельвина¹⁰, еще в 1904 г. Зоммерфельд¹¹ пришел к выводу о том, что заряд (электрон), равномерно движущийся в вакууме со скоростью $v > c$, должен излучать. При этом, разумеется, условие излучения имеет вид (1.1) с $n = 1$. Другими словами, Зоммерфельд рассмотрел эффект Вавилова — Черенкова в недиспергирующей и вообще непреломляющей «среде» — вакууме. Однако в рамках непосредственно вслед за тем созданной специальной теории относительности импульс частицы $p = mv/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ и ее нельзя ускорить до скорости $v > c$. Кроме того, требование причинности^{12, 13} также не позволяет иметь частицы, движущиеся со скоростью $v > c$, так как их можно было бы использовать в качестве сверхсветовых «сигналов». Поэтому, вероятно, работа Зоммерфельда и была надолго забыта, мысль же перенести ее результаты на случай движения заряда в среде никому в голову не пришла *). В согласии со сказанным, до недавнего времени считалось довольно очевидным, что излучение В.—Ч. в вакууме, а также в средах с показателем преломления $n < 1$ (в частности, в изотропной плазме, в области применимости известной формулы $n^2 = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$), оказывается невозможным. Фактически же такой вывод неверен или, если угодно, слишком поспешен. Не говоря уже о гипотетических и, по всей вероятности, несуществующих «сверхсветовых» частицах — тахионах, источники излучения вполне могут двигаться со скоростью $v > c$. Более того, такие источники давно известны — в качестве примера можно указать на световые пятна («зайчики»), могущие двигаться с любой скоростью $v > c$. Такие же «зайчики» могут состоять и из заряженных частиц, например, они образуются при падении соответствующих пучков частиц на металлическую пластинку и т. п. «Зайчики» состоят из многих частиц, разных в различные моменты времени, причем сами эти частицы (фотоны, электроны и т. д.) движутся со световой или с досветовой скоростью. Поэтому, в частности, существование сверхсветовых «зайчиков» не нарушает требований причинности — их нельзя использовать для сверхсветовой сигнализации. С другой стороны, заряженный «зайчик» (движущееся «пятно») в электродинамическом смысле «ничем не хуже» любого другого макроскопического заряда и в этом отношении расчет Зоммерфельда вполне применим (формально это ясно из того, что плотность тока $j = \rho(r, t) v(r, t)$, отвечающая распределенному заряду, вполне может перемещаться в пространстве со скоростью, большей c). Коротко говоря, источники излучения, движущиеся со скоростью большей c , вполне осуществимы, а поэтому появляется возможность наблюдать эффект Вавилова — Черенкова как в вакууме (правда, при наличии границы), так и в изотропной плазме (см. ¹⁴⁻¹⁶).

Читатель уже, быть может, недоумевает — судя по заголовку, статья посвящена переходному излучению и рассеянию, а речь до сих пор идет лишь об эффекте Вавилова — Черенкова. Противоречия, здесь, однако, никакого нет. Нас интересует излучение, возникающее при равномерном

*) И. Е. Тамм и И. М. Франк узнали о работе Зоммерфельда уже после того как построили теорию эффекта Вавилова — Черенкова^{1, 2}.

и прямолинейном движении источника (заряда, мультиполя), а эффект В.—Ч. может иметь место именно в этом случае. Более того, если среда однородна в пространстве и не изменяется во времени, то излучение В.—Ч. является единственной возможностью. Но в неоднородной и (или) изменяющейся во времени среде, а также вблизи такой среды ситуация изменяется. Именно, в таких условиях имеет место переходное излучение, понимаемое в широком смысле слова и представляющее собой излучение, возникающее при равномерном и прямолинейном движении заряда (или других источников, не обладающих собственной частотой) в неоднородных условиях — в неоднородной среде, в переменной во времени среде или вблизи таких сред. Разумеется, переходное излучение в общем случае может сосуществовать и интерферировать с черенковским излучением и излучением, возникающим в результате ускорения заряда (т. е. с тормозным излучением, синхротронным излучением и т. д.). Однако для понимания физики дела естественно, по крайней мере сначала, выделить одно переходное излучение.

Рассмотрим поэтому заряд, движущийся с постоянной скоростью *)

$$v < \frac{c}{n}, \quad (1.4)$$

когда излучение В.—Ч. не возникает. Если, кроме того, речь идет о вакууме ($n = 1$), то вообще нет никакого излучения. Для его появления в вакууме заряд (или мультиполь) должен ускоряться или, другими словами, должен изменяться характеризующий излучение параметр v/c . При наличии среды этот параметр уже имеет вид $v/c_{ph} = vn/c$ — он равен отношению скорости частицы v к фазовой скорости света $c_{ph} = c/n$.

Но, и в этом суть дела, при наличии среды параметр vn/c может изменяться не только в результате изменений скорости v , но и в силу изменения вдоль траектории источника фазовой скорости света $c_{ph} = c/n$ за счет соответствующего изменения показателя преломления. Излучение, возникающее при изменении параметра vn/c за счет изменения n при $v = \text{const}$, и называется переходным излучением.

Простейшая задача такого типа — пересечение зарядом границы раздела двух сред (или, в частности, вакуума со средой). Именно возникающий при этом простейший тип переходного излучения был рассмотрен ¹⁷ И. М. Франком и одним из авторов в 1944 г. Заметим, что приведенное выше пояснение, касающееся природы переходного излучения, связывающее его появление с изменением параметра vn/c , все же несколько формально, и фактически требует понимания теории излучения в среде. Поэтому не лишним, вероятно, будет и здесь напомнить о наиболее наглядном объяснении причины появления переходного излучения при пересечении зарядом границы раздела. Как известно, электромагнитное поле в первой среде (в среде, в которой в рассматриваемый момент движется заряд) можно представить как поле самого заряда и поле его «изображения», движущегося во второй среде навстречу заряду. При пересечении границы заряд и его изображение, «с точки зрения» первой среды, как бы

*) При наличии излучения (черенковского, переходного) энергия заряда, вообще говоря, изменяется, и в связи с этим приходится сталкиваться с вопросом — можно ли считать скорость заряда строго постоянной? Ответ здесь является, безусловно, положительным. Например, если массу излучающей частицы можно считать сколь угодно большой, то изменение ее скорости в результате работы внешних источников. Таким образом, потеря энергии можно компенсировать за счет работы внешних источников. Другое дело, что, в некоторых задачах нужно учитывать также изменение скорости источника, но это совсем иной вопрос.

частично «аннигилируют» или «перестраиваются», что и приводит к излучению. Особенно прост при этом, конечно, случай нормального падения заряда из вакуума на идеальное зеркало — при пересечении границы зеркала заряд и его изображение полностью «аннигилируют» или, лучше сказать, останавливаются на границе (в том смысле, что возникающее в вакууме излучение совпадает с излучением падающего заряда q и его изображения $-q$, одновременно резко останавливающихся на границе раздела; рис. 2)*).

Совершенно очевидно, что обсуждаемое переходное излучение имеет место при пересечении границы любых сред с различными «электрическими» параметрами (диэлектрической проницаемостью, показателем преломления и т. п.). В статье ¹⁷, однако, внимание непосредственно было сосредоточено на падении заряда на металл и, соответственно, на переходном излучении (в основном оптическом), в направлении «назад», т. е. наблюдаемом в вакууме. Для релятивистских частиц с достаточно высокой энергией вполне реален, однако, и вариант, при котором частица проходит через среду и выходит в вакуум. В чисто теоретическом отношении эта задача эквивалентна предыдущей, а соответствующая формула для интенсивности излучения получается просто заменой скорости v на скорость $-v$ (см. ниже формулу (2.37) и пояснения к ней). Вместе с тем, конечно, при вычислении поля в этих случаях симметрия отсутствует и интенсивности излучения при замене v на $-v$ (или, другими словами, при влете или вылете из среды и наблюдении, соответственно, «назад» или «вперед») различны и в некоторых условиях сильно отличаются друг от друга. Для излучения вперед и, в частности, при вылете из среды в вакуум, в спектре излучения представлены более высокие частоты и, конкретно, в конденсированной среде переходное излучение релятивистских частиц может простирается в рентгеновскую часть спектра. Соответственно возрастает и интегральная (по всем углам и частотам) интенсивность излучения, которая в простейшем случае оказывается пропорциональной $1/\sqrt{1-(v^2/c^2)} = \mathcal{E}/Mc^2$ (\mathcal{E} — полная энергия излучающего заряда с массой M). Это важное обстоятельство было выяснено лишь в 1959 г. Гарибьяном ¹⁹ и Барсуковым ²⁰. Тем самым открылись более широкие перспективы создания эффективных «переходных счетчиков», предназначенных для детектирования или, точнее, определения скорости релятивистских частиц. Правда, вопрос о переходных счетчиках, связанный с рассмотрением многих границ раздела, был поднят еще ранее ²¹, но предполагавшееся использование переходного излучения в оптической области спектра, по-видимому, не может привести к цели.

Как это часто бывает, появление возможности «практического» применения, в данном случае в физике высоких энергий, резко повысило интерес к переходному излучению. Если с 1945—1946 по 1958 гг. включительно переходному излучению было посвящено не более 15 статей, то за следующие 13 лет (с 1959 по 1971 гг.) было опубликовано уже около

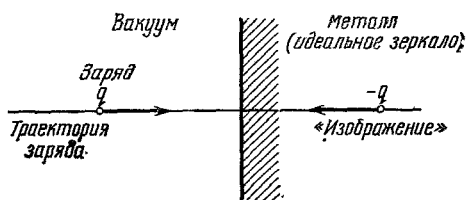


Рис. 2. Возникновение переходного излучения при прохождении заряда q через границу вакуум — металл.

*) Этот результат содержится в статье ¹⁷, а также ясен из вышеследующего раздела а) гл. 2 (популярное изложение теории переходного излучения и рассеяния см. в ¹⁸; целый ряд других ссылок приводится ниже).

200 статей, а с 1972 по 1976 гг., согласно ²² *), появилось 150 статей. Заметим также, что первые опубликованные результаты экспериментов, в которых исследовалось переходное излучение, относятся к 1959 г. (см. ²³ и указанную там литературу). В общем, около 15 лет переходное излучение, этот достаточно простой и ясный эффект из области классической электродинамики, не привлекало к себе почти никакого внимания, сейчас же оно весьма популярно, но в основном в плане разработки и применений переходных счетчиков. Этот аспект проблемы освещен даже в ряде обзоров ²⁴⁻²⁶, не говоря уже о большом числе статей (см. ²²; в дополнение приведем ссылку на одну из последних работ ²⁷, посвященных применению переходного счетчика для исследования спектра электронной компоненты космических лучей).

Ни в какой мере не отрицая важности исследований, связанных с переходными счетчиками, мы хотим подчеркнуть, что переходное излучение, понимаемое в достаточно широком смысле, имеет несомненное общезначимое значение, формирует определенные представления и «язык», а тем самым способствует дальнейшему развитию ряда направлений. Ситуация здесь, в общем, аналогична имеющей место в отношении эффекта Вавилова — Черенкова, который непосредственно (и, можно сказать, в чистом виде) используется в первую очередь в черенковских счетчиках.

Физике обсуждаемого переходного эффекта посвящено много статей (см. также обзоры ^{24, 28-30}). Однако не все стороны проблемы достаточно освещены и известны. Так, до сих пор внимание сосредоточивалось на переходном излучении, возникающем при пересечении одной или ряда границ раздела между средами. В последнем случае речь идет либо об упорядоченной последовательности границ, т. е. системе с определенным периодом, либо о хаотически расположенных границах (неоднородностях **). Другое давно развивающееся направление определяется тем фактом, что всякое излучение и, в частности, переходное излучение с длиной волны λ формируется не в точке, а в некоторой области («зоне формирования»), размер которой определяется длиной λ , но может и значительно ее превосходить. Поэтому, например, эффект В.—Ч. возникает и при движении частицы в вакууме, но вблизи среды (в канале, в щели или вблизи границы среды; см. ³¹, а также ^{3, 5-7}). Совершенно аналогичным образом переходное излучение (в этом случае его обычно называют дифракционным) возникает при пролете источника (заряда), равномерно движущегося в вакууме (или в однородной среде), вблизи каких-то препятствий — металлических или диэлектрических шариков, диафрагм, дифракционной решетки и т. п. (см. обзоры ³²). Не говоря уже о сделанном выше замечании общего характера, появление такого переходного излучения легко понять и на основе метода изображений.

Еще один тип переходного излучения, рассмотренный, однако, лишь сравнительно недавно ³³⁻³⁶, возникает уже в однородной среде, но при изменении ее свойств во времени. Суть дела здесь легче всего понять в терминах, использующих параметр vn/c . Как уже упоминалось, при

*) Мы используем здесь библиографический указатель ²², хотя и должны, к сожалению, отметить его неполноту и известную односторонность (сказанное ясно хотя бы из сопоставления указателя ²² со списком литературы, цитируемой в настоящей статье).

**) Переходное излучение в периодически неоднородной среде обладает, разумеется, своей спецификой. Быть может, поэтому его иногда называют резонансным излучением. Нам, однако, представляется, что использование для всех различных видов переходного излучения разных терминов вряд ли целесообразно и приводит лишь к недоразумениям. Ниже (в гл. 3) переходное излучение в периодической среде мы будем, в качестве некоторого компромисса, называть резонансным переходным излучением, а также переходным рассеянием.

$v = \text{const}$ для появления переходного излучения на траектории заряда или вблизи нее должен изменяться показатель преломления n . Но это изменение будет, очевидно, иметь место и в условиях, когда показатель n изменяется во времени, например, в какой-то момент более или менее резко возрастает или уменьшается.

Подобно излучению типа В.—Ч. переходное излучение носит весьма общий характер и в том смысле, что может иметь место для волн различной природы. В качестве примера упомянем о переходном излучении акустических волн, возникающем при переходе движущейся дислокации через границу зерен в поликристалле ³⁷ *). Вероятно, в акустике представляют интерес и другие задачи, связанные с переходным излучением (см., в частности, ³⁸).

Любопытно, а быть может, и имеет реальное значение в применении к магнитосферам пульсаров, переходное излучение, возникающее уже в вакууме, но при наличии сильного магнитного поля, приводящего к появлению нелинейных электродинамических эффектов ³⁹.

Выше мы, по существу, уже перечислили (в числе других) те вопросы, которые будут затронуты в гл. 2 настоящей статьи. Речь пойдет о переходном излучении в однородной, но нестационарной среде, о балансе энергии при переходном излучении и о переходном излучении в вакууме — задачах, не принадлежащих к традиционно рассматриваемым в обзорных статьях. Правда, в разделе а) гл. 2 будет обсуждена также основная задача о переходном излучении на границе раздела двух сред, но сделано это лишь для удобства изложения и, в частности, для возможности сопоставления с другими задачами.

Гл. 3 статьи посвящена переходному рассеянию, причем сам этот введенный авторами термин ⁴⁰ нуждается в пояснении. Если происходит переходное излучение при движении заряда в среде с периодически (скажем, синусоидально) изменяющимся показателем преломления, то можно говорить не только о переходном излучении или резонансном переходном излучении, но и называть соответствующий процесс переходным рассеянием. В самом деле, в этом случае волна диэлектрической проницаемости (показателя преломления), которая может быть стоячей или бегущей, как бы рассеивается на движущемся заряде, порождая электромагнитное (переходное) излучение. Мы не стали бы применять, однако, в таких условиях термин переходное рассеяние вместо переходного излучения, если бы эффект не сохранялся и в предельном случае покоящегося заряда. Тогда говорить о переходном излучении по меньшей мере неестественно, в то время как термин «переходное рассеяние» отражает суть дела. Действительно, речь идет, например, о падении на неподвижный (фиксированный) заряд волны проницаемости, причем от заряда расходится электромагнитная волна. Такую волну можно считать рассеянной в таком же смысле, как и при других типах рассеяния, например, при рассеянии электромагнитной волны на покоящемся электроне (в данном случае, конечно, имеется в виду покой только при неучете действия падающей волны). Переходное рассеяние играет видную роль в физике плазмы, а в целом представляет собой явление весьма общего типа и, например, должно иметь в вакууме при падении электромагнитной ³⁹ или гравитационной ⁴¹ волны на область с сильным статическим электромагнитным полем (при этом происходит образование расходящейся электромагнитной волны).

Итак, настоящая статья посвящена некоторым вопросам теории переходного излучения и переходного рассеяния, причем в значительной мере

*) В ³⁷ в первую очередь рассматривается излучение звука, возникающее при выходе дислокации на поверхность кристалла. В этом случае, однако, ближе аналогия не с переходным излучением, а с тормозным излучением при остановке заряда.

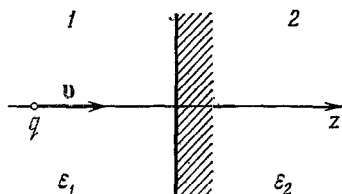
тем, которые еще не были освещены в обзорной литературе, в особенности с единых позиций *). Между тем, по нашему мнению, обсуждаемый круг вопросов имеет достаточно широкий интерес.

2. ПЕРЕХОДНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

а) Переходное излучение на границе раздела двух сред

1) Рассмотрим вначале основную и простейшую, в известном смысле, задачу теории переходного излучения, когда движущийся с постоянной скоростью v заряд q пересекает границу раздела двух сред ¹⁷.

Для простоты считаем, что падение на границу раздела является нормальным (рис. 3). Изотропные среды 1 и 2 характеризуются значениями диэлектрической проницаемости ϵ_1 и ϵ_2 , которые в общем случае могут быть комплексными (рис. 3). Исходными являются, разумеется, уравнения поля



$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j^q, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

в которых плотность тока равна

$$j^q = qv\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \quad (2.2)$$

Рис. 3. Пересечение зарядом q границы раздела двух сред.

В силу того, что задача однородная по времени и по направлениям в каждой из сред, параллельным границе раздела, удобно для всех величин сделать разложение Фурье по времени и по компоненте \mathbf{r} , перпендикулярной к скорости заряда (обозначаемой здесь через \mathbf{r}_\perp ; ось z перпендикулярна к границе). Тогда

$$\left. \begin{aligned} j_z^q(\mathbf{r}, t) &= \int j_{\mathbf{x}, \omega}(z) e^{i\mathbf{x}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{x} d\omega, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}_{\mathbf{x}, \omega}(z) e^{i\mathbf{x}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{x} d\omega, \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{H}_{\mathbf{x}, \omega}(z) e^{i\mathbf{x}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{x} d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Вектор \mathbf{x} имеет две компоненты, x_x и x_y . Для компоненты Фурье проекции j_z^q плотности тока j^q из (2.2) получаем

$$j_{\mathbf{x}, \omega}^q(z) = \frac{q \exp[i(\omega/v)z]}{(2\pi)^2}. \quad (2.4)$$

Удобно также выделить компоненту \mathbf{E} по направлению скорости заряда, обозначаемую просто через E , и перпендикулярную компоненту \mathbf{E}_\perp . По определению,

$$\mathbf{E} = \frac{(\mathbf{E}\mathbf{v})}{v}, \quad \mathbf{E}_\perp = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}(\mathbf{E}\mathbf{v})}{v^2}. \quad (2.5)$$

*) Когда речь идет не о каких-либо существенных новых результатах, а о том или ином понимании и способе изложения материала, нам представляется особенно неуместным по каждому возможному поводу приводить ссылки на литературу. К тому же в ряде случаев и нелегко установить, где именно впервые появилось то или другое замечание или было сделано какое-то преобразование формул. Поэтому мы просим читателей рассматривать приводимые ссылки на литературу как имеющие в основном ориентировочное и ограниченное значение и, иногда, как дополнение к библиографическому указателю ²². Если же при этом мы несколько чаще ссылаемся на свои собственные статьи, то в большей мере только по той причине, что они непосредственно использовались в тексте.

Вектор E_{\perp} имеет две компоненты, E_x и E_y . Поскольку в дальнейшем мы будем пользоваться только уравнениями для компонент Фурье в разложении (2.3), то для сокращения будем опускать индексы x, y у соответствующих величин. Для указанных компонент, проектируя уравнения (2.1) на направление скорости заряда v , получим

$$\kappa_x H_y - \kappa_y H_x = -\frac{\omega}{c} \varepsilon E - \frac{4\pi i}{c} j^q, \quad (2.6)$$

$$H_y = -\frac{c}{\omega} \left(\kappa_x E + i \frac{\partial E_x}{\partial z} \right), \quad H_x = \frac{c}{\omega} \left(\kappa_y E + i \frac{\partial E_y}{\partial z} \right). \quad (2.7)$$

Отсюда

$$\left(\kappa^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) E + i \frac{\partial}{\partial z} (\kappa E_{\perp}) = \frac{4\pi i \omega}{c^2 (2\pi)^3} q \exp \left(i \frac{\omega}{v} z \right); \quad (2.8)$$

здесь $\kappa^2 = \kappa_x^2 + \kappa_y^2$. При проектировании уравнений Максвелла на направление, перпендикулярное к скорости частицы v , ток частицы, естественно, не вносит вклада, и мы имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) (\kappa E_{\perp}) = i \kappa^2 \frac{\partial E}{\partial z}. \quad (2.9)$$

Действуя оператором $(\partial^2/\partial z^2) + (\omega^2/c^2)\varepsilon$ на обе части уравнения (2.8) и используя (2.9), можно исключить κE_{\perp} и получить одно уравнение для E :

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \varepsilon E + \varepsilon \left(\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon - \kappa^2 \right) E = -\frac{4\pi i \omega q}{c^2 (2\pi)^3} \left(\varepsilon - \frac{c^2}{v^2} \right) \exp \left(i \frac{\omega}{v} z \right); \quad (2.10)$$

здесь учтено, что в пределах каждой из сред 1 и 2 диэлектрическая проницаемость ε является постоянной величиной и не зависит от z . Однако на границе раздела сред она испытывает скачок. Уравнение (2.10) нужно решить в каждой из сред и сплести решения, используя граничные условия — равенство на границе нормальных компонент индукции и тангенциальных компонент электрического поля:

$$\varepsilon_1 E_1|_{z=0} = \varepsilon_2 E_2|_{z=0}, \quad (\kappa E_{\perp})_1|_{z=0} = (\kappa E_{\perp})_2|_{z=0}. \quad (2.11)$$

Рассмотрим вначале решение уравнения (2.10) для однородной среды (в качестве которой может служить каждая из двух сред). Такое решение будет суммой вынужденного решения (поля заряда q в среде),

$$E^q = -\frac{4\pi i q [1 - (c^2/v^2)\varepsilon]}{\omega (2\pi)^3 [\varepsilon - (c^2/v^2) - (\kappa^2 c^2/\omega^2)]} \exp \left(i \frac{\omega}{v} z \right), \quad (2.12)$$

и свободного поля (поля излучения)

$$E^R = \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} a \exp \left(\pm i \frac{\omega}{c} z \sqrt{\varepsilon - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right). \quad (2.13)$$

Напомним, что $E = E^q + E^R$ — компонента поля E в направлении скорости заряда v . Выделение множителя $4\pi i q/\omega (2\pi)^3$ в амплитуде поля излучения сделано только в целях удобства рассмотрения. Амплитуда a оказывается тогда безразмерной. Далее знак $+$ в (2.13) соответствует волне, распространяющейся в направлении $z > 0$, а минус — соответственно в направлении $z < 0$. Поле E^R в волновой зоне представляет собой поле, описывающее переходное излучение. Оно должно распространяться от границы раздела сред, т. е. в среде 2 нужно в (2.13) выбрать знак $+$, а в среде 1 выбрать знак $-$.

Следует, впрочем, сделать две оговорки. Строго говоря, поле (2.13) представляет собой поле излучения только в том случае, когда (2.13) описывает распространяющуюся волну, т. е. если

$$\varepsilon > \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}. \quad (2.14)$$

При $\varepsilon < \kappa^2 c^2/\omega^2$ поле (2.13) будет экспоненциально затухать от границы, т. е. при обоих знаках $+$ и $-$ необходимо положить в этом случае

$$\sqrt{\varepsilon - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} = i \frac{\omega}{|\omega|} \sqrt{\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon}. \quad (2.15)$$

Такие затухающие от границы волны обязательно присутствуют при рассмотрении переходного излучения, так как соответствующие волны могут на границе испытать полное внутреннее отражение. Строго говоря, существует и переходное излучение поверхностных волн, которое мы здесь не рассматриваем.

Вторая оговорка касается возможности существования решения однородного уравнения (2.10) при условии $\varepsilon = 0$. Оно отвечает излучению продольных волн, характеристики которых существенно зависят от пространственной дисперсии, а следовательно, и от свойств среды вблизи поверхности. Мы их здесь также рассматривать не будем.

Прежде чем использовать граничные условия (2.11) для сшивки решений в интересующей нас здесь задаче, следует отметить, по ходу дела, что из (2.12) легко получается формула Тамма — Франка¹ для излучения В.—Ч. в однородной среде. Такое излучение возникает, если выполнено условие $c^2/v^2\varepsilon < 1$. Мощность излучения равна взятой со знаком минус работе, совершаемой в единицу времени полем E^q над током j^q (эти величины коллинеарны):

$$Q_{\text{В.—Ч}} = -qv \int_{-\infty}^{\infty} E^q(vt) e^{-i\omega t} d\omega d\mathbf{k} = \frac{q^2 v}{c} \int_0^{\infty} \omega d\omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon}\right) \times \\ \times \int_0^{\infty} \delta\left(\varepsilon - \frac{c^2}{v^2} - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}\right) d\frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} = \frac{q^2 v}{c} \int_{c^2/v^2 \varepsilon < 1} \omega d\omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon}\right).$$

При рассмотрении переходного излучения, как уже говорилось выше, мы будем считать условие излучения В.—Ч. не выполненным (т. е. считаем, что $c^2/v^2\varepsilon > 1$). Для использования граничных условий (2.11) необходимо знать тангенциальные компоненты электрического поля. Они легко находятся из (2.9), (2.12), (2.13) для поля заряда (индекс q) и поля излучения (индекс R)

$$(\kappa E_{\perp})^q = -\frac{\kappa^2 c^2 E^q}{\omega [\varepsilon - (c^2/v^2)]}, \quad (\kappa E_{\perp})^R = \mp \frac{\omega}{c} E^R \sqrt{\varepsilon - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}. \quad (2.16)$$

Теперь можно воспользоваться граничными условиями (2.11) для получения двух уравнений, определяющих амплитуды поля излучения a_1 и a_2 :

$$\frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2 a_1}{\varepsilon_1 - (c^2/v^2) - (\kappa^2 c^2 / \omega^2)} - \varepsilon_1 a_1 = \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{\varepsilon_2 - (c^2/v^2) - (\kappa^2 c^2 / \omega^2)} - \varepsilon_2 a_2, \quad (2.17)$$

$$\frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{v \varepsilon_1 [\varepsilon_1 - (c^2/v^2) - (\kappa^2 c^2 / \omega^2)]} + \frac{a_1}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} = \\ = \frac{\kappa^2 c^2 / \omega^2}{v \varepsilon_2 [\varepsilon_2 - (c^2/v^2) - (\kappa^2 c^2 / \omega^2)]} - \frac{a_2}{c} \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}. \quad (2.18)$$

2) Не решая уравнений (2.17), (2.18), можно сразу сделать ряд выводов, касающихся излучения ультрарелятивистской частицы, когда $1/\sqrt{1 - (v^2/c^2)} = \mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$. Действительно, из (2.17) видно, что заметное излучение возникает в том случае, когда собственные поля частицы существенно разные в двух средах или, другими словами, когда в двух средах отличаются факторы $-\varepsilon - (c^2/v^2) + (\kappa^2 c^2 / \omega^2)$. Рассмотрим высокие частоты, когда использование плазменной формулы для диэлектрической проницаемости $\varepsilon = 1 - (\omega_p^2 / \omega^2)$, $\omega_p^2 = 4\pi N e^2 / m$, оправдано для любых сред. Тогда

$$-\varepsilon + \frac{c^2}{v^2} + \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \approx \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2 + \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}. \quad (2.19)$$

Если $\omega \gg \omega_p$, т. е. $\varepsilon \approx 1$ и величина $\kappa^2 c^2 / \omega^2 \approx \theta^2 \ll 1$, где θ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{v} , то в (2.19) все слагаемые будут величинами одинакового порядка, если

$$\omega \sim \frac{\omega_p \mathcal{E}}{Mc^2}, \quad \theta \sim \frac{Mc^2}{\mathcal{E}}. \quad (2.20)$$

Будем поэтому рассматривать излучение в основном вперед и на высоких частотах, считая выполненными условия (2.20). Соотношения (2.17),

2.18) тогда принимают вид

$$\frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p1}^2/\omega^2) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]} + a_1 = \frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p2}^2/\omega^2) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]} + a_2, \quad (2.21)$$

$$\frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p1}^2/\omega^2) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]} - a_1 = \frac{\theta^2}{\theta^2 + (\omega_{p2}^2/\omega^2) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]} + a_2, \quad (2.22)$$

где ω_{p1}^2 и ω_{p2}^2 — два значения плазменной частоты в средах 1 и 2 соответственно. Из (2.21), (2.22) следует $a_1 = 0$, т. е. излучение назад отсутствует, а излучение вперед определяется амплитудой

$$a_2 = \frac{\theta^2 (\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2)}{\omega^2 [\theta^2 + (\omega_{p1}^2/\omega^2) + (Mc^2/\mathcal{E})^2] [\theta^2 + (\omega_{p2}^2/\omega^2) + (Mc^2/\mathcal{E})^2]}. \quad (2.23)$$

Интенсивность излучения пропорциональна $|a_2|^2$ (см. ниже). Обращение в нуль излучения назад является лишь следствием принятого приближения, определяемого неравенствами (2.20). При выполнении условий (2.20) излучение назад в действительности не отсутствует, однако, оно будет более высокого порядка малости по параметрам разложения θ^2 и $\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}}\right)^2$.

В общем случае также нетрудно разрешить систему (2.17), (2.18) относительно амплитуд a_1 и a_2 . В результате получаем

$$a_2 = \frac{\frac{v}{c} \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon_2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_2 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_2 + \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2}\right) \left(1 - \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right) \left(\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right)}, \quad (2.24)$$

$$a_1 = \frac{\frac{v}{c} \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2 \varepsilon_1} (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon_1 + \frac{\kappa^2 v^2}{\omega^2}\right) \left(1 + \frac{v}{c} \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right) \left(\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}}\right)}. \quad (2.25)$$

В приближении (2.20) из (2.24) получим (2.23), тогда как для излучения назад

$$a_1 \approx \frac{\theta^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{4 [\theta^2 + (\omega_{p1}^2/\omega^2) + (Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]} = \frac{\theta^2 (\omega_{p1}^2 - \omega_{p2}^2)}{4 \omega^2 [\theta^2 + (\omega_{p1}^2/\omega^2) + (Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]}. \quad (2.26)$$

Для нерелятивистского заряда $v \ll c$ излучение вперед и назад оказывается примерно одинаковым (если ε_1 и ε_2 одного порядка величины).

3) Получим теперь формулы для энергии переходного излучения, выразив ее через амплитуды a_1 и a_2 . Для этого совсем не нужно вычислять поток вектора Пойнтинга, а достаточно рассчитать энергию радиационного поля E^R асимптотически при $t \rightarrow \infty$, когда радиационное поле и собственное поле оказываются разделенными (при этом среда, в которой рассматривается переходное излучение, считается прозрачной).

Этот метод расчета соответствует гамильтоновскому методу, изложенному в ³. Простоты ради будем в выражении для энергии пренебрегать дисперсией и учтем, что в плоской волне (2.13) магнитная и электрическая энергии равны друг другу:

$$W_2^R = \frac{1}{4\pi} \int_{t \rightarrow \infty} d\mathbf{r}_\perp \int_0^\infty dz \varepsilon_2 [(E^R(\mathbf{r}, t))^2 + (\mathbf{E}_\perp^R(\mathbf{r}, t))^2], \quad (2.27)$$

где рассматривается поле в среде 2 (т. е. излучение вперед). В действительности получаемый результат справедлив и для любых диспергирующих сред. Множитель $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \omega} \omega^2 \epsilon_2(\omega)$, заменяющий ϵ_2 в (2.27), в случае диспергирующих сред фактически сокращается (как это видно из приводимого ниже расчета). Подставив разложение (2.3) и учтя, что согласно (2.16)

$$|E_{\perp}^R|^2 = \frac{\omega^2}{\kappa^2 c^2} \left(\epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \right) |E^R|^2, \quad (2.28)$$

получаем

$$W_2^R = \pi^2 \int_0^{\infty} d\kappa^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega d\omega' |E^R|^2 \frac{\omega^2 \epsilon_2 \sin(\omega - \omega') t}{\kappa^2 c^2 \left(\frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} - \frac{\omega'}{c} \sqrt{\epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega'^2}} \right)}. \quad (2.29)$$

Воспользовавшись выражением

$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin(\omega - \omega') t}{(\omega - \omega')} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \delta(\omega - \omega'), \quad (2.30)$$

получим окончательно

$$\bar{W}_2^R = \frac{q^2}{2\pi c} \int_0^{\infty} \frac{d\kappa^2}{\kappa^2} d\omega \epsilon_2 \sqrt{\epsilon_2 - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} |a_2|^2. \quad (2.31)$$

Удобно ввести угол θ_2 между \mathbf{k} и \mathbf{v} (частица по нормали переходит из среды 1 в среду 2), причем $\sin^2 \theta_2 = \kappa^2 c^2 / \omega^2 \epsilon_2$. Тогда для излучения вперед (в среду 2), учитывая (2.24), получим

$$W_2^R = \int_0^{\infty} d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin \theta_2 d\theta_2 W_2^R(\omega, \theta_2), \quad (2.32)$$

$$W_2^R(\omega, \theta_2) = \frac{q^2 v^2}{\pi^2 c^3} \sqrt{\epsilon_2} \cos^2 \theta_2 \sin^2 \theta_2 |\epsilon_2 - \epsilon_1|^2 \times \\ \times \left| \frac{1 - (v^2/c^2) \epsilon_2 - (v/c) \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta_2}}{[1 - (v^2/c^2) \epsilon_2 \cos^2 \theta_2][1 - (v/c) \sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta_2}](\epsilon_1 \cos \theta_2 + \sqrt{\epsilon_2(\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta_2)})} \right|^2. \quad (2.33)$$

Стоит сказать пару слов об областях, соответствующих волнам, испытывающим полное внутреннее отражение в среде 2, когда $\sqrt{\epsilon_2 - (\kappa^2 c^2 / \omega^2)}$ принимает комплексное (мнимое) значение. Если один из корней $\sqrt{\epsilon_2 - (\kappa^2 c^2 / \omega^2)}$ или $\sqrt{\epsilon_2 - (\kappa^2 c^2 / \omega'^2)}$ в (2.29) оказывается мнимым, то знаменатель в (2.29) не обращается в нуль и, следовательно, это дает быстро осциллирующий во времени член, который при $t \rightarrow \infty$ обращается в нуль. Если же оба корня мнимы, то в силу (2.15) знаменатель (2.29) четен при одно-временной замене $\omega \rightarrow -\omega$ и $\omega' \rightarrow -\omega'$, тогда как числитель нечетен при такой замене, и, следовательно, результат равен нулю. Таким образом, в (2.32) фактически фигурируют только распространяющиеся волны. Физически это заключение совершенно прозрачно, так как при $t \rightarrow \infty$ поле излучения практически отошло от границы и волны, испытывающие полное внутреннее отражение, не дают вклада в излучение. Последнее не означает, что в излучении, распространяющемся от границы, нет таких волн, которые при изменении \mathbf{k} на $-\mathbf{k}$ (т. е. обращении направления распространения) не испытывали бы на границе полного внутреннего отражения. Такие волны соответствуют условию

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta_2 < 0 \quad \text{или} \quad \epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta_2 = \epsilon_1 \cos^2 \theta_1 < 0$$

(используем закон преломления $\epsilon_1 \sin^2 \theta_1 = \epsilon_2 \sin^2 \theta_2$). Таким волнам в (2.33) соответствует мнимое значение $\sqrt{\epsilon_1 - \epsilon_2 \sin^2 \theta_2}$, а при расчете интенсивности с помощью (2.33) нужно взять квадрат модуля получающегося комплексного выражения, что и указано в (2.33). Аналогичным образом находится энергия, излучаемая назад (в сре-

ду l ; здесь θ_1 — угол между \mathbf{k} и $-\mathbf{v}$):

$$W_1^R = \int_0^\infty d\omega \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi \sin \theta_1 d\theta_1 W_1^R(\omega, \theta_1), \quad (2.34)$$

$$W_1^R(\omega, \theta_1) = \frac{q^2 v^2}{\pi^2 c^3} \sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_1 \sqrt{\varepsilon_1} |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2 \times \\ \times \left| \frac{[1 - (v^2/c^2) \varepsilon_1 + (v/c) \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}]}{[1 - (v^2/c^2) \varepsilon_1 \cos^2 \theta_1] [1 + (v/c) \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1}] (\varepsilon_2 \cos \theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1)})} \right|^2. \quad (2.35)$$

В составе излучения назад также присутствуют волны, которые в среде 2 не распространяются ($\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \sin^2 \theta_1 < 0$). В случае ультрарелятивистских энергий для излучения вперед можно получить результат не только из (2.33), но и сразу, используя (2.23):

$$W_2^R(\omega) = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \left[\frac{1}{\theta^2 + \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} + \frac{(Mc^2)^2}{\mathcal{E}^2}} - \frac{1}{\theta^2 + \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} + \frac{(Mc^2)^2}{\mathcal{E}^2}} \right]^2. \quad (2.36)$$

4) Если частица влетает в среду с $\varepsilon_2 = \varepsilon$ из вакуума ($\varepsilon_1 = 1$), то формула (2.35) дает результат, полученный в ¹⁷ для излучения назад:

$$W_1^R(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta |(\varepsilon - 1) [1 - (v^2/c^2) + (v/c) \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}]|^2}{\pi^2 c^3 [1 - (v^2/c^2) \cos^2 \theta] [1 + (v/c) \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta}] (\varepsilon \cos \theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \theta})^2}. \quad (2.37)$$

Естественно, что для получения энергии излучения при вылете частицы из среды в вакуум можно воспользоваться формулой (2.37), заменив v на $-\mathbf{v}$. Тот же результат получится, если в (2.33) положить $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = 1$. Для излучения ультрарелятивистской частицы назад в интервале углов (2.20) получаем

$$W_1^R(\omega, \theta) = \frac{q^2}{\pi^2 c} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} \right|^2 \frac{\theta^2}{[\theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2]^2}. \quad (2.38)$$

В спектральной плотности излучения назад имеется резкий максимум при $\theta \sim Mc^2/\mathcal{E}$. Однако в интегральную по углам интенсивность вносят вклад в равной степени и углы с $\theta \sim 1$. Это видно из логарифмической

«расходимости» интеграла $\int_0^\infty W_1^R(\omega, \theta) d\theta^2$ при больших θ^2 . Естественно, при больших углах уже нельзя использовать выражение (2.38), а надо пользоваться точной формулой (2.37). Однако при $\ln(\mathcal{E}/Mc^2) \gg 1$ можно пренебречь вкладом больших углов и получить

$$W_1^R(\omega) \approx \int_0^{\theta_{\max}^{-1}} \pi d\theta^2 W_1^R(\omega, \theta) \approx \frac{q^2}{\pi c} \left| \frac{\sqrt{\varepsilon} - 1}{\sqrt{\varepsilon} + 1} \right|^2 \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.39)$$

В некотором смысле похожая ситуация возникает и с частотной зависимостью. Для больших частот, когда можно пользоваться плазменной формулой, согласно (2.39), $W_\omega \sim 1/\omega^4$, т. е. основной вклад дают малые частоты. Следовательно, плазменной формулой для произвольных изотропных сред пользоваться нельзя (за исключением случая, когда средой является плазма). Для плазмы интегрирование по частотам ограничено

условием $\omega > \omega_p$. Тогда (2.39) дает

$$W_1^R = \int_{\omega_p}^{\infty} W_1^R(\omega) d\omega = \frac{q^2}{15\pi c} \omega_p \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.40)$$

Как уже отмечалось, для ультрарелятивистской частицы основная часть излученной энергии приходится на излучение вперед. При этом можно воспользоваться формулой (2.36), которая показывает, что не только угловое распределение излучения оказывается вытянутым по движению частицы, но и основная доля энергии излучается в углах порядка $\theta \sim \sim Mc^2/\mathcal{E}$. Оказывается, что использование плазменного приближения для диэлектрической проницаемости при расчете интегральной по частотам интенсивности (излученной энергии) является оправданным также для любых сред, так как основная энергия излучения приходится на высокие частоты. Рассмотрим два примера: 1) изменение концентрации частиц $\Delta N = |N_1 - N_2|$ на границе раздела сред малое, $\Delta N/N \ll 1$; 2) резкий скачок концентрации $\Delta N/N_1 = 1$, $N_2 = 0$. В первом случае интегрирование по углам дает

$$W_2^R(\omega) = \frac{q^2}{6\pi c} \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \frac{\omega_p^4}{\omega^4} \frac{1}{\{(\omega_p^2/\omega^2) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]\}^2}. \quad (2.41)$$

Спектральная плотность постоянна до $\omega \approx \omega_p \mathcal{E}/Mc^2$, а затем падает пропорционально $1/\omega^4$. Это показывает, что характерная частота существенно превосходит плазменную (при $\mathcal{E}/Mc^2 \ll 1$) и, следовательно, плазменное приближение является оправданным. Полная энергия излучения будет равной

$$W_2^R = \int_0^{\infty} W_2^R(\omega) d\omega = \frac{q^2 \omega_p}{24c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2. \quad (2.42)$$

Сравнивая энергию излучения вперед с энергией излучения назад, убеждаемся в том, что доминирующим действительно является излучение вперед. В случае $\Delta N/N_1 = 1$ получаем

$$W_2^R(\omega) = \frac{2q^2}{\pi c} \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right] \ln \left[1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \right] - 1 \right\}. \quad (2.43)$$

При малых частотах $\omega \ll \omega_p \ll \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}$ спектральная плотность не постоянна, а имеет логарифмическую зависимость от частоты и энергии частицы

$$W_2^R(\omega) \approx \frac{2q^2}{\pi c} \ln \frac{\omega_p \mathcal{E}}{\omega Mc^2}, \quad \omega \ll \omega_p \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (2.44)$$

тогда как при больших частотах $\omega \gg \omega_p (\mathcal{E}/Mc^2)$ она по-прежнему падает как $1/\omega^4$:

$$W_2^R(\omega) = \frac{q^2}{6\pi c} \frac{\omega_p^4}{\omega^4} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^4, \quad \omega \gg \omega_p \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.45)$$

Интегральная по частотам энергия излучения оказывается равной

$$W_2^R = \int_0^{\infty} W_2^R(\omega) d\omega = \frac{q^2}{3c} \omega_p \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \quad (2.46)$$

и растет пропорционально энергии частицы^{19, 20}.

5) Для дальнейшего изложения нам понадобится анализ переходного излучения для одноосного кристалла (см. ^{2, 43, 44}). Мы проиллюстрируем здесь, что изложенная выше методика весьма просто приводит к искомому результату. Рассмотрим вначале случай, когда частица движется по оси z , совпадающей с кристаллической осью в одноосном ферродизэлектрике, причем тензоры проницаемостей имеют вид ($D_i = \varepsilon_{ij} E_j$; $B_i = \mu_{ij} H_j$)

$$\varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\varepsilon} \end{Bmatrix}, \quad \mu_{ij} = \begin{Bmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{\mu} \end{Bmatrix}. \quad (2.47)$$

Так же как и выше, получим выражение для поля заряда E^q и поля излучения E^R (ср. (2.12), (2.13)):

$$E^q = - \frac{4\pi i q (\varepsilon \mu - c^2/v^2) \exp(i\omega z/v)}{\varepsilon \omega (2\pi)^3 [\varepsilon \mu - (c^2/v^2) - (\varepsilon \kappa^2 c^2 / \varepsilon \omega^2)]}, \quad (2.48)$$

$$E^R = \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} a \exp \left[\pm i \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon \mu - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \frac{\varepsilon}{\tilde{\varepsilon}}} \right]. \quad (2.49)$$

Из граничных условий получаем

$$a_2 = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{\tilde{\varepsilon}_2} \frac{v}{c} \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2} \frac{1}{\varepsilon_1 \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2 - (\varepsilon_2 \kappa^2 c^2 / \tilde{\varepsilon}_2 \omega^2)} + \varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - (\kappa^2 c^2 \varepsilon_1 / \tilde{\varepsilon}_1 \omega^2)}} \times \\ \times \left\{ \frac{1 + (v/c) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - (\kappa^2 c^2 \varepsilon_1 / \tilde{\varepsilon}_1 \omega^2)}}{\tilde{\varepsilon}_1 [1 - \varepsilon_2 \mu_1 (v^2/c^2) + (\varepsilon_1 \kappa^2 v^2 / \tilde{\varepsilon}_1 \omega^2)]} - \frac{1 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1) (v/c) \sqrt{\varepsilon_1 \mu_1 - (\varepsilon_1 \kappa^2 c^2 / \tilde{\varepsilon}_1 \omega^2)}}{\tilde{\varepsilon}_2 [1 - \varepsilon_2 \mu_2 (v^2/c^2) + (\varepsilon_2 \kappa^2 v^2 / \tilde{\varepsilon}_2 \omega^2)]} \right\}. \quad (2.50)$$

При $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$; $\tilde{\mu} = \mu = 1$ этот результат, естественно, переходит в (2.24). В случае ультрарелятивистской частицы для высоких частот, когда $\varepsilon \approx 1$ и $(\varepsilon - 1)$ порядка $\theta^2 \sim (Mc^2/\mathcal{E})^2$, получаем

$$a_2 \approx \frac{\theta^2 (\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1)}{\{\theta^2 + (1 - \varepsilon_1 \mu_1) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]\} \{\theta^2 + (1 - \varepsilon_2 \mu_2) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]\}}. \quad (2.51)$$

Этот результат иллюстрирует тот факт, что для ультрарелятивистской частицы существенное значение имеет разность квадратов показателей преломления $\varepsilon_2 \mu_2$ и $\varepsilon_1 \mu_1$ для волн, распространяющихся вдоль скорости частицы. Можно видеть, однако, что даже в случае строгого равенства указанных показателей преломления $\varepsilon_1 \mu_1 = \varepsilon_2 \mu_2 = 1$ *) переходное излучение не исчезает, поскольку оно зависит не только от произведения $\varepsilon \mu$ (см. (2.50)). Амплитуду a_2 следует, однако, записать теперь с точностью до следующих малых членов порядка $(Mc^2/\mathcal{E})^2$, $(1 - \varepsilon \mu)$ и θ^2 . Это дает (см. (2.50))

$$a_2 \approx \frac{\theta^2}{[\theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2]^2} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1 + 2\tilde{\varepsilon}_2 - 2\tilde{\varepsilon}_1) + \theta^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) \right]. \quad (2.52)$$

Излучаемая энергия определяется значением

$$W_2^R = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \frac{d\theta^2}{\theta^2} |a_2|^2, \quad (2.53)$$

которое, согласно (2.52), логарифмически «расходится» на больших углах. Последнее указывает только на неприменимость в данном случае приближения $\theta^2 \ll 1$. Однако выражение (2.52) можно использовать для получения результата с логарифмической точностью, если $\ln(\mathcal{E}/Mc^2) \gg 1$. При этом получаем

$$W_2^R = \frac{2q^2}{\pi c} \ln \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \int_0^\infty d\omega |\varepsilon_2(\omega) - \varepsilon_1(\omega)|^2. \quad (2.54)$$

*) Именно такой случай соответствует переходному излучению в вакууме в сильном магнитном поле при движении частицы вдоль поля (см. ниже п. г) гл. 2). При этом, хотя $\varepsilon \mu = 1$, проницаемости $\varepsilon \neq 1$, $\mu \neq 1$.

Очевидно, что в этом случае переходное излучение вперед сильно подавлено и имеет характерные черты рассмотренного выше переходного излучения назад (в изотропной среде). Более того, переходное излучение назад в данном случае будет по порядку величины (если не говорить о множителях типа $\ln(\varepsilon/Mc^2)$) таким же, как излучение вперед. Правда, оно не содержит множителя $\ln(\varepsilon/Mc^2)$ и практически уже не зависит от энергии частицы.

6) Обсудим далее случай, когда частица движется перпендикулярно к оси симметрии одноосного ферродизэлектрика (ось симметрии направлена по оси x). Тогда тензор (2.47) следует записать (в соответствии с тем, что ось z у нас направлена по скорости частицы) в виде

$$\varepsilon_{ij} = \begin{Bmatrix} \tilde{\varepsilon} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{Bmatrix}, \quad \mu_{ij} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{Bmatrix}. \quad (2.55)$$

В данном случае могут излучаться две волны с различной поляризацией (амплитуды a_0 и a_e). Для немагнитной среды (т. е. при $\mu_{ij} = \delta_{ij}$) эти волны называются обыкновенной (индекс 0) и необыкновенной (индекс e). В магнитной среде показатели преломления для обеих волн зависят от θ — угла между \mathbf{k} и осью симметрии кристалла (см., например, ⁴⁴). Поэтому термины «обыкновенная волна» и «необыкновенная волна» непоследовательны. Для простоты мы будем тем не менее их употреблять, имея в виду соответственно волны типов 0 и e . Для поля излучения E^R получаем

$$E^R = \frac{4\pi i q}{\omega (2\pi)^3} \left\{ a_0 \exp \left[\pm i \frac{\omega}{c} z \sqrt{\tilde{\varepsilon}_\mu - \frac{\tilde{\varepsilon}_\mu^2 \kappa_x^2 c^2}{\varepsilon \omega^2} - \frac{\kappa_y^2 c^2}{\omega^2}} \right] + \right. \\ \left. + a_e \exp \left[\pm i \frac{\omega}{c} z \sqrt{\tilde{\varepsilon}_\mu - \frac{\tilde{\mu} \kappa_x^2 c^2}{\mu \omega^2} - \frac{\kappa_y^2 c^2}{\omega^2}} \right] \right\}. \quad (2.56)$$

У первой из них — обыкновенной волны — электрический вектор поляризации перпендикулярен к плоскости, в которой лежат кристаллическая ось и вектор \mathbf{k} , причем $H_x = 0$; для другой — необыкновенной волны вектор поляризации лежит в плоскости, проходящей через кристаллическую ось и вектор \mathbf{k} ; для нее $E_x = 0$.

Собственное поле частицы имеет вид

$$E^q = -\frac{4\pi i q}{\omega} \exp \left(i \frac{\omega}{v} z \right) \times \\ \times \frac{\left(\tilde{\varepsilon}_\mu - \frac{c^2}{v^2} \right) \left(\tilde{\varepsilon}_\mu - \frac{c^2}{v^2} \right) - \frac{\kappa_x^2 c^2}{\omega^2} \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \left(\tilde{\varepsilon}_\mu - \frac{c^2}{v^2} \right) - \frac{\kappa_y^2 c^2}{\omega^2} \left(\tilde{\varepsilon}_\mu - \frac{c^2}{v^2} \right)}{\left[\tilde{\varepsilon}_\mu - \frac{c^2}{v^2} - \frac{\varepsilon}{\omega^2} \frac{\kappa_x^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\kappa_y^2 c^2}{\omega^2} \right] \left[\tilde{\varepsilon}_\mu - \frac{c^2}{v^2} - \frac{\tilde{\mu}}{\mu} \frac{\kappa_x^2 c^2}{\omega^2} - \frac{\kappa_y^2 c^2}{\omega^2} \right]}. \quad (2.57)$$

Общие соотношения для энергии излучения весьма громоздки и их нет смысла приводить. Граничные условия — равенства двух тангенциальных компонент электрического поля E_x и E_y и двух компонент магнитного поля H_x и H_y — дают четыре соотношения для четырех амплитуд. В силу обращения в нуль компоненты H_x для обыкновенной волны и компоненты E_x соответственно для необыкновенной — два из этих соотношений содержат только амплитуды волн одного типа (обыкновенной или необыкновенной), тогда как остальные два соотношения содержат все четыре амплитуды. В ультрарелятивистском пределе $\theta^2 \ll 1$, $Mc^2/\mathcal{E} \ll 1$, величина $|1 - \varepsilon_\mu| \ll 1$ и последние упомянутые два соотношения разделяются, т. е. граничные условия независимо определяют компоненты обыкновенной и необыкновенной волн. Они оказываются в этом смысле развязанными. При этом для каждой пары волн (обыкновенной — назад и вперед и необыкновенной — назад и вперед) граничные соотношения приобретают вид (2.21), (2.22), в которых вместо ω_0^2/ω^2 фигурирует $1 - \varepsilon_\mu$ для обыкновенной волны и соответственно $1 - \tilde{\varepsilon}_\mu$ для необыкновенной. Кроме того, в числителях возникает соответственно $\cos^2 \varphi$ или $\sin^2 \varphi$, где φ — полярный угол в плоскости, перпендикулярной к скорости частицы. Так, для обыкновенной волны получаем

$$\frac{\theta^2 \cos^2 \varphi}{\theta^2 + (1 - \tilde{\varepsilon}_1 \mu_1) + (Mc^2/\mathcal{E})^2} + a_{0,1} = \frac{\theta^2 \cos^2 \varphi}{\theta^2 + (1 - \tilde{\varepsilon}_2 \mu_2) + (Mc^2/\mathcal{E})^2} + a_{0,2}, \\ \frac{\theta^2 \cos^2 \varphi}{\theta^2 + (1 - \tilde{\varepsilon}_1 \mu_1) + (Mc^2/\mathcal{E})^2} - a_{0,1} = \frac{\theta^2 \cos^2 \varphi}{\theta^2 + (1 - \tilde{\varepsilon}_2 \mu_2) + (Mc^2/\mathcal{E})^2} - a_{0,2}. \quad (2.58)$$

Отсюда следует, что в указанном приближении излучение назад отсутствует, тогда как для энергии излучения вперед в случае обыкновенной волны имеем

$$W_{-,0}^R = \frac{q^2}{2\pi^2 c} \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \times \\ \times \left| \frac{(\tilde{\varepsilon}_1 \mu_1 - \tilde{\varepsilon}_2 \mu_2)}{[\theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2 + (1 - \tilde{\varepsilon}_1 \mu_1)][\theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2 + (1 - \tilde{\varepsilon}_2 \mu_2)]} \right|^2. \quad (2.59)$$

Соответственно для энергии необыкновенной волны получим

$$W_{2,e}^R = \frac{q^2}{2\pi^2 c} \int_0^\infty d\omega \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \times \\ \times \left| \frac{(\varepsilon_1 \tilde{\mu}_1 - \varepsilon_2 \tilde{\mu}_2)}{[\theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2 + (1 - \varepsilon_1 \tilde{\mu}_1)][\theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2 + (1 - \varepsilon_2 \tilde{\mu}_2)]} \right|^2. \quad (2.60)$$

Множители $\cos^2 \varphi$ и $\sin^2 \varphi$ отражают поляризационные свойства переходного излучения. Заметим, что эффект переходного излучения здесь также зависит от показателей преломления волн, распространяющихся по скорости частицы. Формулы (2.59), (2.60) в пределе $\tilde{\mu} = \mu$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ дают результат ⁴⁴ для изотропного ферродиелектрика.

Мы продолжим обсуждение относящихся сюда вопросов в п. г) гл. 2, посвященном переходному излучению в вакууме при наличии сильного магнитного поля. Постоянные электрическое или магнитное поля делают вакуум аналогичным как раз одноосному ферродиелектрику.

Полноты ради приведем также мощность черенковского излучения для частицы, движущейся поперек оси ферродиелектрика (проницаемости ε и μ считаем вещественными). Читатель проще всего сможет получить приводимые формулы из выражения (2.57) для собственного поля заряда тем же методом, который был использован выше для случая изотропной среды. Для мощности излучения обыкновенной волны имеем

$$Q_{0, \text{В.-Ч}} = \frac{q^2 v}{c^2} \int_0^\infty \omega d\omega V_{\mu\mu} \left(1 - \frac{c}{v \sqrt{\varepsilon\mu}} \right) \quad (2.61)$$

и соответственно для необыкновенной волны

$$Q_{e, \text{В.-Ч}} = \frac{q^2}{c} \int_0^\infty \omega d\omega V_{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 - \frac{c}{v \sqrt{\varepsilon\mu}} \right). \quad (2.62)$$

Их сумма имеет вид

$$Q_{\text{В.-Ч}} = Q_{0, \text{В.-Ч}} + Q_{e, \text{В.-Ч}} = \frac{q^2 v}{c^2} \int_0^\infty \omega d\omega V_{\mu\mu} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \sqrt{\mu\varepsilon\varepsilon}} \right). \quad (2.63)$$

При $\mu = \tilde{\mu} = 1$, $\varepsilon = \tilde{\varepsilon}$ получим выражение Тамма и Франка ¹ для излучения В.—Ч. В случае немагнитных кристаллов такие формулы были получены уже давно (см. ^{5, 44, 45}). Заметим в заключение, что при распространении частицы вдаль кристаллической оси

$$Q_{\text{В.-Ч}} = \frac{q^2 v}{c} \int_0^\infty \mu \omega d\omega \left(1 - \frac{c^2}{v^2 \varepsilon \mu} \right). \quad (2.64)$$

Мы используем формулу (2.63) ниже, в разделе г) гл. 2.

В теории излучения В.—Ч. и переходного излучения обычно полагают $\mu = 1$. Между тем расчеты для более общего случая магнитной среды

(скажем, изотропной среды с $\mu_{ij} = \mu \delta_{ij}$; $\mu \neq 1$) оказываются полезными и в применении к немагнитной среде, но для источников — магнитных полюсов и магнитных диполей. Дело в том, что (это хорошо известно; см., например, ³ § 7) уравнения поля для магнитных полюсов (плотность магнитного заряда ρ_m) получаются из уравнений для электрических зарядов (плотность заряда ρ) путем замены $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$, $\rho \rightarrow \rho_m$, $\mu \rightarrow \epsilon$ (произведение $\epsilon\mu$ сохраняется). Поэтому, например, излучение В.—Ч. для магнитного полюса (с магнитным зарядом $g = \int \rho_m d\tau$) не нужно вычислять заново, а достаточно в формуле (2.64) заменить q на g и μ на ϵ (произведение $\epsilon\mu$ остается без изменений). Ситуация аналогична и в случае переходного излучения (переходное излучение магнитного заряда недавно детально рассмотрено в работе ¹¹⁶).

б) Переходное излучение в нестационарной среде

1) Переходное излучение может возникнуть также в том случае, когда в среде происходит резкое изменение ее свойств во времени ^{33-36, 46}. Как отмечалось во введении, такая возможность ясна уже из общих соображений, приводящих к выводу о существовании переходного излучения: для его появления существенно изменение параметра vn/c в месте, занимаемом зарядом (или другим излучателем), а это изменение возможно как из-за пересечения зарядом границы раздела, так и из-за изменения n во времени.

Будем считать, простоты ради, что среда изотропна и характеризуется значением диэлектрической проницаемости ϵ , которая в момент $t = 0$ скачком меняется от значения ϵ_1 до значения ϵ_2 . В среде имеется заряд q , движущийся с постоянной скоростью v . Исходными служат те же уравнения Максвелла (2.1) с током (2.2). В силу того, что рассматриваемая задача полностью пространственно однородна, удобно все величины раскладывать по пространственным компонентам Фурье:

$$\begin{aligned} \mathbf{j}^q(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, & \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}, \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \int \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d\mathbf{k}. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Для тока имеем

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}}^q(t) = \frac{qv}{(2\pi)^3} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t]. \quad (2.66)$$

Уравнение Максвелла (2.1) запишутся в виде

$$\begin{aligned} k^2 \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t^2} \epsilon \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) &= \frac{4\pi i q v (\mathbf{k}\mathbf{v})}{c^2 (2\pi)^3} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t], \\ \frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{k}}(t)}{\partial t} &= -ic [\mathbf{k}\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)]. \end{aligned} \quad (2.67)$$

Необходимо решить уравнения (2.67) для $t < 0$ и $t > 0$ и сшить при $t = 0$. Условия сшивки непосредственно следуют из уравнений Максвелла (2.1), а именно *):

$$\epsilon_1 \mathbf{E}_{\mathbf{k}, 1}(0) = \epsilon_2 \mathbf{E}_{\mathbf{k}, 2}(0), \quad \mathbf{B}_{\mathbf{k}, 1}(0) = \mathbf{B}_{\mathbf{k}, 2}(0). \quad (2.68)$$

*) Для получения условий (2.68) нужно, очевидно, проинтегрировать уравнения (2.1) по времени по области скачка — между моментами $t_1 = -\delta t$ и $t_2 = \delta t$, а затем устремить длительность скачка δt к нулю. При этом величины $\text{rot } \mathbf{H}$, $\text{rot } \mathbf{E}$ и \mathbf{j}^q считаются конечными, как это, вообще говоря, и имеет место.

В данном случае удобно проектировать уравнение (2.67) на направление, перпендикулярное \mathbf{k} . Это связано с тем, что задача пространственно симметрична, а поля в изотропной среде естественно разделяются на продольные и поперечные к вектору \mathbf{k} . Однако продольное поле в силу непрерывности индукции не излучается. Уравнение для поперечной к вектору \mathbf{k} составляющей (компоненты) поля $\mathbf{E}_\mathbf{k}(t)$

$$\mathbf{E}_\mathbf{k}^{\text{tr}}(t) = \mathbf{E}_\mathbf{k}(t) - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{E}_\mathbf{k}(t))}{k^2} \quad (2.69)$$

имеет вид

$$k^2 \mathbf{E}_\mathbf{k}^{\text{tr}}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon \mathbf{E}_\mathbf{k}^{\text{tr}}(t) = \frac{4\pi i q (\mathbf{k}\mathbf{v}) \mathbf{v}_\mathbf{k}^{\text{tr}}}{c^2 (2\pi)^3} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t], \quad (2.70)$$

$$\mathbf{v}_\mathbf{k}^{\text{tr}} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})}{k^2}; \quad (2.71)$$

здесь мы использовали индекс tr для обозначения поперечной компоненты, чтобы отличить от компоненты, перпендикулярной к скорости заряда, которая отличается с помощью индекса \perp . Уравнение (2.70) осталось векторным. Однако можно получить одно уравнение для скалярной величины, если учесть, что в однородной среде обе линейные поляризации поперечного поля независимы (не завязаны) и, следовательно, поляризация, для которой $\mathbf{E}_\mathbf{k}^{\text{tr}}$ направлено по $\mathbf{v}_\mathbf{k}^{\text{tr}}$, не зависит от поляризации, перпендикулярной к $\mathbf{v}_\mathbf{k}^{\text{tr}}$. Для последней получим однородное уравнение без источника и, следовательно, можем заключить, что излучение с такой поляризацией не будет возбуждаться зарядом. Таким образом, не нарушая общности, можно считать, что

$$\mathbf{E}_\mathbf{k}^{\text{tr}}(t) = E_\mathbf{k}(t) \frac{\mathbf{v}_\mathbf{k}^{\text{tr}}}{v}, \quad (2.72)$$

и задача сводится к одному уравнению для $E_\mathbf{k}(t)$:

$$k^2 E_\mathbf{k}(t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \varepsilon E_\mathbf{k}(t) = \frac{4\pi i q v (\mathbf{k}\mathbf{v})}{c^2 (2\pi)^3} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t]. \quad (2.73)$$

Его решение равно сумме решения неоднородного уравнения (поля частицы E^q) и однородного уравнения (поля излучения E^R)

$$E_\mathbf{k}(t) = E_\mathbf{k}^q(t) + E_\mathbf{k}^R(t), \quad (2.74)$$

причем

$$E_\mathbf{k}^q(t) = \frac{4\pi i q v (\mathbf{k}\mathbf{v}) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t]}{c^2 (2\pi)^3 [k^2 - (\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2)]}, \quad (2.75)$$

$$E_\mathbf{k}^R(t) = \frac{4\pi i q}{k (2\pi)^3} \left[a_+ \exp\left(-i \frac{kc}{V_\varepsilon} t\right) + a_- \exp\left(i \frac{kc}{V_\varepsilon} t\right) \right]. \quad (2.76)$$

Если ε является функцией частоты $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$, то в (2.75) фигурирует $\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})$. Коэффициенты a_+ и a_- описывают амплитуды двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях — по \mathbf{k} (амплитуда a_+) и против \mathbf{k} (амплитуда a_-). При $t < 0$ поле излучения отсутствует, а при $t > 0$ сразу возникают две волны.

Магнитное поле найдется из (2.67):

$$\frac{\partial \mathbf{B}_\mathbf{k}(t)}{\partial t} = -\frac{ic}{v} [\mathbf{k}\mathbf{v}] E_\mathbf{k}(t), \quad (2.77)$$

$$\mathbf{B}_\mathbf{k}^q(t) = \frac{4\pi i q [\mathbf{k}\mathbf{v}] \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t]}{c (2\pi)^3 \{k^2 - [\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2]\}}, \quad (2.78)$$

$$\mathbf{B}_\mathbf{k}^R(t) = \frac{4\pi i q V_\varepsilon [\mathbf{k}\mathbf{v}]}{vk^2 (2\pi)^3} \left[a_+ \exp\left(-i \frac{kc}{V_\varepsilon} t\right) - a_- \exp\left(i \frac{kc}{V_\varepsilon} t\right) \right]. \quad (2.79)$$

Граничные (начальные) условия (2.68) сразу дают

$$\frac{\varepsilon_1 k v (\mathbf{k}\mathbf{v})/c^2}{k^2 - [\varepsilon_1 (\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2]} = \frac{\varepsilon_2 k v (\mathbf{k}\mathbf{v})/c^2}{k^2 - [(\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \varepsilon_2/c^2]} + \varepsilon_2 (a_+ + a_-), \quad (2.80)$$

$$\frac{k^2 v/c}{k^2 - [\varepsilon_1 (\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2]} = \frac{k^2 v/c}{k^2 - [(\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \varepsilon_2/c^2]} + V_\varepsilon (a_+ - a_-); \quad (2.81)$$

здесь надо иметь в виду, что, вообще говоря, $a_+(\mathbf{k})$ и $a_-(-\mathbf{k})$ описывают одну и ту же волну, так как в силу действительности поля $\mathbf{E}^R(\mathbf{r}, t)$ и определения a_+ и a_- (см. (2.76)) имеем

$$a_-(-\mathbf{k}) = -a_+^*(\mathbf{k}). \quad (2.82)$$

Именно (2.82) и указывает на то, что для заданного \mathbf{k} амплитуда a_- описывает волну, распространяющуюся в противоположном \mathbf{k} направлении. Соотношение (2.80) особенно просто использовать для вывода, касающегося излучения ультрарелятивистской частицы $(Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll 1$ под малым углом $\theta^2 \ll 1$ к скорости частицы \mathbf{v} , в условиях, когда $\varepsilon - 1 \approx \omega_p^2/\omega^2 \ll 1$. Тогда (2.80), (2.81) приводят сразу к соотношениям

$$\frac{1}{\theta^2 + (\omega_{p1}^2/k^2 c^2) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]} = \frac{1}{\theta^2 + (\omega_{p2}^2/k^2 c^2) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]} + a_+(\mathbf{k}) + a_-(\mathbf{k}), \quad (2.83)$$

$$\frac{1}{\theta^2 + (\omega_{p1}^2/k^2 c^2) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]} = \frac{1}{\theta^2 + (\omega_{p2}^2/k^2 c^2) + [(Mc^2)^2/\mathcal{E}^2]} + a_+(\mathbf{k}) - a_-(\mathbf{k}). \quad (2.84)$$

Эти соотношения фактически сводятся к уже обсуждавшимся соотношениям (2.21), (2.22) для переходного излучения ультрарелятивистской частицы на границе раздела сред. В этом можно убедиться, если учесть, что в силу $|\varepsilon - 1| \ll 1$, $\omega \approx kc$ амплитуда a_+ соответствует a_2 , а $a_-(\mathbf{k}) = -a_+^*(-\mathbf{k})$ соответствует $-a_1$. Отсюда ясно, что для ультрарелятивистской частицы излучение назад будет малым, а излучение вперед сходно с излучением, возникающим при пересечении границы раздела сред.

В общем случае из (2.80), (2.81) следует

$$a_{\pm}(\mathbf{k}) = \frac{k^2 v}{2c\varepsilon_2} \left\{ \frac{[\varepsilon_1(\mathbf{k}\mathbf{v})/kc] \pm \sqrt{\varepsilon_2}}{k^2 - [\varepsilon_1(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2]} - \frac{[\varepsilon_2(\mathbf{k}\mathbf{v})/kc] \pm \sqrt{\varepsilon_2}}{k^2 - [\varepsilon_2(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2]} \right\}. \quad (2.85)$$

2) Интенсивность излучения может быть подсчитана как энергия радиационного поля при $t \rightarrow \infty$. Опять-таки можно воспользоваться формулой (2.27), в которой, однако, интегрирование должно быть распространено на все пространство:

$$\begin{aligned} W^R &= \frac{1}{4\pi} \int_{t \rightarrow \infty} d\mathbf{r} \varepsilon_2 (\mathbf{E}^R)^2 = 2\pi^2 \int_{t \rightarrow \infty} d\mathbf{k} \varepsilon_2 \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{k^2 v^2} E_{\mathbf{k}}^R E_{-\mathbf{k}}^R = \\ &= \frac{q^2}{2\pi^2} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} \varepsilon_2 \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{k^2 v^2} |a_+(\mathbf{k})|^2 = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta W^R(\omega, \theta). \end{aligned} \quad (2.86)$$

Здесь мы использовали соотношения (2.82) и учли, что при $t \rightarrow \infty$ осциллирующие во времени слагаемые должны быть отброшены. Мы снова использовали метод, близкий к гамильтоновскому, и то обстоятельство, что собственное поле заряда и поле излучения при $t \rightarrow \infty$ разделяются. В (2.86) не учтена также дисперсия ε_2 (окончательный результат с учетом дисперсии тот же самый). Поэтому $|\mathbf{k}| = \sqrt{\varepsilon_2} \omega/c$, и можно перейти к интегрированию по частотам. Наконец, мы ввели угол излучения θ как угол между \mathbf{k} и \mathbf{v} . С учетом всего этого

$$W^R(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^4 \sin^2 \theta |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2}{4\pi^2 c^5 \sqrt{\varepsilon_2} |1 - \varepsilon_1 (v^2/c^2) \cos^2 \theta|^2 |1 - (v/c) \sqrt{\varepsilon_2} \cos \theta|^2}. \quad (2.87)$$

Для сравнения с переходным излучением на границе раздела двух сред заметим, что в (2.86) интегрирование проводится по всем углам. В преде-

лах углов $(0, \pi/2)$ соотношение (2.87) описывает излучение вперед, тогда как в пределах $(\pi/2, \pi)$ — излучение назад.

Для нерелятивистских частиц оба типа переходного излучения (на резкой границе раздела двух сред и при резком изменении во времени свойств среды) разнятся не только количественно, но и по порядку величины. Так, (2.87) дает

$$W^R(\omega, \theta) \approx \frac{q^2 v^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{4\pi^2 c^5 \sqrt{\varepsilon_2}} |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2, \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \quad (2.88)$$

В то же время из (2.33) получаем

$$W_2^R(\omega, \theta) \approx \frac{q^2 v^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta |\varepsilon_2 - \varepsilon_1|^2 \sqrt{\varepsilon_2}}{\pi^2 c^3 |\varepsilon_1 \cos \theta + \sqrt{\varepsilon_2} \sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2 \theta}|^2}, \quad \frac{v^2}{c^2} \ll 1. \quad (2.89)$$

Таким образом, излучение (2.88) при резком изменении во времени диэлектрической проницаемости оказывается более высокого порядка по малому параметру $v^2/c^2 \ll 1$.

Для ультрарелятивистской частицы излучение вперед практически оказывается одинаковым в случае переходного излучения на границе раздела и в случае резкого изменения ε во времени. Действительно, из (2.87) в этом случае получаем

$$W^R(\omega) = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \left[\frac{1}{\theta^2 + (1 - \varepsilon_1) + (Mc^2/\mathcal{E})^2} - \frac{1}{\theta^2 + (1 - \varepsilon_2) + (Mc^2/\mathcal{E})^2} \right]^2, \quad (2.90)$$

что совпадает с (2.36). Отсюда следует, в частности, что и спектральное распределение интенсивности и полная излученная энергия будут такими же (см. (2.41) — (2.46)).

Однако излучение назад оказывается несколько иным. В угловом распределении по-прежнему имеется резкий максимум при углах $\pi - \theta'$; $\theta' \sim Mc^2/\mathcal{E}$:

$$W^R(\omega, \pi - \theta') \approx \frac{q^2 \theta'^2 |\varepsilon_1(\omega) - \varepsilon_2(\omega)|^2}{16\pi^2 c |\theta'^2 + (1 - \varepsilon_1(\omega)) + (Mc^2/\mathcal{E})^2|^2}. \quad (2.91)$$

Слагаемое $(1 - \varepsilon_1(\omega))$ в знаменателе отличает (2.91) от (2.38). Однако такое же слагаемое возникнет и в (2.38), если рассматривать излучение не в пустоту, а в среду с проницаемостью $\varepsilon_1(\omega)$. С другой стороны, в случае переходного излучения при резком изменении диэлектрической проницаемости во времени считать, что при $t < 0$ был вакуум, кажется весьма искусственным. Наличие слагаемого $(1 - \varepsilon_1(\omega))$ в (2.91) меняет оценки следующим образом. Основная интенсивность приходится на малые частоты, когда $1 - \varepsilon_1(\omega)$ не мало. В этой области частот пропадает и резкая угловая зависимость и логарифмическая зависимость от энергии.

В случае анизотропных сред, в частности, при движении релятивистской частицы поперек кристаллической оси или вдоль нее резкое изменение свойств среды во времени приводит к излучению, совпадающему с излучением при пересечении зарядом границы раздела двух сред, т. е. описывается формулами (2.51), (2.59), (2.60). В ответ входит разность значений показателя преломления волн, распространяющихся по направлению скорости частицы. Заметим, что в случае анизотропной среды или, конкретно, при превращении (на «скачке» при $t = 0$) изотропной среды в анизотропную электромагнитное излучение возникает уже для покоящегося заряда³⁶.

в) Зона формирования. Энергетический баланс при переходном излучении (потери, перенормировка массы, излучение)

1) Рассмотренными типами переходного излучения, а именно, излучением при пересечении зарядом резкой границы раздела сред и при резком изменении свойств среды во времени, не исчерпываются, естественно, все возможности появления переходного излучения. Так, возможно изменение свойств среды и в пространстве и во времени, так же как и генерация переходного излучения другими излучателями — дипольными моментами, различными электрическими и магнитными токами, а также большим ансамблем (сгустком) зарядов или токов^{47, 48}. При этом нужно, в частности, определить, что понимается под термином резкая граница раздела сред или резкое изменение свойств среды во времени. Между тем до сих пор этот термин уточнен не был.

Очевидно, чтобы полностью выяснить поставленный вопрос, нужно рассмотреть переходное излучение для нерезкой границы раздела или нерезкого изменения свойств среды во времени. Тогда можно указать точные условия, при соблюдении которых изменения среды можно считать резкими (скачкообразными). При этом, как и для понимания ряда других моментов, существенную роль играет понятие о зоне формирования или о времени формирования переходного излучения. Качественно излучение можно считать таким же, как для резкой границы раздела, если характерная ширина переходного слоя Δz (резкой границе отвечает условие $\Delta z \rightarrow 0$) достаточно мала по сравнению с длиной зоны формирования L_f , а резкость изменения во времени должна соответствовать временам, меньшим времени формирования излучения t_f . Естественно, что $L_f = vt_f$.

Длину формирования можно оценить следующим образом. Необходимо найти ту длину $L = L_f$, на которой полная энергия поля $E^q + E^R$ (пропорциональная $(E^q + E^R)^2$) станет практически равной сумме энергии поля E^q (пропорциональной $(E^q)^2$) и поля излучения E^R (пропорциональной $(E^R)^2$), т. е. поле, увлекаемое частицей, и поле излучения будут отделены друг от друга. Другими словами, должен быть малым интерференционный член, пропорциональный $E^q E^R$. Поскольку согласно (2.12) $E^q \sim \exp(i\omega z/v)$, а согласно (2.13) $E^R \sim \exp[\pm i(\omega/c)z \times \sqrt{\epsilon - (\kappa^2 c^2/\omega^2)}]$, интерференционный член мал при условии

$$\left(\frac{\omega}{v} \pm \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon - \frac{\kappa^2 c^2}{\omega^2}} \right) z \gg 2\pi. \quad (2.92)$$

Точнее, при этом условии интерференционный член быстро осциллирует и мал в среднем по пространству. В силу сказанного длину L_f можно определить так:

$$L_f = \frac{2\pi}{|(\omega/v) \pm (\omega/c) \sqrt{\epsilon_{2,1} - (\kappa^2 c^2/\omega^2)}|}. \quad (2.93)$$

Знаки \pm отвечают зонам формирования соответственно в средах 1 или 2 (частица летит из среды 1 в среду 2). В случае резкого изменения среды во времени собственное поле заряда пропорционально $\exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{v})t]$, тогда как поле излучения пропорционально $\exp(\pm i\mathbf{k}\mathbf{c}t/\sqrt{\epsilon})$ (см. (2.75), (2.76)) и интерференционный член между ними в выражении для энергии поля становится малым (быстро осциллирует) при

$$\left| \mathbf{k}\mathbf{v} \pm \frac{\mathbf{k}\mathbf{c}}{\sqrt{\epsilon}} \right| t \gg 2\pi. \quad (2.94)$$

Соответственно полагаем

$$t_f = \frac{2\pi}{|kv \pm (kc/\sqrt{\epsilon_2})|}. \quad (2.95)$$

Учитывая, что в (2.93) $kc^2/\omega^2\epsilon_2 = \sin^2\theta$ и $kc/\sqrt{\epsilon_2} = \omega$ для излучения вперед получим, что

$$L_f = vt_f = \frac{2\pi v}{|\omega - \sqrt{\epsilon_2}(v/c)\omega \cos\theta|}. \quad (2.96)$$

Для ультрарелятивистской частицы, полагая $\sqrt{\epsilon_2} \approx 1 - (\omega_p^2/2\omega^2)$, имеем

$$L_f \approx \frac{4\pi c}{\omega} \frac{1}{\theta^2 + (\omega_p^2/\omega^2) + (Mc^2)^2/\mathcal{E}^2} \quad (2.97)$$

Если считать, что $\theta \approx Mc^2/\mathcal{E}$, то для $\omega \ll \omega_p$ \mathcal{E}/Mc^2 длина формирования растет с ростом частоты $L_f \approx 4\pi c\omega/\omega_p^2$, и при частотах порядка $\omega_p \mathcal{E}/Mc^2$, соответствующих максимуму функции $W^R(\omega)\omega$, достигает максимальной величины

$$L_{f, \max} \approx \frac{4\pi c}{\omega} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.98)$$

Несколько другой вывод выражений типа (2.96)–(2.98) см., например, в ^{3, 24 *}). Как видим, величина $L_{f, \max}$ растет пропорционально энергии частицы \mathcal{E} . Критерий резкости границы $\Delta z \ll L_f$ для переходного излучения при пролете заряда через границу раздела сред, так же как и критерий резкости скачка диэлектрической проницаемости во времени $\Delta t \ll t_f$, оказывается, следовательно, выполненными тем лучше, чем выше энергия частицы. Практически, для обычных плотностей, отвечающих плотности твердого тела, частота ω_p соответствует примерно значению $\lambda/2\pi = c/\omega_p \approx 10^{-6}$ см и при большой энергии частицы длина L_f будет вполне макроскопической величиной. Так, для примера, при максимальной зафиксированной энергии космических лучей около $\mathcal{E} \sim 10^{20}$ эв, если эту энергию приписать протону (для чего, впрочем, нет достаточных оснований) получим $L_f \sim 1$ км. Этот пример явно экзотический, но приведен он для того, чтобы подчеркнуть и другую сторону дела. Именно, если речь идет о пластинке конечной толщины, то для образования вполне сформировавшегося переходного излучения необходимо, чтобы ее толщина была не меньше (2.98). Последнее существенно, например, для возможности возникновения переходного излучения космических лучей на межзвездной пыли (обычный размер пылинок порядка 10^{-3} – 10^{-5} см). Из (2.98) видно, что высокоэнергичные космические лучи переходного излучения на пыли создавать не могут.

Если речь идет о переходном излучении сгустков зарядов, то для того, чтобы сгусток излучал как единый заряд, его продольный размер Δz_b должен быть меньше длины минимальной излучаемой волны $(2\pi c/\omega_p) Mc^2/\mathcal{E}$. Поскольку размер сгустка в собственной системе l связан с Δz_b известной формулой $\Delta z_b = lMc^2/\mathcal{E}$, то приходим к условию $l \ll 2\pi c/\omega_p$, что в свою очередь при $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$ всегда жестче условия $l \ll L_f = (4\pi c/\omega_p) \mathcal{E}/Mc^2$.

Оценка величины зоны формирования позволяет качественно ответить на вопрос о роли пространственной и частотной дисперсии. До сих пор мы

*) В определении размеров зоны формирования L_f имеется, конечно, известная условность. Так, часто в качестве L_f выбирается значение вдвое меньшее, чем используемое нами. Более существенно, что согласно (2.93), (2.96) длина $L_f \rightarrow 0$ при $v \rightarrow 0$ (т. е. для покоящегося заряда). Между тем понятие об отличной от нуля зоне формирования имеет известный смысл и для неподвижного излучателя — в этом случае (в простейших ситуациях) $L_f \approx 2\pi c/\omega_p = \lambda$. Ряд замечаний о понятии зоны формирования (в частности, в историческом плане) см. в ².

формально вводили проницаемости ε_1 и ε_2 , а также пользовались плазменной формулой в области больших частот. Вместе с тем задача о переходном излучении при пролете заряда через границу раздела сред с учетом пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости, вообще говоря, требует более тщательного рассмотрения. Дело в том, что при наличии пространственной дисперсии нельзя, строго говоря, вводить ε вблизи границы раздела, так как задача не является пространственно однородной. Это касается, фактически, только некоторой области $\Delta z_d = 2\pi/k_d$ около границы, где k_d — характерное волновое число, соответствующее размеру, на котором оказывается пространственная дисперсия⁹⁰. Таким образом, в некотором смысле речь идет о «размытии» границы. Критерий малости эффектов пространственной дисперсии, очевидно, будет таким:

$$\Delta z_d \ll L_f \approx \frac{4\pi c}{\omega_p} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.99)$$

Точно так же в задаче о переходном излучении при резком изменении диэлектрической проницаемости во времени нельзя строго ввести зависящую от частоты диэлектрическую проницаемость, поскольку задача не является однородной во времени. В результате скачок ε как бы «размывается» во времени на $\Delta t_d = 2\pi/\omega_d$, где ω_d — частота, характеризующая частотную дисперсию. Для ультрарелятивистской частицы для характерной частоты имеем $\omega_d \approx \omega_{\max} \approx \omega_p \mathcal{E}/Mc^2$ (см. (2.44)–(2.46)). Критерий малости эффектов частотной дисперсии

$$\Delta t_d \approx \frac{2\pi}{\omega_p} \frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \ll t_f = \frac{L_f}{c} \approx \frac{4\pi}{\omega_p} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \quad (2.100)$$

для ультрарелятивистских энергий $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$, очевидно, хорошо выполняется. Если через Δz обозначить характерное реальное размытие границы, а через Δt — реальную длительность «скачка» во времени, то в рассмотренных задачах обе величины Δz_d и Δz или Δt_d и Δt должны быть соответственно меньше L_f и t_f . Если эти критерии выполнены, то между Δz_d и Δz или Δt_d и Δt могут иметь место различные соотношения, от которых будет зависеть относительно слабое излучение назад (см.³⁴), но не будет зависеть основная энергия излучения, которая приходится на направления, близкие к направлению скорости частицы.

2) Анализ времени и длины формирования излучения важен и для выяснения энергетического баланса при переходном излучении, который не является тривиальным. Такой баланс целесообразно подвести для энергии частицы и других величин (энергии поля, работы и излученной энергии), отвечающих расстояниям, существенно превосходящим длину формирования излучения, или моменту времени, существенно превосходящему время формирования излучения. При этом на первый взгляд можно было бы думать, что излученная энергия будет равна работе, совершаемой полем излучения над зарядом. Такой вывод, однако, был бы ошибочным. Более того, работа поля над зарядом может иметь даже другой порядок величины в сравнении с излученной энергией, хотя эта работа и совершается полем излучения E^R , причем до того, как поле излучения и поле заряда разделяется, т. е. на длинах, меньших размеров зоны формирования. Работа поля излучения над зарядом равна

$$\frac{dW^F}{dt} = q(\mathbf{v} \mathbf{E}^R) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t}, \quad W = q \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v} \mathbf{E}^R) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t} dt. \quad (2.101)$$

В случае переходного излучения при резком изменении диэлектрической проницаемости во времени интеграл по времени в (2.101) распространен на область $t > 0$, так как $E^R \neq 0$ только при $t > 0$ (черенковское излу-

чение считается отсутствующим). Из (2.76) получаем

$$q \int_0^\infty (\mathbf{v} \mathbf{E}^R) \Big|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t} dt = \int_0^\infty dt \int d\mathbf{k} \frac{4\pi i q^2}{(2\pi)^3 k} \times \\ \times \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{k^2 v^2} \left[a_+(\mathbf{k}) \exp \left(i\mathbf{k}\mathbf{v}t - i \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right) - a_+^*(\mathbf{k}) \exp \left(-i\mathbf{k}\mathbf{v} + i \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon_2}} t \right) \right]. \quad (2.102)$$

Интеграл по времени можно взять, считая, что у ω имеется бесконечно малая положительная мнимая часть. Учитывая, что $\omega = kc/\sqrt{\varepsilon_2}$, находим

$$W^F = \int_0^\infty d\omega \int_0^\pi 2\pi \sin \theta d\theta W^F(\omega, \theta), \quad (2.103)$$

где (если $\varepsilon_{1,2}$ — комплексные величины, то нужно взять вещественную часть от выражения (2.104))

$$W^F(\omega, \theta) = \frac{q^2 v^3 \sin^2 \theta \cos \theta (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\pi^2 c^4 [1 - \varepsilon_1 (v^2/c^2) \cos^2 \theta] [1 - \sqrt{\varepsilon_2} (v/c) \cos \theta]^2}. \quad (2.104)$$

При сравнении (2.103), (2.104) с излучаемой энергией (2.87) бросаются в глаза следующие различия: 1) работа сил зависит от знака $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$, в отличие от энергии излучения (2.87), которая от этого знака не зависит; 2) сомножитель $(1 - \varepsilon_1 (v^2/c^2) \cos^2 \theta)$ в знаменателе формулы (2.104), который особенно мал в ультрарелятивистском пределе, стоит в первой, а не во второй степени, как в (2.87); 3) различаются и зависимости от v и угла θ . Все это указывает на то, что работа сил поля излучения над зарядом может заметно, а в ряде случаев весьма сильно отличаться от излученной энергии.

Чтобы яснее выявить соответствующую разницу, остановимся на ультрарелятивистском случае (т. е. при $v \rightarrow c$). Тогда, полагая $\varepsilon - 1 \approx \approx \omega_p^2/\omega^2 \ll 1$ и $\theta^2 \sim (Mc^2/\mathcal{E})^2 \ll 1$, из (2.104) получаем следующие оценки относительности величины работы сил и энергии излучения. В энергии излучения (2.87) содержится дополнительный множитель $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ в числителе, который имеет порядок $(\omega_p^2/\omega^2) \Delta N/N$, и дополнительный множитель $(1 - \varepsilon_1 (v^2/c^2) \cos^2 \theta)$ в знаменателе, который имеет порядок $(\omega_p^2/\omega^2) + \theta^2 + (Mc^2/\mathcal{E})^2$. Считая, что (Mc^2/\mathcal{E}) и ω_p^2/ω^2 — величины одного порядка, получим, что энергия излучения примерно в $\Delta N/N$ раз меньше работы сил. Таким образом, при $\Delta N/N \ll 1$ она много меньше работы сил, тогда как в случае $\Delta N/N = 1$ излучаемая энергия того же порядка величины, что и работа W^F (однако, она может отличаться по знаку и значению численного коэффициента). Точный расчет подтверждает эти оценки. Из (2.104) имеем

$$W^F(\omega, \theta) \approx \frac{2q^2}{\pi^2 c} \frac{\theta^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{[\theta^2 + (\omega_{p1}^2/\omega^2) + (Mc^2/\mathcal{E})^2] [\theta^2 + (\omega_{p2}^2/\omega^2) + (Mc^2/\mathcal{E})^2]}. \quad (2.105)$$

Спектральное распределение работы сил получится из (2.105) при интегрировании по углам θ :

$$W^F(\omega) = \int_0^\pi \pi d\theta^2 W^F(\omega, \theta) = \\ = \frac{q^2}{\pi c} \left[1 + \frac{\omega^2}{\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2} \left[\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right] \ln \left\{ \left[\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[\frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right]^{-1} \right\} \right]. \quad (2.106)$$

Если $|N_2 - N_1|/N = \Delta N/N \ll 1$, т. е. $|\omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2|/\omega_p^2 \ll 1$, то

$$W^F(\omega) \approx \frac{q^2}{\pi c} \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \frac{N_2 - N_1}{N} \frac{1}{(\omega_p^2/\omega^2) + (Mc^2/\mathcal{E})^2}. \quad (2.107)$$

При $\omega \ll \omega_p \mathcal{E}/Mc^2$ величина $W^F(\omega)$ постоянна и падает как $1/\omega^2$ при больших частотах. Сравнивая (2.107) с (2.41), мы убеждаемся в том, что, как и указывалось выше, работа сил может намного (примерно в $N/\Delta N \gg 1$) раз превосходит мощность излучения. Полная работа сил (2.103) в рассматриваемом случае (2.107) равна

$$W^F = \int_0^\infty W^F(\omega) d\omega = \frac{q^2 \omega_p (N_2 - N_1)}{2cN} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.107')$$

Если изменение N велико, то для переходов из вакуума в среду ($|N_2|/N_2 = 1$, $N_1 = 0$) из (2.106) получаем

$$W^F = \frac{2}{3} q^2 \frac{\omega_p}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.108)$$

В то же время при переходе из среды в вакуум ($\Delta N/N_1 = 1$, $N_2 = 0$) имеем

$$W^F = -\frac{4}{3} q^2 \frac{\omega_p}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.109)$$

В этом случае работа сил по абсолютной величине имеет тот же порядок, что и энергия излучения (2.46), однако численные коэффициенты иные. Если же не считать скорость частицы постоянной, а учитывать реакцию излучения на частицу, то отрицательный знак работы сил (2.109) при вылете частицы из среды означает, что, излучая, частица ускоряется, а не тормозится, причем ускорение производится именно полем излучения. Никакого парадокса здесь все же нет. Для того чтобы это понять, нужно учесть, что в балансе энергий должна фигурировать еще одна величина, а именно — энергия собственного поля частицы или, как часто говорят, нужно учесть макроскопическую перенормировку массы частицы^{19, 49}.

3) Дело в том, что энергия собственного поля частицы оказывается разной в среде 1 и в среде 2. При этом в⁴⁹ было показано, что макроскопическая перенормировка массы действительно выступает как дополнительная масса частицы, связанная с наличием среды (предварительные попытки учесть перенормировку массы были предприняты в^{19, 117}). С изменением этой части массы при переходе из среды 1 в среду 2 связано изменение энергии, которое, естественно, необходимо учитывать при рассмотрении баланса энергий. Энергия собственного поля заряда равна

$$W^q = \int \frac{\varepsilon}{8\pi} [(\mathbf{E}^2) + (\mathbf{B}^2)] dr, \quad (2.110)$$

а ее изменение при переходе из среды 2 в среду 1, т. е. энергия макроскопической перенормировки массы, равна

$$W^M = W_2^q - W_1^q. \quad (2.111)$$

В простейшем случае ультрарелятивистских частиц свойства переходного излучения становятся универсальными (одинаковыми при изменениях в пространстве или во времени). Основной вклад в W^M вносит тогда поперечное поле, которое описывается выражениями (2.75) и (2.78). При этом

$$W^q = \frac{q^2}{4\pi c} \int d\mathbf{k} \frac{1 + (\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/k^2 c^2)}{[k^2 - (\varepsilon(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/c^2)]^2}. \quad (2.112)$$

Для ультрарелятивистских частиц $|\mathbf{k}| \approx \omega/c$, $|\varepsilon - 1| \ll 1$, $(\mathbf{k}\mathbf{v})^2/k^2v^2 \approx 1 - \theta^2$ и, как легко видеть,

$$W^q \approx \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \int_0^\infty d\omega \frac{1}{[\theta^2 + (\omega_p^2/\omega^2) + (Mc^2/\mathcal{E})^2]^2}. \quad (2.113)$$

Энергия перенормировки массы в этом случае равна

$$W^M = \frac{q^2}{\pi c} \int_0^\infty d\omega \int_0^\infty \theta^2 d\theta^2 \frac{(\omega_{p1}^2 - \omega_{p2}^2)}{\omega^2} \left[\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} + \theta^2 + 2 \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right] \times \\ \times \left[\theta^2 + \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right]^{-2} \left[\theta^2 + \frac{\omega_{p2}^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right]^{-2}. \quad (2.114)$$

Как видно, энергия перенормировки массы, так же как и работа сил, зависит от знака $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ и при $\Delta N/N \ll 1$ пропорциональна $\Delta N/N$

$$W^M \approx \frac{q^2}{2c} \omega_p \frac{N_2 - N_1}{N} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.115)$$

Сравнивая (2.115) с (2.107), убеждаемся в том, что работа поля излучения над частицей идет в основном на перенормировку массы, а на излученную энергию приходится только малая доля порядка $\Delta N/12N$ от W^M . Если $\Delta N/N = 1$, то при влете в среду ($\Delta N/N_2 = 1$, $N_1 = 0$) из (2.114) получаем

$$W^M = - \frac{q^2 \omega_p}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}, \quad (2.116)$$

а при вылете из среды ($\Delta N/N_1 = 1$, $N_2 = 0$)

$$W^M = \frac{q^2 \omega_p}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2}. \quad (2.117)$$

Легко убедиться в соблюдении энергетического баланса при влете (см. (2.46), (2.108), (2.116)):

$$W^R + W^F = \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \right) \frac{q^2 \omega_p}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} = -W^M. \quad (2.118)$$

Аналогично, при вылете (см. (2.46), (2.109) и (2.117))

$$W^R + W^F = \left(\frac{1}{3} - \frac{4}{3} \right) \frac{q^2 \omega_p}{c} \frac{\mathcal{E}}{Mc^2} = -W^M. \quad (2.119)$$

Таким образом, эффект перенормировки массы полностью объясняет, почему излучение может сопровождаться ускорением частицы. Таким же путем составляется баланс и для переходного излучения ультрарелятивистской частицы при пересечении границы раздела двух сред. При этом в пределе ультрарелятивистских скоростей частицы перенормировка массы и работа сил излучения описываются теми же формулами (2.107) — (2.109), (2.115) — (2.117). Это значит, что в ультрарелятивистском случае универсально не только переходное излучение, но и величина сил и перенормировка массы. Кстати, из приведенного анализа видно, что для ультрарелятивистской частицы в балансе энергий основную роль играет только излучение вперед, в перенормировке массы — только изменение энергии поперечного поля, а в работе сил — только работа поля излучения вперед в области прозрачности среды. Баланс энергии может быть рассмотрен и для произвольных скоростей³⁴, но при этом анализ несколько различен для переходного излучения при пересечении зарядом границы раздела сред и при скачке проницаемости во времени. Дело в том, что при наличии

границы раздела задача пространственно неоднородна и необходимо рассматривать не только перенормировку энергии поперечного поля, но и перенормировку энергии продольного поля. В этой связи возникают вопросы об учете пространственной дисперсии и некоторые другие усложнения. Пониманию способствует решение задачи для размытой границы раздела ^{48, 50, 51}. За недостатком места мы вынуждены отослать за некоторыми подробностями на этот счет к статьям ^{34, 115}.

г) Переходное излучение в вакууме
при наличии сильного магнитного поля.
Переходное излучение в нелинейных
средах

1) Переходное излучение, как уже подчеркивалось, представляет собой эффект весьма общего характера. Сейчас мы проиллюстрируем тот же тезис, рассмотрев переходное излучение, возникающее даже в вакууме, но при наличии сильного электромагнитного поля ³⁹. Дело в том, что появление поляризации вакуума приводит к нелинейности уравнений электродинамики в вакууме, проявляющейся в достаточно сильных полях. При этом поле является сильным, если оно сравнимо с характерным полем ($-e$ и m — заряд и масса электрона)

$$B_c = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = 4,4 \cdot 10^{13} \text{ гс.} \quad (2.120)$$

Характерное электрическое поле $E_c = B_c$, но ниже мы в конкретной задаче будем считать, что имеется лишь сильное магнитное поле. Обсуждаемую нелинейность можно описать, сказав, что в сильном поле вакуум ведет себя подобно некоторой среде с диэлектрической и магнитной проницаемостями, зависящими от напряженности поля. Для полей достаточно медленно изменяющихся в пространстве и во времени (соответствующие условия указаны ниже) поляризация вакуума может быть учтена в замкнутой форме — она приводит к появлению добавки L' в функции Лагранжа L для электромагнитного поля:

$$\left. \begin{aligned} L &= L_0 + L', \quad L_0 = \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2), \\ L' &= \frac{\kappa}{2} [(E^2 - B^2)^2 + 7 (EB)^2], \\ \kappa &= \frac{1}{4\pi} \frac{\alpha}{45\pi B_c^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}, \quad E, B \ll B_c. \end{aligned} \right\} \quad (2.121)$$

где B — напряженность магнитного микрополя, при переходе к уравнениям в среде играющая роль магнитной индукции; формула (2.121) была получена еще в 1936 г. ⁵²; ее вывод имеется, например, в ⁵³, § 126 (в ⁵³ индукция B обозначена через H). Очевидно, $\kappa \propto \hbar$ и, таким образом, нелинейность вакуума является квантовым эффектом. Поляризация вакуума $P = \partial L' / \partial E$ и намагниченность вакуума $M = \partial L' / \partial B$ зависят от E и B нелинейным образом и можно вводить различные тензоры проницаемости. Ограничимся здесь частным случаем, когда

$$B = B_0 + B_1, \quad E = E_1, \quad B_1 \ll B_0, \quad E_1 \ll B_0, \quad (2.122)$$

т. е. имеется сильное магнитное поле B_0 и слабое электромагнитное поле, например, поле волны E_1, B_1 . Тогда

$$\left. \begin{aligned} P &= P_1 = \kappa \{ -2B_0^2 E_1 + 7 (E_1 B_0) B_0 \}, \\ M &= M_0 + M_1, \quad M_0 = 2\kappa B_0^2 B_0, \\ M_1 &= 2\kappa \{ B_0^2 B_1 + 2 (B_1 B_0) B_0 \}. \end{aligned} \right\} \quad (2.123)$$

Удобно ввести тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости для слабого поля $\epsilon_{ij} = \delta_{ij} + \delta\epsilon_{ij}$, $\mu_{ij} = \delta_{ij} + \delta\mu_{ij}$:

$$P_{1,i} = \frac{1}{4\pi} \delta\epsilon_{ij} E_{1,j}, \quad M_{1,j} = \frac{\delta\mu_{ij}}{4\pi} B_{1,i}. \quad (2.124)$$

Поскольку нас интересует лишь случай, когда $|\delta\epsilon_{ij}| \ll 1$ и $|\delta\mu_{ij}| \ll 1$, в выражении (2.124) для M_1 можно было заменить H_1 на B_1 . Считая, для определенности, поле B_0 направленным по оси z , имеем

$$\left. \begin{aligned} \delta\epsilon_{zz} &\equiv \tilde{\delta\epsilon} = 20\pi\kappa B_0^2 = \frac{5\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \\ \delta\epsilon_{xx} &= \delta\epsilon_{yy} \equiv \delta\epsilon = -8\pi\kappa B_0^2, \quad \delta\mu_{zz} \equiv \tilde{\delta\mu} = 24\pi\kappa B_0^2, \\ \delta\mu_{xx} &= \delta\mu_{yy} \equiv \delta\mu = 8\pi\kappa B_0^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.125)$$

Таким образом, вакуум в сильном магнитном поле представляет собой «среду», имеющую свойства анизотропного ферродиелектрика с тензорами ϵ_{ij} и μ_{ij} , определяемыми согласно (2.47), причем

$$\epsilon = 1 + \delta\epsilon = 1 - \frac{2\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \quad \tilde{\epsilon} = 1 + \tilde{\delta\epsilon} = 1 + \frac{5\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \quad (2.126)$$

$$\mu = 1 + \delta\mu = 1 + \frac{2\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \quad \tilde{\mu} = 1 + \tilde{\delta\mu} = 1 + \frac{6\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}. \quad (2.127)$$

Показатели преломления для волн, распространяющихся строго перпендикулярно к «кристаллической» оси и с поляризацией (направлением вектора E_1) по полю B_0 и перпендикулярно к этому полю, соответственно равны

$$\left. \begin{aligned} n_{||} &\equiv n_0 = \sqrt{\tilde{\epsilon}\mu} = 1 + \frac{\tilde{\delta\epsilon} + \delta\mu}{2} = 1 + \frac{7}{2} \frac{\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}, \\ n_{\perp} &\equiv n_e = \sqrt{\epsilon\tilde{\mu}} = 1 + \frac{\delta\epsilon + \tilde{\delta\mu}}{2} = 1 + \frac{2\alpha B_0^2}{45\pi B_c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

Эти выражения совпадают (с той точностью, с которой они получены) с приведенными в ^{54, 55}. Заметим, что для волн, распространяющихся строго по полю, показатель преломления $n(0) = \sqrt{\epsilon\mu} = 1$, т. е. согласно (2.126), (2.127) равен единице.

Область применимости результатов (2.126), (2.127) ограничена условием ⁵⁴:

$$\lambda = \frac{3\hbar\omega}{2mc^2} \frac{B_0}{B_c} \ll 1. \quad (2.129)$$

При $\lambda \ll 1$, а практически и при $\lambda < 1$, поглощение излучения, обусловленное рождением электронно-позитронных пар, пренебрежимо мало. Напротив, при $\lambda \gtrsim 1$ поглощение нужно учитывать, в соответствии с чем проницаемости ϵ и μ содержат мнимые части. Правда, произведение $\epsilon\mu = 1$ и поэтому при угле $\theta = 0$ показатель $n(0) = \sqrt{\text{Re}(\epsilon\mu)} = 1$, т. е. вакуум в сильном магнитном поле ведет себя как «истинный» вакуум, если волна распространяется вдоль магнитного поля как в области низких, так и в области высоких частот. Частотная дисперсия вакуума сказывается при $\lambda \gtrsim 1$ для волн, распространяющихся под углом и, в частности, перпендикулярно к сильному полю B_0 . Так, используя результаты ^{54, 55}, при $\lambda \gg 1$ имеем

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mu} &= 1 + \frac{3}{2} (\tilde{\epsilon}\mu - 1), \\ \tilde{\epsilon}\mu &= 1 - 0,0013 \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega} \right)^{4/3} \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^{2/3} (1 - i\sqrt{3}). \end{aligned} \right\} \quad (2.130)$$

При $\theta = \pi/2$ показатели преломления равны: $n_e \approx \sqrt{\operatorname{Re}(\tilde{\epsilon}_\mu)}$, $n_o \approx \sqrt{\operatorname{Re}(\tilde{\epsilon}_\mu)}$ (см. ⁵⁴).

Реально в сильном поле как в космических условиях (около пульсаров), так и в лабораторных присутствует плазма или остаточный газ. Поэтому необходима оценка минимальной плотности вещества, при которой оно начинает сказываться на показателе преломления. На этот вопрос легко ответить (см. ^{39, 115}), используя хорошо известное выражение $\epsilon = 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$ для изотропной плазмы, а также учитывая влияние на плазму магнитного поля (см., например, ⁵⁶).

2) В силу всего сказанного ранее ясно, что при движении заряда с постоянной скоростью в неоднородном сильном магнитном поле или при изменении этого поля во времени проницаемости ϵ и μ изменяются вдоль траектории и, следовательно, должно иметь место переходное излучение. Другое дело, что заряд с конечной массой M , если он не движется строго вдоль магнитного поля, ускоряется и излучает также по этой причине, т. е. происходит магнитотормозное (синхротронное) излучение. Формально, однако, можно положить $M \rightarrow \infty$, когда магнитотормозное излучение отсутствует. В реальной же ситуации нужно, вообще говоря, учитывать одновременно переходное и магнитотормозное излучение, а также черенковское излучение (последнее может иметь место ⁵⁷, поскольку в вакууме при наличии соответствующего сильного поля показатель преломления $n \geq 1$). При этом нельзя, конечно, складывать интенсивности излучений различного типа, а нужно суммировать поля, в силу чего картина усложняется. Однако не только здесь, но и в работе ³⁹ (пока единственной, посвященной этому вопросу) мы не ставили перед собой задачу о переходном излучении в сильном поле в реалистическом плане, с применением к пульсарам и т. д. Речь идет пока в основном о самом подходе к решению этой задачи. Несомненно, она может быть решена путем последовательных квантовоэлектродинамических вычислений. Такие расчеты, вместе с тем, проводятся обычно лишь в однородных случаях и учесть в них наличие градиентов сильного поля потребует, вероятно, значительных усилий. Главное же, проводить подобные вычисления, вообще говоря, нет оснований. Действительно, квантовые эффекты, приводящие к нелинейности вакуума в электромагнитном поле, уже отражены в выражениях (2.121), (2.123), (2.125) — (2.128), (2.130) и т. п. Для вычисления же полей и интенсивности излучения В.—Ч. и переходного излучения теперь достаточно, пусть и при соблюдении известных условий, воспользоваться классическими формулами из разделов а) и б) гл. 2 с подстановкой выражений для ϵ_{ij} и μ_{ij} вакуума (т. е., например, выражений (2.126), (2.127)).

Демонстрация сказанного на примере излучения В.—Ч. совершенно элементарна. Так, формула (2.63) для мощности черенковского излучения в условиях справедливости выражений (2.126), (2.127) принимает вид

$$Q_{\text{В.-Ч}} = \frac{q^2}{c} \int_0^\infty \omega \, c \, \omega \left[\delta\mu + \delta\tilde{\mu} + \delta\epsilon + \delta\tilde{\epsilon} - 2 \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right] d\omega = \\ = \frac{q^2}{c} \int_0^\infty \omega \, d\omega \left[\frac{11\alpha}{90} \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^2 - \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right]. \quad (2.131)$$

Разумеется, излучение происходит лишь при условии $\mathcal{E}/Mc^2 > \sqrt{90\pi/11\alpha} B_c/B_0$, а подынтегральное выражение в (2.131) пригодно лишь для частот $\omega \ll \omega_c \sim (mc^2/\hbar) B_c/B_0$, начиная с которых показатель преломления вакуума начинает уменьшаться с ростом частоты (см. (2.129),

(2.130)). Кроме того, в (2.131) сразу рассмотрен ультрарелятивистский случай ($\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$, т. е. $v \rightarrow c$) и заряд q считается движущимся, как и предполагалось в (2.63), поперек оси ферродиелектрика, т. е. в данном случае поперек сильного магнитного поля B_0 . Формула (2.131) совпадает, фактически, с полученной в ⁵⁷ квантовоэлектродинамическим методом (в этом случае поле B_0 считается однородным во всем пространстве, что и упрощает задачу). В случае переходного излучения ультрарелятивистского заряда, движущегося поперек сильного магнитного поля B_0 и вылетающего в области без поля (конкретно, $B_0 \neq 0$ при $y < 0$ и $B_0 = 0$ при $y > 0$; частица движется вдоль положительного направления оси y , а поле B_0 направлено по оси z), нужно воспользоваться формулами (2.59), (2.60), подставив в них выражения (2.126), (2.127).

Отсылая за подробностями к ^{39, 115}, приведем здесь лишь результат расчета. В области энергий заряда

$$\mathcal{E} \ll \mathcal{E}_c = Mc^2 \frac{B_c}{B_0} \sqrt{\frac{45\pi}{2\alpha}} \quad (2.132)$$

полная энергия переходного излучения заряда q (его масса равна M) для волн обоих типов (типов 0 и e) равна

$$W^R(\omega) = W_0^R(\omega) + W_e^R(\omega) = \frac{q^2}{12\pi c} [(\tilde{\epsilon}\mu - 1)^2 + (\tilde{\epsilon}\mu - 1)^2] \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^4 = \frac{13\alpha^2 q^2}{4860\pi^3 c} \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^4 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^4. \quad (2.133)$$

Это выражение пригодно вплоть до частот $\omega \sim \omega_c \sim (mc^2/\hbar) B_c/B_0$, и, следовательно,

$$W^R = \int_0^\infty W^R(\omega) d\omega \approx a \frac{13}{4860\pi^3} \frac{\alpha^2 q^2}{\hbar c} mc^2 \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^3 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^4, \quad (2.134)$$

где, как показывает соответствующая оценка, $a \approx 7,4$. В другом предельном случае (при $\mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c$) излучаются частоты, достигающие значения

$$\omega_{\max} \sim \frac{mc^2}{\hbar} \frac{B_c}{B_0} \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \right)^{3/2} \sim \omega_c \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \right)^{3/2}, \quad (2.135)$$

причем ³⁹

$$W^R = 3,2 \frac{q^2}{\hbar c} mc^2 \frac{B_c}{B_0} \left(\frac{\mathcal{E}}{\mathcal{E}_c} \right)^{3/2}, \quad \mathcal{E} \gg \mathcal{E}_c. \quad (2.136)$$

Заметим, что в области $\mathcal{E} \geq \mathcal{E}_c$ размер зоны формирования (см. (2.96), (2.135))

$$L_f \sim \frac{4\pi c}{\omega_{\max}} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \sim \frac{4\pi\hbar}{mc} \frac{B_0}{B_c} \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \left(\frac{\mathcal{E}_c}{\mathcal{E}} \right)^{3/2}. \quad (2.137)$$

Даже при $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}_c$ длина $L_f \sim 10^5 (\hbar/mc) B_c/B_0$, и, таким образом, ширину Δy «границы» между областью с сильным полем и областью без поля можно считать малой по сравнению с L_f и одновременно большой по сравнению с \hbar/mc (условие $\Delta y \gg \hbar/mc$, вообще говоря, необходимо для применения формул типа (2.121)).

Переходное излучение, хотя и более слабое, возникает и при движении заряда вдоль поля (если, конечно, имеется граница между областями с полем и без поля; создать такую границу, правда, нелегко в силу условия $\text{div } \mathbf{B} = 0$) ^{39, 115}. В этом случае, с другой стороны, черенковские и магнитотормозное излучения отсутствуют. При рассмотренном же выше движении заряда поперек поля интегральное по частотам магнитотормозное излучение превосходит переходное, не только для электронов, но и для протонов и атомных ядер.

Вблизи поверхности пульсаров (намагниченных нейтронных звезд) магнитное поле вполне может достигать значения $B_0 \sim 5 \cdot 10^{12}$ эс, когда параметр $B_0/B_c \sim 0,1$ (см. ⁵⁸). В таких условиях поляризация вакуума и рождение пар вблизи пульсаров могут быть вполне существенными. Особенно сильно двойное лучепреломление вакуума сказывается на поляризации излучения (в частности, это относится к рентгеновскому излучению пульсаров ⁵⁹). Вблизи пульсаров могут представлять интерес и некоторые варианты переходного излучения, но этот вопрос в конкретной его постановке еще не проанализирован. В лаборатории также имеются известные перспективы создания условий, в которых параметры B_0/B_c и \mathcal{E}/Mc^2 достаточно велики, чтобы проявилась нелинейность вакуума и играли роль переходные эффекты.

3) Нелинейная поляризация вакуума обладает спецификой — отсутствует магнитная активность *), поляризация и намагничивание не содержат квадратичных по полям членов (см., например, (2.123)), дисперсия проницаемостей имеет вполне определенный характер и, наконец, критическое поле B_c является очень сильным. Любые среды также нелинейны и при этом не универсальны — могут обладать весьма различными характеристиками. Последнее тем понятнее, что к нелинейности среды могут приводить различные механизмы. Упомянем о зависимости заселенности уровней от напряженности поля, о стрикционных эффектах и о нелинейной поляризации электронно-дырочного «вакуума» (основного состояния) в полупроводниках. В последнем случае роль «щели», равной в вакууме $2mc^2 \approx 10^6$ эв, играет, грубо говоря, ширина запрещенной зоны в полупроводниках $\mathcal{E}_g \sim 1$ эв. Естественно, что и критические поля B_c и E_c в полупроводниках намного слабее критического поля в вакууме $B_c = 4,4 \cdot 10^{13}$ эс (о весьма своеобразном поведении полупроводников в сильном магнитном поле см., в частности, в ⁶⁰).

В свете сказанного ясно, что возникает весьма обширный раздел теории переходного излучения в нелинейных средах. Конкретно, речь идет о средах с проницаемостью

$$\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k}) + \delta\varepsilon_{ij}^{Nl}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{E}_0, \mathbf{B}_0), \quad (2.138)$$

где $\varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega, \mathbf{k})$ — линейная часть тензора диэлектрической проницаемости; вызываемая слабым полем $\mathbf{E}_1(\omega, \mathbf{k})$, причем $D_{1i} = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) E_{1j}$, а поля \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 являются, скажем, статистически и сравнительно сильными. В условиях, когда нелинейная часть проницаемости мала (т. е. $|\delta\varepsilon^{Nl}| \ll \ll |\varepsilon^{(0)}|$), а поля \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0 тоже в известном смысле слабы (так что $\delta\varepsilon^{Nl}$ можно разложить в ряд с учетом лишь членов линейных и квадратичных по полям \mathbf{E}_0 и \mathbf{B}_0), существует регулярный метод вычисления добавки $\delta\varepsilon_{ij}^{Nl}$ или более общего выражения для нелинейной части плотности тока $j_i^{Nl}(\omega, \mathbf{k})$. Об этом см. ¹¹⁵, раздел 2.5. и цитируемые там книги ⁶¹, ⁶² и статьи ⁶³, ⁶⁴.

Частным случаем переходного излучения является, как его можно назвать, нелинейное переходное излучение, отвечающее изменению в пространстве или (и) во времени лишь нелинейной части проницаемости $\delta\varepsilon_{ij}^{Nl}$. Примером такого нелинейного переходного излучения может служить,

*) Как ясно из формул (2.125) и более общих, вакуум и в магнитном поле остается магнитно-неактивным. Это обстоятельство отражает тот факт, что поляризация вакуума связана с электронно-позитронными парами. В этом случае, как и для электронно-позитронной плазмы, магнитоактивный эффект для электронов компенсируется магнитной активностью позитронов, вращающихся в магнитном поле в противоположном (по сравнению с электронами) направлении.

очевидно, рассмотренное выше переходное излучение в вакууме. Но, как ясно из сказанного, в случае сред соответствующие возможности в колоссальной степени расширяются. Несколько замечаний и примеров на этот счет читатель может найти в разделе 2.5 статьи ¹¹⁵. В целом, однако, исследование нелинейного переходного излучения только начинается.

3. ПЕРЕХОДНОЕ РАССЕЯНИЕ

а) Переходное рассеяние на движущемся и неподвижном заряде. Связь между переходным рассеянием и резонансным переходным излучением

1). Термин «переходное рассеяние» был введен сравнительно недавно в связи с рассмотрением задачи о рассеянии волны диэлектрической проницаемости на неподвижном («закрепленном») заряде. В статье ⁴⁰ содержится и довольно общая постановка вопроса о переходном рассеянии. Вместе с тем в частных случаях переходное рассеяние фактически неоднократно рассматривалось и ранее, но часто без достаточно ясной физической интерпретации или без упоминания о том, что рассматриваемый эффект имеет отношение к процессам рассеяния. Задачей гл. 3 настоящей статьи является выявление не всегда ясных с первого взгляда связей с переходным рассеянием таких процессов, как резонансное переходное излучение — переходное излучение в периодической среде, излучение частиц в среде со случайными неоднородностями, нелинейное взаимодействие волн в плазме и нелинейные эффекты в вакууме при наличии сильных электромагнитных полей (в частности, имеется в виду так называемое дельбрукское рассеяние). Для того чтобы перебросить «мостик» от теории переходного излучения и выявить соотношение с переходным излучением и переходным рассеянием, начнем с вопроса о резонансном переходном излучении ²⁴.

2) Переходное излучение, как было выяснено, происходит как при изменении диэлектрических свойств среды в пространстве, так и при изменении их во времени. Одной из возможных комбинаций является случай, когда диэлектрическая проницаемость по синусоидальному закону меняется и во времени и в пространстве ^{24, 40, 65}. Конкретно, положим

$$D(\mathbf{r}, t) = \varepsilon E(\mathbf{r}, t), \quad \varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0 t - \varphi_0). \quad (3.1)$$

В этом случае можно говорить о волне диэлектрической проницаемости, распространяющейся по \mathbf{k}_0 и имеющей фазовую скорость $\omega_0(\mathbf{k}_0)/k_0$.

При движении заряда относительно волны проницаемости возникает переходное излучение, которое, разумеется, отлично от переходного излучения на одной границе раздела. Главное различие связано, очевидно, с тем, что проницаемость (3.1) является периодической функцией и излучение происходит во всем пространстве, а не в одной области, локализованной вблизи границы раздела. В этом отношении к переходному излучению в волне (3.1) особенно близко переходное излучение на стопке пластинок, т. е. в среде с многими границами раздела, находящимися на одинаковом расстоянии друг от друга. Наличие периодичности проводит, естественно, к когерентности волн, образующихся вблизи разных границ и, как следствие, к резонансным эффектам (см. ниже). Поэтому переходное излучение в периодической среде можно назвать резонансным переходным излучением. Вместе с тем переходное излучение в периодической

среде можно считать переходным рассеянием. В самом деле, представляется вполне правильным описывать процесс таким образом: при падении волны проницаемости (3.1) на заряд в его окрестности возникает дополнительная переменная поляризация и, следовательно, образуется уходящая от заряда электромагнитная волна — продукт переходного рассеяния. Подчеркнем, что такое рассеяние коренным образом отличается от обычного, связанного с колебанием частицы в поле падающей волны, поскольку переходное рассеяние возникает и для частицы с бесконечной массой $M \rightarrow \infty$. Правда, распространение в среде различных возмущений обычно сопровождается как волнами проницаемости типа (3.1), так и волнами электрического поля, которое для частиц с конечной массой M вызывает обычное томсоновское рассеяние. Отделить переходное рассеяние от томсоновского в некоторых случаях (например, в плазме) не столь просто,

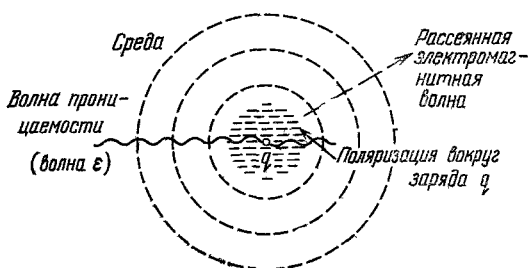


Рис. 4. Схематическое изображение процесса переходного рассеяния на покоящемся заряде ($v = 0$).

вообще отсутствует (например, для акустических волн, которые не сопровождаются волнами электрического поля). Естественно, рассеянной волной может быть не только электромагнитная волна, но любая другая волна в среде, в частности, и волна проницаемости типа (3.1), но с другими значениями k_0 и ω_0 . Таким образом, общая теория рассеяния произвольных волн в средах должна обязательно строиться с учетом переходного рассеяния. Вообще говоря, только в пределе очень высоких частот падающей (рассеиваемой) и рассеянной волн (частот, намного превышающих оптические частоты или характерные плазменные частоты среды) можно рассматривать лишь процессы обычного рассеяния.

Возможность считать (и называть) переходное излучение переходным рассеянием не ограничивается случаем волны проницаемости типа (3.1). Действительно, если рассмотреть волны проницаемости, имеющие вид импульса или «ступеньки» в пространстве и (или) во времени, то любое переходное излучение можно считать процессом рассеяния (трансформации) возмущения или импульса волны проницаемости с образованием электромагнитных, а в принципе и других волн. В подобной ситуации о переходном рассеянии наряду с переходным излучением, вероятно, было бы нецелесообразно говорить, если бы не существовало переходного рассеяния на покоящемся («закрепленном») заряде⁴⁰. В самом деле, в этом случае вводить понятие о переходном излучении было бы явной натяжкой, так как нет движущегося заряда и имеет место типичное рассеяние волны проницаемости с ее превращением в электромагнитную волну (рис. 4). Сказанное уже отмечалось во введении, но здесь трудно совсем избежать повторений. Дополнительно отметим, что случай покоящегося заряда может показаться невыделенным, поскольку в другой инерциальной системе отсчета этот заряд будет уже двигаться с постоянной скоростью

поскольку имеет место интерференция обоих типов рассеяния. Эта интерференция, например, для плазменных волн столь существенна (см.⁶¹), что меняет порядок величины полного сечения рассеяния (см. раздел б) гл. 3).

В дальнейшем переходное рассеяние будет в основном рассмотрено как самостоятельный процесс, учитывая, что в ряде случаев обычное рассеяние оказывается пренебрежимо малым (для очень тяжелых частиц) или

$v \neq 0$. В этой системе, однако, будет двигаться и среда, в силу чего для решения задач нужно пользоваться электродинамикой движущихся сред. Таким образом, в условиях, когда скорость среды постоянна (не зависит от координат и времени), связанная со средой система отсчета физически выделена и ее использование наиболее удобно. Ниже, как и раньше, мы будем пользоваться только такой системой отсчета и соответственно электродинамикой покоящихся сред; разумеется, в этой системе отсчета движущийся заряд имеет скорость $v \neq 0$ относительно среды.

Переходное рассеяние на покоящемся заряде происходит только при $\omega_0 \neq 0$ и $k_0 \neq 0$ *). Если же скорость заряда $v \neq 0$, то излучение электромагнитных волн имеет место уже при $\omega_0 = 0$, $k_0 \neq 0$ (пространственно-периодическая структура) или при $\omega_0 \neq 0$, $k_0 = 0$ (среда, проницаемость которой периодически изменяется только во времени). В связи с таким различием задача о переходном рассеянии на покоящемся заряде также в известном смысле выделена, хотя и может, конечно, быть исследована на основе общего решения, справедливого при $\omega_0 \neq 0$, $k_0 \neq 0$ (именно известная нетривиальность предельного перехода от переходного рассеяния на движущемся заряде к такому рассеянию на неподвижном заряде привела, видимо, к тому, что переходное рассеяние на покоящемся заряде было рассмотрено лишь сравнительно недавно ⁴⁰). В принятых предположениях о бесконечно большой массе заряженной частицы рассеяние на ней происходит без изменения частоты,

$$\omega(k) = \omega_0(k_0), \quad v = 0. \quad (3.2)$$

Эффект отдачи при рассеянии существен только при учете квантовых эффектов и конечности массы частицы M (так же как и для обычного рассеяния). Для движущегося заряда равенство частот рассеянной и рассеиваемой волны имеет место только в системе отсчета, в которой заряд покоится, тогда как в используемой системе отсчета, в которой покоится среда, из-за эффекта Доплера вместо (3.2) имеем

$$\omega - kv = \omega_0 - k_0 v; \quad (3.3)$$

здесь и в дальнейшем $\omega > 0$ и $\omega_0 > 0$ (очевидно, ω и k — частота и волновой вектор рассеянной волны). Волна (3.1) содержит как член с $e^{-i\omega_0 t + ik_0 r}$, так и с $e^{i\omega_0 t - ik_0 r}$, т. е. как положительные, так и отрицательные частоты. Поэтому, строго говоря, помимо (3.3) следует учесть возможность выполнения равенства

$$\omega - kv = -(\omega_0 - k_0 v). \quad (3.4)$$

Если (3.3) соответствует процессу излучения волны с частотой ω и поглощению волны с частотой ω_0 (или наоборот **), то процесс (3.4) соответ-

*) Обусловленная наличием волны проницаемости (3.1) дополнительная поляризация среды в поле покоящегося заряда

$$\delta P = \frac{\varepsilon^{(1)} \sin(k_0 r - \omega_0 t - \varphi_0)}{4\pi} E^q, \quad E^q = \frac{qr}{\varepsilon^{(0)} r^3}.$$

При $k_0 = 0$ поляризация δP сферически-симметрична и поэтому не приводит к излучению рассеянной электромагнитной волны.

**) При квантовом описании вводятся кванты с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar k$ и используются законы сохранения энергии и импульса: $\mathcal{E}_0 + \hbar\omega_0 = \mathcal{E}_1 + \hbar\omega$, $p_0 + \hbar k_0 = p_1 + \hbar k$ (здесь $\mathcal{E}_{0,1}$ и $p_{0,1}$ — соответственно энергия и импульс частицы в начальном и конечном состояниях). В классическом приближении, т. е. при пренебрежении отдачей,

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_0 + \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial p} (p_1 - p_0) = \mathcal{E}_0 + \hbar v (k - k_0)$$

и мы приходим к (3.3).

вует одновременному излучению или поглощению двух волн. При этом, если мы интересуемся ультрарелятивистскими частицами и излучением высоких частот $\omega \gg \omega_p$, то левые части равенств (3.3), (3.4) всегда положительны. Действительно, считая угол θ между векторами \mathbf{k} и \mathbf{v} малыми (излучение ультрарелятивистской частицы концентрируется в направлении, близком к ее скорости), получаем

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} = \frac{\omega}{2} \left[\theta^2 + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] > 0,$$

где положено

$$k = \frac{\omega}{c} \quad n = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2} \right).$$

Для релятивистской частицы $|\mathbf{k}_0 \mathbf{v}| \lesssim k_0 c$, т. е. для быстрых волн диэлектрической проницаемости с $\omega_0 / k_0 > c$ разрешен только процесс (3.3). Для медленных волн с $\omega_0 / k_0 < c$ возможны оба процесса (3.3) и (3.4); при этом выбор процесса (3.3) либо (3.4) в пределе $\omega_0 / k_0 \ll c$ определяется углом между \mathbf{k}_0 и \mathbf{v} , поскольку в этом случае

$$\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} \approx \pm (\mathbf{k}_0 \mathbf{v}). \quad (3.5)$$

Если релятивистская частица распространяется по или против направления волны (3.1), то из приведенных выражений следует, что

$$\omega \approx \frac{2k_0 c}{\theta^2 + (\omega_p^2 / \omega^2) + (Mc^2 / \mathcal{E})^2}. \quad (3.6)$$

При $\omega_0 / k_0 \ll c$, $\omega_0 \neq 0$ излучение ультрарелятивистской частицы происходит фактически так же, как и на статических неоднородностях с длиной волны $d_0 = 2\pi / k_0$. Если $\omega \gg \omega_p \mathcal{E} / Mc^2$, $\theta \lesssim Mc^2 / \mathcal{E}$, то излучаются весьма высокие частоты, быстро растущие с энергией частицы

$$\omega \approx 2k_0 c \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2. \quad (3.7)$$

3) Одно из основных отличий переходного рассеяния от переходного излучения на одной границе, довольно очевидное, состоит в том, что рассеяние приводит к непрерывному излучению частицы, тогда как переходное излучение имеет конечную длительность. Следовательно, в случае переходного рассеяния нужно интересоваться энергией, излученной на единицу пути частицы или в единицу времени. Естественно, такая же ситуация возникает, если имеется последовательность границ раздела или стопка пластинок, каждая из которых дает переходное излучение на своих границах. Однако простая сумма излучений на границах не эквивалентна переходному рассеянию. Действительно, если излучение от отдельных границ некогерентно, то интенсивность излучения будет определяться числом границ на единицу длины. Переходное же рассеяние соответствует когерентной интерференции полей, возникающих на различных границах. Условие когерентности совпадает с (3.5). Переходное рассеяние в общем случае $\omega_0 \neq 0$ — явление более богатое, чем когерентное (резонансное) переходное излучение, описываемое резонансным условием (3.5).

Условие резонанса (3.6) можно записать в форме

$$L_f = \frac{4\pi c}{\omega} \frac{1}{\theta^2 + (Mc^2 / \mathcal{E})^2 + (\omega_p^2 / \omega^2)} = \frac{2\pi}{k_0} = d_0, \quad (3.8)$$

т. е. длина формирования излучения (см. (2.97)) равна пространственному периоду модуляции диэлектрической проницаемости. Физически это объясняется тем, что на длине L_f набегают фаза поля излучения, равная 2π ,

и если в этом месте возникнет новое излучение из-за следующей «границы», то оно будет как раз в фазе с полем, возникшим на предыдущей границе. Условие (3.8) записано для отдельной синусоидальной волны. Для сравнения с переходным излучением полезно рассмотреть стопку слоев, в которой попеременно диэлектрическая проницаемость меняется от $\varepsilon^{(0)} - \varepsilon^{(1)}$ до $\varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)}$, с пространственным периодом $2\pi/k_0$. Соответствующий расчет проведен в ¹¹⁵ (раздел 3.1). Здесь мы ограничимся на этот счет лишь несколькими замечаниями (см. также ^{24, 66, 67}).

Интерес к переходному излучению стопки пластинок был связан с проблемой переходных счетчиков. Хотя полная излучаемая энергия при прохождении частицей одной границы раздела и растет с ростом ее энергии (и это могло бы быть использовано для измерения энергии частицы), однако на отдельной границе в среднем излучается не более $1/137$ кванта, т. е. необходимо более 137 границ для получения одного кванта. Такая оценка справедлива в том случае, если излучения от отдельных границ не интерферируют между собой (излучение пропорционально полному числу слоев S). Интерференция излучений, испущенных от отдельных слоев, должна привести к тому, что полная интенсивность на данной частоте будет пропорциональна квадрату числа пластинок S^2 в стопке. Казалось бы, в этом случае суммарная по частотам и углам интенсивность может быть существенно большей, чем в случае отсутствия интерференции. В действительности, однако, суммарная интенсивность меняется не очень существенно. Дело в том, что в результате интерференции подавляются одни частоты и усиливаются другие, которые удовлетворяют резонансным условиям типа (3.3), (3.4). Возникающее же излучение представляет собой не что иное, как переходное рассеяние, но не от синусоидальной волны, а от «волны» с крутыми фронтами. Результаты вычислений позволяют выявить зависимость излучения от энергии частицы и параметров слоев, что важно при конструировании и использовании переходных счетчиков. Вместе с тем до сих пор остаются несколько в тени физические вопросы, а именно связь между когерентными и некогерентными процессами, а также тот факт, что когерентные процессы — это не что иное, как переходное рассеяние. При этом в качественном отношении особенно интересны две возможности: а) когда период модуляции (период структуры) больше зоны формирования на частоте $\omega_p \mathcal{E}/Mc^2$; б) когда этот период меньше зоны формирования (случай $2\pi/k_0 \geq (2\pi c/\omega_p) \mathcal{E}/Mc^2$). В первом случае излучения суммируются от разных границ независимо или почти независимо. Во втором случае работает чисто переходное рассеяние, т. е. резонансное переходное излучение. Анализ рассеяния на стопке пластинок позволяет особенно ясно проследить связь между переходным излучением и переходным рассеянием. Для исследования же переходного рассеяния как такового естественно обратиться к простейшему случаю синусоидальной модуляции плотности (3.1), учтя не только пространственную, но и временную модуляцию, т. е. рассмотреть волну диэлектрической проницаемости с $\omega_0 \neq 0$ и $k_0 \neq 0$.

4) В общем случае при рассмотрении переходного рассеяния ток частицы j^q можно считать заданным (для заряда — равным (2.2)) и использовать уравнения Максвелла (2.1) с некоторой периодической диэлектрической проницаемостью. При этом удобно все величины раскладывать в полные интегралы Фурье по времени и по пространству,

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\omega, \mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t} d\mathbf{k} d\omega, \quad j^q = \int j_{\mathbf{k}, \omega}^q e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega \quad (3.9)$$

и т. д. Для среды с проницаемостью (3.1) связь индукции $\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$ и электрического поля \mathbf{E} (простоты ради здесь $\varphi_0 = 0$, сечение рассеяния от φ_0 не зависит)

для компонент Фурье принимает следующий вид:

$$D_{\mathbf{k}, \omega} = \varepsilon^{(0)}(\omega) E_{\mathbf{k}, \omega} + \frac{1}{2i} \varepsilon^{(1)}(\omega) (E_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0, \omega+\omega_0} - E_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \omega-\omega_0}). \quad (3.10)$$

Для проницаемости (3.1) величины $\varepsilon^{(0)}$ и $\varepsilon^{(1)}$, разумеется, от частоты не зависят, однако в общем случае $\varepsilon^{(1)}$ может зависеть как от ω и \mathbf{k} , так и от ω_0 и \mathbf{k}_0 (см. ниже). Точно так же при учете пространственной дисперсии $\varepsilon^{(0)}$ зависит не только от ω , но и от \mathbf{k} . Чтобы не усложнять изложение, мы рассмотрим здесь простейший случай, когда $\varepsilon^{(1)}$ и $\varepsilon^{(0)}$ зависят только от ω . Далее, в случае (2.2)

$$j_{\mathbf{k}, \omega}^q = \frac{qv}{(2\pi)^3} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (3.11)$$

Уравнения (2.1) приобретают тогда вид

$$[\mathbf{k} D_{\mathbf{k}, \omega}] = -\frac{\omega}{c} D_{\mathbf{k}, \omega} - \frac{4\pi i}{c} j_{\mathbf{k}, \omega}^q, \quad [\mathbf{k} E_{\mathbf{k}, \omega}] = \frac{\omega}{c} E_{\mathbf{k}, \omega}. \quad (3.12)$$

Отсюда с учетом (3.10) получаем

$$\left(\frac{1}{k^2} \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)}(\omega) \delta_{ij} \right) E_{j, \mathbf{k}, \omega} = \frac{4\pi i \omega q v_i}{(2\pi)^3 c^2} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \frac{\omega^2}{2ic^2} \varepsilon^{(1)}(\omega) (E_{i, \mathbf{k}+\mathbf{k}_0, \omega+\omega_0} - E_{i, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \omega-\omega_0}). \quad (3.13)$$

Будем считать, что $\varepsilon^{(1)}(\omega) \ll \varepsilon^{(0)}(\omega)$, и рассматривать последний член в (3.13) как возмущение; тогда при $\varepsilon^{(1)}(\omega) \rightarrow 0$ получим поле равномерно движущегося заряда как сумму поперечного и продольного (по отношению к вектору \mathbf{k}) полей:

$$E_{\mathbf{k}, \omega}^q = E_{\mathbf{k}, \omega}^{q(l)} + E_{\mathbf{k}, \omega}^{q(tr)}, \quad (3.14)$$

$$E_{i, \mathbf{k}, \omega}^{q(l)} = -\frac{4\pi i q k_i}{(2\pi)^3 k^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) = G_{ij, \mathbf{k}, \omega}^{lq} j_{j, \mathbf{k}, \omega}^q, \\ E_{i, \mathbf{k}, \omega}^{q(tr)} = \frac{4\pi i q \omega [v_i - k_i ((\mathbf{k}\mathbf{v})/k^2)] \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})}{(2\pi)^3 c^2 (k^2 - \omega^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)/c^2)} = G_{ij, \mathbf{k}, \omega}^{trq} j_{j, \mathbf{k}, \omega}^q, \quad (3.16)$$

здесь введены функции Грина для продольного поля ($G_{ij, \mathbf{k}, \omega}^{lq}$) и поперечного поля ($G_{ij, \mathbf{k}, \omega}^{trq}$). Они равны

$$G_{ij, \mathbf{k}, \omega}^{lq} = -\frac{4\pi i k_i k_j}{\omega k^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)}, \quad G_{ij, \mathbf{k}, \omega}^{trq} = \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \cdot \frac{4\pi i \omega}{c^2 (k^2 - \omega^2 \varepsilon^{(0)}(\omega)/c^2)} \quad (3.17)$$

Рассеянные волны будем для конкретности считать поперечными. Тогда их поле определится из (3.13) в следующем приближении (подставляем в член, содержащий $\varepsilon^{(1)}$, поле (3.14)):

$$\left[k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)}(\omega) \right] E_{\mathbf{k}, \omega}^{R(tr)} = \frac{\omega^2}{2c^2 i} \varepsilon^{(1)}(\omega) \left[E_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0, \omega+\omega_0}^q - E_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \omega-\omega_0}^q - \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k} E_{\mathbf{k}+\mathbf{k}_0, \omega+\omega_0}^q) + \frac{\mathbf{k}}{k^2} (\mathbf{k} E_{\mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \omega-\omega_0}^q) \right]. \quad (3.18)$$

Здесь уместно остановиться на одной особенности членов, входящих в правую часть (3.18), которая в данном случае служит как бы эффективным источником (током), возбуждающим рассеянную волну. Этот ток ортогонален \mathbf{k} , и может показаться, что только поперечное поле заряда — поле (3.16) будет вносить свой вклад в поле $E_{\mathbf{k}, \omega}^{R(tr)}$. В действительности, однако, в (3.18) входят поля $E_{\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0, \omega \pm \omega_0}^q$, т. е. индексы l и tr в (3.15), (3.16) указывают продольность или поперечность поля по отношению к вектору $\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$, а не к \mathbf{k} . Поэтому если только $\mathbf{k}_0 \neq 0$, нужно учитывать как продольное, так и поперечное поля. Более того, легко видеть, что поперечная компонента (3.16) при $v \rightarrow 0$ стремится к нулю, и для покоящегося заряда основным будет продольное поле (3.15). В⁶⁵ было учтено только поперечное поле (3.16) и тем самым не учтен эффект, который

является единственным для покоящегося заряда. Более того, из сравнения (3.15) с (3.16) легко получить, что продольное поле будет основным и при $v \ll ck/\omega \varepsilon^{(0)}(\omega) \sim c/\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega)}$, т. е. при скоростях частиц, много меньших скорости света в среде, а значит, при $\varepsilon^{(0)}(\omega) > 1$, для любых нерелятивистских частиц. Впрочем, это утверждение не очень точно, поскольку при $k_0 \rightarrow 0$, $v \neq 0$ становится существенным уже поперечное поле (3.16) и, следовательно, оно существенно и при достаточно малых k_0 . Строго говоря, вывод о преимущественной роли продольного или поперечного поля может быть получен только при сравнении окончательных выражений для сечений рассеяния. Частоты $\omega \pm \omega_0$ и волновые векторы $\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$ для функций Грина $G_{ij, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0, \omega \pm \omega_0}^l$ и $G_{ij, \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0, \omega \pm \omega_0}^{tr}$ чаще всего не соответствуют волнам, которые могут распространяться в среде, и поля с такими частотами и волновыми векторами называют виртуальными. Рассеяние при учете продольного поля частицы $E^{(l)}$ часто называют поэтому рассеянием через виртуальную продольную волну, а при учете $E^{(tr)}$ — рассеянием через виртуальную поперечную волну. Такое название связывается также с диаграммным изображением переходного рассеяния (рис. 5). Кружок на рис. 5 соответствует взаимодействию трех волн, описываемому константой (вершиной) $\varepsilon^{(1)}$. Разумеется, при $v = \text{const}$ (масса частицы $M \rightarrow \infty$) импульсы \mathbf{p} и \mathbf{p}' можно считать одинаковыми.

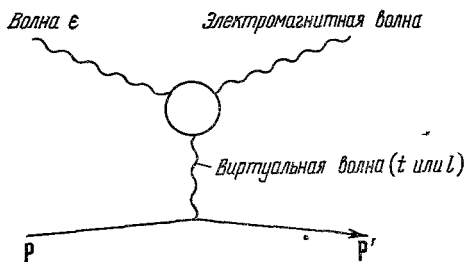


Рис. 5. Графическое изображение процесса переходного рассеяния.

\mathbf{p} и \mathbf{p}' — импульсы частицы до рассеяния и после рассеяния; при переходном рассеянии на частицах с массой $M \rightarrow \infty$ импульсы \mathbf{p} и \mathbf{p}' всегда можно считать одинаковыми.

Ниже мы рассмотрим два предельных случая — случай нерелятивистской частицы, когда основным является рассеяние через виртуальную продольную волну, и случай ультрарелятивистской частицы, когда основным является рассеяние через виртуальную поперечную волну.

5) Для простоты положим сразу $v = 0$; тогда частота рассеянной волны равна частоте падающей волны. После подстановки (3.15) в (3.18) нетрудно найти ⁴⁰ рассеянное поле $\mathbf{E}_k^R(t) = \int \mathbf{E}_{k, \omega}^R e^{-i\omega t} d\omega$. Для вычисления мощности излучения удобно воспользоваться тем, что вдали от заряда поле \mathbf{E}^R отделяется от собственного поля заряда и поэтому мощность излучения Q будет равна среднему (по времени) изменению энергии W^R поля \mathbf{E}^R в единицу времени

$$\begin{aligned} Q^R &= \frac{dW^R}{dt} = \frac{1}{4\pi} \int \left[\mathbf{E}^R(\mathbf{r}, t) \hat{\varepsilon}^{(0)} \frac{\partial \mathbf{E}^R(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{B}^R(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \mathbf{B}^R(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] d\mathbf{r} = \\ &= 2\pi^2 \int d\mathbf{k} \left[\mathbf{E}_{-\mathbf{k}}^R(t) \hat{\varepsilon}^{(0)} \frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^R(t)}{\partial t} + \mathbf{B}_{-\mathbf{k}}^R(t) \frac{\partial \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^R(t)}{\partial t} \right] = \\ &= \frac{q^2 \omega_0^3}{4\pi c^2} \int \left[\left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2 \frac{[\mathbf{k} \mathbf{k}_0]^2}{k^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} \delta \left(k^2 - \omega_0^2 \frac{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}{c^2} \right) d\mathbf{k} \right] \quad (3.19) \end{aligned}$$

(здесь, при учете частотной дисперсии, $\hat{\varepsilon}^{(0)} = \varepsilon^{(0)}(i\partial/\partial t)$). В соответствии со сказанным ранее мощность излучения обращается в нуль как при $\omega_0 \rightarrow 0$, так и при $\mathbf{k}_0 \rightarrow 0$. Напомним, что в общем случае $\varepsilon^{(1)}$ зависит от ω_0 , \mathbf{k}_0 и \mathbf{k} (в данном случае $\omega = \omega_0$). Сечение рассеяния может существенно зависеть от пространственной дисперсии $\varepsilon^{(1)}$. Здесь мы, однако,

пренебрежем пространственной дисперсией, полагая $\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(1)}(\omega)$. Тогда интегрирование по k^2 и по углу θ между \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 дает ⁴⁰

$$Q^R = \frac{q^2 \omega_0^2}{8c} \left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}} \left(\frac{1}{\Lambda} \ln \frac{1+\Lambda}{1-\Lambda} - 2 \right), \quad \Lambda = \frac{2}{(k/k_0) + (k_0/k)}. \quad (3.20)$$

В предельных случаях имеем ($k = (\omega_0/c) \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}$)

$$Q^R = \frac{q^2 \omega_0^4}{3c} \left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}, \quad k \ll k_0, \\ Q^R = \frac{q^2 c k_0^2}{3} \left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2 [\varepsilon^{(0)}(\omega_0)]^{3/2}, \quad k \gg k_0. \quad (3.21)$$

Следует отметить, что $k/k_0 = (\omega_0/c k_0) \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}$, и если $\omega_0/k_0 \ll c/\sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega)}$, т. е. фазовая скорость волны проникаемости (3.1) много меньше скорости света в среде, то $k \ll k_0$. Для оценки сечения рассеяния можно сравнить результат (3.21) с известной мощностью излучения электрического диполя (осциллятора), находящегося в среде (см., например,³, гл. 6),

$$Q_d = \frac{q^2 \omega_0^4 r_0^2}{3c^3} \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}. \quad (3.22)$$

Из (3.21) при $k \ll k_0$ и (3.22) находим

$$\frac{Q^R}{Q_d} = \left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega_0)}{\varepsilon^{(0)}(0)} \right|^2 \left(\frac{\lambda_0}{2\pi r_0} \right)^2, \quad \lambda_0 = \frac{2\pi}{k_0}. \quad (3.23)$$

Томсоновское рассеяние (рассеяние на свободном заряде) пропорционально q^4 и обратно пропорционально M^2 , поскольку в этом случае

$$\mathbf{r}_0 = -\frac{q \mathbf{E}_0}{M \omega_0^2}, \quad Q_d = Q_{T, M} = \frac{q^4 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)} E_0^2}{3 M^2 c^3}. \quad (3.24)$$

Переходное рассеяние не зависит от массы частицы и имеет место и для тяжелых частиц (т. е. в принципе и при $M \rightarrow \infty$). При этом роль амплитуды r_0 играет λ_0 — длина падающей волны. При $\lambda_0 \gg r_0$ переходное рассеяние может намного превосходить томсоновское. Эти выводы, касающиеся переходного рассеяния, особо важны для плазмы (см. ниже), где количественные оценки будут несколько иными из-за эффектов пространственной дисперсии проникаемости. Поскольку рассеяние на покоящемся заряде происходит без изменения частоты ($\omega = \omega_0$), то для низкочастотных волн диэлектрической проникаемости рассеяние возможно только в том случае, если частота ω_0 лежит в окне прозрачности среды для электромагнитных волн. Возможно также переходное рассеяние с образованием любых других типов волн с ω_0 , которые способны распространяться в среде.

Рассмотрим теперь переходное рассеяние для ультрарелятивистской частицы. Основным в данном случае будет рассеяние через виртуальную поперечную волну, т. е. для расчета поля рассеяния необходимо в правую часть (3.18) подставить поле (3.16). Расчет, аналогичный тому, который был приведен выше для покоящегося заряда, дает (при произвольной скорости v):

$$Q^R = \frac{q^2}{4\pi c^6} \int \frac{|\varepsilon^{(1)}(\omega)|^2 \mathbf{w}^2 |\omega|^3 ((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v})^2 \delta(\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v})}{|(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 - [((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v})^2 / c^2] \varepsilon^{(0)}((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v})|^2} \times \\ \times \delta\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)}(\omega)\right) d\omega d\mathbf{k}, \quad (3.25) \\ \mathbf{w} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{v})}{k^2} - \frac{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) ((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v})}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} + \frac{\mathbf{k} (\mathbf{k} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)) ((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v})}{k^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2}.$$

Если \mathbf{k}_0 и \mathbf{v} параллельны, то $w^2 = [\mathbf{k}\mathbf{v}]^2 (\mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0))^2/k^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^4$. Рассмотрим вначале случай $\omega_0 = 0$ и $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$, т. е. рассеяние на неподвижной периодической решетке диэлектрической проницаемости. Для релятивистских частиц имеет смысл рассматривать область высоких частот, когда можно пользоваться плазменной формулой $\varepsilon \approx 1 - (\omega_p^2/\omega^2)$. Тогда, считая промодулированную концентрацию N , имеем

$$N = N_0 + \Delta N \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r}), \quad \varepsilon = \varepsilon^{(0)} + \varepsilon^{(1)} \sin(\mathbf{k}_0 \mathbf{r}),$$

$$\varepsilon^{(1)} = -\frac{4\pi e^2 \Delta N}{m\omega^2}, \quad \varepsilon^{(0)} = 1 - \frac{4\pi e^2 N_0}{m\omega^2} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}.$$

Далее из (3.25) получаем

$$Q^R \approx \frac{q^2 \omega_p^4}{4\pi c^6} \int \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \frac{|\omega| [\mathbf{k}\mathbf{v}]^2 (\mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0))^2}{k^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^4 (k_0^2 - 2\mathbf{k}\mathbf{k}_0)^2} \times \\ \times \delta \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)}(\omega) \right) \delta(\omega - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}) d\omega d\mathbf{k}. \quad (3.26)$$

Для релятивистских частиц $k \approx \frac{\omega}{c} \approx 2k_0 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2 \gg k_0$ (см. (3.7)), и угол между \mathbf{k} и \mathbf{v} , а следовательно и угол между \mathbf{k} и \mathbf{k}_0 — мал (т. е. $\theta^2 \ll 1$). Это позволяет сразу упростить выражение (3.26):

$$Q^R = \frac{q^2 \omega_p^4}{8c} \int_0^\infty \frac{\theta^2 d\theta^2}{(2k_0 c)^2} \int_0^\infty d\omega \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \delta \left(\frac{\omega}{2} \left[\left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 + \theta^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] - k_0 v \right) = \\ = \frac{q^2 \omega_p^4}{4c} \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \left[\frac{2k_0 c}{\omega} - \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \right] \frac{d\omega}{\omega (2k_0 c)^2}, \quad (3.27)$$

где

$$\omega_{\max, \min} = \frac{\omega_p}{(k_0 c / \omega_p) \mp \sqrt{[(k_0 c)^2 / \omega_p^2] - (Mc^2 / \mathcal{E})^2}}.$$

Формула (3.27) совпадает с получающейся другим методом — при расчете резонансного переходного рассеяния (см. III). Этого, конечно, и следовало ожидать, поскольку в рассматриваемых условиях резонансное переходное излучение и переходное рассеяние идентичны.

Рассмотрим теперь переходное рассеяние релятивистских частиц на волнах диэлектрической проницаемости, имеющих сверхсветовые скорости, т. е. будем считать выполненным неравенство $\omega_0/k_0 \gg c$. Считая, что в законе сохранения (3.3) $\omega_0 \gg |k_0 v|$, получаем (см. замечания, сделанные после формул (3.3), (3.4))

$$2\omega_0 = \omega \left[\theta^2 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + \left(\frac{Mc^2}{\mathcal{E}} \right)^2 \right],$$

а из условия $\theta^2 > 0$ находим

$$\omega_{\max, \min} = \frac{\omega_p}{(\omega_0 / \omega_p) \mp \sqrt{(\omega_0 / \omega_p)^2 - (Mc^2 / \mathcal{E})^2}}. \quad (3.28)$$

Для интенсивности излучения получаем

$$Q^R = \frac{q^2 \omega_p^4}{4\pi c^2} \int \left(\frac{\Delta N}{N} \right)^2 \frac{d\mathbf{k} d\omega}{(\omega_0^2 - 2\omega\omega_0)^2} \frac{|\mathbf{k}\mathbf{v}|^2}{k^2} \delta \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon^{(0)}(\omega) \right) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - \omega_0). \quad (3.29)$$

Если $\omega_0 \ll \omega_p$, то минимальная излучаемая частота равна $\omega_{\min} = \omega_p^2/\omega_0 \gg \omega_0$, и, следовательно, во всей области излучения выполнено условие $\omega \gg \omega_0$.

В литературе довольно широко обсуждается вопрос о переходном излучении заряда, движущегося в среде со случайными неоднородностями. Разумеется, при заданной скорости заряда (или другого источника, не обладающего собственной частотой) все излучение, возникающее в случайно неоднородной среде, сводится к переходному излучению (рассеянию). К сожалению, за недостатком места мы не можем здесь остановиться на подобных задачах (см.¹¹⁵, раздел 3.2, а также ⁶⁴, ⁶⁸, ⁶⁹).

б) Переходное рассеяние в плазме.

Переходное излучение при столкновениях частиц. Переходное рассеяние высшего порядка

1) В плазме процессы переходного рассеяния играют особенно важную роль ⁶¹. Это связано главным образом с двумя обстоятельствами. Во-первых, плазма часто может считаться бесстолкновительной *). В этом случае частицы плазмы (электроны и ионы) в отсутствие внешнего магнитного поля большую часть времени движутся равномерно и прямолинейно и, следовательно, основную роль могут играть такие процессы излучения и рассеяния, которые не требуют ускорения частиц, в частности, изменения их траекторий. При наличии магнитных полей каждая из частиц плазмы в первом приближении движется по спирали. Это, в общем, не меняет, однако, заключения о том, что основную роль могут играть такие процессы излучения и рассеяния, которые не требуют изменения траекторий частицы (в данном случае — движения по спирали). Важно, что излучение и рассеяние могут осуществляться на всей траектории частицы без существенного изменения характера ее движения.

Во-вторых, плазма бывает весьма неустойчивой, когда даже очень малые отклонения от равновесия вызывают лавинообразное нарастание разнообразных колебаний. Существенно, что большинство таких колебаний сопровождается изменением концентрации и других параметров плазмы, т. е. представляют собой волны диэлектрической проницаемости.

Именно поэтому переходное рассеяние в плазме фактически рассматривалось сравнительно давно — еще в работе ⁷⁰, хотя и вне связи с общей теорией переходного рассеяния и переходного излучения. Конкретно в ⁷⁰ была рассмотрена задача о переходном рассеянии ленгмюровских волн с частотой $\omega_c \approx \omega_p$ и фазовой скоростью $\omega_0/k_0 \ll c$ на релятивистских электронах и ионах с $\mathcal{E}/Mc^2 \gg 1$ (см. термин «переходное рассеяние» в ⁷⁰ не использовался). Кроме того, еще в ⁷¹, ⁷² фактически рассматривалось переходное рассеяние ионно-звуковых волн на нерелятивистских ионах плазмы. При дальнейшем довольно бурном развитии теории плазмы переходное рассеяние учитывалось для большинства мод плазмы как в случае наличия магнитных полей, так и при их отсутствии. При этом часто рассматривался не элементарный процесс переходного рассея-

*) Роль соударений мала, если $\omega \gg \nu$, где ν — эффективное число столкновений. В плазме $\nu \sim (e^4/T_e^2) \sqrt{T_e/m} N$, где T_e — электронная температура в энергетических единицах и $\sqrt{T_e/m} = v_{Te}$ — некоторая средняя тепловая скорость электронов. Для частот порядка плазменной частоты $\omega^2 \sim \omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m$, и «бесстолкновительное условие» принимает вид $e^2 N/T_e^2 \ll 1$. Физический смысл этого условия, записанного в виде $e^2 N^{1/3} \ll T_e$, ясен также, если вспомнить, что $e^2 N^{1/3}$ — это средняя энергия кулоновского взаимодействия между зарядами (расстояние между ними порядка $N^{-1/3}$) и T_e — их средняя кинетическая энергия.

ния, а его несколько опосредствованное влияние на коэффициенты реabsорбции различных плазменных мод (индуцированное переходное рассеяние). Впрочем, в ⁶¹ приведены вероятности переходного рассеяния, называвшегося там нелинейным рассеянием, позволяющие непосредственно вычислить мощность переходного рассеяния любой плазменной волны на отдельной частице. Укажем здесь и на ряд обзоров, в которых имеются сводки результатов по переходному рассеянию частиц в плазме ⁶¹, ⁷²⁻⁷⁴ (для нерелятивистских частиц) и ⁷⁰, ⁷⁵, ⁷⁶ (для ультрарелятивистских частиц). Таким образом, в отношении плазмы работа ⁴⁰ внесла не новые результаты, а способствовала пониманию физической природы обсуждаемых процессов рассеяния.

2) Остановимся кратко на отличительных особенностях переходного рассеяния в плазме, причем отметим здесь четыре наиболее важные особенности этого процесса. Во-первых, особенно существенным оказывается такой тип переходного рассеяния, в котором одна плазменная волна, являющаяся волной диэлектрической проницаемости, превращается в другую, тоже плазменную волну (например, ленгмюровская волна превращается в ленгмюровскую или ленгмюровская в ионно-звуковую, ионно-звуковая в ионно-звуковую и т. д. и т. п.). Во-вторых, в процессах переходного рассеяния весьма существенную роль играют эффекты пространственной дисперсии (в особенности, когда рассеяние происходит на частицах малых скоростей). В-третьих, в плазме помимо переходного рассеяния существует, а иногда и доминирует, обычное (томсоновское) рассеяние. В этой связи в плазме важную роль играет интерференция между обычным томсоновским и переходным рассеянием. Суть дела состоит в том, что в плазменной волне наряду с колебаниями плотности возникают и электрические поля, которые могут приводить рассеивающую частицу в колебательное движение, что и дает обычное томсоновское рассеяние. Полное рассеяние не является суммой переходного и томсоновского рассеяния, поскольку складываются не вероятности рассеяния, а матричные элементы рассеяния. В-четвертых, для достаточно интенсивных плазменных мод основную роль начинает играть не спонтанное, а вынужденное (индуцированное) переходное рассеяние. Такой процесс представляет собой, по существу, процесс реabsорбции рассеянного излучения и может быть вычислен при известной вероятности рассеяния, используя стандартный метод коэффициентов Эйнштейна ⁶¹. При этом, если рассеянная и рассеиваемая волны принадлежат к одной и той же плазменной моде, то соответствующий процесс индуцированного рассеяния будет пропорционален как интенсивности рассеиваемой волны, так и интенсивности рассеянной волны и, следовательно, будет описывать нелинейный процесс, квадратичный по интенсивности волн рассматриваемой плазменной моды. Иногда этот процесс называют нелинейным затуханием Ландау ⁷²⁻⁷⁴. Нелинейное затухание Ландау определяется полным сечением рассеяния, включающего как томсоновское, так и переходное рассеяние (и, естественно, их интерференцию). Общее доказательство того, что нелинейное затухание Ландау, при расчете которого ранее использовалась нелинейная теория плазмы, сводится к индуцированному рассеянию, было дано в ⁷⁷, ⁶¹. Несмотря на все это развитие, связь описанных процессов с общими представлениями о переходном рассеянии до сих пор остается в тени.

Заметим, что общая теория переходного рассеяния, изложенная в предыдущем разделе а) гл. 3, легко обобщается на случай, когда рассеянная волна является не электромагнитной, а произвольной нормальной волной в среде, в частности, и продольной волной. Для случая, когда проницаемость описывается формулой (3.1), мощность излучения продольной

волны можно найти по изменению энергии продольного поля:

$$Q^R = \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \hat{\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} d\mathbf{r} = 2\pi^2 \int \mathbf{E}_{-\mathbf{k}} \hat{\varepsilon}^{(0)} \frac{\partial \mathbf{E}_{\mathbf{k}}}{\partial t} d\mathbf{k} = \\ = \frac{q^2}{4\pi} \int \left| \frac{\varepsilon^{(1)}(\omega)}{\varepsilon^{(0)}(\omega - \omega_0)} \right|^2 \delta(\omega - \omega_0 - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) v) \frac{1}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2} |\omega| \delta[\varepsilon^{(0)}(\omega)] d\omega d\mathbf{k}. \quad (3.30)$$

Здесь считается, что $v \ll c$, и учитывается лишь рассеяние через виртуальную продольную волну (см. (3.15)). Кроме того, учтено, что продольные волны имеют другой закон дисперсии, а разность частот $\omega - \omega_0$ может быть сравнима с доплеровским смещением частот $(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) v$. В соответствии с этим в (3.30) входит не $\varepsilon^{(0)}(0)$, как в (3.19), где $\omega = \omega_0$, а $\varepsilon^{(0)}(\omega - \omega_0)$. Формула (3.30) позволяет рассмотреть процессы рассеяния продольных волн в продольные, например, рассеяния ленгмюровских волн в ленгмюровские или ленгмюровских в ионно-звуковые и т. п. При учете пространственной дисперсии, которая оказывается весьма существенной в данном процессе рассеяния, величина $\varepsilon^{(0)}(\omega - \omega_0)$ в (3.30) должна быть заменена на $\varepsilon^{(0)l}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0)$, где индекс l указывает на то, что в данном случае фигурирует продольная компонента тензора линейной диэлектрической проницаемости $\varepsilon^{(0)l}(\omega, \mathbf{k}) = (k_i k_j / k^2) \varepsilon_{ij}^{(0)}(\omega, k)$. В магнитоактивной плазме моды, кроме распространяющихся строго по полю (см. ⁵⁶), могут быть продольными лишь с определенной точностью, в силу чего $\varepsilon^{(0)}$ можно заменить приведенным выражением $\varepsilon^{(0)l}$ только приближенно и лишь в случае, когда рассматривается рассеяние через виртуальную продольную волну; подробное исследование этого вопроса можно найти в ^{61, 78}, а изменения, которые нужно внести при вычислении энергии, излучаемой при переходном рассеянии с учетом пространственной дисперсии, детально изложены в разделе 3.3 статьи ¹¹⁵.

3) Приведем конкретные примеры, свидетельствующие о весьма существенной роли переходного рассеяния для волн в плазме. При этом ограничимся здесь обсуждением рассеяния в случае нерелятивистских частиц ($v \ll c$); для ультрарелятивистских частиц результаты приведены в ¹¹⁵. Разность частот рассеянной и рассеиваемых волн в нерелятивистском случае хотя и не равна нулю (при $v \neq 0$), но достаточно мала. Поэтому рассеяние происходит с незначительным изменением частоты. Если, например, рассеиваемая волна является ленгмюровской ($\omega \approx \omega_p$), то частота рассеянной ленгмюровской или электромагнитной волны должна быть близкой к ω_p .

Для мощности переходного рассеяния в электромагнитную волну из (3.19) и соответствующих выражений для $\varepsilon^{(0)}$ и $\varepsilon^{(1)}$ получаем ¹¹⁵

$$Q^R = \frac{q^2 e^2 E_0^2 \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}}{3c^3 m^2} \left| \frac{\varepsilon_e^{(0)l}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - 1}{\varepsilon^{(0)l}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0)} \right|^2. \quad (3.31)$$

Здесь учтено, что множитель, входящий в (3.31) под знаком модуля, с хорошей степенью точности постоянен и равен

$$\frac{\varepsilon_e^{(0)l}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - 1}{\varepsilon^{(0)l}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0)} \approx \\ \approx \begin{cases} 1, & v \gg v_{Ti} = \sqrt{\frac{T_i}{m_i}}, \quad |\varepsilon_i^{(0)l} - 1| \ll |\varepsilon_e^{(0)l} - 1|, \\ \frac{1}{1 + (T_e/T_i)}, & v \ll v_{Ti} = \sqrt{\frac{T_i}{m_i}}, \\ (\varepsilon_i^{(0)l} - 1) \approx \frac{T_i}{T_e} (\varepsilon_e^{(0)l} - 1) \approx \frac{\omega_p^2}{(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)^2 v_{Te}^2}, \end{cases} \quad (3.32)$$

где m_i — масса ионов плазмы, T_i — их температура (m и T_e — масса и температура электронов; в (3.30) величина $\varepsilon_e^{(0)l}$ — часть $\varepsilon^{(0)l}$, связанная с электронами). Результат (3.31) не учитывает томсоновского рассеяния и его интерференции с переходным рассеянием и в этом отношении, строго говоря, корректен только для частиц с $M \rightarrow \infty$. Практически же выражение (3.31) с хорошей точностью применимо для любых нерелятивистских ионов. Томсоновское рассеяние легко учесть, используя выражение (3.24), в котором для электронов $M = m$. С учетом интерференции между томсоновским и переходным рассеянием полная мощность рассеяния на частице с массой M и зарядом q , движущейся с нерелятивистской скоростью или покоящейся в плазме, может быть записана как мощность томсоновского рассеяния на электронах $Q_{T,m}$, умноженная на дополнительный фактор $|F|^2$

$$Q^R = Q_{T,m} |F|^2, \quad F = \frac{m}{M} + \frac{e}{q} \frac{(\varepsilon_e^{(0)l}(\omega - \omega_0, \mathbf{k} - \mathbf{k}_0) - 1)}{\varepsilon^{(0)l}(\omega - \omega_0; \mathbf{k} - \mathbf{k}_0)}. \quad (3.33)$$

Результат (3.33) получен для рассеяния продольных лэнгмюровских волн в поперечные (электромагнитные) волны. Однако он носит, как оказывается, более общий характер и может описывать, например, рассеяние продольных лэнгмюровских волн в лэнгмюровские же волны. В этом случае величина $Q_{T,m}$ будет, правда, отличаться от (3.24) численным множителем $1/2$ (из-за иных угловых зависимостей сечения рассеяния⁶¹). При рассеянии на ионах $m/M \ll 1$ и $F \approx 1$ (см. (3.32)). Формула (3.33) тем самым, подчеркивает то обстоятельство, что полное рассеяние — фактически переходное рассеяние на ионах — по порядку величины соответствует томсоновскому рассеянию на электронах. Формула (3.33) показывает, что переходное рассеяние на электронах обычно будет малым. Действительно, согласно (3.33) только очень медленные электроны со скоростью $v \ll v_{Ti}$ будут иметь сечение рассеяния, сравнимое с томсоновским. Полагая $M = m$, $q = -e$, получаем в этом случае

$$F = 1 - \frac{1}{1 + (T_e/T_i)} = \frac{1}{1 + (T_i/T_e)}. \quad (3.34)$$

Таким образом, при $T_i = T_e$, отсюда и из (3.33) видим, что $Q^R = Q_{T,m}/4$. Для электронов с $v \gg v_{Ti}$ согласно (3.32), (3.33) получаем $F = 0$. Мощность рассеяния все же не равна строго нулю, поскольку при учете членов следующего порядка по малому параметру $k_0^2 v_{Te}^2 / \omega_p^2 \ll 1$ мощность рассеяния $Q_{T,m} \sim (k_0^2 v_{Te}^2 / \omega_p^2) Q_{T,m} \ll Q_{T,m}$. Мощность рассеяния для теплового электрона можно определить как мощность рассеяния, усредненную по максвелловскому распределению электронов. Такая мощность будет всегда много меньше мощности томсоновского рассеяния, поскольку относительная доля электронов с $v \ll v_{Ti}$, когда мощность рассеяния порядка $Q_{T,m}$, мала, а для основной массы электронов с $v \gg v_{Ti}$ мощность рассеяния мала. Этот эффект подавления рассеяния на электронах является прямым следствием интерференции томсоновского и переходного рассеяний. Интересно, что для позитрона ($q = e$, $M = m$) томсоновское и переходное рассеяния усиливают друг друга. В случае $v \ll v_{Ti}$ имеем $F \approx 3/2$ (при $T_e = T_i$) и $Q^R = (9/4) Q_{T,m}$. При $v \gg v_{Ti}$ уже $F = 2$ и $Q^R \approx 4 Q_{T,m}$. Эти примеры хорошо иллюстрируют большую роль, которую играет в плазме именно переходное рассеяние (подробнее см. ^{61, 71, 73, 76}).

4) Сделанное заключение о роли переходного рассеяния в плазме еще усиливается в результате анализа переходного рассеяния на релятивист-

ских частицах с учетом возможных применений в лабораторной и особенно в космической плазме. Переходное рассеяние в плазме существенно также при рассмотрении ряда эффектов, связанных с учетом индуцированного рассеяния и нелинейностей. Эта проблема освещена в разделах 3.3 и 3.4 статьи ¹¹⁵ (см. также цитируемые там статьи и книги ⁷⁹⁻⁹⁶) и здесь мы можем кратко остановиться лишь на переходных эффектах более высокого порядка. Дело в том, что рассмотренное до сих пор переходное рассеяние соответствовало низшим порядкам по заряду частицы q (мощность излучения Q^R пропорциональна q^2), а также низшему порядку по рассеиваемым полям ($Q^R \sim E_0^2$). Существуют, вместе с тем, и эффекты более высокого порядка по q ($Q^R \sim q^4$) и более высокого порядка по рассеиваемым полям ($Q^R \sim E_0^4$). К эффектам первого класса относятся нелинейное черенковское излучение (возникающее в условиях, когда выполнено черенковское условие) и эффекты переходного излучения при столкновениях частиц («переходное тормозное излучение»). К эффектам второго класса относятся такие, в которых рассеянные волны имеют для покоящегося заряда частоту, в два раза большую частоты рассеиваемой волны. При квантовом рассмотрении такого процесса рассеяния можно видеть, что из рассеянной волны одновременно поглощаются два кванта и возникает один рассеянный с удвоенной частотой.

Нелинейное черенковское излучение — это черенковское излучение, обусловленное нелинейностью среды. В особенно простой, в принципе, форме нелинейное черенковское излучение проявляется, когда интенсивность обычного черенковского излучения равна нулю. Именно такова ситуация при движении в среде (скажем, в прозрачной среде с показателем преломления $n(\omega)$) некоторого достаточно хорошо локализованного пакета (цуга, импульса) волн с отвечающей этому пакету групповой скоростью $v_{gr} = d\omega/dk$. В том хорошо известном приближении, когда распыливание пакета не играет роли (и поэтому групповая скорость имеет точный смысл), пакет волн в кинематическом плане вполне аналогичен любому другому излучателю (заряду, мультиполю и т. п.), движущемуся в среде с постоянной скоростью. Таким образом, ясно, что пакет может, вообще говоря, излучать черенковские волны (с частотой $\omega = kc/n$) при условии $\omega = kv_{gr}$. Однако в линейном приближении, когда соблюдается принцип суперпозиции, интенсивность излучения электромагнитных волн пакетом электромагнитных же волн, разумеется, равна нулю. Но в нелинейной среде (в частности, в вакууме в сильном поле; см. раздел г) гл. 2) обсуждаемое черенковское излучение уже может возникнуть (см. ⁹⁰, § 15.1). При движении в среде заряда, помимо тока $j^q = qv\delta(r - vt)$, возникает также некоторый нелинейный ток j^{Nl} , вносящий вклад, в частности, в черенковское излучение. Такой нелинейный эффект Вавилова — Черенкова, обусловленный током j^{Nl} , как раз и рассмотрен в ¹¹⁵ (раздел 3.4).

Рассмотрим теперь два заряда, q_α и q_β , движущиеся со скоростями v_α и v_β и пролетающие достаточно близко друг к другу. Тогда, если заряды движутся в вакууме, поляризация которого не учитывается, излучение (тормозное излучение) возникает только при учете ускорения зарядов или, по крайней мере, одного из них. При наличии же среды указанное «столкновение» зарядов приводит к излучению («переходному тормозному излучению») даже в том случае, когда скорость обеих зарядов строго постоянна (это имеет место для свободных зарядов, если их массы $M_{\alpha, \beta} \rightarrow \infty$). Природа эффекта, очевидно, такая же, как в случае переходного рассеяния, причем переменная (дополнительная) поляризация среды вблизи одного из зарядов создается волнами проницаемости, связанными с другим зарядом. Разумеется, эти волны проницаемости или даже разложенное на плоские волны изменение проницаемости, бегущее вместе с зарядом, появ-

ляются только с учетом нелинейности (это значит, очевидно, что проницаемость ε_i должна зависеть от напряженности электрического поля). На существование переходного тормозного излучения было обращено внимание в работе ⁹¹, подробнее теория развивалась в статьях ⁹². Сравнение интенсивности переходного тормозного излучения и обычного тормозного излучения ⁹³ (причем нужно учитывать интерференцию обоих эффектов) свидетельствует о том, что переходное тормозное излучение может даже превосходить обычное тормозное излучение (см. ^{92b} и ¹¹⁵, раздел 3.4). Отметим, что переходное тормозное излучение рассматривается в приближении, в котором нелинейный ток δj^{Nl} квадратичен по полю E или, что то же самое, нелинейная проницаемость $\delta \varepsilon^{Nl}$ линейна по E . Учет нелинейностей более высокого порядка в относительно слабых полях обычно не представляет интереса. Но, разумеется, это утверждение уже неверно, если квадратичный по полю ток δj^{Nl} равен нулю. Именно такова ситуация в вакууме (см. раздел 1) гл. 2) и для электронно-позитронной плазмы при условии, что концентрации и функции распределения электронов и позитронов одинаковы. Такое или близкое условие может, возможно, реализовываться вблизи пульсаров. Как в вакууме, так и для указанной электронно-позитронной плазмы ток δj^{Nl} кубичен по полю E , а $\delta \varepsilon^{Nl} \sim E^2$. Переходное рассеяние в вакууме при наличии сильного поля рассмотрено в ³⁹ и нижеследующем разделе в).

в) Переходное рассеяние в вакууме при наличии сильного электромагнитного или гравитационного поля

1) Переходное рассеяние является простейшим механизмом превращения волн одного типа в волны другого типа на заряде (или ином источнике поляризации среды), не требующем (что иногда весьма важно) изменений движения самого заряда. При этом переходный механизм рассеяния весьма универсален — важно лишь существование волны проницаемости. Последняя может быть, как мы видели выше, продуктом нелинейности среды, но может быть связана и с нелинейностью вакуума (см. раздел г) гл. 2.) Нелинейность вакуума вызывается присутствием сильного электромагнитного поля, но возможно также переходное рассеяние из-за модуляции метрики пространства сильной гравитационной волной. В последнем случае происходит трансформация гравитационных волн в электромагнитные волны ⁴¹.

Нелинейность вакуума описывается лагранжианом, который уже был использован в гл. 2 (см. (2.121)). Будем, простоты ради, считать рассеивающий заряд q неподвижным (закрепленным). Его электрическое поле без учета нелинейности вакуума можно записать в виде

$$E^q(r) = \frac{qr}{r^3}, \quad E_{\mathbf{k}, \omega}^q = \frac{4\pi q}{i(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}}{k^2} \delta(\omega). \quad (3.35)$$

Пусть на этот заряд падает электромагнитная волна, поле которой, если она является когерентной и монохроматической, равно

$$E^w = E_0 e \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r} + \varphi_0), \quad \omega_0 = k_0 c, \quad e^2 = 1, \\ E_{\mathbf{k}, \omega}^w = \frac{E_0}{2} e [e^{-i\varphi_0} \delta(\omega - \omega_0) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + e^{i\varphi_0} \delta(\omega + \omega_0) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0)]. \quad (3.36)$$

Магнитное поле \mathbf{B}^w и средняя во времени энергия волны равны

$$\mathbf{B}^w = E_0 [\mathbf{n}_0 \mathbf{e}] \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r} + \varphi_0), \quad \mathbf{n}_0 = \frac{\mathbf{k}_0}{k_0}$$

$$\overline{W} = \frac{1}{8\pi} [(\overline{\mathbf{E}^w})^2 + (\overline{\mathbf{B}^w})^2] = \frac{E_0^2}{8\pi}. \quad (3.37)$$

В ³⁹ ¹¹⁵ рассмотрен также случай, когда падающие волны имеют широкий спектр, причем некоррелированы по фазам, но здесь мы ограничимся только рассмотрением волны (3.36). Рассмотрим теперь процесс, при котором из падающей волны (3.36) с частотой ω_0 образуется рассеянная волна с частотой $2\omega_0$. На квантовом языке это соответствует поглощению двух квантов $\hbar\omega_0$ с излучением одного кванта с энергией $2\hbar\omega_0$. Для обсуждаемого процесса нужно в формулах для $\mathbf{P} = \partial L'/\partial \mathbf{E}$ и $\mathbf{M} = \partial L'/\partial \mathbf{B}$ с использованием лагранжиана (2.121) сохранить члены, линейные по полю заряда \mathbf{E}^q и квадратичные по полю волны \mathbf{E}^w

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P} &= \kappa \{ 4 (\mathbf{E}^q \mathbf{E}^w) \mathbf{E}^w + 7 (\mathbf{E}^q \mathbf{E}^w) \mathbf{B}^w \} = \\ &= \frac{\kappa}{2} \{ 4 \mathbf{e} (\mathbf{e} \mathbf{E}^q) + 7 [\mathbf{n}_0 \mathbf{e}] ([\mathbf{n}_0 \mathbf{e}] \mathbf{E}^q) \} E_0^2 [1 + \cos(2\omega_0 t - 2\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + 2\varphi_0)] \\ \mathbf{M} &= \kappa \{ -4 (\mathbf{E}^q \mathbf{E}^w) \mathbf{B}^w + 7 (\mathbf{E}^q \mathbf{B}^w) \mathbf{E}^w \} = \\ &= \frac{\kappa}{2} \{ -4 [\mathbf{n}_0 \mathbf{e}] (\mathbf{e} \mathbf{E}^q) + 7 \mathbf{e} ([\mathbf{n}_0 \mathbf{e}] \mathbf{E}^q) \} (1 + \cos(2\omega_0 t - 2\mathbf{k}_0 \mathbf{r} + 2\varphi_0)) \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

где подставлено поле (3.36), (3.37); поле \mathbf{E}^q определяется, конечно, выражением (3.35).

Таким образом, поляризация и намагничение имеют осциллирующие члены с частотой $2\omega_0$ и волновым вектором $2\mathbf{k}_0$. Эти переменные поляризации и намагничение дают переходное рассеяние на заряде q . Интенсивность рассеяния легко найдется методом, изложенным в разделе а) гл. 3, как мощность излучения тока с плотностью $\delta \mathbf{j} = c \operatorname{rot} \mathbf{M} + \partial \mathbf{P} / \partial t$. Эта мощность для рассеянной волны (сумма по двум поляризациям) равна

$$Q^R = \int_0^\pi Q^R(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta = \frac{139}{48} \frac{q^2 \omega_0^2}{c} \left(\frac{\alpha}{45\pi} \right)^2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^4.$$

$$Q^R(\theta) = \frac{139\pi q^2}{8} \kappa^2 k_0^2 c \sin^2 \theta, \quad (3.39)$$

где $E_c = B_c = \frac{m^2 c^3}{e \hbar} = 4,410^{13} \text{ CGSE} = 1,32 \cdot 10^{16} \text{ в/см}$. Результат (3.39) фактически совпадает с получением в ⁹⁷ на основе громоздкого квантово-электродинамического расчета (правда, в ⁹⁷ вычисления проведены и для области высоких частот ω).

В связи с нелинейностями вакуума больше всего обсуждалось так называемое дельбруксовское рассеяние (см. ⁵³, § 125 и ⁹⁸). Этот эффект может быть рассмотрен с использованием нелинейных поляризаций \mathbf{P} и \mathbf{M} , если в кубических по полю членах два поля считать полем заряда \mathbf{E}^q , а одно — полем волны \mathbf{E}^w , т. е. положить $\mathbf{P}, \mathbf{M} \sim (\mathbf{E}^q)^2 \mathbf{E}^w$. Подсчет интенсивности излучения рассеянных волн с помощью таких значений \mathbf{P} и \mathbf{M} приводит к интегралам, которые расходятся на больших значениях k_1 (т. е. импульсов $\hbar k_1$) поля рассеивающего заряда. Это свидетельствует о неприменимости для описания процесса лагранжиана L' , пригодного при условии $k_1 \ll mc/\hbar$. Оборвав интегрирование на $k_{1, \max} \sim mc/\hbar$, получим правильную оценку мощности дельбруксовского рассеяния (см. ⁵³,

формула (125.1)):

$$Q \approx \frac{\alpha^2 \hbar^2 \omega_0^2}{c} \frac{\hbar^2}{\hbar c} \alpha \left(\frac{\hbar \omega_0}{mc^2} \right)^2 \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2. \quad (3.40)$$

Таким образом, дельбруксовское рассеяние, как и рассеяние $\omega_0 \rightarrow 2\omega_0$, можно рассматривать как переходное рассеяние из-за нелинейности вакуума *).

Если поле волны $E^w \approx E_0$ слабо (в том смысле, что $E_0 \ll E_c$), но

$$1 \gg \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \gg \alpha^2 Z^2 \left(\frac{\hbar \omega_0}{mc^2} \right)^2, \quad q^2 = e^2 Z^2, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c},$$

то мощность рассеяния (3.39) с удвоением частоты превосходит мощность дельбруксовского рассеяния (3.40), происходящего без изменения частоты. Для достаточно низких частот ω_0 такая ситуация как раз и имеет место. Существенно при этом, что мощность (3.39) корректно вычисляется на основе использования лагранжиана L' , поскольку при этом играют роль длины порядка $2\pi/k_0 \gg \hbar/mc$. Интенсивность рассеяния на движущемся и, в частности, релятивистском заряде получается из (3.39) простым пересчетом. Интегральную интенсивность можно вычислить, используя соображения, изложенные, например, в ⁹⁹, § 73. Что касается спектрального и углового распределения, то его можно получить изложенным выше методом, используя для E^q поле движущегося заряда.

Остановимся еще на одном нелинейном эффекте в вакууме — на рассеянии волны на заряде q при наличии сильного магнитного поля B_0 . Будем вначале считать заряд покоящимся и рассмотрим процесс рассеяния, когда частота рассеянной волны равна частоте падающей. Для рассматриваемого процесса $E = E^w + E^q$; $B = B_0 + B^w$ (см. (3.35) — (3.37)). Считая поле заряда слабым, учтем в поляризации P и намагничении M члены, линейные по E^q . В коэффициентах перед E^q , квадратичных по полям E^w и B_0 , члены порядка B_0^2 и $(E^w)^2$ описывают два типа процессов, уже обсуждавшихся выше, а интересующий нас здесь процесс описывается членами порядка $B_0 E^w$ и $B_0 B^w$. Эти части поляризации и намагничения имеют вид

$$\begin{aligned} P &= \kappa [-4 (B_0 B^w) E^q + 7 (E^q B_0) B^w + 7 (E^q B^w) B_0], \\ M &= \kappa [-4 (E^q E^w) B_0 + 7 (E^q B_0) E^w + 7 (E^w B_0) E^q]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Приведем здесь окончательную формулу для интенсивности рассеяния волны (3.36), (3.37), распространяющейся по направлению магнитного поля B_0 :

$$Q^R = \frac{256\pi^2 q^2}{3} \omega_0^2 \kappa^2 B_0^2 E_0^2 = \frac{16}{3} \left(\frac{\alpha}{45\pi} \right)^2 \frac{q^2 \omega_0^2}{c} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^2. \quad (3.42)$$

Для ультрарелятивистских частиц, движущихся по магнитному полю навстречу волне, получаем

$$Q^R = \frac{128}{3} \left(\frac{\alpha}{45\pi} \right)^2 \frac{q^2 \omega_0^2}{c} \left(\frac{E_0}{E_c} \right)^2 \left(\frac{B_0}{B_c} \right)^2 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^4. \quad (3.43)$$

Максимальная частота излучается в направлении, близком к скорости частицы и равна $\omega_{\max} \approx 4\omega_0 \left(\frac{\mathcal{E}}{Mc^2} \right)^2$.

*) Заметим, что оценку (3.40) можно получить из (3.39), положив в одном из множителей $(E_0/E_c)^2$ в (3.39) поле E_0 равным полю заряда q на расстоянии $r_c \sim \hbar/mc$ от его центра (тогда $E_0^2/E_c^2 \sim (q^2/\hbar c) \alpha$), а также учесть, что размер площади, ответственной за рассеяние, в $(r_0/\lambda_0)^2 \sim (\hbar \omega_0/mc^2)^2$ раз меньше. Так качественно получаются два малых множителя в (3.40).

Подчеркнем, что формулы (3.42) и (3.43) не содержат интегрирования по большим k и поэтому в рамках сделанных предположений являются точными.

2) Перейдем к рассмотрению переходного рассеяния гравитационных волн в электромагнитные. Необходимость возникновения переходного рассеяния гравитационных волн с их превращением в электромагнитные следует хотя бы из того, что при наличии гравитационного поля уравнения Максвелла становятся нелинейными. Конкретно, уравнение для тензора поля F^{ik} , возбуждаемого током $j^{a,i}$ в присутствии гравитационного поля имеет, как известно (см., например, ⁹⁹), вид

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_k} \sqrt{-g} F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^{a,i}, \quad (3.44)$$

где $g = |g_{ik}|$ — определитель метрического тензора g_{ik} , описывающего гравитационное поле.

Уравнение (3.44) можно записать в виде макроскопических уравнений Максвелла, в котором тензоры диэлектрической и магнитной проницаемости определяются гравитационным полем (см. ⁹⁹ § 90). Однако уже из (3.44) ясно, что модуляция метрики, возникающая, например, при распространении гравитационной волны, должна повлечь за собой излучение электромагнитных волн даже в случае статического невозмущенного электромагнитного поля (например, поля покоящегося заряда). Это можно строго описать как модуляцию эффективной диэлектрической проницаемости гравитационной волной *). Отметим, что если в среде имело смысл отдельно рассматривать рассеяние на покоящемся и движущемся заряде, поскольку существовала выделенная система отсчета, а именно система отсчета, в которой среда покоится, то в вакууме все системы эквивалентны. Поэтому можно, не нарушая общности, ограничиться рассеянием на покоящемся заряде (или другом статическом источнике). Для более сложных невозмущенных полей (например, создаваемых двумя зарядами) это уже неверно. Мы начнем здесь с обсуждения простейшего случая статического поля покоящегося заряда (более подробно, особенно о рассеянии на других источниках — магнитных и электрических диполях, — см. ⁴¹, а также ^{100, 101}).

Если гравитационная волна является слабой, то она может быть описана следующим возмущением метрики:

$$h^{il} = g^{il} - g_0^{il} = \sum_{s=1,2} e_s^{il} h_0 \sin(\omega_0 t - k_0 z), \quad k_0 = \frac{\omega_0}{c},$$

$$g_0^{il} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \end{pmatrix},$$

$$e_1^{il} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & -1 \end{pmatrix}, \quad e_2^{il} = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ 1, & 0 \end{pmatrix}, \quad e_1^{il} = e_2^{il} = 0 \quad \text{при } i, l = 0, 3. \quad (3.45)$$

Считая, что $h_0 \ll 1$, возмущение электромагнитного поля, связанное с действием гравитационной волны, можно записать как дополнительный ток

*) Сказанное не представляется, видимо, достаточно широко известным, как это ясно на примере работы ¹⁰². В ¹⁰² рассмотрено излучение электромагнитных волн и появление магнитного момента в случае неподвижного заряда, находящегося в центре инерции двух одинаковых вращающихся масс. При этом в ¹⁰² упомянутые эффекты (излучение и появление момента) считаются не имеющими классических аналогов, между тем как речь идет о типичных аналогах переходного рассеяния в среде ⁴¹.

$\delta j_{k, \omega}$ в уравнениях Максвелла

$$\left(k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_{ij}^{(0)} \right) E_{j, k, \omega} = \frac{4\pi i \omega}{c^2} (j_{i, k, \omega} + \delta j_{i, k, \omega}),$$

где, для общности, считается присутствующей среда (тензор проницаемости которой $\varepsilon_{ij}^{(0)}$). Компоненты дополнительного тока как функции \mathbf{r} и t равны

$$\left. \begin{aligned} \delta j_x &= -\frac{c}{4\pi} \left[-\frac{\partial}{\partial z} h (B_x - B_y) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^{(0)} h (E_x + E_y) \right], \\ \delta j_y &= -\frac{c}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial z} h (B_x + B_y) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon^{(0)} (E_x - E_y) \right], \\ \delta j_z &= -\frac{c}{4\pi} \left[\frac{\partial}{\partial x} h (B_x - B_y) - \frac{\partial}{\partial y} h (B_x + B_y) \right], \end{aligned} \right\} \quad (3.46)$$

$$\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon^{(0)} \delta_{ij},$$

где $h = h_0 \sin(\omega_0 t - k_0 z)$, а в качестве полей \mathbf{E} и \mathbf{B} нужно выбрать невозмущенные значения (например, для покоящегося заряда $\mathbf{E} = q\mathbf{r}/r^3$, $\mathbf{B} = 0$). Простоты ради здесь считается, что тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}^{(0)}$ для частоты, близкой к ω_0 , соответствует изотропному случаю $\varepsilon_{ij}^{(0)} = \varepsilon^{(0)} \delta_{ij}$ и отсутствует пространственная дисперсия. В (3.46) магнитная индукция \mathbf{B} может быть выражена через напряженность электрического поля, $\frac{\omega}{c} \mathbf{B}_{k, \omega} = [\mathbf{k} \mathbf{E}_{k, \omega}]$, причем ток (3.46) можно записать в виде

$$\frac{4\pi i \omega}{c^2} \delta j_{i, k, \omega} = \frac{\omega^2}{c^2} \int \varepsilon_{ij}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_0, \omega_0) h_{\mathbf{k}_0, \omega_0} E_{j, \mathbf{k}-\mathbf{k}_0, \omega-\omega_0} d\mathbf{k}_0 d\omega_0. \quad (3.47)$$

Из этого выражения уже видно полное соответствие рассматриваемого эффекта переходному рассеянию (см. (3.13)). Выписывать здесь конкретные выражения для $\varepsilon_{ij}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_0, \omega_0)$ мы не будем, они легко находятся из (3.46). Приведем сразу выражение для мощности электромагнитной волны при рассеянии гравитационной волны на покоящемся заряде, усредненное по двум возможным поляризациям гравитационной волны ⁴¹:

$$Q^R = \int \frac{\omega_0^2 h_0^2 q^2 \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta) (\varepsilon^{(0)}(\omega_0))^{3/2} \sin \theta d\theta}{4c \left[\left(\cos \theta - \frac{1}{V \varepsilon^{(0)}(\omega_0)} \right)^2 + \sin^2 \theta + \frac{\omega_p^2 c^2}{v_{Te}^2 \omega_0^2 \varepsilon^{(0)}(\omega_0)} \right]^2}, \quad (3.48)$$

$$\varepsilon^{(0)}(\omega_0) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2};$$

здесь учтена экранировка поля заряда, возникающая, если он помещен в плазму (в вакууме $\varepsilon^{(0)} = 1$). Однако полное сечение рассеяния зависит от этой экранировки только логарифмически. Так, в вакууме

$$Q^R = \frac{\omega_0^2 h_0^2 q^2}{4c} \ln \Lambda_g, \quad (3.49)$$

$$\ln \Lambda_g = \ln \frac{2}{\theta_{\min}^2} - \frac{5}{4} \approx \ln \frac{0,87}{\theta_{\min}^2}.$$

Для экранировки в плазме $\theta_{\min}^2 \approx \omega_p^2 c^2 / v_{Te}^2 \omega_0^2 \varepsilon^{(0)}(\omega_0)$ (при условии, что $\omega_0 \gg c \omega_p / v_{Te} \sqrt{\varepsilon^{(0)}(\omega_0)}$). В вакууме значение θ_{\min} может определяться расстоянием до других частиц (рассеивателей) или кривизной пространства-времени, вызванной присутствием гравитационной волны. В последнем случае, видимо, $\theta_{\min}^2 \sim h^2$ (выше θ_{\min} — наименьший угол рассеяния, учитываемый в (3.48)).

Выразив h^2 через средний по времени поток энергии в среднем неполяризованных гравитационных волн $F_g = c^3 \omega_0^2 h_0^2 / 16\pi G$, можно получить сечение рассеяния в виде ⁴¹

$$Q^R = \sigma_g F_g, \quad \sigma_g = \frac{4\pi G q^2}{c^4} \ln \Lambda_g = 4\pi l_g^2 \frac{q^2}{\hbar c} \ln \Lambda_g, \\ l_g = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1,6 \cdot 10^{-33} \text{ см.} \quad (3.50)$$

Очевидно, что рассматриваемый процесс является чисто классическим. Процесс, противоположный рассматриваемому (превращение электромагнитной волны в гравитационную), рассматривался также в ¹⁰¹ методом S -матрицы (см. также ^{103, 104}). Ясно, однако, что для классического эффекта использование сложных квантовых методов является в данном случае излишним. Отличие обратного процесса от рассмотренного здесь состоит в различии начального и конечного состояний и в деталях суммирования по поляризациям рассеянных волн. Поскольку рассеянные волны в первом случае являются электромагнитными, а во втором гравитационными, то результаты отличаются на численные множители порядка единицы.

В случае переходного рассеяния гравитационных волн на магнитном поле нужно в (3.46) подставить поле магнитного диполя ^{105 *}

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{3\mu(\mu\mathbf{r}) - \mu r^2}{r^5} + 4\pi\mu\delta(\mathbf{r}), \\ \mathbf{B}_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{1}{2\pi^2} \left(\mu - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\mu)}{k^2} \right) \delta(\omega), \quad \mathbf{E} = 0. \quad (3.51)$$

Для мощности переходного рассеяния гравитационных волн в электромагнитные на магнитном диполе получаем

$$Q^R(\theta) = \frac{\mu^2 \omega_0^4 h_0^2}{16c^2} (1 + \cos^2 \theta) \left(\cos^2 \theta_0 \sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin^2 \theta_0 (5 + \cos^2 \theta - 2 \cos \theta) \right), \\ Q^R = \int Q^R(\theta) \sin \theta d\theta = \frac{9}{20} \frac{\mu^2 \omega_0^4 h_0^2}{c^3} \left(1 - \frac{7}{9} \cos^2 \theta_0 \right), \quad (3.52)$$

где θ_0 — угол между \mathbf{k}_0 и μ . Этот тип конверсии гравитационных волн в электромагнитные мог бы в принципе представить интерес в применении к пульсарам, обладающим большим магнитным дипольным моментом. Однако соответствующие эффекты малы ввиду слабости гравитационного взаимодействия, относительно небольшой величины вариации метрики h в гравитационных волнах (которые могут, по разумным оценкам, существовать в космосе вблизи пульсаров) и удаленности пульсаров от Земли.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Уже во введении мы подчеркивали, что переходное излучение и переходное рассеяние представляют собой явления весьма общего и, так сказать, универсального характера. Можно надеяться, что результаты, изложенные в гл. 2 и 3, в достаточной мере подкрепляют этот тезис. Дополнительно можно указать на ряд задач, которые еще не проанализированы. Так, должно происходить переходное рассеяние рэлеевских и других поверхностных волн на зарядах, расположенных на и вблизи поверх-

*) В ряде учебников можно встретить выражение для $\mathbf{B}(\mathbf{r})$, не содержащее $\delta(\mathbf{r})$. Оно пригодно только вдали от диполя или в случае, когда магнитный диполь составлен из двух магнитных зарядов. В работе ⁴¹ член с $\delta(\mathbf{r})$ не учитывался, т. е. рассматривалась задача о магнитном диполе, образованном двумя магнитными зарядами. Вклад этого члена в переходное рассеяние существен. Переходное рассеяние гравитационных волн, учитывающее этот член, было рассмотрено в работе ¹⁰⁰ методом, отличным от ⁴¹.

ности твердого тела¹⁰⁶. В сверхтекучем гелии (гелии II) могут, как известно, распространяться звуковые волны разных типов (в свободном гелии II речь идет о первом и втором звуках, в пленках распространяется третий звук и в гелии, заполняющем пористый материал, распространяется четвертый звук). В твердом теле могут распространяться поперечные и продольные звуковые волны. Естественно, как в твердом теле, так и в гелии II можно сформулировать различные условия, в которых должно иметь место переходное рассеяние акустического типа (имеется в виду превращение акустических волн одного типа в рассеянные акустические волны другого типа на статических неоднородностях и различного типа возмущениях). Переходное излучение также может иметь место в весьма различных условиях. Мы уже упоминали об аналоге переходного излучения при движении дислокаций³⁷. Эффект типа переходного излучения нужно учитывать и при рассмотрении генерации гравитационных волн в общей теории относительности¹⁰⁷. Естественно упомянуть также о переходном излучении при пересечении зарядом границы двух сред, но с образованием электронно-позитронных пар. Вообще, в принципе переходное излучение может иметь место для полей любого типа с излучением полей любого другого типа.

Практически, однако, основное значение имеют электродинамические задачи, которым и была почти полностью посвящена настоящая статья. К числу таких задач, еще не упомянутых, относится учет поглощения волн в неоднородной плазме, обусловленного процессом, обратным переходному излучению¹⁰⁸. Нужно упомянуть также об излучении и потерях энергии в кристаллах (в частности, при каналировании¹⁰⁹) и в жидких кристаллах¹¹⁰, о переходных эффектах в инвертированных средах¹¹¹ и ряд других (см. ²², ^{112–114}). Интерес представляет, далее, переходное излучение поверхностных волн, которое должно возникать при пролете заряда на или вблизи поверхности двух сред, соприкасающихся по некоторой границе раздела; родственен вопрос о переходном излучении в более общем случае как регулярно, так и статистически неоднородных поверхностей. Мы специально упоминаем об этом классе задач, поскольку исследование поверхности и различных поверхностных явлений приобретает в физике все большую роль. Но если исследование переходного излучения и рассеяния на поверхности — в основном дело будущего, то в физике плазмы и нелинейной электродинамике других сред переходное излучение и рассеяние уже в значительной степени проанализированы. Вместе с тем, это часто делается без понимания связи с общей теорией и даже физическими представлениями о переходном излучении и переходном рассеянии. Именно поэтому в гл. 3 настоящей статьи и особенно в ¹¹⁵ мы стремились с различных сторон выявить роль переходного излучения и рассеяния в физике плазмы. Можно думать, что дальнейшее изучение «переходных эффектов» в плазме и других нелинейных средах составит в ближайшее время главное направление в теории переходного излучения и рассеяния.

Как в физике плазмы, так и в целом ряде других областей уже давно осознано значение «черенковской идеологии» и широко используется соответствующий «язык». Мы полагаем, что овладение «идеологией» и «языком» теории переходного излучения и переходного рассеяния окажется столь же полезным, не говоря уже о том, что этой теорией приходится пользоваться для анализа целого ряда уже известных задач.

Пользуемся возможностью поблагодарить Б. М. Болотовского и Л. П. Питаевского за замечания, сделанные ими при чтении рукописи.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Тамм И. Е., Франк И. М.— ДАН СССР, 1937, т. 14, с. 107.
2. Франк И. М.— В кн. Проблемы теоретической физики: Сборник памяти И. Е. Тамма.— М.: Наука, 1972.— С. 350.
3. Гинзбург В. Л. Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1975.
4. Тамм И. Е.— УФН, 1959, т. 68, с. 387; Франк И. М.— Ibid., с. 397; Черенков П. А.— Ibid., с. 377.— (Нобелевские лекции.)
5. Болотовский Б. М.— УФН, 1957, т. 62, с. 201; 1961, т. 75, с. 295.
6. Желли Дж. Черенковское излучение.— М.: ИЛ, 1960.
7. Зредов В. П. Излучение Вавилова — Черенкова и его применение в физике высоких энергий.— М.: Атомиздат, 1968.
8. Ландау Л. Д.— ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 574.— То же: Собрание трудов.— М.: Наука, 1969.— Т. 2, с. 7.
9. Heaviside O.— Phil. Mag., 1889, v. 27, p. 324.
10. Lord Kelvin— Ibid., 1901, v. 2, p. 1.
11. Sommerfeld A.— Göttingen Nachr., 1904, S. 99, 363; 1905, S. 201.— См. также: Зоммерфельд А. Оптика — М.: ИЛ, 1953.— § 47.
12. Einstein A.— Ann. d. Phys., 1907, Bd. 23, S. 371.— См. также: Эйнштейн А. Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1965.— Т. 1, с. 53.
13. Паули В. Теория относительности.— М.: Гостехиздат, 1947.— § 6.
14. Гинзбург В. Л.— ЖЭТФ, 1972, т. 62, с. 173.
15. Эйрман В. Я.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1972, т. 15, с. 634; Астрофизика, 1972, т. 8, с. 609.
16. Болотовский Б. М., Гинзбург В. Л.— УФН, 1972, т. 106, с. 577; в кн. Эйнштейновский сборник. 1972.— М.: Наука, 1974.— С. 212.
17. Гинзбург В. Л., Франк И. М.— ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 15.— Несколько сокращенный вариант статьи: J. Phys. USSR 1945, v. 9, p. 353.
18. Гинзбург В. Л.— Природа, 1975, № 8, с. 56.
19. Гарибян Г. М.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 627; 1960, т. 39, с. 332.
20. Барсуков К. А.— ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1106.
21. Франк И. М.— УФН, 1959, т. 68, с. 397.
22. Библиографический указатель работ по переходному излучению 1946—1976 гг.— Ереван: Ереванский физический ин-т, 1977.
23. Франк И. М.— УФН, 1961, т. 75, с. 231.
24. Тер-Микаэлян И. Л. Влияние среды на электромагнитные процессы при высоких энергиях— Ереван: Изд-во АН Арм. ССР, 1969.— Английский перевод: Ter-Mikaelian I. L. High Energy Electromagnetic Processes in Condensed Media.— N. Y.: J. Wiley and Sons, 1972.
25. Yuan L. C. L.— In: Intern. Conference on Instrumentation for High Energy Physics.— Frascati: 1973.— P. 334; BNL Inform. Report.— 1976.
См. также: Cherry M. L.— Phys. Rev. Ser. D, 1978, v. 17, p. 2245.
26. Арутюнян Ф. Р., Франгян А. Ф. Препринт ИФИ-75-22.— Ереван: Институт физических исследований АН Арм.ССР, 1975.
27. Hartmann G., Müller D., Prince T.— Phys. Rev. Lett., 1977, v. 38, p. 1368.
28. Франк И. М.— УФН, 1965, т. 87, с. 89; Acta Phys. Pol. Ser. A, 1970, v. 38, p. 655.
29. Басс Ф. Г., Яковенко В. М.— УФН, 1965, т. 86, с. 189.
30. Гарибян Г. М. Препринты ЕФИ-ТФ 13(70), 1970; ЕФИ-27(73), 1973; в кн. Труды Международной конференции по аппаратуре в физике высоких энергий.— Дубна: 1970.— Т. 2, с. 509; In: Intern. Conference on Instrumentation for High Energy Physics.— Frascati: 1973.— P. 329.
31. Гинзбург В. Л., Франк И. М.— ДАН СССР, 1947, т. 56, с. 699.
32. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В.— УФН, 1966, т. 88, с. 209; 1968, т. 94, с. 377.
33. Гинзбург В. Л.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1973, т. 16, с. 512.
34. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 132.
35. Давыдов В. А.— Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР), 1976, № 4, с. 3; — Вестн. Моск. ун-та. Сер. «Физика и астрономия», 1977, т. 18, № 6, с. 64.
36. Маева Г. М.— Кр. сообщ. физ. (ФИАН СССР), 1977, № 2, с. 21.
37. Нацик В. Д.— Письма ЖЭТФ, 1968, т. 8, с. 324.
Нацик В. Д., Бурканов А. Н.— ФТТ, 1972, т. 14, с. 1289.
Бойко В. С., Гарбер Р. И.,
Кившик В. Ф., Кривенко Л. Ф.— ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 708.
38. Докучаев В. П.— ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 595.
39. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.— ЖЭТФ, 1978, т. 74, с. 1621.
40. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.— ЖЭТФ, 1973, т. 65, с. 1818.

41. Гинзбург В. Л., Цытович В. Н.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1975, т. 18, с. 173.— То же: Sov. Phys.— Radio Phys. and Quantum Electron, 1975, v. 18, p. 125.
42. Барсуков К. А., — ЖЭТФ, 1959, т. 37, с. 1106.
43. Болотовский Б. М., Плис А. И. Переходное излучение на границе одноосного кристалла: Препринт ФИАН СССР № 76.— Москва: 1973.
44. Пафомов В. В.— Труды ФИАН СССР, 1961, т. 16, с. 94.
45. Гинзбург В. Л.— ЖЭТФ, 1940, т. 10, с. 608.
46. Ерохин Н. С., Новиков В. Е.— Укр. физ. ж., 1973, т. 18, с. 1423.
47. Цытович В. Н.— ЖТФ, 1961, т. 31, с. 766.
48. Цытович В. Н.— Ibid., с. 923.
49. Цытович В. Н.— ЖЭТФ, 1962, т. 42, с. 457.
50. Аматуни А. Ц. Корхмазян Н. А.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1011.
51. Галеев А. А.— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1335.
52. Euler H.— Ann. d. Phys., 1936, Bd. 26, p. 398.
53. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория поля. Ч. 2.— М.: Наука, 1971.
54. Tsai Wu-yang, Erber T.— Phys. Rev. Ser. D, 1972, v. 12, p. 1132. Erber T.— Rev. Mod. Phys., 1966, v. 38, p. 626.
55. Adler S. L.— Ann. Phys. (N.Y.), 1971, v. 67, p. 599. Баталин И. А., Шабад А. Е.— ЖЭТФ, 1971, т. 60, с. 895. Shabad A. E.— Ann. Phys. (N.Y.), 1975, v. 90, p. 166.
56. Гинзбург В. Л. Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
57. Ритус В. И.— ЖЭТФ, 1969, т. 57, с. 2176; Препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе.— Ленинград: 1971.
58. Ginzburg V. L., Zheleznyakov V. V.— Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 1975, v. 13, p. 511. Manchester R. N., Taylor J. H. Pulsars.— San Francisco: H. Freeman and Co., 1977.
59. Novick R., Weisskopf M. C., Angel J. R. P., Sutherland P. G.— Astroph. Journ. (Lett.), 1977, v. 215, p. L117. Гнедин Ю. Н., Павлов Г. Г., Шибанов Ю. А.— Письма Астрон. ж., 1978, т. 4, с. 214; Письма ЖЭТФ, 1978, т. 27, с. 325.
60. Коровина Л. И., Шабад А. Е.— ЖЭТФ, 1974, т. 67, с. 1032.
61. Цытович В. Н. Теория турбулентной плазмы.— М.: Атомиздат, 1971; Нелинейные эффекты в плазме.— М.: Наука, 1967.
62. Бломберген Н. Нелинейная оптика.— М.: Мир, 1966.
63. Айвазян Ю. М., Болотовский Б. М., Мергелян О. С.— В кн. Труды Международного симпозиума по рентгеновскому переходному излучению.— Ереван: апрель 1977.
64. Тамойкин В. В.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1971, т. 14, с. 285.
65. Барсуков К. А., Болотовский Б. М.— Ibid., 1964, т. 7, с. 291. Файнберг Я. Б., Хижняк Н. А.— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 883.
66. Fabjan G. W., Straeuzinski W.— Phys. Lett. Ser. B, 1975, v. 57, p. 483.
67. Dugan L.— Phys., Rev., Ser. D, 1975, v. 11, p. 89.
68. Басс Ф. Г.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1959, т. 2, с. 1015. Капица С. П.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1367.
69. Цытович В. Н.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1978.
70. Гайлитис А. К., Цытович В. Н.— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1485.
71. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И.— ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 2234.
72. Кадомцев Б. Б.— Турбулентность плазмы.— В кн. Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1964.— Т. 4, с. 188.
73. Галеев А. А., Сагдеев Р. З.— В кн. Вопросы теории плазмы.— М.: Атомиздат, 1973.— Т. 7, с. 3.
74. Davidson R. N. Methods in Nonlinear. Plasma Theory.— N.Y.; Lnd.: Academic Press, 1969.
75. Kaplan S. A., Tsytovich V. N., Astrophys. and Space Sci., 1969, v. 3, p. 431.
76. Каплан С. А., Цытович В. Н. Плазменная астрофизика.— М.: Наука, 1972.
77. Гайлитис А., Цытович В. Н.— ЖЭТФ, 1964, т. 46, с. 1726.
78. Горбунов Л. М., Мавосян Г. Г.— Изв. вузов. Сер. «Радиофизика», 1977, т. 20, с. 679.
79. Брауде С. Я.— УФН, 1976, т. 120, с. 136.
80. Ситенко А. Г. Флуктуации и нелинейное взаимодействие волн в плазме.— Киев: Наукова думка, 1977.
81. Веденов А. А., Рудаков Л. И.— ДАН СССР, 1964, т. 159, с. 767. Гайлитис А.— Изв. АН Латв. ССР. Сер. физ.— техн., 1965, т. 4, с. 13.

82. Tsyto vich V. N. — In: Plasma Physics, Nonlinear Theory and Experiments: Proc. of Nobel Foundation Symposium. — Amsterdam: Plenum Press, 1976. — P. 166.
83. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — Физ. плазмы, 1975, т. 1, с. 10.
84. Хакимов Ф. Х., Цытович В. Н. — ЖЭТФ, 1976, с. 70, с. 1785.
85. Bruckner K. A. — Цитир. в ⁸² сб. — P. 9.
86. de Kluiver H. — Rijnhuizen Report 77-106 Fom Inst. voor Plasmafysica. — Jutphaas, Nederland: 1977.
87. Rutgers W. R., de Kluiver H. — Phys. Lett. Ser. A, 1976, v. 58, p. 99.
88. Галеев А. А., Сагдеев Р. З., Шапиро В. Д., Шевченко В. И. — Письма ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 25.
89. Toshio T., Itoh K., Inoue S., Nishikawa K. — J. Phys. Soc. Japan, 1977, v. 42, p. 2006.
90. Ibragimov I. A., Kocharov G. E. — In: Proc. of Intern. Conference on Cosmic Rays. — Bulgaria: 1977.
91. Агранович В. М., Гинзбург В. Л. Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов. — М.: Наука, 1965, 2-е изд. — М.: Наука, 1978. — Во 2-ом изд. вместо § 15.1 см. § 16.2.
92. Цытович В. Н. — Труды ФИАН СССР, 1973, р. 66, с. 176.
93. Акопян А. В., Цытович В. Н. — а) Физ. плазмы, 1975, т. 4, с. 673; б) ЖЭТФ, 1976, т. 71, с. 166; ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 1824; In: Proc. of 13th Intern Conference on Phenomena in Ionized Gases. Contr. parers. Part. II. — Berlin, GDR: 1977. — P. 917.
94. Берестецкий В. Б., Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Релятивистская квантовая теория. Ч. 1. — М.: Наука, 1968. — С. 19.
95. Canuto V., Chiu H. Y. — Phys. Rev., 1968, v. 173, p. 1229.
96. Melrose D. B. — Astrophys. and Space Sci., 1972, v. 18, p. 267.
97. Акопян А. В., Цытович В. Н. — Астрофизика, 1977, т. 13, с. 717.
98. Constantini V., Pistoni G., De Tollis B. — Nuovo Cimento, Ser. A, 1966, v. 46, p. 684.
99. Раратрасос Р., Морк К. — Phys. Rept. 1975, v. 2C, No. 21, p. 81.
100. De Tollis B., Lusignoli M. — Nuovo Cimento. Ser. A, 1976, v. 38, p. 227.
101. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1973.
102. De Logi W. K., Mickelson A. R. — Technical Report No. 84. — Calif. Inst. of Technol., Antenna Lab.: 1977; Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 2915. См. также: Papini G., Valluri S. R. — Can. J. Phys., 1978, v. 56, p. 801.
103. Мицкевич В. В. Физические поля в общей теории относительности. — М.: Наука, 1969, с. 246.
104. Chitre D. M., Price R. H., Sandberg V. D. — Phys. Rev. Lett., 1973, v. 31, p. 1018. См. также: Matzner R. A., Sandberg V. D. — Phys. Rev. Ser. D, 1977, v. 16, p. 2939.
105. Boughn S. — Phys. Rev. Ser. D, 1975, v. 11, p. 248.
106. Papini G., Valluri S. R. — Can. J. Phys., 1975, v. 53, p. 2306.
107. Джексон Дж. Классическая электродинамика. — М.: Мир, 1965.
108. Ginzburg V. L. — In: Theory of Light Scattering in Condensed Matter: Proc. of the First Joint USA — USSR Symposium. — N.Y.; Lnd.: Plenum Press, 1976. — p. 369.
109. Thorne K. S., Kovacs S. J. — Astrophys. J., 1975, v. 200, p. 245; 1977, v. 217, p. 252.
110. Эйдман В. Я. — ЖЭТФ, 1962, т. 43, с. 1419.
111. Базылев В. А., Жеваго Н. К. — ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 1967.
112. Беляков В. А., Дмитренко В. Е., Орлов В. П. — Письма ЖТФ, 1975, т. 1, с. 978.
113. Гаврилов В. П., Коломенский А. А. — Письма ЖЭТФ, 1971, т. 14, с. 617; 1972, т. 16, с. 29.
114. Гарибян Г. М., Ян Ши. — ЖЭТФ, 1971, т. 61, с. 930; 1972, т. 63, с. 1198; Письма ЖЭТФ, 1976, т. 24, с. 269.
115. Жеваго Н. К. — ЖЭТФ, 1977, т. 72, с. 428.
116. Арутюнян В. М., Оганесян С. Г. — Ibid., с. 466.
117. Ginzburg V. L., Tsyto vich V. N. — Phys. Rept. Phys. Lett. Sec. C., 1978, No. 10.
118. Франк И. М. — Переходное излучение магнитного заряда: Препринт ОИЯИ Р4-11777. — Дубна: 1978.
119. Linhard F. — Mat.-Fys. Medd., Vid. Selsk., 1954, Bd. 28, S. 8.