1978 г. Октябрь *Том 126, вып. 2*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

537.21

ОБ ОДНОЙ БЕСКОНЕЧНОСТИ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФЛУКТУАЦИЙ В НЕВЫРОЖДЕННОМ ЭЛЕКТРОННОМ ГАЗЕ

А. А. Андронов, Ю. А. Рыжов

СОДЕРЖАНИЕ

1. ВВЕДЕНИЕ

Ниже обсуждаются некоторые особенности пространственно-временных флуктуаций в невырожденном идеальном газе. Оказывается, что здесь квантовые флуктуации могут быть существенны в случаях, которые представляются во всех отношениях классическими.

2. БЕСКОНЕЧНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ КУЛОНОВСКОГО ПОЛЯ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

а) В классической теории теплового излучения хорошо известна так называемая «ультрафиолетовая катастрофа», послужившая Планку отправным пунктом для формулировки квантового закона излучения. Эта «катастрофа», как известно, состоит в том, что при равномерном распределении энергии по степеням свободы полная энергия поперечного (электромагнитного) поля $W^{\text{tr}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} W_\omega^{\text{tr}}\, d\omega$ оказывается бесконечной из-за бесконечного числа осцилляторов поля. В известном смысле более сильная «катастрофа» имеется в классической теории тепловых флуктуаций в электронном газе. Именно, здесь оказывается бесконечной уже *спектральная* плотность энергии продольного (кулоновского) поля W_ω^l. Эта расходимость спектральной плотности энергии кулоновского поля связана, как мы увидим, с точечностью электрона. Ее анализ и устранение (в той или иной форме), на наш взгляд, достаточно интересны и поучительны.

б) Начнем с формального обсуждения формул стандартной теории тепловых флуктуаций, связывающих коорреляционную функцию электрического поля $\langle E_i(\mathbf{r}_1)\, E_i(\mathbf{r}_2)\rangle_\omega$ на частоте ω с диэлектрической проницаемостью. Для среды с проницаемостью $\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij}$ и $\mu = 1$ можно записать [1,2]

$$\left.\begin{aligned} &\langle E_i(\mathbf{r}_1)E_i(\mathbf{r}_2)\rangle_\omega = \langle E_i^l(\mathbf{r}_1)E_i^l(\mathbf{r}_2)\rangle_\omega + \langle E_i^{\mathrm{tr}}(\mathbf{r}_1)E_i^{\mathrm{tr}}(\mathbf{r}_2)\rangle_\omega = \\ &\qquad = \frac{\theta}{2\pi^3\omega}\int d\mathbf{k}\left[\frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{|\varepsilon(\omega)|^2} + 2k_0^4\frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{|k^2 - k_0^2\varepsilon(\omega)|^2}\right]e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}, \\ &\langle E_i^l(\mathbf{r}_1)E_i^l(\mathbf{r}_2)\rangle_\omega = \frac{4\theta}{\omega}\frac{\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)}{|\varepsilon(\omega)|^2}\delta(\mathbf{R}), \quad \mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \\ &\theta = \frac{\hbar\omega}{2}\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}; \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

T — температура, $\hbar$ — квантовая постоянная, $k_0 = \omega/c$. Корреляционная функция электрического поля представлена суммой корреляционных функций продольного и поперечного полей. Мы видим, что спектральная плотность энергии продольного поля $\langle (E^l)^2\rangle_\omega$ оказывается бесконечной.

Обычно явно или неявно подразумевается [1], что учет пространственной дисперсии, т. е. учет нелокальной связи между током и электрическим полем (которая проявляется, например, в том, что диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ зависит не только от частоты ω, но и от волнового вектора $\mathbf{k}$ [2]) должен приводить к «размазыванию» δ-образной зависимости корреляционной функции от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ и устранению расходимости $\langle (E^l)^2\rangle_\omega$.

в) Рассмотрим, однако, корреляционную функцию кулоновского поля в классическом электронном газе. При учете пространственной дисперсии корреляционная функция продольного поля имеет вид [2,3]

$$\langle E_i^l(\mathbf{r}_1)E_i^l(\mathbf{r}_2)\rangle_\omega = \frac{\theta}{2\pi^3\omega}\int d\mathbf{k}\,\frac{\operatorname{Im}\varepsilon^l(\omega, k)}{|\varepsilon^l(\omega, k)|^2}e^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}, \tag{2}$$

здесь $\varepsilon^l(\omega, k)$ — продольная диэлектрическая проницаемость изотропной среды с учетом пространственной дисперсии. При $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \to 0$ мы можем учитывать лишь бесстолкновительные потери в диэлектрической проницаемости (потери, определяющие затухание Ландау продольных волн в электронном газе). Если $\omega \gg \omega_0$, $\omega_0 = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$, то можно пренебречь отличием $|\varepsilon^l(\omega, k)|$ от единицы в знаменателе подынтегрального выражения в (2). Подставляя в (2) известное выражение для $\operatorname{Im}\varepsilon^l(\omega, k)$ невырожденного электронного газа [1-3]

$$\operatorname{Im}\varepsilon^l(\omega, k) = \frac{\pi\omega_0^2 m^2\omega}{k^3 T\sqrt{2\pi m T}}\exp\left(-\frac{m\omega^2}{2k^2 T}\right), \tag{3}$$

при $\hbar\omega \ll T$ (когда $\theta \approx T$) и $v_T/\omega R \gg 1$ имеем *)

$$\langle E_i^l(\mathbf{r}_1)E_i^l(\mathbf{r}_2)\rangle_\omega = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\frac{e^2 N}{v_T}\ln\frac{v_T}{\omega R}, \qquad \omega \gg \omega_0; \tag{4}$$

здесь $v_T = (2T/m)^{1/2}$ — тепловая скорость электронов, N — концентрация электронного газа. Таким образом, корреляционная функция продольного теплового поля логарифмически расходится при $R \to 0$ и спектральная плотность энергии тепловых флуктуаций кулоновского поля $W_\omega^l = (8\pi)^{-1}\langle (E^l)^2\rangle_\omega$ оказывается бесконечной. Обсуждение этой бесконечности и является предметом настоящей работы.

Следует отметить, что расходимость полной энергии флуктуаций кулоновского поля $W^l = \int_{-\infty}^{+\infty} W_\omega^l\,d\omega$, связанная с точечностью электронов, хорошо известна. Так, еще в работе Хольтсмарка [4], написанной в 1919 г., было отмечено, что второй момент распределения $P(E)$ флуктуаций электрического поля (распределения Хольтцсмарка [4-6]), определяющий, например, форму линии излучения атома при штарковском расщеплении, расходится.

*) При $\omega \lesssim \omega_0$ при вычислении корреляционной функции нельзя считать $|\varepsilon| = 1$. Если $\omega \ll \omega_0$, то, взяв $\varepsilon \approx 1 + (\omega_0^2/k^2 v_T^2)$, получим

$$\langle E_i^l(\mathbf{r}_1)E_i^l(\mathbf{r}_2)\rangle_\omega \approx \frac{8e^2 N}{\sqrt{\pi}\,v_T}\ln\frac{v_T}{\omega_0 R}.$$

г) Обсудим теперь вопрос об измерении спектральной плотности энергии продольного электрического поля в электронном газе. Ее можно измерить с помощью малой дипольной антенны, состоящей из двух линейных проводников длины L. Квадрат спектральной э. д. с. $\mathscr{E}_\omega^2$, наводимой на антенну, и будет мерой величины W_ω^l. Именно,

$$\langle (E^l)^2\rangle_\omega = 3\mathscr{E}_\omega^2 L^{-2}. \tag{5}$$

Э. д. с., возникающая в малом диполе, «погруженном» в электронный газ, является фактически э. д. с., обусловленной дробовым эффектом от точечных электронов, пролетающих вблизи диполя. Расчет э. д. с. может быть произведен стандартными методами [7] и здесь мы приведем лишь результат [7] *):

$$\mathscr{E}_\omega^2 = \frac{4}{3\pi^{3/2}}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{1}{\omega L}\left(\frac{\omega L}{v_T}\right)^3 T \ln\frac{v_T}{\omega L}, \tag{5a}$$

$$8\pi W_\omega^l = \frac{8}{\sqrt{\pi}}\frac{e^2 N}{v_T}\ln\frac{v_T}{\omega L}, \qquad \omega \gg \omega_0. \tag{5б}$$

Таким образом, усредняющее действие диполя длины L приводит к конечной величине измеряемой спектральной плотности W_ω^l. Однако результат существенно зависит от длины антенны и возрастает, когда размер антенны уменьшается. Последнее и является прямым следствием точечности электронов.

3. КВАНТОВЫЕ ФЛУКТУАЦИИ КУЛОНОВСКОГО ПОЛЯ

а) Формально бесконечность величины W_ω^l связана с тем, что $\operatorname{Im}\varepsilon^l(\omega, k)$ (затухание Ландау) оказывается величиной слишком большой для фурье-компонент поля с большими k. В то же время затухание Ландау является единственным фундаментальным механизмом, обеспечивающим передачу энергии поля частицам при больших k. Поэтому устранение расходимости в W_ω^l хорошо бы получить, оставаясь в рамках механизма затухания Ландау. Такая возможность действительно имеется и заключается в учете конечности кванта действия $\hbar$. При этом законы сохранения импульса и энергии в процессах взаимодействия $\mathbf{k}$-компоненты поля и электронов автоматически приводят к уменьшению затухания при больших $\mathbf{k}$. При $\hbar \neq 0$ диэлектрическая проницаемость невырожденного равновесного электронного газа может быть получена из общих формул (см., например, [2]):

$$\left.\begin{aligned}
&\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \frac{\omega_0^2\beta^2}{2\sqrt{2\pi}\,\omega^2\gamma}\left[I_+(\beta+\gamma) - I_+(\beta-\gamma)\right],\\
&\omega_0^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \qquad \beta = \frac{\omega}{k}\sqrt{\frac{m}{T}}, \qquad \gamma = \frac{\hbar k}{\sqrt{4mT}},\\
&I_+(x) = 2\sqrt{2\pi}\,F\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - i\pi e^{-x^2/2}, \qquad F(x) = e^{-x^2}\int_0^x e^{u^2}\,du.
\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Отсюда, например, для действительных ω и k

$$\operatorname{Re}\varepsilon^l(\omega, k) = 1 + \frac{\omega_0^2\beta^2}{\sqrt{2}\,\omega^2\gamma}\left[F\left(\frac{\beta+\gamma}{\sqrt{2}}\right) - F\left(\frac{\beta-\gamma}{\sqrt{2}}\right)\right], \tag{6a}$$

$$\operatorname{Im}\varepsilon^l(\omega, l) = \frac{2\pi\omega_0^2 m^2}{\hbar k^3\sqrt{2\pi m T}}\operatorname{sh}\frac{\hbar\omega}{2T}\exp\left[-\frac{1}{2mT}\left(\frac{\hbar^2 k^2}{4} + \frac{m^2\omega^2}{k^2}\right)\right]. \tag{6б}$$

Таким образом, $\operatorname{Im}\varepsilon^l(\omega, k)$ экспоненциально стремится к нулю как при $k \to 0$, так и при $k \to \infty$. Последнее связано с тем, что при $k \to \infty$ законы сохранения энергии и импульса при поглощении кванта $(\omega, \mathbf{k})$: $\hbar\omega + \mathscr{E} = \mathscr{E}'$, $\hbar\mathbf{k} + \mathbf{p} = \mathbf{p}'$ ($\mathscr{E}$ и $\mathbf{p}$ — энергия и импульс электронов) приводят просто к тому, что переходы происходят из состояний с импульсами $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}/2$ в состояния с импульсами $\mathbf{p}' = -\hbar\mathbf{k}/2$, населен-

*) Пользуемся возможностью отметить, что значения сопротивления диполя R, обусловленного дробовым эффектом, приведены в [7] с неправильным численным коэффициентом. Правильное значение:

$$R = \frac{2}{3\pi^{1/2}}\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\frac{1}{\omega L}\left(\frac{\omega L}{v_T}\right)^3 \ln\frac{v_T}{\omega L}$$

(ср. формулу (6.7) в [7]).

ности которых экспоненциально малы при больших значениях k. Подставляя (6б) в (2) и выполняя интегрирование при $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$, $\omega \gg \omega_0$, получим

$$W^l_\omega = \frac{\omega_0^2 m^2 \theta}{\pi (2\pi)^{3/2} (mT)^{1/2}} \frac{\operatorname{sh}(\hbar\omega/2T)}{\hbar\omega} K_0\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right), \tag{7}$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда.

Как видно, учет квантовых эффектов приводит к конечному значению спектральной плотности флуктуаций кулоновского поля в плазме. Сравнивая формулу (7) с (4), мы видим, что роль параметра «обрезания» в выражении для W^l_ω при $\hbar\omega \ll T$ (в классической области) играет длина волны де-Бройля $\lambda_\text{т} = 2\pi\hbar (2\pi m T)^{-1/2}$ для электрона с тепловой скоростью $v_\text{т}$:

$$W^l_\omega \sim \ln \frac{T}{\hbar\omega} \sim \ln \frac{v_\text{т}}{\omega\lambda_\text{т}}. \tag{8}$$

Интересно отметить, что в квантовой области ($\hbar\omega \gg T$) величина W^l_ω не зависит от температуры. Она, таким образом, определяется здесь квантовыми флуктуациями электронов. Ниже мы еще вернемся к этому обстоятельству.

б) Интегрирование выражения (7) по частоте дает бесконечное значение полной энергии кулоновского поля. Последнее, однако, не удивительно. Хорошо известно, что учет квантовых эффектов не может спасти от расходимости, связанной с точечностью электронов. Тем не менее интересно убедиться в том, что расходимость полной энергии связана с интегрированием энергии нулевых колебаний поля, представляемых первым слагаемым функции

$$\theta(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}.$$

Запишем энергию кулоновского поля, связанную с нулевыми колебаниями:

$$W^l_0 = \frac{\hbar}{2(2\pi)^4} \int\int d\omega\, d\mathbf{k}\, \frac{\operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)}{|\varepsilon^l(\omega, k)|^2}. \tag{9}$$

Подставляя сюда квантовое выражение (6б) и пренебрегая отличием $|\varepsilon^l(\omega, k)|$ от единицы в знаменателе подынтегрального выражения (что никоим образом не может повлиять на характер сходимости при больших ω и k), мы получим

$$W^l_0 = \frac{1}{2} \frac{4\pi e^2 N}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} \Phi\left(\frac{k\lambda_\text{т}}{4\sqrt{\pi}}\right), \tag{10}$$

где

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

— интеграл вероятности. Перепишем выражение (10) в форме

$$W^l_0 = \frac{1}{2} \frac{4\pi e^2 N}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} - \frac{1}{2} \frac{4\pi e^2 N}{(2\pi)^3} \int \frac{d\mathbf{k}}{k^2} \left[1 - \Phi\left(\frac{k\lambda_\text{т}}{4\sqrt{\pi}}\right)\right], \tag{11}$$

где второй интеграл сходится, а первый является спектральным представлением бесконечной собственной энергии электронов (ср. [3], [8] и ниже). С другой стороны, интегрирование второго слагаемого функции θ приводит к конечному выражению:

$$W^l_\text{т} = \frac{4\pi e^2 N}{\pi \lambda_\text{т}}; \tag{12}$$

$W^l_\text{т}$ — энергия теплового кулоновского поля без энергии нулевых колебаний.

Таким образом, при учете квантовых эффектов расходимость полной энергии продольного поля в электронном газе проявляется через наличие нулевых колебаний электрического поля. Это обстоятельство означает, что поведение спектральной плотности энергии электрического поля на больших частотах определяется соотношением неопределенности. Ниже мы непосредственно убедимся в этом.

в) Одной из наиболее важных величин, определяющих термодинамические свойства электронного газа, является энергия кулоновского взаимодействия зарядов

$$W^l_\text{int} = \left\langle \frac{1}{2} \sum \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \right\rangle, \tag{13}$$

$\mathbf{r}_i$, $\mathbf{r}_j$ — радиусы-векторы, определяющие положение двух электронов, а скобки $\langle\ \rangle$ означают усреднение по равновесному распределению электронов. Это выражение преобразуется к виду (см., например, [8])

$$W^l_{\mathrm{int}} = \int\int W^l(\omega, \mathbf{k})\, d\omega\, d\mathbf{k} - \frac{1}{2}\frac{4\pi e^2 N}{(2\pi)^3}\int \frac{d\mathbf{k}}{k^2}. \tag{14}$$

Как уже говорилось, последний член в (14) представляет собой бесконечную собственную энергию «голых» точечных зарядов. Ясно, что в классичесой области для невырожденного электронного газа выражение (14) должно давать известную классическую формулу для энергии кулоновского взаимодействия. Однако, как мы убедились выше, при учете квантовых эффектов в классической области интеграл $\int W^l_\omega\, d\omega$ расходится лишь при учете нулевых колебаний в формуле Планка. Поэтому чтобы получить классическое выражение для энергии кулоновского взаимодействия из (14) с помощью квантового выражения диэлектрической проницаемости (6), необходимо воспользоваться полным выражением функции Планка. Наконец, для получения конечного значения энергии взаимодействия W^l_{int} необходимо учитывать отличие $\varepsilon^l(\omega, k)$ от единицы. Эти обстоятельства затрудняют получение W^l_{int} из квантовых выражений. Тем не менее такие расчеты могут быть проведены и представляют определенный интерес.

Рассмотрим величину

$$M = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Im}\frac{1}{\varepsilon^l(\omega, k)}\, \mathrm{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\, d\omega. \tag{15}$$

Для ее вычисления удобно рассмотреть интеграл

$$\oint \frac{d\omega}{\varepsilon^l(\omega, k)}\, \mathrm{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}$$

по замкнутому контуру, охватывающему верхнюю полуплоскость комплексного переменного ω, исключая точку $\omega = 0$. Внутри рассматриваемого контура $\varepsilon^l(\omega, k)$ не имеет ни нулей, ни полюсов. Интеграл по бесконечно удаленной полуокружности $|\omega| \to \infty$ легко вычислить, поскольку $\varepsilon^l(\omega, k) \to 1$. Таким образом, находим (ср. [3])

$$M = \frac{2T}{\hbar}\left\{\pi\left[\frac{1}{\varepsilon^l(0, k)} - 1\right] + 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\varepsilon^l(\omega_n, k)} - 1\right]\right\}, \tag{16}$$

где $\omega_n = 2\pi i n T/\hbar$, $\mathrm{Im}\,\varepsilon^l(\omega_n, k) = 0$.

Займемся вычислением суммы в (16):

$$\varphi_1(k, \lambda_{\mathrm{T}}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon_n - 1}{\varepsilon_n}, \qquad \varepsilon_n = \varepsilon(\omega_n, k).$$

Представляется совершенно естественным, что можно получить хорошее приближение для указанной суммы, если в знаменателе каждого слагаемого пренебречь отличием ε_n от единицы. И действительно, если искать разложение интеграла $\int \varphi_1(k, \lambda_{\mathrm{T}})\, d\mathbf{k}$ (вклада искомой суммы в энергию взаимодействия), то оно будет иметь вид $a_{-1}\lambda_{\mathrm{T}}^{-1} + a_0 + a_1\lambda_{\mathrm{T}} + \ldots$ Можно доказать, что, используя приближенное значение $\varphi(k, \lambda_{\mathrm{T}}) = \sum_{n=1}^{\infty}(\varepsilon_n - 1)$ функции $\varphi_1(k, \lambda_{\mathrm{T}})$, мы получим значение интеграла энергии взаимодействия, которое может отличаться от истинного лишь членами первого и более высокого порядка по λ_{T}. Поэтому дальнейшие вычисления, по существу, направлены на определение коэффициентов a_{-1} и a_0, которые мы найдем, вычислив сумму $\varphi(k, \lambda_{\mathrm{T}})$. Для ее нахождения удобно воспользоваться следующей формой представления $\varepsilon^l(\omega_n, k)$ в точках ω_n:

$$\varepsilon_n - 1 = \frac{\omega_0^2 m \exp(-\gamma^2/2)}{2k^2 T}\int_{-1}^{1} e^{\gamma^2 y^2/2}(-1)^n \cos\pi n y\, dy. \tag{17}$$

Эту формулу, которая справедлива при $n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$, легко получить из общих выражений (6). Суммируя по n и заменяя порядок интегрирования и суммирования, мы приходим к интегралу, который легко вычислить, если заметить, что

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos nx=-\frac{1}{2}+\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta\,[x+(2n+1)\,\pi]. \tag{18}$$

В итоге получаем следующее выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}[\varepsilon(\omega_n,\ k)-1]=-\frac{1}{\sqrt{2}\,\gamma}\,\frac{\omega_0^2m}{k^2T}\,F\left(\frac{\gamma}{\sqrt{2}}\right)+\frac{\omega_0^2m}{2k^2T}, \tag{19}$$

где функция $F(x)$ определена в (6), а второе слагаемое, очевидно, отвечает собственной энергии точечных зарядов. Таким образом, интегрируя (16) по k и учитывая (1), (14), (19), получаем окончательное выражение для энергии взаимодействия:

$$W_{\text{int}}^l=-\frac{T}{\pi^{3/2}\lambda_{\text{т}}d^2}\int\limits_0^\infty\frac{F(x)\,dx}{x}+\frac{T}{\pi^{3/2}\lambda_{\text{т}}d^2}\int\limits_0^\infty\frac{x^2F(x)\,dx}{x^3+bF(x)}=$$

$$=-\frac{bT}{\pi^{3/2}\lambda_{\text{т}}d^2}\int\limits_0^\infty\frac{F(x)\,dx}{x\,[x^3+bF(x)]}; \tag{20}$$

здесь второе слагаемое получается при интегрировании первой скобки с $\varepsilon^l(0,\ k)$ в (16), $b=(\lambda_{\text{т}}/4\sqrt{\pi}d)^2\ll 1$, $d=(T/\omega_0^2m)^{1/2}$ — радиус Дебая. Легко получить главный член асимптотического разложения интеграла в (20) при $\lambda_{\text{т}}/d\to 0$. Именно,

$$\int\limits_0^\infty\frac{F(x)\,dx}{x\,[x^3+bF(x)]}\approx\frac{\pi}{2\sqrt{b}}$$

при $b\ll 1$. В итоге получаем классическое выражение для энергии взаимодействия зарядов (см., например, [3]):

$$W_{\text{int}}^l=-\frac{T}{8\pi d^3}. \tag{21}$$

4. ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННА́Я КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ КУЛОНОВСКОГО ПОЛЯ

Рассмотрим теперь пространственно-временну́ю корреляционную функцию флуктуационного продольного электрического поля. Она имеет вид

$$B^l(\mathbf{R},\ t)=\langle E_i(\mathbf{r}_1,\ t_1)\,E_i(\mathbf{r}_2,\ t_2)\rangle=$$

$$=\frac{2\hbar}{(2\pi)^3}\int\int\operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\,\frac{\operatorname{Im}\varepsilon^l(\omega,\ k)}{|\,\varepsilon^l(\omega,\ k)\,|^2}\exp(i\omega\tau+i\mathbf{kR})\,d\omega\,d\mathbf{k}, \tag{22}$$

где $\tau=t_2-t_1$, $\mathbf{R}=\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1$, $R=|\,\mathbf{R}\,|$. При малых значениях R и τ можно опять пренебречь отличием $\varepsilon^l(\omega,\ k)$ от единицы в знаменателе подынтегрального выражения. Подставляя в (22) выражение $\operatorname{Im}\varepsilon^l(\omega,\ k)$ из (6б) и интегрируя по ω, имеем

$$B^l(R,\ \tau)=\frac{2\omega_0^2m}{\pi R}\int\limits_0^\infty\frac{\sin x}{x}\exp\left(-\frac{x^2\tau^2T}{4mR^2}\right)\cos\frac{\hbar x^2\tau}{2mR^2}\,dx. \tag{23}$$

Интеграл (23) выражается через функцию $\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^z e^{-t^2}\,dt$:

$$B^l(R,\ \tau)=\frac{\omega_0^2m}{2R}\left[\Phi\left(\frac{R\exp(i\varphi/2)}{v_{\text{эфф}}\tau}\right)+\Phi\left(\frac{R\exp(-i\varphi/2)}{v_{\text{эфф}}\tau}\right)\right], \tag{24}$$

где $\xi=\tau_0/\tau$, $\tau_0=\hbar/T$, $v_{\text{эфф}}^2=\sqrt{v_{\text{т}}^4+v_{\text{кв}}^4}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\xi$, $v_{\text{т}}^2=2T/m$, $v_{\text{кв}}^2=2\hbar/\tau m$ — квадрат квантовой скорости, характеризующей диффузионное расплывание волновых пакетов при свободном движении с энергией $\mathcal{E} \approx \hbar/\tau$, определяемой соотношением неопределенности между энергией и временем. Время τ_0 фактически разделяет область классических и квантовых флуктуаций (что, конечно, следует и из общих соображений [10]); оно равно времени, за которое электрон проходит длину волны де-Бройля с тепловой скоростью.

При $\tau \gg \tau_0$ ($\xi \ll 1$) эффективная скорость распространения влияния процесса из одной точки в другую $v_{\text{эфф}} \sim v_{\text{т}}$ ($v_{\text{кв}} \ll v_{\text{т}}$), и мы получаем из (24) выражение, не содержащее величины $\hbar$:

$$B^l(R, \tau) = \frac{\omega_0^2 m}{R} \Phi\left(\frac{R}{v_{\text{т}}\tau}\right). \tag{25}$$

В противоположном случае $\tau \ll \tau_0$ имеем квантовомеханическую формулу

$$B(R, \tau) = \frac{\omega_0^2 m}{R}\left[S\left(\frac{R}{v_{\text{кв}}\tau}\right) + C\left(\frac{R}{v_{\text{кв}}\tau}\right)\right], \tag{26}$$

$$S(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \int\limits_0^x \sin^2 t\, dt, \qquad C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^x \cos^2 t\, dt.$$

Несколько другое выражение для $B^l(R, \tau)$ можно получить, если потребовать выполнения неравенства $R/v_{\text{эфф}}\tau \ll 1$. В этом случае из (24) получается

$$B^l(R, \tau) = \frac{2\omega_0^2 m^{3/2}}{(2\pi T)^{1/2}\tau}\left(\frac{\sqrt{1+\xi^2}+1}{1+\xi^2}\right)^{1/2}, \tag{27}$$

т. е. при $\tau \gg R/v_{\text{эфф}}$ корреляционная функция не зависит от R.

Если $\xi \ll 1$, то из (27) следует классическое выражение

$$B^l(R, \tau) = \frac{2\omega_0^2 m^{3/2}}{(\pi T)^{1/2}\tau}. \tag{28}$$

Оно было получено в [11]. Если же $\xi \gg 1$, то (27) приводит к

$$B^l(R, \tau) = \frac{2\omega_0^2 m^{3/2}}{(2\pi\hbar\tau)^{1/2}}. \tag{29}$$

При больших расстояниях ($R \gg v_{\text{эфф}}\tau$) из (24) имеем

$$B^l(R, \tau) \approx \frac{m\omega_0^2}{R}, \tag{30}$$

т. е. корреляция кулоновского поля здесь не зависит от τ, $\hbar$ и T и определяется кулоновским полем неподвижных частиц.

Итак, при $R = 0$ корреляционная функция $B^l \to \infty$ при $\tau \to 0$ как в классике (28), так и при учете квантовых флуктуаций. Этот результат противоречит утверждениям работы [12]. В квантовом случае, в отличие от классического, особенность B^l ($R = 0$, $\tau \to 0$) является интегрируемой. Из-за этого обстоятельства квантовые характеристики и фигурируют в спектральной плотности энергии продольного поля даже в классической области частот. В квантовой области корреляционная функция B^l не зависит от температуры. Она определяется фактически квантовыми флуктуациями энергии электрона $\Delta\mathcal{E}$, определяемыми соотношением неопределенностей между энергией и временем ($\Delta\mathcal{E}\tau \simeq \hbar$). По этой причине в этом случае и спектральная плотность энергии продольного поля (как уже отмечалось) не зависит от температуры и представляет собой энергию нулевых колебаний.

5. КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ПЛОТНОСТИ В НЕВЫРОЖДЕННОМ ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ

Рассмотрим, наконец, пространственно-временну́ю функцию корреляции $B_\rho(R, \tau)$ флуктуаций плотности заряда в невырожденном электронном газе. Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho$, то

$$B_\rho(R, \tau) = \frac{2\hbar}{(2\pi)^3 (4\pi)^2} \int\int \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T}\, \frac{k^2 \operatorname{Im} \varepsilon^l(\omega, k)}{|\varepsilon^l(\omega, k)|^2} \exp(i\omega\tau + i\mathbf{k}\mathbf{R})\, d\omega\, d\mathbf{k}. \tag{31}$$

Если мы пренебрежем отличием от единицы $|\varepsilon^l(\omega, k)|$ в (31), то получим корреляционную функцию плотности заряда электронного газа без учета взаимодействия. Далее, разделив B_ρ на квадрат заряда электрона, получим выражение для корреляционной функции флуктуации плотности в произвольном однокомпонентном идеальном невырожденном газе:

$$G(R,\ \tau)=\frac{1}{e^2}B_\rho(R,\ \tau)=$$

192

$$=\frac{N}{\pi^{3/2}\tau^3 v^3_{\text{эфф}}}\exp\left(-\frac{R^2}{\sqrt{1+\xi^2}\,\tau^2 v^2_{\text{эфф}}}\right)\cos\left(\frac{3}{2}\varphi-\frac{R^2\xi}{\sqrt{1+\xi^2}\,\tau^2 v^2_{\text{эфф}}}\right). \qquad (32)$$

Это выражение можно получить, конечно, и более прямым способом (ср. [10, 13]).

При $\tau \gg \tau_0$ это выражение переходит в известное (ср. [3]) классическое выражение для флуктуаций плотности в идеальном газе:

$$G(R,\ \tau)=\frac{N}{\sqrt{2}\pi^{3/2}(v_{\text{т}}\tau)^3}\exp\left(-\frac{R^2}{v_{\text{т}}^2\tau^2}\right); \qquad (33)$$

физический смысл этого выражения легко понять, если заметить, что величина $G(R,\ \tau)$ пропорциональна вероятности достижения точки R частицами, которые вылетают из точки $R=0$ с максвелловским распределением скоростей.

При $\tau \ll \tau_0$ из (32) получаем следующее квантовое выражение:

$$G(R,\ \tau)=\frac{N}{2\pi^{3/2}(v_{\text{кв}}\tau)^3}\exp\left(-\frac{2\pi R^2}{\lambda_{\text{т}}^2}\right)\left(\sin\frac{R^2}{v^2_{\text{кв}}\tau^2}-\cos\frac{R^2}{v^2_{\text{кв}}\tau^2}\right). \qquad (34)$$

Отсюда при $\tau\to 0$, используя следующее представление для трехмерной δ-функции:

$$\delta(\mathbf{R})=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2}{(2\pi\alpha)^{3/2}}\left(\sin\frac{R^2}{\alpha}-\cos\frac{R^2}{\alpha}\right), \qquad (35)$$

получаем δ-образную корреляционную функцию одновременных флуктуаций плотности в идеальном невырожденном газе [10].

При $\tau\neq 0$ корреляционная функция (34) определяется квантовым диффузионным разлетом — расплыванием волновых пакетов из точки $R=0$ в точку R со скоростью $v_{\text{кв}}=\sqrt{2\hbar/\tau m}$, связанной с соотношением неопределенностей. Множитель

$$\sin\frac{R^2}{v^2_{\text{кв}}\tau^2}-\cos\frac{R^2}{v^2_{\text{кв}}\tau^2}$$

определяет квантовые интерференционные эффекты при таком расплывании. Температура газа фигурирует в (34) лишь в значении тепловой длины волны де-Бройля $\lambda_{\text{т}}$. Спад корреляционной функции при $R\gg\lambda_{\text{т}}$ связан с тем, что частицы газа — волновые пакеты с размером $L\approx\lambda_{\text{т}}$ — не успевают заметно сместиться в пространстве за время $\tau\ll\tau_0=\lambda_{\text{т}}/v_{\text{г}}$.

Наконец заметим, что для одной частицы (для одной волны де-Бройля) с определенным импульсом $\mathbf{p}_0$ пространственно-временная корреляционная функция флуктуаций плотности имеет вид

$$G^{(1)}(R,\ \tau)=\frac{1}{V_0}\frac{e^{3i\pi/4}}{\pi^{3/2}}\frac{\exp(-iR^2/v^2_{\text{кв}}\tau^2)\exp[-i(\mathbf{p}_0\mathbf{R}/\hbar)-i(p_0^2\tau/2\hbar m)]}{v^3_{\text{кв}}\tau^3}+\text{к. с.}, \qquad (36)$$

где V_0 — объем, в котором происходит движение — предполагается достаточно большим. Это выражение легко получить непосредственным расчетом, рассматривая оператор корреляционной функции $\frac{1}{2}[\hat{n}(\mathbf{x},\mathbf{r},0)\,\hat{n}(\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{R},\tau)+\hat{n}(\mathbf{x},\mathbf{r}+\mathbf{R},\tau)\,\hat{n}(\mathbf{x},\mathbf{r},0)]$, где $\hat{n}(\mathbf{x},\mathbf{r},t)$ — оператор плотности числа частиц в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ в момент времени t.

Усредняя (36) с помощью распределения Максвелла — Больцмана, можно получить формулу (32) для системы частиц со средней плотностью N.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Напомним еще раз основные утверждения.

1. При чисто классическом расчете корреляционная функция продольного (кулоновского) поля $\langle E_i^l(\omega,\mathbf{r}_1)\,E_i^l(\omega,\mathbf{r}_2)\rangle\sim\ln(v_{\text{т}}/\omega R)$ и расходится при $R\to 0$.

2. При измерении спектральной плотности энергии W_ω^l классическим «прибором» с размерами L измеряемая величина оказывается конечной, но в ее значение входит размер «прибора».

3. Квантовый расчет спектральной плотности энергии в классической области частот ($\hbar\omega \ll T$) дает конечное значение спектральной плотности $W_\omega^l \sim \ln(T/\hbar\omega)$.

4. Полная энергия кулоновского поля $W^l = \int W_\omega^l \, d\omega$ оказывается бесконечной в силу точечности электрона. Однако интересным обстоятельством оказывается тот факт, что эта бесконечность полной энергии связана с интегрированием по частоте лишь нулевых колебаний в функции Планка, т. е. с квантовыми флуктуациями.

5. Флуктуации кулоновского поля полностью определяются флуктуациями плостности электронов. Из пространственно-временно́й корреляционной функции флуктуаций плотности идеального газа, приведенной выше, ясно видно разделение флуктуаций на классические и квантовые.

Мы благодарны В. Л. Гинзбургу, В. М. Генкину, и Ю. С. Барашу за замечания, а также С. М. Рытову, М. Л. Левину и В. И. Татарскому за обсуждение.

Институт прикладной физики АН СССР,
Горький
Научно-исследовательский
радиофизический институт МВО и ССО РСФСР,
Горький

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Левин М. Л., Рытов С. М. Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике.— М.: Наука, 1967.
2. Силин В. П., Рухадзе А. А. Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред.— М.: Госатомиздат, 1961.
3. Шафранов В. Д.— В кн. Вопросы теории плазмы. Т. 3/ Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Госатомиздат, 1963.
4. Holtzmark J.— Ann. d. Phys., 1919, Bd. 58, S. 577.
5. Борн М. Оптика.— Харьков; Киев: ГНТИУ, 1937.
6. Эккер Г. Теория полностью ионизованной плазмы.— М.: Мир, 1974.
7. Андронов А. А., Чугунов Ю. В.— УФН, 1975, т. 116, с. 79.
8. Пайнс Д. Элементарные возбуждения в твердых телах.— М.: Мир, 1965.
9. Бараш Ю. С., Гинзбург В. Л.— УФН, 1975, т. 116, с. 5.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика.— М.: Наука, 1964.
11. Fidone I.— Nuovo Cimento, 1961, v. 20, p. 1219.
12. Engelman F.— Zs. Phys., 1966, Bd. 169, S. 126.
13. Ситенко А. Г. Электромагнитные флуктуации в плазме.— Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1965.