

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.3

**ОБ ИЗЛУЧЕНИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН
ПРИ МГНОВЕННОМ ИЗМЕНЕНИИ СОСТОЯНИЯ
ИЗЛУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЫ***Б. М. Болотовский, В. А. Давыдов, В. Е. Рок*

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	311
2. Излучение при мгновенном изменении дипольного момента	313
3. Мгновенная остановка или старт равномерно движущегося заряда в вакууме	316
4. Трансформация поля при мгновенной остановке или старте черенковского заряда	317
Цитированная литература	321

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим физическую систему, создающую статическое электромагнитное поле. Это может быть система покоящихся электрических зарядов или постоянных во времени электрических токов. Изменение параметров такой системы, вообще говоря, сопровождается излучением электромагнитных волн. Пусть параметры системы до некоторого момента времени оставались неизменными, затем в течение промежутка времени T система перестраивается, так что ее параметры определенным образом меняются, а по истечении промежутка времени T перестройка заканчивается и параметры системы принимают некоторые неизменные в дальнейшем конечные значения. В качестве примера можно рассматривать систему, обладающую электрическим дипольным моментом. Если дипольный момент не меняется, то поле такой системы является электростатическим, никакого излучения нет. Предположим теперь, что дипольный момент системы меняется в течение некоторого конечного промежутка времени T от начального значения \mathbf{p}_1 до конечного значения \mathbf{p}_2 . Тогда можно утверждать, что до начала изменения во всем пространстве существует электростатическое поле, отвечающее диполю с моментом \mathbf{p}_1 , изменение дипольного момента от \mathbf{p}_1 до \mathbf{p}_2 сопровождается излучением электромагнитных волн; после же того как установится конечное значение дипольного момента \mathbf{p}_2 , а все волны излучения уйдут на бесконечность, во всем пространстве установится электростатическое поле, отвечающее значению дипольного момента \mathbf{p}_2 .

Зададим вопрос: имеет ли смысл рассматривать такой случай, когда изменение дипольного момента происходит мгновенно? Ясно, что любой физический процесс, в том числе и процесс изменения дипольного момента, требует для своего осуществления конечного времени. Если электрический диполь образован двумя зарядами разных знаков, то изменить величину дипольного момента можно, изменив расположение этих зарядов. Для перемещения зарядов нужно создать поле, что само по себе не может быть сделано мгновенно. Кроме того, заряды обладают конечной массой и потому под действием конечной силы не могут мгновенно изменить свое расположение. Анализируя любую конкретную экспериментальную установку, мы приходим к выводу о том, что мгновенное изменение параметров системы невозможно. Но само по себе это обстоятельство вовсе не означает, что мы не можем рассматривать мгновенное изменение дипольного момента.

Физики часто заменяют реальный физический объект некоторой идеализированной схемой. В качестве примера приведем математический маятник. Как определяется математический маятник? Это материальная точка, подвешенная на невесомой идеально

гибкой и нерастяжимой нити. Ничего из того, что входит в определение, в природе не существует. И тем не менее понятие «математический маятник» — это необычайно продуктивное понятие, позволяющее понять наиболее существенные черты колебаний реального маятника. Оказывается, что размеры тела, подвешенного на нити, в широких пределах несущественны и это оправдывает в данном случае понятие «материальная точка». Если масса нити много меньше, чем масса подвешенного тела, мы можем нить считать невесомой и т. д.

Таким образом, не следует ставить вопрос так: осуществимо ли мгновенное изменение дипольного момента? Ответ на этот вопрос ясен, и ответ отрицательный. Однако это обстоятельство никак не препятствует тому, что в ряде случаев идеализированное представление о мгновенном скачке оказывается полезным. Ниже будет показано, когда такая идеализация допустима.

Представление о мгновенном изменении параметров, описывающих излучающий источник, имеет вполне определенную область применимости. Область эта определяется следующим образом. Рассмотрим некоторый покоящийся источник малых размеров, причем излучение происходит за счет изменения некоторого параметра (дипольного момента, скорости и т. д.). Пусть этот параметр меняется за некоторый промежуток времени T от заданного начального значения до заданного конечного. Разложим поле излучения на монохроматические волны и выберем волну с частотой ω . Если источник излучения покоится и выполняется неравенство $\omega T \ll 1$, то излучение волны с частотой ω определяется только начальным и конечным значением параметра (дипольного момента) и не зависит от времени T , за которое этот параметр меняется. Время перестройки T из формул, определяющих излучение, выпадает, и мы можем считать перестройку мгновенной. Если $\omega T \gtrsim 1$, а подавно при $\omega T \gg 1$, мы не можем считать время перестройки равным нулю.

Если излучаемая система движется, критерий мгновенной перестройки меняется. Пусть скорость излучающей системы равна V и время изменения параметра, ответственного за излучение, равно T . Пусть в системе покоя источника перестройка параметра происходит за время T_1 и при этом излучается частота ω_1 . Тогда в системе покоя источника будет действовать указанный выше критерий мгновенной перестройки:

$$\omega_1 T_1 \ll 1. \quad (1.1)$$

Для того чтобы получить критерий мгновенной перестройки в лабораторной системе, необходимо с помощью преобразования Лоренца выразить ω_1 и T_1 через ω и T (время перестройки и частота в лабораторной системе) и подставить эти выражения в (1.1). Подставив в (1.1)

$$T_1 = T \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad \omega_1 = \frac{\omega [1 - (v/c) \cos \theta]}{\sqrt{1 - (v^2/c^2)}}, \quad (1.2)$$

получим

$$\omega T \ll \frac{1}{1 - (v/c) \cos \theta}, \quad (1.3)$$

где θ — угол между направлениями скорости и наблюдения.

Таким образом, если частота волны удовлетворяет неравенству (1.3), то время перестройки не входит в выражение для интенсивности излучения на частоте ω и мы можем говорить о мгновенном скачке параметра.

Из (1.3), в частности, видно, что если скорость источника излучения близка к скорости света и рассматривается излучение вперед, то критерий мгновенной перестройки выполняется и для таких частот, для которых $\omega T \gg 1$ (существует область частот, которая удовлетворяет одновременно неравенству (1.3) и неравенству $\omega T \gg 1$). Поскольку для излучаемых вперед ($\theta = 0$) высоких частот выполняется критерий мгновенной перестройки, а основные потери на излучение как раз и приходятся на высокие частоты, то в данном случае практически все потери на излучение (или, во всяком случае, их главную часть) можно получить в предположении о мгновенной перестройке параметров источника.

Из формулы (1.3) следует, что учет движения излучающей системы существенно расширяет область частот, для которых выполняется критерий мгновенной перестройки. Действительно, для покоящейся системы ($v = 0$) из (1.3) получаем $\omega \ll T^{-1}$. Если же система движется, то, например, для излучения вперед ($\theta = 0$) имеем

$$\omega \ll \frac{1}{T} \frac{1}{1 - (v/c)}.$$

При скоростях, близких к скорости света, множитель при $1/T$ в последнем неравенстве пропорционален квадрату полной энергии излучающей системы, и критерий мгновенной перестройки может выполняться для частот, величина которых на много порядков превышает обратное время излучения.

Мы подчеркиваем это обстоятельство, потому что не всегда на него обращается должное внимание. В частности, в первых изданиях книги¹ частоты излучения, для которых перестройку можно считать мгновенной, определялись неравенством $\omega\tau \ll 1$ (τ — время перестройки), и только в последнем шестом издании указывается критерий вида (1.3).

Этот критерий можно переписать иначе, умножив обе части неравенства (1.3) на скорость излучающей системы v и разделив на частоту излучения ω . Мы получим

$$l = vT \ll \mathcal{L} = \frac{v}{\omega} \frac{1}{1 - (v/c) \cos \theta} ; \tag{1.4}$$

здесь l — путь, пройденный излучающей системой за время перестройки, \mathcal{L} — величина размерности длины, так называемый путь формирования излучения. Эта величина играет важную роль в теории переходных процессов рассматриваемого типа, в частности в теории переходного излучения⁵. Из формулы (1.4) видно, что если путь системы за время перестройки много меньше, чем путь формирования излучения, то перестройку можно считать мгновенной.

Критерий (1.4) качественно объясняет особенности переходного излучения на размытой границе раздела⁶. Нужно только учесть, что в преломляющей среде в неравенстве (1.4) вместо скорости света c нужно писать c/n , где n — показатель преломления.

2. ИЗЛУЧЕНИЕ ПРИ МГНОВЕННОМ ИЗМЕНЕНИИ ДИПОЛЬНОГО МОМЕНТА

Рассмотрим систему, обладающую зависящим от времени дипольным моментом $\mathbf{p}(t)$. Размеры системы будем считать малыми и в дальнейшем будем ими пренебрегать. Тогда плотность дипольного момента может быть записана в виде

$$\mathbf{p}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{p}(t) \delta(\mathbf{r}) \tag{2.1}$$

(мы считаем, что дипольный момент расположен в начале координат). Пусть вектор дипольного момента $\mathbf{p}(t)$ сначала равен \mathbf{p}_1 , а затем в течение времени от $-T$ до $+T$ меняется до \mathbf{p}_2 и далее остается неизменным. Рассмотрим излучение, возникающее на частоте ω при таком изменении дипольного момента. Фурье-компонента \mathbf{A}_ω вектор-потенциала определяется формулой

$$\mathbf{A}_\omega = \frac{1}{c} \int \mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}') \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} d\mathbf{r}', \tag{2.2}$$

где $\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}')$ — фурье-компонента тока \mathbf{j} , связанного с изменением дипольного момента известной формулой

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \tag{2.3}$$

В нашем случае

$$\mathbf{j} = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} \delta(\mathbf{r}), \tag{2.4}$$

причем эта величина отлична от нуля лишь в начале координат и в промежутке времени от $-T$ до T . Фурье-компонента тока $\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r})$ определяется формулой

$$\mathbf{j}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{j} e^{i\omega t} dt = \frac{\delta(\mathbf{r})}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} e^{i\omega t} dt. \tag{2.5}$$

Если взять столь малые частоты, что для них выполняется неравенство

$$\omega T \ll 1, \tag{2.6}$$

то мы можем положить экспоненту в интеграле равной единице и тогда

$$\mathbf{j}_\omega = \frac{\delta(\mathbf{r})}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\mathbf{p}}{dt} dt = \frac{\delta(\mathbf{r})}{2\pi} \Delta\mathbf{p}, \tag{2.7}$$

где $\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ — изменение дипольного момента за время $2T$. Точно такое же выражение для \mathbf{j}_ω получается в предположении о том, что дипольный момент меняется скачком от \mathbf{p}_1 до \mathbf{p}_2 , причем этот скачок происходит в момент времени $t = 0$.

Действительно, в этом случае

$$\mathbf{j}(t) = \Delta \rho \delta(t) \delta(\mathbf{r}) \quad (2.8)$$

и фурье-компонента $\mathbf{j}(t)$ совпадает с (2.7).

Неравенство (2.6) означает, что период излучаемой волны $2\pi/\omega$ много больше, чем время перестройки T , поэтому мы и можем пренебречь временем перестройки.

Подстановка в формуле (2.2) выражения (2.7) дает

$$\mathbf{A}_\omega(\mathbf{r}) = \frac{\Delta \mathbf{p}}{2\pi c} \frac{e^{i k r}}{r} \quad \left(k = \frac{\omega}{c}\right). \quad (2.9)$$

Совершая обратное преобразование Фурье, получим выражение для вектор-потенциала \mathbf{A} как функции координат и времени:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\Delta \mathbf{p}}{c r} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right). \quad (2.10)$$

Дипольный момент вида (2.1) порождает не только токи \mathbf{j} , но и плотность заряда ρ . Последняя определяется формулой

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{p}(\mathbf{r}, t). \quad (2.11)$$

Поэтому поле определяется не только вектор-потенциалом (2.10), но и скалярным потенциалом φ , удовлетворяющим волновому уравнению

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi (\mathbf{p}(t), \nabla) \delta(\mathbf{r}). \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) для потенциала φ получается в лоренцовой калибровке, когда $\operatorname{div} \mathbf{A} = -(1/c) \partial \varphi / \partial t$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\varphi = -\frac{1}{2} \left[1 - \operatorname{sgn}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] (\mathbf{p}_1 \nabla) \frac{1}{r} - \\ - \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{sgn}\left(t - \frac{r}{c}\right) \right] (\mathbf{p}_2 \nabla) \frac{1}{r} + \frac{\Delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{r}}{c r^2} \delta\left(t - \frac{r}{c}\right); \quad (2.13)$$

здесь $\operatorname{sgn} x = x/|x|$ — знаковая функция.

Выражения (2.10) для вектор-потенциала \mathbf{A} и (2.13) для скалярного потенциала φ полностью определяют электрическое поле \mathbf{E} и магнитное поле \mathbf{H} . Поля связаны с потенциалами известным образом:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим структуру полей в этой задаче. Из выражения (2.10) следует, что вектор-потенциал отличен от нуля только на сферической оболочке $r = ct$, расширяющейся со скоростью света от точки, где произошел скачок дипольного момента. Следовательно, и магнитное поле отлично от нуля только на этой оболочке. В отличие от магнитного, электрическое поле не равно нулю во всем пространстве. Картину электрического поля, которая вытекает из полученных формул, можно представить себе следующим образом. Пусть в момент времени $t = 0$ (совпадающий со скачком дипольного момента от \mathbf{p}_1 к \mathbf{p}_2) из точки, где находится диполь, начала расширяться сферическая оболочка, уравнение которой $r = ct$. Тогда в любой момент времени электрическое поле внутри этой оболочки есть статическое электрическое поле

$$\mathbf{E}_2 = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}_2 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{p}_2 r^2}{r^5}, \quad (2.15)$$

равное полю статического диполя с моментом \mathbf{p}_2 , расположенного в начале координат. Вне оболочки $r = ct$ электрическое поле также не зависит от времени и равно

$$\mathbf{E}_1 = \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{p}_1 r^2}{r^5}. \quad (2.16)$$

Это поле статического диполя с моментом \mathbf{p}_1 . Наблюдатель, расположенный вне оболочки (при $r > ct$), еще не знает, что дипольный момент в начале координат изменился и равен уже не \mathbf{p}_1 , а \mathbf{p}_2 . Рано или поздно до наблюдателя дойдет расширяющаяся со скоростью света оболочка $r = ct$, и в этот момент электрическое поле в точке наблюдения скачком изменится от \mathbf{E}_1 до \mathbf{E}_2 . На самой сферической поверхности $r = ct$ имеется переменное электрическое поле, зависящее от координат и времени. Выше мы видели, что на этой же расширяющейся поверхности имеется и магнитное поле. Для

магнитного поля нетрудно получить выражение

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{cr^2} [\Delta \mathbf{p}, \mathbf{r}] \left[\frac{1}{r} \delta \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c} \delta' \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]. \quad (2.17)$$

Для электрического поля на поверхности $r = ct$ получается выражение

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{cr^3} \{ \mathbf{r} [\Delta \mathbf{p}, \mathbf{r}] \left[\frac{1}{r} \delta \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{c} \delta' \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \left[\frac{\mathbf{r}}{r}, \mathbf{H} \right] \}. \quad (2.18)$$

Видно, что поля на поверхности сферы $r = ct$ по величине равны друг другу и взаимно перпендикулярны. Кроме того, они в каждой точке направлены по касательной к сфере, т. е. перпендикулярны радиус-вектору, проведенному из начала координат в данную точку сферы. Три вектора \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{r} образуют правую тройку.

Поля (2.17), (2.18) представляют собой сферическую электромагнитную волну, распространяющуюся со скоростью света от начала координат. В тех точках, через которые проходит эта волна, происходит мгновенное «переключение» поля с одного статического значения на другое. Выберем вектор $\Delta \mathbf{p}$ за ось сферической поверхности $r = ct$, так что полюсы сферы лежат на продолжении вектора $\Delta \mathbf{p}$. Тогда магнитное поле волны (2.17), (2.18) всюду направлено по касательной к широтным кругам, а электрическое — по касательной к меридианам. Определим еще интенсивность излучения на частоте ω , возникающего при мгновенном изменении дипольного момента на величину $\Delta \mathbf{p}$. Спектральная плотность излучения, приходящаяся на интервал частот $d\omega$ и на телесный угол $d\Omega$, равна

$$dW_{\mathbf{n}, \omega} = c |\mathbf{H}_\omega|^2 r^2 d\Omega d\omega. \quad (2.19)$$

На больших расстояниях r от начала координат магнитное поле \mathbf{H}_ω просто выражается через вектор-потенциал \mathbf{A}_ω (2.9):

$$\mathbf{H}_\omega(\mathbf{r}) = i \frac{\omega}{c} [\mathbf{n}, \mathbf{A}_\omega], \quad (2.20)$$

где \mathbf{n} — единичный вектор в направлении излучения. Это дает

$$dW_{\mathbf{n}, \omega} = \frac{(\Delta \mathbf{p})^2}{4\pi^2 c^3} \sin^3 \theta d\theta d\varphi \omega^2 d\omega. \quad (2.21)$$

Эта формула может быть получена из общей формулы для спектрального распределения при дипольном излучении:

$$dW_{\mathbf{n}, \omega} = \frac{|\ddot{(\mathbf{p})}_\omega|^2}{c^3} \sin^3 \theta d\theta d\varphi, \quad (2.22)$$

где $\ddot{(\mathbf{p})}_\omega$ — фурье-компонента второй производной от дипольного момента по времени. В рассматриваемом случае

$$\ddot{(\mathbf{p})}_\omega = \frac{i\omega}{2\pi} \Delta \mathbf{p}. \quad (2.23)$$

Подстановка этой величины в (2.22) сразу дает (2.21). Здесь θ — угол между векторами $\Delta \mathbf{p}$ и \mathbf{n} , φ — азимутальный угол (θ и φ — углы, определяющие направление излучения \mathbf{n} в сферической системе координат, в которой за ось принято направление $\Delta \mathbf{p}$).

Как видно из (2.21), спектр излучения пропорционален квадрату частоты, и поэтому полная интенсивность излучения расходится. Очевидно, спектр излучения следует обрезать на частотах, которые не удовлетворяют неравенству (2.6), и тем самым учесть, что изменение дипольного момента не является мгновенным, а занимает конечное время T . Тогда для полной энергии излучения получится конечная величина, обратно пропорциональная T^3 .

При учете конечного времени перестройки изменится и картина поля. Магнитное поле в этом случае будет отлично от нуля не на сферической поверхности, а в сферическом слое толщины $2cT$, образованном двумя концентрическими сферическими поверхностями с центром в месте расположения диполя. И внутренняя и внешняя поверхности, ограничивающие сферический слой, расходятся от начала координат со скоростью света. Внутри этого слоя имеется также переменное во времени электрическое поле. Перед слоем и позади слоя имеются только статические электрические поля. Время прохождения слоя через любую точку пространства равно $2T$, и за это время поле меняется от одного статического значения, отвечающего диполью \mathbf{p}_1 , до другого, отвечающего диполью \mathbf{p}_2 .

3. МГНОВЕННАЯ ОСТАНОВКА ИЛИ СТАРТ РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕГОСЯ ЗАРЯДА В ВАКУУМЕ

Пусть заряд q , ранее двигавшийся равномерно со скоростью v , остановился за время T . Тогда, если частота излучаемых им волн удовлетворяет неравенству (1.3), то в выражение для электромагнитных полей, интенсивностей излучения и т. д. не будет входить время T ; иными словами, для таких частот будет справедливо приближение мгновенной остановки заряда. То же можно сказать и о стартующем заряде. Рассмотрим вначале случай мгновенной остановки заряда. Итак, пусть заряд q равномерно двигался вдоль оси z со скоростью v и в момент времени $t = 0$ мгновенно остановился в начале координат. От места остановки заряда пойдет волна излучения, расположенная на сфере $r = ct$. Если точка, в которой измеряется поле, расположена на расстоянии r от начала координат, то волна излучения придет туда в момент времени r/c , а до этого момента сигнал об остановке заряда до точки r не дойдет. Следовательно, на этом расстоянии потенциалы и поля будут описываться соответствующими выражениями для потенциалов и полей заряда, равномерно движущегося со скоростью v вдоль оси z . Эти выражения легко получить, используя, например, закон Кулона и преобразования Лоренца¹, а именно:

$$\varphi = \frac{q}{R^*}, \quad A = \frac{v}{c} \frac{q}{R^*},$$

$$E = \frac{qR}{\gamma^2 (R^*)^3} = \frac{qR(1-\beta^2)}{R^3(1-\beta^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}, \quad H = \left[\frac{v}{c}, E \right] \quad (3.1)$$

где φ — скалярный потенциал, A — вектор-потенциал, E — электрическое поле, H — магнитное поле равномерно движущегося со скоростью v заряда, $\beta = v/c$, $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$,

$$R^* = \sqrt{(z - vt)^2 + (1 - \beta^2)(x^2 + y^2)},$$

$(0, 0, vt)$ — координаты движущегося заряда, R — радиус-вектор от заряда в точку наблюдения в момент t , θ — угол между R и v . Таким образом видно, что электрическое поле заряда, мгновенно остановившегося в начале координат, на расстояниях r , больших ct , направлено в точку, где был бы наш заряд, продолжай он двигаться без

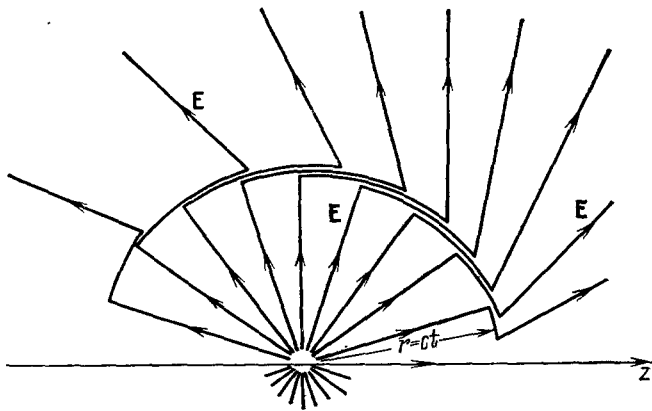


Рис. 1.

остановки. Это поле ослаблено по сравнению с кулоновским в области углов θ , близких к 0 и π , и усилено в области углов θ , близких к $\pi/2$. Следовательно, если изображать это поле с помощью силовых линий, они должны сгущаться по мере приближения угла θ к $\pi/2$.

С другой стороны, на расстояниях r от начала координат, меньших, чем ct , должно установиться кулоновское поле заряда q :

$$\varphi = \frac{q}{r}, \quad A = 0, \quad E = \frac{qr}{r^3}, \quad H = 0, \quad (3.2)$$

r — расстояние от начала координат до точки наблюдения.

Таким образом, ясно, что вся перестройка поля равномерно движущегося заряда должна осуществляться на сфере радиуса ct (рис. 1). Поскольку кулоновское поле

изотропно, а поле равномерно движущегося заряда обладает лишь аксиальной симметрией, то силовые линии электрического поля, оставаясь непрерывными, должны преломляться на сфере $r = ct$. С помощью теоремы Гаусса нетрудно рассчитать, как изменяется угол наклона к оси z силовых линий электрического поля при переходе через поверхность сферы $r = ct$.

Если φ_0 — угол наклона к оси z силовой линии электрического поля вне сферы $r = ct$, θ_0 — угол наклона той же силовой линии внутри сферы $r = ct$, то на этой сфере силовая линия преломится таким образом, что связь между φ_0 и θ_0 будет следующая:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \gamma \operatorname{tg} \theta_0. \quad (3.3)$$

Если теперь считать, что ось сферы — это ось z , то электрическое поле на сфере будет направлено по меридианам, а магнитное — по параллелям. Электрическое и магнитное поля сингулярны на сфере $r = ct$. Следовательно, при мгновенной остановке заряда излучается бесконечная энергия. Этого и следовало ожидать, поскольку мы предположили, что ускорение заряда бесконечно.

Аналогичным образом можно рассмотреть вопрос о поле заряда, стартовавшего в момент $t = 0$ из начала координат со скоростью v вдоль оси z (рис. 2).

В этом случае внутри сферы радиуса $r = ct$ с центром в начале координат установится поле равномерно движущегося заряда (2.1). Вне этой сферы, в области, куда еще не дошел сигнал о старте заряда, поле будет чисто кулоновским (3.2). На сфере же, как и в случае остановки, будет происходить «преломление» силовых линий электрического поля. Само электрическое поле на сфере будет чисто поперечным.

Если же заряд стартует или останавливается не мгновенно, а в течение некоторого времени T , то сфера «расплывается» в шаровой слой ширины cT , внутри которого силовые линии электрического поля равномерно движущегося заряда будут переходить в силовые линии кулоновского поля. Внутри этой переходной области обязательно будет присутствовать поперечная компонента электромагнитного поля, величина которой будет тем больше, чем меньше величина T . Таким образом, все излучение старта или остановки заряда будет сосредоточено внутри этого шарового слоя ширины cT .

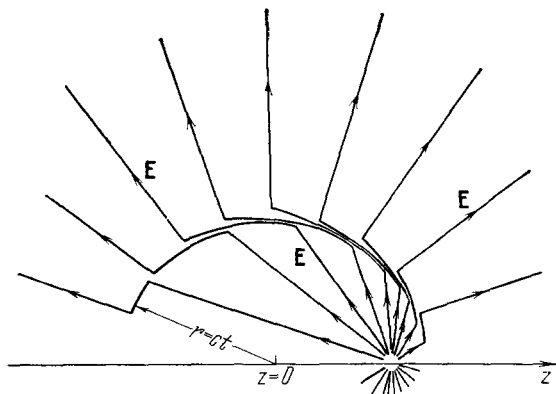


Рис. 2.

4. ТРАНСФОРМАЦИЯ ПОЛЯ ПРИ МГНОВЕННОЙ ОСТАНОВКЕ ИЛИ СТАРТЕ ЧЕРЕНКОВСКОГО ЗАРЯДА

И. Е. Тамм исследовал влияние ускорения заряда на излучение Вавилова — Черенкова³. С этой целью он рассмотрел излучение заряженной частицы, которая вначале находится в покое затем мгновенно ускоряется до «сверхсветовой скорости» $v > c/n$ (где $n = \sqrt{\epsilon}$ — показатель преломления среды), движется с этой скоростью в течение конечного промежутка времени и затем мгновенно останавливается. В своем рассмотрении И. Е. Тамм исследовал лишь спектральные характеристики возникающего излучения, отвлекаясь от пространственной картины полей. Представляет интерес более подробно рассмотреть две более элементарные, чем у И. Е. Тамма, задачи: задачу о мгновенной остановке «сверхсветовой» заряда и задачу о мгновенном ускорении покоящегося заряда до «сверхсветовой» скорости. Уяснение структуры возникающих при этом полей позволяет получить ясное и наглядное представление о поле излучения в широком классе задач, включающем в себя и пример, рассмотренный И. Е. Таммом.

Разберем сначала случай мгновенной остановки черенковского заряда⁴.

Пусть заряд q движется вдоль оси z со скоростью v , большей фазовой скорости света $\frac{c}{n}$ в среде, и в момент времени $t = 0$ мгновенно останавливается в точке $z = 0$. Тогда уравнения для векторного и скалярного потенциалов A и φ имеют вид

$$\begin{aligned} \Delta A - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c} j, \\ \Delta \varphi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{n^2} \rho. \end{aligned} \quad (4.1)$$

При этом плотность тока \mathbf{j} и плотность заряда ρ задаются выражениями

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= qv\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt})\theta(-t), \\ \rho &= q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{vt})\theta(-t) + q\delta(\mathbf{r})\theta(t); \end{aligned} \tag{4.2}$$

здесь $\theta(x)$ — ступенчатая функция Хевисайда,

$$\theta(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{|x|} \right).$$

Разложим теперь потенциалы A и φ в интеграл Фурье вида

$$\begin{aligned} A(\mathbf{r}, t) &= \int A_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega, \\ \varphi(\mathbf{r}, t) &= \int \Phi_{\mathbf{k}, \omega} e^{i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Тогда уравнения (4.1) для компонент Фурье $A_{\mathbf{k}, \omega}$ и $\Phi_{\mathbf{k}, \omega}$ приобретают вид

$$A_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{4\pi}{c} \frac{\mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega}}{k^2 - n^2(\omega^2/c^2)}, \tag{4.4}$$

$$\Phi_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{4\pi}{n^2} \frac{\rho_{\mathbf{k}, \omega}}{k^2 - n^2(\omega^2/c^2)},$$

где $\mathbf{j}_{\mathbf{k}, \omega}$ и $\rho_{\mathbf{k}, \omega}$ даются выражениями

$$j_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{qv}{(2\pi)^3} \delta^-(\omega - kv),$$

$$\rho_{\mathbf{k}, \omega} = \frac{q}{(2\pi)^3} [\delta^-(\omega - kv) + \delta^+(\omega)]; \tag{4.5}$$

здесь

$$\delta^\pm(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{\pm itx} dt =$$

$$= \frac{i}{2\pi} \lim_{\gamma \rightarrow +0} \frac{1}{x \pm i\gamma} = \frac{i}{2\pi} \frac{1}{x \pm i0}. \tag{4.6}$$

Из (4.3) — (4.6) следует

$$A(\mathbf{r}, t) = i \frac{4\pi qv}{c(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} d\omega \frac{\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]}{(\omega - kv - i0)[k^2 - n^2(\omega^2/c^2)]}, \tag{4.7}$$

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = i \frac{4\pi q}{n^2(2\pi)^4} \int d\mathbf{k} d\omega \frac{\exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]}{k^2 - n^2(\omega^2/c^2)} \left(\frac{1}{\omega - kv - i0} + \frac{1}{\omega + i0} \right). \tag{4.8}$$

Исследование выражений (4.7), (4.8) показывает, что поля, возникающие после остановки заряда, разбивают пространство на три области, границы которых перемещаются со временем. К моменту $t > 0$ эти области и поля в них имеют следующий вид (рис. 3):

Область I:

$$\rho > \frac{vt - z}{\gamma}, \quad r > \frac{ct}{n}, \quad z < \frac{c^2 t}{vn^2},$$

где $\rho = r \sin \theta = \sqrt{x^2 + y^2}$ (здесь θ — полярный угол в координатах, связанных с остановившимся зарядом и осью $Oz \parallel v$). В этой области поле совпадает с полем внутри черенковского конуса для заряда, движущегося со скоростью v в точке $z = vt^3$,

$$\varphi = \frac{2q}{n^2 \sqrt{(vt - z)^2 - \gamma^2 \rho^2}}, \quad A_z = \beta n^2 \varphi, \tag{4.9}$$

$$A_x = A_y = 0, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma^2 = n^2 \beta^2 - 1.$$

Приведенные выражения для потенциалов электромагнитного поля относятся к точкам пространства, лежащим вне сферы радиуса $r = ct/n$ с центром в точке оста-

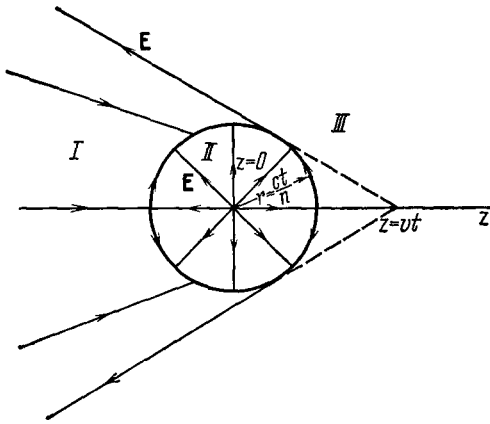


Рис. 3.

новки заряда. Поскольку «сигнал» об остановке заряда, распространяющийся в среде со скоростью c/n , не достиг еще области I , естественно, поэтому, что поле в этой области остается таким же, как если бы заряд продолжал двигаться без остановки.

Область II: в этой области уже успело сформироваться кулоновское поле покоящегося заряда q :

$$\varphi = \frac{q}{n^2 r}, \quad A = 0. \quad (4.10)$$

И, наконец, область III — область, остающаяся после удаления из всего пространства областей I и II вместе с их границами. В этой области поле отсутствует.

Таким образом, нам известны поля внутри всех трех областей. Остается найти выражения для полей на границах. Ввиду отсутствия дисперсии и вследствие мгновенной остановки заряда границы областей имеют резкий характер. Поля на границах можно определить, пользуясь теоремой Гаусса и простыми геометрическими соображениями. Действительно, вследствие теоремы Гаусса поток электрической индукции через любую поверхность, содержащую внутри себя точку $r = 0$ с зарядом q , должен равняться $4\pi q$. Выберем такую поверхность следующим образом (см. рис. 3). Рассмотрим плоскость P , перпендикулярную оси z и находящуюся позади заряда в областях I и III. Образую замкнутую поверхность R из части плоскости P и некоторой поверхности S , лежащей целиком в области III. Вычислим поток вектора электрической индукции через поверхность R .

По теореме Гаусса

$$4\pi q = n^2 \int_P \mathbf{E} d\sigma + n^2 \int_S \mathbf{E} d\sigma \quad (\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} = n^2 \mathbf{E}). \quad (4.11)$$

Второй интеграл обращается в нуль из-за отсутствия поля в области III. Первый же интеграл сводится к сумме интегралов по внутренней части круга O (часть плоскости P , принадлежащая области I) и по самой окружности O . Интеграл по окружности мы обозначим через Φ_0 . Таким образом,

$$4\pi q = n^2 \int_{\rho < \rho_0} \mathbf{E} d\sigma + \Phi_0. \quad (4.12)$$

Используя то, что

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

а также (4.9), легко получить

$$n^2 \int_{\rho < \rho_0} \mathbf{E} d\sigma = n^2 \left(-\nabla \int_{\rho < \rho_0} \varphi d\sigma - \frac{\mathbf{v}}{c} \frac{n^2}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\rho > \rho_0} \varphi d\sigma \right) = -4\pi q. \quad (4.13)$$

Из (12) и (13) следует

$$\Phi_0 = 8\pi q. \quad (4.14)$$

То есть поток по поверхности конуса равен $8\pi q$. Из симметрии задачи следует, что электрическое поле должно быть направлено по образующей конуса и быть одинаковым во всех точках окружности O . Из (14) с учетом того, что

$$\rho_0 = \frac{vt - z}{\gamma},$$

найдем величину поля на поверхности конуса:

$$|\mathbf{E}| = \frac{4q\beta}{n(vt - z)} \delta \left(\rho - \frac{vt - z}{\gamma} \right). \quad (4.15)$$

Очевидно, что выражения (4.14) и (4.15) верны не только в случае остановки черенковского заряда, но и в случае его непрерывного движения в среде без дисперсии.

Применяя теорему Гаусса к замкнутым поверхностям, охватывающим элементы границ раздела областей I и II, II и III, аналогичным образом получим выражения для полей на этих границах:

$$\mathbf{E}_{I-II} = -e_0 \frac{qn}{ct \sin \theta} \left[2\beta \left(\frac{\cos \theta - \beta n}{\beta n \cos \theta - 1} + 1 \right) - \frac{1}{n^2} (1 + \cos \theta) \right] \delta(r - r_0) \quad (4.16)$$

при

$$\pi \geq \theta > \arccos \frac{1}{\beta n}, \quad r_0 = \frac{ct}{n}$$

и

$$E_{II-III} = e_0 \frac{q}{nct \sin \theta} (1 - \cos \theta) \delta(r - r_0) \quad (4.17)$$

$$\text{при } 0 \leq \theta < \arccos \frac{1}{\beta n};$$

здесь e_0 — полярный орт сферической системы координат с центром в точке $z = 0$.

Для того чтобы найти поля, возникающие при мгновенном старте в момент времени $t = 0$ из точки $z = 0$ черенковского заряда, нет необходимости вновь решать уравнения (4.1). Представим себе, что один заряд покоится в точке $z = 0$, а второй такой же движется со скоростью $v > c/n$ по оси z .

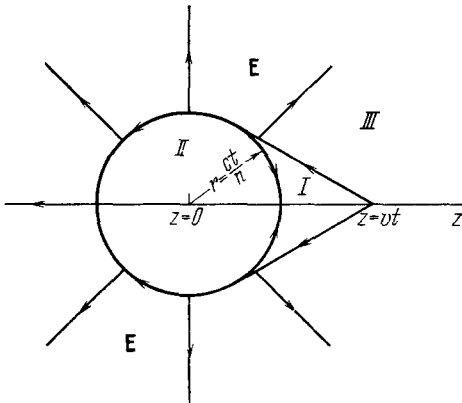


Рис. 4.

Пусть в тот момент, когда второй заряд будет находиться в точке $z = 0$, он мгновенно остановится, а первый заряд мгновенно начнет двигаться со скоростью v по оси z . Ясно, что картина останется стационарной, так как заряды неотличимы. Однако мы можем теперь получить выражения для полей стартующего заряда, вычитая из полей вышеописанной стационарной картины (т. е. из суммы черенковского и кулоновского полей) только что найденные поля остановки заряда. Легко видеть, что в случае старта пространство также разбивается на три области при $t > 0$ (рис. 4).

В области I ($r > (c/n)t$, $\rho < (vt - z)/\gamma$, $z > c^2 t / vn^2$) поле равно сумме поля (4.9) и кулоновского поля (4.10).

В области II ($r < (c/n)t$) потенциалы будут описываться формулой (4.9).

В области III, представляющей собой все пространство за вычетом обла-

стей I и II с их границами, поле чисто кулоновское (4.10).

Полученные результаты легко объяснимы. Действительно, во всей области II уже известно, что заряд стартовал, поэтому там установится поле равномерно движущегося черенковского заряда. В области I «сигнал» о старте заряда отстал от самого заряда, поэтому в ней поле представляет собой сумму кулоновского и черенковского полей.

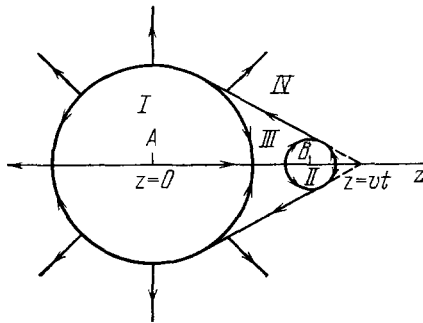


Рис. 5.

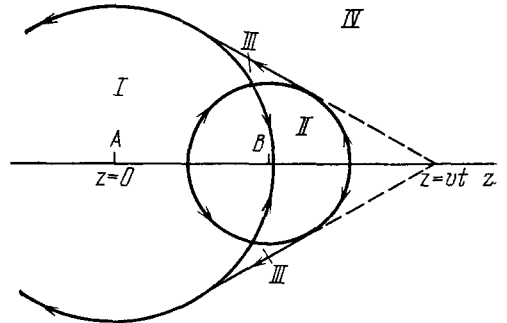


Рис. 6.

А в области III, где ничего не известно о старте заряда, поле будет оставаться чисто кулоновским, как от заряда q , продолжающего покоиться в начале координат.

Зная картину поля при мгновенном старте или мгновенной остановке черенковского заряда, мы можем теперь рассматривать пространственную картину поля в упомянутой выше задаче И. Е. Тамма (движение черенковского заряда на конечном отрезке пути).

Пусть точечный электрический заряд до момента времени $t = 0$ находился в покое, в момент времени $t = 0$ мгновенно ускорился до скорости v , превышающей фазовую скорость света c , и с этой скоростью двигался в течение промежутка времени T . При $t = T$ заряд мгновенно остановился.

Рассмотрим картину поля, созданного при таком движении заряда. Она изображена на рис. 5. На этом рисунке линия $AB = vt$ есть путь, пройденный зарядом. Из точки A , как из центра, расширяется со скоростью c/n сферическая оболочка, радиус

которой равен $(c/n) t$. Внутри этой оболочки (область I) поле совпадает с полем заряда, равномерно движущегося со скоростью $v > c/n$ (см. формулу (4.9)). Из точки B , как из центра, расширяется со скоростью c/n вторая сферическая оболочка, радиус которой равен $(c/n) (t - T)$. Мы рассматриваем картину поля после остановки заряда, так что $t > T$ и радиус второй сферы положителен. Внутри этой сферы поле равно полю кулоновского центра, покоящегося в точке B (область II). Область III представляет собой часть объема конуса, образующие которого являются касательными к сферам, ограничивающим области I и II. В этой области поле равно сумме двух полей: поля (4.9), создаваемого равномерно движущимся черенковским зарядом, и кулоновского поля, созданного зарядом, покоящимся в точке A . Наконец, в области IV, состоящей из всего остального пространства, поле равно кулоновскому полю заряда, покоящегося в точке A .

На рисунке изображены области поля в предположении, что сферы, расширяющиеся от начала и конца траектории, не перекрываются. Ясно, что рано или поздно эти сферы частично перекроются, т. е. появится пересечение областей I и II. В этой части пространства, общей для областей I и II, поле будет равно сумме двух полей: кулоновского поля заряда, покоящегося в точке B , и черенковского поля (4.9). Картина поля в этом случае изображена на рис. 6.

Авторы благодарны В. Л. Гинзбургу за полезные замечания.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля.— М.: Наука, 1973.— С. 124.
2. Парселл Э. Электричество и магнетизм.— М.: Наука, 1971.— С. 173—177.
3. Тамм И. Е. Собрание научных трудов.— М.: Наука, 1976.— С. 77.
4. Давыдов В. А., Рок В. Е.— В кн. Теория дифракции и распространения волн: VII Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн (Ростов-на-Дону, 1977). Краткие тексты докладов.— М.: 1977.— Т. 3, с. 333.
5. Франк И. М.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, т. 6, с. 3.
6. Аматауни А. Ц., Корхмазян Н. А.— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 1011.