1977 г. Сентябрь **Том 123, вып. 1**

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145

ОБОБЩЕННЫЕ КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИМЕНЕНИЯ

А. М. Переломов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Обычно в теоретической физике используются полные ортогональные системы состояний в гильбертовом пространстве. Так, например, в квантовой электродинамике расчеты строятся на основе стационарных состояний $|n\rangle$ гамильтониана поля $\mathscr{H}$. Эти состояния соответствуют наличию целого числа n квантов поля, т. е. удовлетворяют уравнению

$$\mathscr{H}\,|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)|n\rangle.$$

Они образуют полную ортогональную систему, которую обычно рассматривают как базис для разложения всех состояний поля. Так как фактически все электродинамические расчеты основаны на разложении по степеням напряженности поля, то фигурирующие в них числа фотонов обычно весьма малы.

С другой стороны, в классическом предельном случае квантовой электродинамики квантовые числа не только чрезвычайно велики, но и весьма неопределены. Например, если гармонический осциллятор колеблется в состоянии с относительно точно определенной фазой, то ему должно соответствовать большое квантовое число n, которое точно не определено ($\Delta n\,\Delta\varphi \geqslant 1$). Когерентные же квантовые состояния электромагнитного поля, т. е. состояния, для которых фаза поля определена точно, являются состояниями с принципиально неопределенным числом заполнения n.

Вычисление ожидаемых значений с помощью n-квантовых состояний становится в таких случаях весьма затруднительным

Состояния с неопределенным числом фотонов, естественно возникающие при рассмотрении корреляционных и когерентных свойств поля, получили название когерентных состояний (КС) *). Такое состояние характеризуется комплексным числом $\alpha = |\alpha| e^{i\varphi}$, и его разложение по n-квантовым состояниям имеет вид

$$|\alpha\rangle = e^{-(1/2)|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{В.1}$$

Когерентное состояние $|\alpha>$ описывает нерасплывающийся волновой пакет для осциллятора, причем величина $|\alpha|$ задает амплитуду колебаний, а φ — фазу колебаний.

Необычным свойством этой системы является неортогональность когерентных состояний друг другу; кроме того, система КС является сверхполной, т. е. содержит больше состояний, чем это необходимо для разложения произвольного состояния. Поэтому при работе с этой системой нельзя использовать стандартные методы; однако удается развить удобный аппарат, позволяющий разложить произвольное состояние по когерентным состояниям и использовать их для описания операторов, например, матрицы плотности.

Система когерентных состояний обладает рядом замечательных свойств. Так, например, разлагая поле по этим состояниям, мы можем легко перейти к классическому пределу, оставаясь все время в квантовой области.

Это связано с тем, что, поскольку когерентные состояния минимизируют соотношение неопределенностей Гейзенберга $\Delta p\, \Delta q \geqslant \hbar/2$ (для них $\Delta p\, \Delta q = \hbar/2$), они являются квантовыми состояниями, свойства которых наиболее близки к классическим. КС тесно связаны с бозонным полем и тем самым с бозонными операторами рождения a^+ и уничтожения a. Напомним, что эти операторы и единичный оператор I удовлетворяют хорошо известным перестановочным соотношениям

$$[a, a^+] = I, \quad [a, I] = [a^+, I] = 0 \tag{В.2}$$

и, следовательно, образуют трехпараметрическую алгебру Ли. Соответствующая ей группа W_1 является группой преобразований вида $T(g) = e^{it} e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a}$, $g = (t, \alpha)$, и называется группой Гейзенберга — Вейля. При этом КС $|\alpha\rangle$ получается путем действия оператора $T(g)$ на вакуумный вектор $|0\rangle$ **):

$$T(g)|0\rangle = e^{it}|\alpha\rangle, \qquad |\alpha\rangle = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a}|0\rangle. \tag{В.3}$$

В соответствии с этим метод когерентных состояний особенно эффективно работает в тех случаях, когда группа Гейзенберга — Вейля является группой динамической симметрии рассматриваемого гамильтониана. Такова, например, задача о квантовом осцилляторе, находящемся под действием переменной внешней силы. В этом случае гейзенберговские

---

*) Система когерентных состояний была впервые использована Шрёдингером [1] в 1926 г. для описания нерасплывающихся волновых пакетов осциллятора. Понятие когерентного состояния введено Глаубером [2], показавшим, что использование системы КС дает возможность адекватного квантового описания когерентного пучка света лазера. Свойства этой системы детально рассмотрены в работах [3–5]. Там же можно найти ссылки на многочисленные оригинальные работы, относящиеся к этой проблеме.

**) Так называется вектор, удовлетворяющий условию $a|0\rangle = 0$.

уравнения движения совпадают с соответствующими уравнениями для классических величин. При этом когерентное состояние в процессе эволюции остается когерентным, а движение точки, соответствующей КС на α-плоскости, описывается классическими уравнениями. Это дает возможность существенно упростить квантовую задачу, сведя ее к более простой классической.

Такие состояния хорошо подходят для описания систем взаимодействующих частиц, у которых возбуждения с низкой энергией являются бозонными модами и обладают высокими числами заполнения. Эти возбуждения ведут себя в некотором смысле классически. Таким образом, когерентные состояния играют роль классических полей, которые описывают систему многих бозонов в целом, так же как классическое электромагнитное поле описывает классический предел квантовой электродинамики. Поэтому не удивительно, что система КС в последнее десятилетие получила широкое распространение не только в квантовой оптике и радиофизике, но и в ряде других разделов физики, например в теории сверхтекучести. Ею пользуются также для описания спиновых волн в гейзенберговской модели ферромагнетизма, в квантовой электродинамике для описания облака мягких фотонов вокруг заряженных частиц, в нелинейных теориях поля для приближенного квантового описания локализованных состояний (солитонов).

Однако группа Гейзенберга — Вейля не является универсальной и во многих случаях мы встречаемся с другими группами динамической симметрии. Возникает вопрос: существуют ли системы состояний, обладающие аналогичными свойствами для других групп Ли? Положительный ответ на этот вопрос дан в работе [6], в которой была построена и исследована система обобщенных когерентных состояний для произвольной группы Ли *).

В основу построения системы обобщенных когерентных состояний положено соотношение

$$|\psi_g\rangle = T(g)\,|\psi_0\rangle, \tag{B.4}$$

где $T(g)$ — представление группы G, $|\psi_0\rangle$ — фиксированный вектор в пространстве, в котором действует представление $T(g)$. Множество $\{|\psi_g\rangle\}$ и является множеством обобщенных когерентных состояний.

Теория оказывается содержательной в том случае, когда $T(g)$ — унитарное неприводимое представление и соответствующее пространство является гильбертовым пространством. Очевидно, что множество когерентных состояний инвариантно относительно действия операторов $T(g)$, или, иными словами, оператор $T(g)$ переводит одно когерентное состояние в другое. Это свойство характерно именно для систем обобщенных КС, определенных согласно работе [6].

Так как обычная система когерентных состояний подробно изучена в обзорах [3-5], настоящий обзор будет посвящен рассмотрению систем обобщенных когерентных состояний, связанных с простейшими группами, отличными от группы Гейзенберга — Вейля.

Обобщенные КС обладают всеми свойствами обычных КС. В ряде случаев они являются квантовыми состояниями, свойства которых

*) В более ранней работе [7] сделана попытка обобщить понятие КС иным путем. Однако предложенный способ применим не ко всем группам Ли и, в частности, не годится для компактных групп. Кроме того, в отличие от работы [6], множество состояний в работе [7] неинвариантно относительно действия операторов представления группы. Частный случай группы вращений трехмерного пространства рассмотрен в работе [8]. Построенная в [8] система состояний совпадает с соответствующей системой КС работы [6].

наиболее близки к классическим, и поэтому осуществляют переход от классического случая к квантовому наиболее естественным образом.

Так, например, выбирая в случае представления $T^j(g)$ (j — целое или полуцелое неотрицательное число) группы вращений трехмерного пространства в качестве $|\psi_0\rangle$ состояние $|j, -j\rangle$ (или $|j, j\rangle$) с минимальной (максимальной) проекцией момента количества движения на ось z, получаем систему спиновых когерентных состояний, впервые рассмотренную в работе [8]. Такое состояние $|\zeta\rangle$, как и обычное КС, задается комплексным числом ζ, а его разложение по системе $\{|j, \mu\rangle\}$ с определенной проекцией момента количества движения на ось z имеет вид

$$|\zeta\rangle=(1+|\zeta|^2)^{-j}\sum_{\mu=-j}^{j}\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+\mu)!\,(j-\mu)!}}\,\zeta^{j+\mu}\,|j, \mu\rangle. \tag{B.5}$$

Отметим, что ζ-плоскость является стереографической проекцией двумерной сферы $S^2=\{\mathbf{n}:\mathbf{n}^2=1\}$ и в данном случае играет ту же роль, что и α-плоскость для осциллятора, т. е. является фазовой плоскостью для спина.

С помощью этой системы в работе [50] получены оценки для статистической суммы квантовой системы спинов. В работах [27], [51], [52] такие состояния были применены в так называемой модели Дике [53], описывающей взаимодействие излучения с веществом, состоящим из двухуровневых молекул. Именно с их помощью описан фазовый переход из обычного состояния в сверхизлучательное [54], когда интенсивность излучения системы пропорциональна квадрату числа молекул в системе.

Как показано в работе [55], с помощью спиновых КС можно очень просто получить производящую функцию для коэффициентов Клебша — Гордана трехмерной группы вращений.

В настоящем обзоре метод КС проиллюстрирован на двух примерах: 1) решена задача о движении спина в переменном магнитном поле; 2) рассмотрена задача о релаксации частицы со спином, находящейся в магнитном поле, к положению термодинамического равновесия. В последнем примере спиновые КС дают возможность свести уравнение для матрицы плотности к уравнению Фоккера — Планка на двумерной сфере $S^2=\{\mathbf{n}:\mathbf{n}^2=1\}$.

В разделах а) и б) гл. 1 обзора рассмотрена система КС для трехмерной группы Лоренца — группы $SO(2,1)$, как известно, изоморфной группе $SU(1,1)$ — группе матриц второго порядка, оставляющих инвариантной форму $|z_1|^2-|z_2|^2$. Эта группа имеет несколько серий унитарных неприводимых представлений: основную, дискретную и дополнительную. В соответствии с этим можно построить несколько систем КС, связанных с этой группой.

В обзоре рассмотрены лишь системы КС, связанные с представлениями дискретной серии, причем особенно подробно системы КС, связанные с теми представлениями дискретной серии, которые можно реализовать с помощью бозонных операторов рождения и уничтожения. Такие представления задаются числом k, $0<k<\infty$, а соответствующие КС $|\zeta\rangle$ определяются комплексным числом ζ ($|\zeta|<1$). Разложение КС по ортонормированному базису $\{|k, \mu\rangle$, $\mu=k+m$, $m=0, 1, 2, \ldots\}$ имеет вид

$$|\zeta\rangle=(1-|\zeta|^2)^k\sum_{m=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\Gamma(m+2k)}{m!\,\Gamma(2k)}}\,\zeta^m\,|k, k+m\rangle. \tag{B.6}$$

В данном случае КС задается точкой единичного круга, который является фазовой плоскостью для данной задачи и может рассматриваться как плоскость Лобачевского.

Отметим, что, помимо представлений дискретной серии для трехмерной группы Лоренца и других некомпактных групп (т. е. групп с бесконечным инвариантным объемом), существуют непрерывные (основные) серии представлений. Соответствующие системы КС подробно изучены в работах [11, 12]. Для группы Лоренца эти КС осуществляют преобразование с гиперболоида на конус, впервые рассмотренное Шапиро [31]. В обзоре эти системы рассматриваться не будут.

В разделе в) гл. 2 КС, связанные с представлениями дискретной серии, использованы для решения двух задач. Первая задача — параметрическое возбуждение квантового осциллятора — подробно рассмотрена в работах [30], [72–75]. Использование системы КС для дискретной серии группы $SU(1,1)$ дает возможность упростить ее решение. В качестве второй задачи с помощью КС рассмотрена модель Боголюбова [76] слабонеидеального бозе-газа.

Отметим, что КС, рассмотренные в этом разделе, удобно использовать при решении задач, связанных с нахождением спектра и волновых функций гамильтониана, квадратичного по операторам рождения и уничтожения бозонов. Такие КС возникают, например, при рассмотрении рождения пар частиц нулевого спина в однородном переменном электрическом поле или же в гравитационном поле расширяющейся Вселенной [63].

В работах [63, 69] показано, что в задаче о рождении пар частиц спина S возникают КС, связанные с группой $SU\,(2S+1{,}2S+1)$ при целом S и с группой $SU\,(2\,(2S+1))$ при полуцелом S. В исключительном случае $S=1/2$ возникают КС, связанные с группой $SO\,(5)$ [71]. Отметим, что задача о рождении пар частиц спина 0 и 1/2 подробно разобрана в работах [63–71].

Когерентные состояния оказались также полезными и при рассмотрении ряда математических вопросов теории представлений групп Ли. Однако в настоящем обзоре эти вопросы рассматриваться не будут. Отметим лишь, что свойствами, аналогичными свойствам систем, изученным в первой части обзора, обладает класс систем обобщенных КС, связанных с широким классом представлений групп Ли. Это справедливо, в частности, для всех представлений компактных полупростых групп и представлений дискретной серии полупростых групп Ли. Общая теория таких систем КС для случая дискретной серии изложена в работе [10], а для случая основной (непрерывной) серии — в работах [11, 12].

1. СВОЙСТВА СИСТЕМЫ ОБОБЩЕННЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

а) Обычная система когерентных состояний и ее связь с группой Гейзенберга — Вейля

В этом разделе рассмотрены свойства определенной сверхполной и неортогональной системы состояний — системы так называемых обычных когерентных состояний (КС) *). После установления связи системы КС

*) Обычные КС в координатном представлении описывают нерасплывающиеся волновые пакеты для осциллятора и с этой точки зрения рассматривались Шрёдингером в 1926 г. [1]. Несколько позже в известной книге фон Неймана [14] была рассмотрена важная подсистема КС, связанная с разбиением фазовой плоскости на правильные ячейки, использованная им для анализа процесса измерения. После тридцатилетнего перерыва свойства системы КС начали изучаться вновь (см. работы [15–18]). Отметим важную работу Глаубера [2], где было введено само понятие КС и было показано, что КС являются адекватным аппаратом для квантового описания когерентного пучка света лазера. Детальное рассмотрение свойств обычной системы КС для конечного числа степеней свободы, а также ссылки на многочисленные работы по этому вопросу можно найти в работах [2–5]. Случай бесконечного числа степеней свободы рассмотрен в [17,18] и многочисленных статьях в журнале «Communications in Mathematical Physics».

с группой Гейзенберга — Вейля [13] важнейшие свойства этой системы получаются при помощи методов теории групп. Для простоты мы ограничимся рассмотрением случая одной степени свободы (случай конечного числа степеней свободы вносит лишь незначительные технические усложнения). Читатель, интересующийся приложениями, может сразу же после этого раздела перейти к разделу а) гл. 2.

Обычно (см., например, [2-4]) когерентное состояние $|\alpha\rangle$ определяют как собственное состояние бозонного оператора уничтожения

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \tag{1.1}$$

Отсюда следует, что при любом комплексном α такое состояние существует и его разложение по n-квантовым состояниям $|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^+)^n|0\rangle$ (образующим обычный ортонормированный базис; здесь $|0\rangle$ — вакуумное состояние: $a|0\rangle = 0$) имеет вид

$$|\alpha\rangle = e^{-(1/2)|\alpha|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle. \tag{1.2}$$

Таким образом, обычное КС полностью характеризуется комплексным числом α. Отсюда можно получить дальнейшие свойства системы КС. Однако таким путем нельзя построить систему КС для произвольной группы Ли *). Поэтому строить систему КС мы будем, следуя общей схеме работы [6]. При таком подходе, как будет видно из дальнейшего (см. разделы б), в)), можно легко перейти к построению системы обобщенных КС для произвольной группы Ли.

Начнем с установления связи обычной системы КС с так называемой группой Гейзенберга — Вейля. Напомним, что операторы рождения и уничтожения бозона $a^+ = (\hat{q} - i\hat{p})/\sqrt{2\hbar}$, $a = (\hat{q} + i\hat{p})/\sqrt{2\hbar}$ ($\hbar$ — постоянная Планка, $\hat{q}$ и $\hat{p}$ — операторы координаты и импульса) и единичный оператор I удовлетворяют перестановочным соотношениям Гейзенберга

$$[a, a^+] = I, \qquad [a, I] = [a^+, I] = 0 \tag{1.3}$$

и, следовательно, образуют алгебру Ли W_1. Это и есть алгебра Гейзенберга — Вейля.

Общий элемент этой алгебры имеет вид

$$tI + i(\bar{\alpha}a - \alpha a^+), \tag{1.4}$$

где t — вещественное, а α — комплексное число. Отсюда следует, что операторы

$$T(t, \alpha) = e^{it}D(\alpha), \qquad D(\alpha) = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha}a} \tag{1.5}$$

образуют группу. Для нахождения закона перемножения операторов $D(\alpha)$ воспользуемся известным тождеством (см., например, [3])

$$e^A e^B = e^{(1/2)[A,\,B]} e^{A+B}, \tag{1.6}$$

справедливым при выполнении условий

$$[A[A, B]] = [B[A, B]] = 0. \tag{1.7}$$

Отсюда получаем

$$D(\alpha) D(\beta) = e^{i\,\mathrm{Im}(\alpha\bar{\beta})} D(\alpha + \beta). \tag{1.8}$$

Таким образом, мы приходим к трехпараметрической группе W_1, впервые рассмотренной Г. Вейлем [13], — группе Гейзенберга — Вейля.

*) Для некоторых групп Ли можно определить [7] систему состояний формулами типа (1.1). Этот способ, однако, применим не ко всем группам Ли и, в частности, непригоден для компактных групп. Кроме того, рассмотренное в работе [7] множество состояний неинвариантно относительно действия операторов представления группы.

Элемент g этой группы определяется действительным числом t и комплексным числом α:

$$g = (t, \alpha), \tag{1.9}$$

а закон умножения в W_1 имеет вид

$$(s, \alpha)(t, \beta) = (s + t + \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta}), \alpha + \beta). \tag{1.10}$$

Операторы $T(g) = T(t, \alpha)$ действуют в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и образуют унитарное неприводимое представление группы W_1. Согласно теореме фон Неймана [19] любые два унитарных неприводимых представления $T_1(g)$ и $T_2(g)$ группы W_1, удовлетворяющие условию $T_1(t, 0) = T_2(t, 0)$, унитарно эквивалентны. Это значит, что существует унитарный оператор U такой, что $T_1(g) = UT_2(g)U^+$. Иными словами, группа W_1 допускает, по существу, единственное унитарное неприводимое представление.

Перейдем к построению системы когерентных состояний, связанной с группой W_1. Выберем в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ какой-либо фиксированный вектор $|\psi_0\rangle$. Действуя на него операторами $T(g)$, получаем множество состояний $\{|\alpha\rangle\}$:

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|\psi_0\rangle, \tag{1.11}$$

которое и является множеством когерентных состояний *).

В случае обычной системы когерентных состояний ($|\psi_0\rangle = |0\rangle$) нетрудно получить разложение когерентного состояния по ортонормированному базису. Для этого с помощью тождества (1.6) запишем оператор $D(\alpha)$ в нормальном виде:

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^+ - \bar{\alpha} a} = e^{-(1/2)|\alpha|^2} e^{\alpha a^+} e^{-\bar{\alpha} a}. \tag{1.12}$$

Из этого выражения для обычного КС получаем

$$|\alpha\rangle = e^{-(1/2)|\alpha|^2} e^{\alpha a^+}|0\rangle, \tag{1.13}$$

откуда следует разложение (1.2).

Рассмотрим теперь преобразование операторов алгебры W_1 под действием группы W_1. Нетрудно показать, что

$$\begin{aligned} T(t, \alpha)\, aT^+(t, \alpha) &= D(\alpha)\, aD^+(\alpha) = a - \alpha I, \\ T(t, \alpha)\, a^+T^+(t, \alpha) &= D(\alpha)\, a^+D^+(\alpha) = a^+ - \bar{\alpha} I. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Применяя первое из соотношений (1.14) к обычному когерентному состоянию $|\alpha\rangle$, приходим к (1.1). Таким образом, определения КС с помощью (1.11) и (1.1) в данном случае эквивалентны.

---

*) При выборе в качестве $|\psi_0\rangle$ вакуумного вектора $|0\rangle$, т. е. вектора, удовлетворяющего условию $a|0\rangle = 0$, мы получаем обычную систему когерентных состояний. Как мы увидим в дальнейшем, большая часть свойств системы обычных когерентных состояний остается справедливой и для общей системы когерентных состояний.

Мы видим, что когерентное состояние задается комплексным числом α, т. е. зависит от двух параметров, в то время как элемент $g = (t, \alpha)$ группы W_1 определяется тремя параметрами. Это уменьшение числа параметров связано с тем обстоятельством, что существуют преобразования $T(h)$, не меняющие состояния $|\psi_0\rangle$: $T(h)|\psi_0\rangle = e^{(i\varphi)}|\psi_0\rangle$. Очевидно, что множество $\{h\}$ элементов группы W_1, обладающих этим свойством, образует подгруппу H группы W_1. Эту подгруппу назовем стационарной подгруппой состояния $|\psi_0\rangle$. Нетрудно видеть, что в рассматриваемом случае стационарная подгруппа любого состояния $|\psi_0\rangle$ состоит из элементов вида $h = (t, 0)$. Отсюда следует, что операторы $T(g)$ и $T(gh)$, действуя на вектор $|\psi_0\rangle$, приводят к одному и тому же состоянию. Но элементы вида gh при фиксированном g и h, пробегающем всю подгруппу H, определяют класс смежности группы G по подгруппе H (элемент фактор-пространства $X = G/H$ группы G по подгруппе H). Поэтому когерентное состояние определяется точкой фактор-пространства $X = G/H$, которое в рассматриваемом случае является плоскостью комплексного переменного α.

Полученная система когерентных состояний обладает рядом замечательных свойств. Рассмотрим некоторые из них:

1) Оператор представления $T(g) = T(t, \alpha)$ переводит одно когерентное состояние в другое:

$$T(t, \alpha) \mid \beta \rangle = e^{i\varphi} \mid \beta + \alpha \rangle, \qquad \varphi = t + \operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta}). \tag{1.15}$$

2) Система когерентных состояний полна. Это следует из неприводимости представления $T(g)$. Действительно, поскольку оператор $T(g)$ переводит одно КС в другое, то множество КС образует инвариантное подпространство в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. В силу неприводимости представления линейная оболочка векторов этого подпространства должна совпадать со всем пространством $\mathcal{H}$, а это и означает, что система КС полна.

3) Система когерентных состояний неортогональна:

$$\langle \alpha \mid \beta \rangle = e^{i\varphi} \langle \psi_0 \mid D(\beta - \alpha) \mid \psi_0 \rangle, \qquad \varphi = \operatorname{Im}(\bar{\alpha}\beta). \tag{1.16}$$

Заметим, что фаза φ равна удвоенной площади треугольника с вершинами в точках 0, α и β:

$$\varphi = 2A(0, \alpha, \beta). \tag{1.17}$$

Для системы обычных КС формула (1.16) упрощается:

$$\begin{aligned} \langle \alpha \mid \beta \rangle &= \exp\left[-\frac{1}{2} (|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\bar{\alpha}\beta) \right], \\ |\langle \alpha \mid \beta \rangle|^2 &= \exp(-|\alpha - \beta|^2). \end{aligned} \tag{1.18}$$

4) Получим важное тождество — так называемое разложение единицы *). Рассмотрим оператор

$$\hat{A} = \int d^2\alpha \mid \alpha \rangle \langle \alpha \mid, \tag{1.19}$$

где $d^2\alpha = d\alpha_1\, d\alpha_2$, $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$, $|\alpha\rangle \langle \alpha|$ — проекционный оператор на состояние $|\alpha\rangle$.

Нетрудно проверить, что этот оператор коммутирует со всеми операторами $T(g)$. Следовательно, в силу леммы Шура этот оператор кратен единичному:

$$\hat{A} = c\hat{I}. \tag{1.20}$$

Усредняя обе части этого равенства по состоянию $|\beta\rangle$, для нормировочной постоянной получаем выражение

$$c = \int |\langle \alpha \mid \beta \rangle|^2 d^2\alpha = \int e^{-|\alpha-\beta|^2} d^2\alpha = \pi. \tag{1.21}$$

Теперь разложение единицы для обычной системы КС принимает вид

$$\int |\alpha\rangle \langle \alpha | \, d\mu(\alpha) = \hat{I}, \qquad d\mu(\alpha) = \frac{1}{\pi} d^2\alpha. \tag{1.22}$$

5) Заметим, что, как следует из соотношения (1.1) и выражений $\alpha = (q + ip)\sqrt{2\hbar}$, $a = (\hat{q} + i\hat{p})/\sqrt{2\hbar}$, α-плоскость является фазовой плоскостью рассматриваемой задачи. Разложение единицы в переменных q и p теперь принимает «квазиклассический» вид ($|\alpha\rangle \equiv |p, q\rangle$):

$$\int \frac{dp\, dq}{2\pi\hbar} |p, q\rangle \langle p, q| = \hat{I}. \tag{1.22'}$$

---

*) Впервые это соотношение было получено иным способом в работе [15].

6) Нетрудно доказать (см., например, [5]), что величина $\Delta p\, \Delta q$, входящая в соотношение неопределенностей Гейзенберга

$$\Delta p\, \Delta q \geqslant \frac{\hbar}{2}, \tag{1.23}$$

для всех КС фиксированной системы (в отличие от состояний ортонормированной системы) одна и та же, т. е. определяется величиной $(\Delta p)_0 (\Delta q)_0$ для состояния $|\psi_0\rangle$:

$$(\Delta p)_\alpha\, (\Delta q)_\alpha = (\Delta p_0)\, (\Delta q)_0. \tag{1.24}$$

Отметим еще, что обычные когерентные состояния минимизируют соотношение неопределенностей Гейзенберга *)

$$(\Delta p)_\alpha\, (\Delta q)_\alpha = \frac{\hbar}{2} \tag{1.25}$$

и поэтому являются квантовыми состояниями, наиболее близкими к классическим.

7) Система КС $\{|\, p,\, q\rangle\}$ сверхполна. Это значит, что существуют подсистемы КС, являющиеся полными. Рассмотрим следующий важный класс подсистем. Разобьем фазовую плоскость $(p,\, q)$ на правильные ячейки площади S и выберем в центре каждой из них по когерентному состоянию. Получим подсистему $\{|\,\{p,\, q\}_{mn}\rangle\}$, рассмотренную еще фон Нейманом [14].

Полное решение вопроса о полноте таких подсистем дано в работах [20, 21] **). Оказывается, что:

а) при $S < 2\pi\hbar$ эта подсистема является сверхполной и остается таковой при выбрасывании конечного числа состояний;

б) при $S > 2\pi\hbar$ эта подсистема не полна;

в) при $S = 2\pi\hbar$ эта подсистема полна. Она остается полной при выбрасывании одного состояния, но становится неполной при выбрасывании двух любых состояний.

Эти результаты подтверждают фундаментальную важность разбиения фазовой плоскости на планковские ячейки.

8) С помощью разложения единицы (1.22) мы можем разложить произвольное состояние $|\,\psi\rangle$ по когерентным состояниям, а именно:

$$|\,\psi\rangle = \int d\mu\,(\alpha)\, \psi\,(\bar{\alpha})\,|\,\alpha\rangle, \text{ где } \psi\,(\bar{\bar{\alpha}}) = \langle\alpha\,|\,\psi\rangle. \tag{1.26}$$

Функцию $\psi\,(\bar{\alpha})$ можно назвать символом вектора $|\psi\rangle$. При этом, как нетрудно видеть,

$$\langle\psi_1\,|\,\psi_2\rangle = \int \overline{\psi_1}\,(\bar{\alpha})\, \psi_2\,(\bar{\alpha})\, d\mu\,(\alpha). \tag{1.27}$$

9) Для обычной системы когерентных состояний

$$\psi\,(\bar{\alpha}) = e^{-(1/2)\,|\alpha|^2} \tilde{\psi}\,(\bar{\alpha}), \tag{1.28}$$

где $\tilde{\psi}\,(\bar{\alpha})$ — целая функция переменной $\bar{\alpha}$. Соотношение (1.27) теперь принимает вид

$$\langle\psi_1\,|\,\psi_2\rangle = \int \overline{\tilde{\psi}_1}\,(\bar{\alpha})\, \tilde{\psi}_2\,(\bar{\alpha})\, e^{-|\alpha|^2}\, d\mu\,(\alpha). \tag{1.27'}$$

Такая реализация гильбертова пространства называется представлением Фока — Баргмана [22, 16].

*) Однако эти состояния не исчерпывают всех состояний, минимизирующих соотношение неопределенностей Гейзенберга.

**) В работе [21] не был рассмотрен вопрос о том, насколько переполнена система при $S = 2\pi\hbar$.

Приведем выражения для символов обычного ортонормированного базиса $|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^+)^n|0\rangle$. Нетрудно видеть, что

$$\tilde{\psi}_n(\bar{\alpha}) = \frac{\bar{\alpha}^n}{\sqrt{n!}}, \tag{1.29}$$

т. е. для $\hat{\psi}_n(\bar{\alpha})$ мы получаем значительно более простое выражение по сравнению с выражением для $\psi_n(q) = (\pi\hbar)^{-1/4}(2^n n!)^{-1/2} H_n(q/\sqrt{\hbar})$ в координатном представлении.

10) Когерентные состояния удобно также использовать и для описания операторов. С их помощью оператору можно поставить в соответствие функцию, которая полностью определяет этот оператор. Эту функцию мы будем называть символом оператора.

Пусть $\hat{A}$ — некоторый оператор; поставим ему в соответствие функции

$$A(\bar{\alpha}, \beta) = \langle\alpha|\hat{A}|\beta\rangle \tag{1.30}$$

и

$$Q_A(\alpha) = A(\bar{\alpha}, \alpha) = \langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle. \tag{1.31}$$

Функция (1.30) полностью определяет оператор $\hat{A}$. Действительно, как следует из разложения единицы,

$$\hat{A} = \int A(\bar{\alpha}, \beta)|\alpha\rangle\langle\beta|\, d\mu(\alpha)\, d\mu(\beta). \tag{1.32}$$

При этом действие оператора $\hat{A}$ на вектор $|\psi\rangle$ $(A|\psi\rangle = |\varphi\rangle)$ дается формулой

$$\varphi(\bar{\alpha}) = \int A(\bar{\alpha}, \beta)\,\psi(\bar{\beta})\, d\mu(\beta). \tag{1.33}$$

В случае обычной системы когерентных состояний можно показать (см., например, [5]), что уже функция $Q_A(\alpha)$ полностью определяет оператор $\hat{A}$. Заметим, что в ряде случаев оператор $\hat{A}$ можно представить в виде

$$\hat{A} = \int P_A(\bar{\alpha}, \alpha)\,|\alpha\rangle\langle\alpha|\, d\mu(\alpha). \tag{1.34}$$

Такое представление оператора рассматривалось еще в работах [2, 24] и было детально изучено в работе [23]. Следуя последней работе, мы будем называть функции $Q_A(\alpha)$ и $P_A(\alpha)$ ковариантным и, соответственно, контравариантным символами оператора A. Эти два символа связаны соотношением

$$Q_A(\alpha) = \int |\langle\alpha|\beta\rangle|^2 P_A(\beta)\, d\mu(\beta), \tag{1.35}$$

которое для обычной системы когерентных состояний принимает более простой вид:

$$Q_A(\alpha) = \int e^{-|\alpha-\beta|^2} P_A(\beta)\, d\mu(\beta). \tag{1.36}$$

Ядро, связывающее эти два оператора, является сглаживающим ядром, поэтому задание функции $P_A(\alpha)$ определяет функцию $Q_A(\alpha)$. Обратное же возможно не всегда; могут существовать операторы, обладающие Q-представлением, но не имеющие P-представления. Установим связь P- и Q-символов оператора с так называемой нормальной и антинормальной формой записи оператора.

Напомним, что нормальной или виковской формой записи оператора называется представление его в виде ряда

$$\hat{A} = \sum A_{mn}(a^+)^m a^n, \tag{1.37}$$

в котором операторы $(a^+)^m$ стоят слева от операторов a^n. При этом, как нетрудно видеть,

$$Q_A(\bar{\alpha}, \alpha) = \langle\alpha | A | \alpha\rangle = \sum A_{mn}\bar{\alpha}^m\alpha^n. \tag{1.38}$$

Следовательно, разложение функции $Q_A(\bar{\alpha}, \alpha)$ по степеням $\bar{\alpha}$ и α определяет коэффициенты A_{mn} в нормальной форме записи оператора $\hat{A}$.

Аналогично разложение функции $P_A(\bar{\alpha}, \alpha)$ по степеням α и $\bar{\alpha}$

$$P_A(\bar{\alpha}, \alpha) = \sum A^{(1)}_{mn}\alpha^m\bar{\alpha}^n \tag{1.39}$$

дает коэффициенты $A^{(1)}_{mn}$ в антинормальной (антивиковской) форме записи оператора $\hat{A}$:

$$\hat{A} = \sum A^{(1)}_{mn} a^m (a^+)^n. \tag{1.40}$$

Из соотношений (1.31), (1.34) нетрудно получить также весьма полезные формулы для следа оператора $\hat{A}$:

$$\operatorname{Sp}\hat{A} = \int P_A(\alpha)\, d\mu(\alpha) = \int Q_A(\alpha)\, d\mu(\alpha). \tag{1.41}$$

Таким образом, след оператора представляется в виде интеграла от его символов по всему фазовому пространству.

В качестве примера применения формулы (1.41) вычислим след оператора $D(\gamma)$. Нетрудно видеть, что оператору $D(\gamma)$ отвечают символы

$$P(\alpha) = e^{(1/2)|\gamma|^2} e^{\gamma\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\alpha}, \qquad Q(\alpha) = e^{-(1/2)|\gamma|^2} e^{\gamma\bar{\alpha} - \bar{\gamma}\alpha}. \tag{1.42}$$

Отсюда получаем

$$\operatorname{Sp} D(\gamma) = e^{-(1/2)|\gamma|^2} \int e^{2i \operatorname{Im}(\gamma\bar{\alpha})}\, d\mu(\alpha) = \pi\delta^2(\gamma) = \pi\delta(\gamma_1)\,\delta(\gamma_2), \tag{1.43}$$
$$\gamma = \gamma_1 + i\gamma_2.$$

Из (1.43), в частности, следуют важные соотношения:

$$\frac{1}{\pi} \operatorname{Sp}[D(\alpha) D^{-1}(\beta)] = \delta^2(\alpha - \beta), \tag{1.44}$$

$$\hat{F} = \int d\mu(\eta) \operatorname{Sp}(D(\eta)\hat{F}) D^{-1}(\eta). \tag{1.45}$$

С помощью символов нетрудно получить также явное выражение для матричных элементов оператора $D(\gamma)$. Именно, из (1.42) находим выражение для функции G:

$$G(\bar{\alpha}, \beta; \gamma) = e^{(|\alpha|^2 + |\beta|^2)/2} \langle\alpha | D(\gamma) | \beta\rangle = e^{-(1/2)|\gamma|^2} e^{\bar{\alpha}\beta + \bar{\alpha}\gamma - \beta\bar{\gamma}}. \tag{1.46}$$

С другой стороны, это выражение равно

$$G(\bar{\alpha}, \beta; \gamma) = \sum_{m, n} \frac{\bar{\alpha}^m}{\sqrt{m!}} \frac{\beta^n}{\sqrt{n!}} D_{mn}(\gamma). \tag{1.47}$$

Следовательно, функция $G(\bar{\alpha}, \beta; \gamma)$ является производящей функцией для матричных элементов оператора $D(\gamma)$. Остается разложить выражение (1.46) в ряд по степеням $\bar{\alpha}$ и β. При этом получаем формулу Швингера [25] *)

$$D_{mn}(\gamma) = \begin{cases} \sqrt{\dfrac{m!}{n!}}\, e^{-|\gamma|^2/2} (-\bar{\gamma})^{n-m} L_m^{(n-m)}(|\gamma|^2), & n \geqslant m, \\ \sqrt{\dfrac{n!}{m!}}\, e^{-|\gamma|^2/2} (\gamma)^{m-n} L_n^{(m-n)}(|\gamma|^2), & n \leqslant m, \end{cases} \tag{1.48}$$

где $L_n^{(k)}(x)$ — полином Лагерра.

*) Вывод этой формулы, а также ряда свойств полиномов Лагерра можно найти в приложении к работе [5].

Отметим, что ранее, но в несколько в ином виде формула (1.48) была получена в работе Фейнмана [26].

б) Когерентные состояния для группы вращений трехмерного пространства (спиновые когерентные состояния)

Система КС для группы вращений трехмерного пространства *) — группы $SO(3)$ — была впервые рассмотрена в работе [8]. Свойства системы таких состояний изучались в работах [8, 6, 27]. В этом разделе мы будем следовать общей схеме работы [6] (ср. с предыдущим разделом). Применения спиновых КС будут рассмотрены в разделе б) гл. 2.

Напомним сначала хорошо известные факты.

Рассмотрим частицу со спином j. Тогда состояния $|j, \mu\rangle$ с определенной проекцией спина μ $(-j \leqslant \mu \leqslant j)$ на ось x_3 образуют базис в пространстве унитарного неприводимого представления $T^j(g)$ группы $SO(3)$. Инфинитезимальные операторы $J_\pm = J_1 \pm iJ_2$, $J_0 = J_3$ представления $T^j(g)$ удовлетворяют стандартным перестановочным соотношениям

$$[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_-, J_+] = -2J_0. \tag{1.49}$$

Действуя на фиксированный вектор $|\psi_0\rangle$, в качестве которого нам будет удобно выбрать вектор $|j, -j\rangle$, операторами $T^j(g)$, в соответствии с [6] получаем искомую систему когерентных состояний.

Как хорошо известно, оператор $T^j(g)$ можно представить в виде $T^j(g) = e^{-i\varphi J_3}\, e^{-i\theta J_2}\, e^{-i\psi J_3}$. Отсюда следует, что спиновое когерентное состояние задается единичным вектором $\mathbf{n} = (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)$ **):

$$|\mathbf{n}\rangle = e^{i\alpha(\mathbf{n})} e^{-i\varphi J_3} e^{-i\theta J_2} |\psi_0\rangle. \tag{1.50}$$

Что касается фазового множителя $e^{i\alpha(\mathbf{n})}$, то его удобно выбрать так, чтобы

$$|\mathbf{n}\rangle = D(\mathbf{n})|\psi_0\rangle, \tag{1.51}$$

где

$$D(\mathbf{n}) = e^{i\theta(\mathbf{m}\mathbf{J})}, \tag{1.52}$$

$\mathbf{m}$ — единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_0 = (0, 0, 1)$: $\mathbf{m} = (\sin\varphi - \cos\varphi, 0)$.

Приведем еще одну форму записи оператора $D(\mathbf{n})$, аналогичную (1.5):

$$D(\mathbf{n}) = D(\alpha) = e^{\alpha J_+ - \bar{\alpha} J_-}, \quad \alpha = -\frac{\theta}{2} e^{-i\varphi}. \tag{1.53}$$

Заметим, что хотя операторы типа $D(\mathbf{n})$ не образуют группы, но их закон перемножения можно представить в виде

$$D(\mathbf{n}_1)\, D(\mathbf{n}_2) = D(\mathbf{n}_3)\, e^{i\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) J_0}. \tag{1.54}$$

Можно показать прямыми вычислениями, что величина Φ равна площади $A(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ геодезического треугольника на сфере с вершинами в точках $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$:

$$\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = A(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2). \tag{1.55}$$

---

*) Группа вращений трехмерного пространства является наиболее изученной из всех компактных групп Ли. Она локально изоморфна группе $SU(2)$ — группе унитарных матриц второго порядка с определителем, равным единице.

**) Такая параметризация системы КС находится в соответствии с общим утверждением о том, что КС определяется точкой фактор-пространства G/H, где H — стационарная подгруппа состояния $|\psi_0\rangle$; в данном случае $H = SO(2)$, а G/H является двумерной сферой $S^2 = \{\mathbf{n} : \mathbf{n}^2 = 1\}$.

Так же как и в разделе а) гл. 1, этот факт указывает на квазиклассичность построенной системы КС.

Оператор $D(\alpha)$ можно записать в «нормальном» виде:

$$D(\alpha)=e^{\zeta J_+}e^{\beta J_0}e^{\gamma J_-}, \tag{1.56}$$

где

$$\zeta=-\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}e^{-i\varphi}, \quad \beta=-2\ln\cos|\alpha|=\ln(1+|\zeta|^2), \quad \gamma=-\bar{\zeta}. \tag{1.57}$$

Приведем также «антинормальный» вид этого оператора:

$$D(\alpha)=e^{\gamma J_-}e^{-\beta J_0}e^{\zeta J_+}, \tag{1.58}$$

где величины ζ, β и γ определены в (1.57).

Заметим, что поскольку величины ζ, β и γ, входящие в формулы (1.56), (1.58), не зависят от j, то эти формулы достаточно проверить для случая $j=1/2$, когда $\mathbf{J}=\sigma/2$, σ_1, σ_2 и σ_3 — матрицы Паули.

Действуя на $|\psi_0\rangle$ оператором $D(\alpha)$, записанным в виде (1.56), приходим к иному представлению (иной параметризации) спиновых когерентных состояний (ср. с формулой (1.13)):

$$|\zeta\rangle=(1+|\zeta|^2)^{-j}e^{\zeta J_+}|\psi_0\rangle. \tag{1.59}$$

Отметим простой геометрический смысл перехода от переменных θ, φ к переменной ζ. Это стереографическая проекция из южного полюса сферы $\mathbf{n}=(0, 0, -1)$ на плоскость $\zeta=\xi+i\eta$ и последующее отражение относительно оси η.

Разлагая экспоненту и используя соотношение

$$|j, \mu\rangle=\sqrt{\frac{(j-\mu)!}{(2j)!(j+\mu)!}}(J_+)^{j+\mu}|j, -j\rangle, \tag{1.60}$$

получаем разложение когерентного состояния по ортонормированному базису (ср. с формулой (1.2))

$$|\zeta\rangle=(1+|\zeta|^2)^{-j}\sum_\mu\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+\mu)!(j-\mu)!}}\zeta^{j+\mu}|j, \mu\rangle, \tag{1.61}$$

или

$$\begin{gathered}|\zeta\rangle=\sum_\mu u_\mu|j, \mu\rangle,\\ u_\mu=\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+\mu)!(j-\mu)!}}\left(-\sin\frac{\theta}{2}\right)^{j+\mu}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{j-\mu}e^{-i(j+\mu)\varphi}.\end{gathered} \tag{1.62}$$

Отметим также, что спиновое когерентное состояние является собственным состоянием оператора $(\mathbf{nJ})$:

$$(\mathbf{nJ})|\mathbf{n}\rangle=-j|\mathbf{n}\rangle. \tag{1.63}$$

Уравнение (1.63) определяет спиновое КС с точностью до фазового множителя $e^{i\alpha}$.

Оно вытекает из уравнения $J_0|\mathbf{n}_0\rangle=-j|\mathbf{n}_0\rangle$, $\mathbf{n}_0=(0, 0, 1)$, и соотношения

$$D(\mathbf{n})J_0D^{-1}(\mathbf{n})=(\mathbf{nJ}). \tag{1.64}$$

Система спиновых КС обладает всеми свойствами обычной системы КС (см. раздел а) гл. 1). Мы приведем их без доказательства.

1) Операторы $T^j(g)$ переводят одно когерентное состояние в другое:

$$T^j(g)|\mathbf{n}\rangle=e^{i\Phi(\mathbf{n}, g)}|\mathbf{n}_g\rangle, \tag{1.65}$$

где

$$\Phi(\mathbf{n}, g) = jA(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}, \mathbf{n}_g). \tag{1.66}$$

2) Система спиновых КС полна.

3) Когерентные состояния неортогональны друг другу:

$$\begin{gathered}\langle \mathbf{n}_1 | \mathbf{n}_2 \rangle = e^{i\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)} \left(\frac{1+\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2}{2} \right)^j, \\ \langle \xi | \eta \rangle = [(1+|\xi|^2)(1+|\eta|^2)]^{-j} (1+\bar{\xi}\eta)^{2j},\end{gathered} \tag{1.67}$$

где *)

$$\Phi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = jA(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2). \tag{1.68}$$

4) Спиновые КС минимизируют соотношение неопределенностей Гейзенберга: для состояния $|\mathbf{n}_0\rangle$ в соотношении

$$\langle J_1^2 \rangle \langle J_2^2 \rangle \geqslant \frac{1}{4} \langle J_3 \rangle^2 \tag{1.69}$$

достигается знак равенства.

Соответственно для состояния $|\mathbf{n}\rangle$ минимизируется соотношение неопределенностей

$$\langle \tilde{J}_1^2 \rangle \langle \tilde{J}_2^2 \rangle = \frac{1}{4} \langle \tilde{J}_3 \rangle^2, \tag{1.70}$$

где

$$\tilde{J}_k = D(\mathbf{n}) J_k D^{-1}(\mathbf{n}). \tag{1.71}$$

5) Имеет место «разложение единицы»

$$\frac{2j+1}{4\pi} \int d\mathbf{n} \, |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}| = \hat{I}, \qquad d\mathbf{n} = \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \tag{1.72}$$

В случае параметризации КС точкой ζ-плоскости имеем

$$\int d\mu_j(\zeta) \, |\zeta\rangle \langle \zeta| = \hat{I}, \tag{1.73}$$

где

$$d\mu_j(\zeta) = \frac{2j+1}{\pi} \frac{d^2\zeta}{(1+|\zeta|^2)^2}. \tag{1.74}$$

6) С помощью этих формул можно разложить произвольное состояние по когерентным состояниям

$$|\psi\rangle = \sum c_\mu |j, \mu\rangle, \qquad |\psi\rangle = \int d\mu_j(\zeta) \, \psi(\bar{\zeta}) \, |\zeta\rangle, \tag{1.75}$$

где

$$\begin{gathered}\psi(\bar{\zeta}) = \langle \zeta | \psi \rangle = (1+|\zeta|^2)^{-j} \tilde{\psi}(\bar{\zeta}), \\ \tilde{\psi}(\bar{\zeta}) = \sum c_\mu \sqrt{\frac{(2j)!}{(j+\mu)!\,(j-\mu)!}} (\bar{\zeta})^{j+\mu};\end{gathered} \tag{1.76}$$

здесь $\tilde{\psi}(\bar{\zeta})$ — полином по $\bar{\zeta}$ степени $m \leqslant 2j$. Используя (1.60), видим, что $|\psi\rangle$ можно также переписать в виде

$$|\psi\rangle = \tilde{\psi}\left(\frac{1}{j+1-J_0} J_+ \right) |\psi_0\rangle.$$

Из этих формул следует, в частности, что для любой функции $f(\zeta)$, имеющей вид $P_m(\zeta)/(1+|\zeta|^2)^j$, где $P_m(\zeta)$ — произвольный полином степени

*) Не случайно Φ дается формулой (1.68). Это связано с тем, что сферу $S^2 = \{\mathbf{n} : \mathbf{n}^2 = 1\}$ можно рассматривать как фазовую плоскость для спина, причем спиновые когерентные состояния являются состояниями квазиклассическими.

$m \leqslant 2j$, справедлива формула

$$\int d\mu_j(\eta) f(\eta) \langle \eta \mid \xi \rangle = f(\xi). \tag{1.77}$$

Заметим, что именно такие функции $f(\xi)$ и образуют гильбертово пространство состояний частицы со спином j.

7) Приведем выражения для инфинитезимальных операторов в представлении когерентных состояний:

$$\langle \zeta | J_0 | \zeta \rangle = -j \frac{1-|\zeta|^2}{1+|\zeta|^2}, \qquad \langle \zeta | J_+ | \zeta \rangle = +2j \frac{\bar{\zeta}}{1+|\zeta|^2} \tag{1.78}$$

или

$$\langle \mathbf{n} \; J \mid \mathbf{n} \rangle = -j\mathbf{n}. \tag{1.79}$$

8) Заметим, что в пределе больших значений j спиновые КС переходят в обычные КС. Чтобы увидеть это, нужно сделать подстановку

$$J_+ \to (2j)^{1/2} a^+, \qquad \zeta \to (2j)^{-1/2} \alpha \tag{1.80}$$

и устремить j к бесконечности. Например,

$$|\zeta\rangle \to \lim_{j\to\infty} \left(1 + \frac{|\alpha|^2}{2j}\right)^{-j} e^{\alpha a^+} |\psi_0\rangle = |\alpha\rangle. \tag{1.81}$$

9) Представление когерентных состояний удобно использовать для описания операторов, например, матрицы плотности ρ частицы со спином j. Именно матрица плотности полностью определяется или функцией $P(\mathbf{n})$, или функцией $Q(\mathbf{n})$ согласно формулам

$$\rho = \int d\mu_j(\mathbf{n}) P(\mathbf{n}) |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|, \qquad d\mu_j(\mathbf{n}) = \frac{2j+1}{4\pi} d\mathbf{n}, \tag{1.82}$$

$$Q(n) = \langle \mathbf{n} \mid \rho \mid \mathbf{n} \rangle, \tag{1.83}$$

причем эти функции при разложении в ряд по сферическим функциям Y_{lm} содержат лишь $l \leqslant 2j$. Например,

$$P(\mathbf{n}) = \sum c_{lm} Y_{lm}(\mathbf{n}). \tag{1.84}$$

Отсюда получаем разложение матрицы плотности $\rho = \sum c_{lm} \hat{P}_{lm}$, где

$$\hat{P}_{lm} = \int d\mu_j(\mathbf{n}) Y_{lm}(\mathbf{n}) |\mathbf{n}\rangle \langle \mathbf{n}|. \tag{1.85}$$

Вычисляя входящий сюда интеграл, получаем

$$\langle j\nu' | \hat{P}_{lm} | j\nu \rangle = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \langle j\nu'; lm \mid j\nu \rangle \langle j-j; l0 \mid j-j \rangle, \tag{1.86}$$

где $\langle j\nu'; lm \mid j\nu \rangle$ — коэффициент Клебша — Гордана.

в) Когерентные состояния для трехмерной группы Лоренца

Трехмерная группа Лоренца *) — группа $SO(2, 1)$ — имеет несколько серий унитарных неприводимых представлений: основную, дискретную и дополнительную. В соответствии с этим можно построить несколько систем КС, связанных с этой группой.

*) Группа $SO(2, 1)$ — это группа «вращений» трехмерного псевдоевклидова пространства. Она локально изоморфна группе $SU(1, 1)$, симплектической группе $Sp(2, R)$ и группе $SL(2, R)$ — группе вещественных матриц второго порядка с определителем, равным единице. Детальное рассмотрение свойств представлений группы $SU(1, 1)$ дано в работе [28] и книге [29].

Мы рассмотрим здесь лишь системы КС, связанные с представлениями дискретной серии. Среди этих систем более подробно рассмотрим системы, связанные с теми представлениями дискретной серии, которые можно реализовать с помощью бозонных операторов рождения и уничтожения.

Применения КС к ряду задач, например к задачам о параметрическом возбуждении квантового осциллятора, о сверхтекучести слабонеидеального бозе-газа, будут рассмотрены в разделе в) гл. 2.

Напомним сначала некоторые свойства группы $SO(2, 1)$ и ее представлений. Нам будет удобнее рассматривать локально изоморфную ей группу $SU(1, 1)$. Элемент g этой группы является матрицей:

$$g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2-|\beta|^2=1. \tag{1.87}$$

Группа $SU(1, 1)$ имеет две так называемые дискретные серии представлений T^+ и T^-. Из них достаточно рассмотреть лишь одну, например T^+, поскольку все полученные результаты автоматически переносятся на другую. Представления дискретной серии бесконечномерны, однако они во многом аналогичны конечномерным представлениям группы $SU(2)$. Например, базисный вектор $|m\rangle$ в пространстве такого представления можно задавать целым числом m, меняющимся от нуля до бесконечности.

Алгебра Ли группы $SU(1, 1)$ образована тремя генераторами K_1, K_2 и K_0. Перестановочные соотношения для них имеют вид

$$[K_1, K_2] = -iK_0, \quad [K_2, K_0] = iK_1, \quad [K_0, K_1] = iK_2. \tag{1.88}$$

Как и в случае группы $SU(2)$, здесь удобно перейти к новым генераторам

$$K_\pm = K_1 \pm iK_2, \tag{1.89}$$

после чего перестановочные соотношения принимают вид

$$[K_0, K_\pm] = \pm K_\pm, \quad [K_-, K_+] = 2K_0. \tag{1.90}$$

Нетрудно проверить, что оператор

$$\hat{C}_2=K_0^2-K_1^2-K_2^2=K_0^2-\frac{1}{2}(K_+K_-+K_-K_+) \tag{1.91}$$

является инвариантным оператором (оператором Казимира), т. е. коммутирует со всеми операторами K_i. В силу леммы Шура такой оператор для неприводимого представления кратен единичному оператору:

$$\hat{C}_2=k(k-1)\hat{I}. \tag{1.92}$$

Таким образом, представление группы $SU(1, 1)$ характеризуется одним числом k; для дискретной серии это число принимает значения $k = 1, 3/2, 2, \ldots$

Необходимо отметить также существенное различие между группами $SU(2)$ и $SU(1, 1)$: группа $SU(2)$ односвязна, тогда как группа $SU(1, 1)$ не является таковой. Это означает, что каждый замкнутый путь в $SU(2)$ может быть деформирован в точку.

В то же время можно показать, что в группе $SU(1, 1)$ путь, соответствующий повороту на угол $2\pi n$ (n — целое) в плоскости x_1, x_2, непрерывно деформировать в точку невозможно. Это значит, что группа $SU(1, 1)$ является бесконечносвязной. Известно, что, объединяя достаточное число экземпляров (или, как говорят, листов) неодносвязной группы G и соответствующим образом склеивая их, можно получить уже односвязную группу $\tilde{G}$ — так называемую универсальную накрывающую группы G.

В нашем случае группа $\widetilde{SU(1, 1)}$ содержит бесконечное число листов. Представления этой группы также определяются числом k, однако теперь k меняется непрерывно от нуля до бесконечности: $0 < k < \infty$.

Возвращаясь к рассмотрению представлений дискретной серии, заметим, что базисные векторы $|k, \mu\rangle$ пространства, в котором действует представление $T^k(g)$, задаются числом μ, собственным значением оператора K_0:

$$K_0 |k, \mu\rangle = \mu |k, \mu\rangle, \qquad \mu = k + m, \tag{1.93}$$

m — целое число, $m \geqslant 0$.

В качестве фиксированного вектора $|\psi_0\rangle$ нам будет удобно выбрать вектор $|k, k\rangle$. Действуя на него операторами $T^k(g)$, в соответствии с [6], получаем искомую систему когерентных состояний.

Дальнейшие построения аналогичны построениям раздела б) гл. 1.

Как хорошо известно, оператор $T^k(g)$ можно представить в виде $T^k(g) = e^{-i\varphi K_0}e^{-i\tau K_2}e^{-i\psi K_0}$. Отсюда следует, что когерентное состояние задается единичным псевдоевклидовым вектором *)

$$\mathbf{n} = (\operatorname{ch}\tau,\ \operatorname{sh}\tau\cos\varphi,\ \operatorname{sh}\tau\sin\varphi), \qquad \mathbf{n}^2 = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 = 1,$$
$$|\mathbf{n}\rangle = e^{i\alpha(\mathbf{n})}e^{-i\varphi K_0}e^{-i\tau K_2}|\psi_0\rangle. \tag{1.94}$$

Что касается фазового множителя $e^{i\alpha(\mathbf{n})}$, то его удобно выбрать так, чтобы

$$|\mathbf{n}\rangle = D(\mathbf{n})|\psi_0\rangle,$$

где

$$D(\mathbf{n}) = e^{i\tau(\mathbf{mK})}, \tag{1.95}$$

$\mathbf{m}$ — единичный вектор, перпендикулярный векторам $\mathbf{n}$ и $\mathbf{n}_0 = (1,0,0)$, $\mathbf{m} = (0,\ \sin\varphi,\ -\cos\varphi)$.

Приведем еще одну форму записи оператора $D(\mathbf{n})$, аналогичную (1.53):

$$D(\mathbf{n}) = D(\alpha) = e^{\alpha K_+ - \bar{\alpha} K_-}, \qquad \alpha = -\frac{\tau}{2}e^{-i\varphi}. \tag{1.96}$$

Заметим, что операторы типа $D(\mathbf{n})$ не образуют группы, но их закон перемножения можно представить в виде

$$D(\mathbf{n}_1)D(\mathbf{n}_2) = D(\mathbf{n}_3)e^{i\varphi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)K_0}. \tag{1.97}$$

Можно показать прямыми вычислениями, что величина φ равна площади $A(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)$ геодезического треугольника на гиперболоиде с вершинами в точках $\mathbf{n}_0$, $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$:

$$\varphi(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = A(\mathbf{n}_0, \mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2). \tag{1.98}$$

Так же, как и в разделе б) гл. 1, этот факт указывает на квазиклассичность построенной системы КС.

Оператор $D(\mathbf{n})$ можно записать в «нормальном» виде:

$$D(\mathbf{n}) = e^{\zeta K_+}e^{\beta K_0}e^{\gamma K_-}, \tag{1.99}$$

где

$$\zeta = -\operatorname{th}\frac{\tau}{2}e^{-i\varphi}, \qquad \beta = -2\ln\operatorname{ch}\frac{\tau}{2} = +\ln(1 - |\zeta|^2), \qquad \gamma = -\bar{\zeta}. \tag{1.100}$$

Приведем еще «антинормальный» вид этого оператора:

$$D(\alpha) = e^{\gamma K_-}e^{-\beta K_0}e^{\zeta K_+}, \tag{1.101}$$

где величины ζ, β и γ определены в (1.100).

*) Такая параметризация системы КС находится в соответствии с общим утверждением о том, что КС определяется точкой фактор-пространства G/H, которое в данном случае является двумерным гиперболоидом $H^2 = \{\mathbf{n} : \mathbf{n}^2 = n_0^2 - n_1^2 - n_2^2 = 1\}$.

Заметим, что поскольку величины ζ, β и γ, входящие в формулы (1.99), (1.101), от k не зависят, то эти формулы достаточно проверить для случая, когда $K_0 = \sigma_3/2$, $K_1 = i\sigma_1/2$, $K_2 = i\sigma_2/2$, где σ_1, σ_2 и σ_3 — матрицы Паули.

Действуя на $|\psi_0\rangle$ оператором $D(\alpha)$, записанным в виде (1.99), приходим к иному представлению (иной параметризации) когерентных состояний:

$$|\zeta\rangle = (1-|\zeta|^2)^k e^{\zeta K_+}|k,\ k\rangle. \tag{1.102}$$

Отметим простой геометрический смысл перехода от переменных τ, φ к переменной ζ. Это стереографическая проекция из южного полюса гиперболоида $n = (-1,\ 0,\ 0)$ на единичный круг $\zeta = \xi + i\eta$, $|\zeta| < 1$, и последующее отражение относительно оси η.

Разлагая экспоненту и используя соотношение

$$|k,\ k+m\rangle = \sqrt{\frac{\Gamma(2k)}{m!\,\Gamma(m+2k)}}\,(K_+)^m |k,\ k\rangle, \tag{1.103}$$

получаем разложение когерентного состояния по ортонормированному базису:

$$|\zeta\rangle = (1-|\zeta|^2)^k \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(m+2k)}{m!\,\Gamma(2k)}}\,\zeta^m |k,\ k+m\rangle. \tag{1.104}$$

Отметим также, что спиновое когерентное состояние является собственным состоянием оператора

$$(\mathbf{nK}) = n_0K_0 - n_1K_1 - n_2K_2, \qquad (\mathbf{nK})\,|\mathbf{n}\rangle = k\,|\mathbf{n}\rangle. \tag{1.105}$$

Уравнение (1.105) вытекает из уравнения $K_0\,|\mathbf{n}_0\rangle = k\,|\mathbf{n}_0\rangle$ $(\mathbf{n}_0 = (1,\ 0,\ 0))$ и соотношения

$$D(\mathbf{n})\,K_0D^{-1}(\mathbf{n}) = (\mathbf{nK}). \tag{1.106}$$

Уравнение (1.105) определяет КС с точностью до фазового множителя $e^{i\alpha}$.

Полученная система КС обладает всеми свойствами системы спиновых КС (см. раздел б) гл. 1). Мы приведем лишь три из них.

1) Когерентные состояния не ортогональны друг другу:

$$|\langle\mathbf{n}_1|\mathbf{n}_2\rangle|^2 = \left[\frac{1+(\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2)}{2}\right]^{-k}. \tag{1.107}$$

2) При $k > 1/2$ имеет место разложение единицы:

$$\int d\mu_k(\zeta)\,|\zeta\rangle\langle\zeta| = \hat{I}, \tag{1.108}$$

где

$$d\mu_k(\zeta) = \frac{2k-1}{\pi}\,\frac{d^2\zeta}{(1-|\zeta|^2)^2}. \tag{1.109}$$

3) Производящая функция для матричных элементов оператора $T^k(g)$ имеет вид

$$G(\bar{\xi},\ \eta;\ g) = \sum T^k_{k+m,\,k+n}(g)\,u_m(\bar{\xi})\,u_n(\eta) = (\bar{d}\bar{\xi}\eta + \beta\bar{\xi} + \bar{\beta}\eta + \bar{\alpha})^{-2k}, \tag{1.110}$$

где $u_m(\xi) = \xi^m \sqrt{\Gamma(m+2k)/m!\,\Gamma(2k)}$.

Перейдем теперь к рассмотрению представлений группы $SU(1,\ 1)$, которые можно реализовать с помощью операторов, квадратичных по бозонным операторам рождения и уничтожения a^+ и a.

Рассмотрим три оператора:

$$K_+ = \frac{1}{2}(a^+)^2, \qquad K_- = \frac{1}{2}a^2, \qquad K_0 = \frac{1}{4}(aa^+ + a^+a). \tag{1.111}$$

Вычисление показывает, что эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям (1.90). Вычисляя с помощью (1.111) оператор Казимира (1.91), получаем

$$C_2 = -\frac{3}{16} = k(k-1). \qquad (1.112)$$

Отсюда получаем два решения: $k = 1/4$ и $k = 3/4$.

Нетрудно видеть, что состояния $|n\rangle = (n!)^{-1/2}\,(a^+)^n|0\rangle$ с четным n образуют базис в пространстве унитарного неприводимого представления T^k с $k = 1/4$ и, соответственно, состояния $|n\rangle$ с нечетным n образуют базис в пространстве представления T^k с $k = 3/4$.

Матричные элементы представлений группы $SU(1, 1)$ выражаются через гипергеометрическую функцию [28]. Для рассматриваемых здесь представлений T^k ($k = 1/4$ и $3/4$) в работе [30] было получено более простое выражение:

$$T^k_{mn}(\tau) = \sqrt{\frac{n_<!}{n_>!}}\left(\operatorname{ch}\frac{\tau}{2}\right)^{-1/2} P^{|m-n|/2}_{(m+n)/2}\left[\frac{1}{\operatorname{ch}(\tau/2)}\right], \qquad (1.113)$$

где P^m_n — присоединенная функция Лежандра.

Рассмотрим теперь представления дискретной серии группы $SU(1, 1)$, которые можно реализовать с помощью пары бозонных операторов a_+ и a_-. Рассмотрим три квадратичных оператора:

$$K_+ = a_+^+ a_-^+, \qquad K_- = a_+ a_-, \qquad K_0 = \frac{1}{2}(a_+^+ a_+ + a_-^+ a_- + 1). \qquad (1.114)$$

Вычисление показывает, что эти операторы удовлетворяют перестановочным соотношениям (1.90). Вычисляя с помощью (1.111) оператор Казимира (1.91), получаем

$$C_2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}(a_+^+ a_+ - a_-^+ a_-)^2. \qquad (1.115)$$

Таким образом, для состояний $|m, n\rangle = (m!\,n!)^{-1/2}\,(a_+^+)^m (a_-^+)^n|0,0\rangle$ с $m - n = n_0 = \mathrm{const}$, $C_2 = k(k-1) = \mathrm{const}$, $k = (1 + |n_0|)/2$, и потому состояния $\{|n + n_0, n\rangle\}$ образуют базис унитарного неприводимого представления T^k дискретной серии группы $SU(1, 1)$, где

$$k = \frac{1}{2}(1 + |n_0|). \qquad (1.116)$$

Матричные элементы этих представлений известны, и в простейшем случае, когда начальное состояние является вакуумным, мы имеем

$$|\langle n, n|T^{1/2}(g)|0, 0\rangle|^2 = (1-\rho)\rho^n, \qquad \rho = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}. \qquad (1.117)$$

Мы рассмотрели здесь системы КС, связанные с представлениями дискретной серии группы $SU(1, 1)$. Общий случай рассмотрен в работе [10]. Помимо этих представлений для группы $SU(1, 1)$ и других некомпактных групп (т. е. групп с бесконечным инвариантным объемом) существуют непрерывные (или основные) серии представлений. Соответствующие системы КС подробно изучены в работах [11, 12]. Для группы Лоренца эти когерентные состояния осуществляют преобразование с гиперболоида на конус, впервые рассмотренное Шапиро [31]. Однако за недостатком места эти системы в обзоре рассматриваться не будут.

2. ПРИМЕНЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Как уже отмечалось во введении, аппарат обобщенных когерентных состояний особенно эффективен в тех случаях, когда гамильтониан рассматриваемой задачи обладает группой динамической симметрии G. Точнее, в рассматриваемом случае гамильтониан линеен по генераторам X_k унитарного неприводимого представления $T(g)$ соответствующей алгебры Ли:

$$\mathcal{H} = \sum h^k X_k. \tag{2.1}$$

При этом операторы X_k удовлетворяют стандартным перестановочным соотношениям

$$[X_k, X_l] = C_{kl}^m X_m, \tag{2.2}$$

где C_{kl}^m — так называемые структурные постоянные. Заметим, что под действием операторов $T(g)$ операторы X_k преобразуются по присоединенному представлению группы G:

$$T(g) X_k T^{-1}(g) = A_k^l(g) X_l. \tag{2.3}$$

Соответственно под действием оператора $T(g)$ гамильтониан $\mathcal{H}$ переходит в $\widetilde{\mathcal{H}}$, где $\widetilde{\mathcal{H}}$ дается формулой (2.1) с

$$\widetilde{h}^k = A_l^k(g) h^l. \tag{2.4}$$

Рассмотрим три типа задач.

а) Гамильтониан (2.1) от времени не зависит. Требуется найти его спектр и собственные функции. Здесь для упрощения задачи можно воспользоваться унитарным преобразованием

$$T(g) \mathcal{H} T^{-1}(g) = \widetilde{\mathcal{H}}, \tag{2.5}$$

где $\widetilde{\mathcal{H}}$ дается формулой (2.1) с $\widetilde{h}^k$ из формулы (2.4). Воспользовавшись этим преобразованием, можно привести $\mathcal{H}$ к более простому виду, а затем найти его спектр и собственные функции $|\widetilde{\psi}_n\rangle$. Собственные функции $|\psi_n\rangle$ теперь даются формулой

$$|\psi_n\rangle = T^{-1}(g) |\widetilde{\psi}_n\rangle. \tag{2.6}$$

Таким образом, при выборе в качестве фиксированного вектора $|\widetilde{\psi}_0\rangle$ состояние $|\psi_0\rangle$ является обобщенным когерентным состоянием.

б) Гамильтониан (2.1) зависит от времени, однако при $t \to \pm\infty$ достаточно быстро стремится к соответствующим пределам, так что существуют соответствующие асимптотические состояния $|\psi_\pm\rangle$.

Здесь оператор эволюции системы $U(t, t_0)$ имеет вид $T(g(t))$:

$$U(t, t_0) = T(g), \tag{2.7}$$

причем существует S-матрица:

$$S = U(+\infty, -\infty) = T(g_0). \tag{2.8}$$

В этом случае вероятность перехода из состояния $|m\rangle$ при $t \to -\infty$ в состояние $|n\rangle$ при $t \to +\infty$ дается квадратом матричного элемента T_{mn}:

$$W_{nm} = |T_{nm}(g_0)|^2. \tag{2.9}$$

в) Гамильтониан (2.1) периодически зависит от времени:

$$\mathcal{H}(t+T) = \mathcal{H}(t). \tag{2.10}$$

В этом случае существуют состояния, для которых

$$|\psi_\varepsilon(t+T)\rangle = e^{-i\varepsilon T/\hbar} |\psi_\varepsilon(t)\rangle, \tag{2.11}$$

— так называемые состояния с определенной квазиэнергией *). При этом оператор эволюции системы $U(t, t_0)$ обладает свойством

$$U(t_0+T,\ t_0)=T(g_0)=e^{-iT\tilde{\mathscr{H}}/\hbar}, \tag{2.12}$$

где оператор $\tilde{\mathscr{H}}$ имеет вид (2.1). Таким образом, спектр оператора $\tilde{\mathscr{H}}$ дает спектр квазиэнергий рассматриваемой задачи.

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных примеров.

а) Обычная система когерентных состояний

Применению обычной системы когерентных состояний к решению ряда физических задач посвящены многочисленные работы (см. обзоры [3-5]). В дополнение к ним отметим следующие работы.

В работах [36, 37] КС были использованы для изучения явления конденсации системы взаимодействующих бозонов. В работе [38] с помощью КС было показано, что для определенного класса теорий поля существует классический предел квантовомеханических корреляционных функций. В работе [39] КС использованы для вывода теоремы вириала для жидкого гелия, а в работе [40] — для описания множественного рождения частиц при высоких энергиях. Наконец, в работах [41-43] (см. также [44]) КС были использованы для квазиклассического описания локализованных состояний (солитонов) в нелинейных теориях поля. В работе [41] такие состояния были использованы для объяснения некоторых свойств недавно открытых частиц ψ-мезонов.

В этом разделе обычная система КС будет применена для решения двух задач.

1) Квантовый осциллятор, находящийся под действием переменной внешней силы **). Развитие рассматриваемой системы во времени определяется уравнением Шрёдингера

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle=(\mathscr{H}_0+\mathscr{H}_1)|\psi(t)\rangle, \tag{2.13}$$

где

$$\mathscr{H}_0=\hbar\omega\left(a^+a+\frac{1}{2}\right),\qquad \mathscr{H}_1=-f(t)\,q=-f(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,(a+a^+). \tag{2.14}$$

Переходя к представлению взаимодействия $|\psi(t)\rangle=e^{-(i/\hbar)\mathscr{H}_0 t}|\tilde{\psi}(t)\rangle$, избавимся от слагаемого $\mathscr{H}_0$ в уравнении Шрёдингера. Для функции $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ получаем уравнение

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle=\tilde{\mathscr{H}}_1(t)\,|\tilde{\psi}(t)\rangle, \tag{2.15}$$

где

$$\tilde{\mathscr{H}}_1(t)=e^{i\mathscr{H}_0 t/\hbar}\mathscr{H}_1 e^{-i\mathscr{H}_0 t/\hbar}=-f(t)\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,(ae^{-i\omega t}+a^+e^{i\omega t}). \tag{2.16}$$

Уравнение (2.15) удобно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}|\tilde{\psi}(t)\rangle=(\beta(t)\,a^+-\bar{\beta}(t)\,a)\,|\tilde{\psi}(t)\rangle, \tag{2.17}$$

*) В работе Никишова и Ритуса [32] было введено понятие четырехмерного квазиимпульса. Квазиэнергия является его четвертой компонентой. В работах Зельдовича [33,34] и Ритуса [35] состояния с определенной квазиэнергией использовались при рассмотрении атомных систем в поле электромагнитной волны.

**) Отметим, что эта задача была решена ранее иным методом в работах Фейнмана [26] и Швингера [25].

где

$$\beta(t)=\frac{i}{\sqrt{2\hbar\omega}}f(t)\,e^{i\omega t}. \tag{2.18}$$

Поскольку гамильтониан $\tilde{\mathscr{H}}_1$ выражается линейно через операторы алгебры Ли W_1, то оператор эволюции $\tilde{S}(t)$: $|\tilde{\psi}(t)\rangle=\tilde{S}(t)\,|\tilde{\psi}(0)\rangle$ является оператором представления группы W_1, т. е.

$$\tilde{S}(t)=T(g(t))=e^{-i\varphi(t)}D(\gamma(t)). \tag{2.19}$$

Отсюда, в частности, следует, что если начальное состояние являлось когерентным, то оно останется когерентным в любой момент времени. Таким образом, существует решение $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ вида

$$|\tilde{\psi}(t)\rangle=e^{-i\varphi(t)}\,|\alpha(t)\rangle. \tag{2.20}$$

В частности, среднее значение оператора a в этом состоянии равно

$$\langle\tilde{\psi}\,|\,a\,|\,\tilde{\psi}\rangle=\alpha(t). \tag{2.21}$$

Дифференцируя это соотношение по t и используя уравнение (2.17), находим

$$\dot{\alpha}=\beta,\qquad \alpha(t)=\alpha_0+\int\limits_0^t\beta(t')\,dt'. \tag{2.22}$$

Далее, при $\Delta t\to 0$ из уравнения (2.17) получаем

$$|\tilde{\psi}(t+\Delta t)\rangle=D(\beta(t)\,\Delta t)\,|\tilde{\psi}(t)\rangle. \tag{2.23}$$

Подставляя в это уравнение $|\tilde{\psi}(t)\rangle$ из (2.20) и используя соотношение (1.15), получаем уравнение

$$\dot{\varphi}=\operatorname{Im}(\bar{\beta}\alpha)=\operatorname{Im}(\dot{\bar{\alpha}}\alpha). \tag{2.24}$$

Заметим, что уравнение (2.22) — это классическое уравнение движения для осциллятора под действием внешней силы, а из уравнения (2.24) следует, что величина $\varphi(t)$ равна удвоенной площади, заметаемой радиус-вектором при движении точки по фазовой плоскости, т. е.

$$\varphi(t)=\frac{1}{\hbar}\int\limits_{q_0}^{q_t}p\,dq,$$

и, таким образом, имеет простой квазиклассический смысл.

Особенно просто обстоит дело в том случае, когда сила $f(t)$ достаточно быстро стремится к нулю при $t\to\pm\infty$. В этом случае существуют соответствующие пределы $\alpha_\pm$ и $\varphi_\pm$ и имеет смысл говорить о вероятности перехода из состояния $|m\rangle$ при $t\to-\infty$ в состояние $|n\rangle$ при $t\to+\infty$. Эти вероятности даются формулой

$$W_{mn}=|\langle m\,|\,S\,|\,n\rangle|^2=|\langle m\,|\,D(\gamma)\,|\,n\rangle|^2, \tag{2.25}$$

и из формулы (1.48) следует, что

$$W_{mn}=\frac{n_<!}{n_>!}\,|\gamma|^{2|m-n|}e^{-|\gamma|^2}\,|L_{n_<}^{|m-n|}(|\gamma|^2)|^2. \tag{2.26}$$

Перейдем к рассмотрению второго примера.

2) Релаксация квантового осциллятора к положению термодинамического равновесия. Квантовый осциллятор, находящийся в состоянии термодинамического равновесия при температуре T, описывается матрицей плотности

$$\rho=(1-e^{-\beta})\,e^{-\beta a^+a},\qquad \beta=\frac{\hbar\omega}{kT}. \tag{2.27}$$

Отсюда нетрудно получить выражения для символов этой матрицы плотности

$$P(\alpha)=\frac{1}{\nu}\,e^{-|\alpha|^2/\nu}, \tag{2.28}$$

$$Q(\alpha)=\frac{1}{\nu+1}\,e^{-|\alpha|^2/(\nu+1)}, \tag{2.29}$$

где $\nu=\bar{n}$ — среднее число квантов — дается формулой Планка

$$\nu=(e^{\hbar\omega/kT}-1)^{-1}. \tag{2.30}$$

Эволюция квантового осциллятора, находящегося в тепловом контакте с термостатом при температуре T, описывается уравнением, полученным в работе [45] и подробно изученным в работах [46, 47] *):

$$\dot{\rho}=-\frac{\gamma}{2}\left[(\nu+1)(a^+a\rho-2a\rho a^*+\rho a^+a)+\nu(aa^+\rho-2a^+\rho a+\rho aa^+)\right], \tag{2.31}$$

где константа $\gamma>0$ определяет скорость приближения осциллятора к состоянию термодинамического равновесия. Подставляя в (2.31) выражения для ρ через символы $P(\alpha)$ и $Q(\alpha)$, получаем следующие уравнения [46, 47]:

$$\dot{P}=+\frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\alpha_iP)+\frac{\gamma}{4}\nu\,\Delta P, \tag{2.32}$$

$$\dot{Q}=+\frac{\gamma}{2}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}(\alpha_iQ)+\frac{\gamma}{4}(\nu+1)\,\Delta Q, \tag{2.33}$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\alpha_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial\alpha_2^2}.$$

Заметим, что уравнение для P совпадает с уравнением, описывающим броуновское движение (в фазовом пространстве) классического осциллятора (см. [49]). Тем самым с помощью когерентных состояний мы снова свели квантовую задачу к классической.

б) Система спиновых когерентных состояний

Напомним, что система спиновых КС была введена в работе [8] и подробно изучена в работах [6, 8, 27]. Эта система применялась для получения оценок для статистической суммы квантовой системы спинов [50]. В работах [27, 51, 52] такие состояния были применены в так называемой модели Дике [53], описывающей взаимодействие излучения с веществом, для описания сверхизлучательного состояния. Экспериментально такое состояние обнаружено в работе [54].

Отметим еще, что с помощью спиновых КС можно очень просто получить выражение для производящей функции для коэффициентов Клебша — Гордана группы вращений (см. работу [55]).

В настоящем обзоре мы рассмотрим две задачи.

*) Уравнение (2.31) для случая $\nu=0$ ($T=0$) содержится, по существу, уже в известной работе Ландау [48], где впервые была введена матрица плотности.

1) Движение спина в переменном магнитном поле. Рассмотрим нейтральную частицу со спином j, обладающую магнитным моментом μ и находящуюся в переменном магнитном поле $\mathbf{H}(t)$. Изменение состояния такой системы с течением времени определяется уравнением Шрёдингера

$$i\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = -\mathbf{a}(t)\,\mathbf{J}\,|\psi(t)\rangle = (AJ_+ + \bar{A}J_- + BJ_0)\,|\psi(t)\rangle, \qquad (2.34)$$

где

$$\mathbf{a} = \frac{\mu}{j}\mathbf{H}, \qquad A = -\frac{1}{2}(a_1 - ia_2), \qquad B = -a_3. \qquad (2.35)$$

Относительно вектора $\mathbf{H}(t)$ мы предполагаем лишь, что он достаточно быстро стремится к определенным пределам при $t \to \pm\infty$, так что при $t \to \pm\infty$ существуют асимптотические состояния $|\psi^{\pm}\rangle$.

Давно известно (см., например, работы [56–58]), что задача о частице с произвольным спином j может быть сведена к более простой задаче о движении частицы со спином 1/2. Использование спиновых КС позволяет получить решение этой задачи особенно просто.

Решение уравнения (2.34) будем искать в виде

$$|\psi(t)\rangle = e^{-i\varphi(t)}\,|\zeta(t)\rangle. \qquad (2.36)$$

Уравнение (2.34) принимает теперь вид

$$i\frac{d}{dt}|\zeta(t)\rangle = (\mathcal{H}(t) - \dot{\varphi})\,|\zeta(t)\rangle. \qquad (2.37)$$

С другой стороны, из явной формулы для КС следует

$$\zeta J_+ + |\zeta\rangle = (j + J_0)\,|\zeta\rangle, \qquad (2.38)$$

$$J_-|\zeta\rangle = \zeta(j - J_0)\,|\zeta\rangle, \qquad (2.39)$$

$$\frac{d}{dt}|\zeta(t)\rangle = \left[\frac{-j}{1+|\zeta|^2}\frac{d}{dt}(1+|\zeta|^2)\right]|\zeta(t)\rangle + \frac{\dot{\zeta}}{\zeta}(J_0 + j)\,|\zeta(t)\rangle. \qquad (2.40)$$

Отсюда находим уравнения для величин $\zeta(t)$ и $\varphi(t)$ *):

$$i\dot{\zeta} = A - \bar{A}\zeta^2 + B\zeta, \qquad (2.41)$$

$$\frac{1}{j}\dot{\varphi} = -i\frac{\dot{\zeta}}{\zeta} + i\left[\frac{1}{1+|\zeta|^2}\frac{d}{dt}(1+|\zeta|^2)\right] + \frac{A}{\zeta} + \bar{A}\zeta. \qquad (2.42)$$

Заметим, что из (2.41) следует равенство

$$i\frac{d}{dt}(1+|\zeta|^2) = (A\bar{\zeta} - \bar{A}\zeta)(1+|\zeta|^2), \qquad (2.43)$$

с помощью которого получаем

$$\dot{\varphi} = j(\bar{\zeta}A + \zeta\bar{A} - B). \qquad (2.44)$$

Таким образом, задача нахождения волновой функции сведена к более простой задаче — решению уравнений (2.41) и (2.44).

Заметим, что при параметризации в виде векторов единичной сферы уравнение (2.41) принимает вид

$$\dot{\mathbf{n}} = -[\mathbf{a}(t), \mathbf{n}]. \qquad (2.45)$$

Таким образом, плоскость ζ (или единичная сфера S^2) играет роль фазовой плоскости для классической динамической системы.

В простейшем случае при $t \to +\infty$ $A(t) \to 0$, $B(t) \to \mathrm{const}$ и, как видно из (2.41), $|\zeta(t)|^2 \to \rho = \mathrm{const}$. Отсюда сразу же следует выраже-

*) Уравнение, эквивалентное (2.41), было получено иным методом в работе [56].

ние для вероятности перехода из начального состояния $|0\rangle = |j, -j\rangle$ в конечное состояние $|m\rangle = |j, -j+m\rangle$:

$$W_m = \frac{(2j)!}{m!\,(2j-m)!}\,\frac{\rho^m}{(1+\rho)^{2j}}. \tag{2.46}$$

Общая формула для вероятностей перехода имеет вид

$$W_{mn} = |d^j_{\mu\nu}(\theta)|^2, \tag{2.47}$$

где $\mu = m - j$, $\nu = n - j$, $\rho = \operatorname{tg}(\theta/2)$, а $d^j_{\mu\nu}(\theta)$ — известные матричные элементы представления $T^j(g)$.

Перейдем к рассмотрению второго примера.

2) Релаксация частицы со спином, находящейся в магнитном поле, к положению термодинамического равновесия. Частица со спином, находящаяся в магнитном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ в состоянии термодинамического равновесия при температуре T, описывается матрицей плотности

$$\rho = \frac{\operatorname{sh}(\beta/2)}{\operatorname{sh}[j+(1/2)]\beta}\,e^{\beta J_0}, \quad \beta = \frac{\mu H}{kT}. \tag{2.48}$$

Отсюда получаем выражения для символов этой матрицы плотности:

$$Q(\mathbf{n}) = \left(\operatorname{ch}\frac{\beta}{2} + \operatorname{sh}\frac{\beta}{2}\cos\theta\right)^{2j}, \tag{2.49}$$

$$P(\mathbf{n}) = \operatorname{ch}\frac{\beta}{2} + 3\operatorname{sh}\frac{\beta}{2}\cos\theta \quad \text{при} \quad j = \frac{1}{2}. \tag{2.50}$$

Эволюция такой системы, находящейся в тепловом контакте с термостатом при температуре T, описывается уравнением, полученным в работе [59]:

$$\dot\rho = -\frac{\gamma}{2}\{(\nu+1)(J_+J_-\rho - 2J_-\rho J_+ + \rho J_+J_-) + \nu(J_-J_+\rho - 2J_+\rho J_- + \rho J_-J_+)\}, \tag{2.51}$$

где величина ν дается формулой Планка (2.30). Для термостата, находящегося при нулевой температуре, $\nu = 0$ это уравнение принимает вид

$$\dot\rho = \frac{\gamma}{2}\{[J_-, \rho J_+] + [J_-\rho, J_+]\}. \tag{2.52}$$

Предположим для простоты, что $P(\mathbf{n}) = P(\theta, \varphi)$ зависит лишь от θ. Тогда, подставляя ρ в виде (1.82) в уравнение (2.52), приходим к уравнению для $P(\theta, t)$, полученному и изученному в работах [60–62]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\sin\theta\cdot P(\theta, t)) = \\ = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(j\sin\theta + \frac{\sin\theta}{2(1+\cos\theta)}\right)\sin\theta\cdot P(\theta, t)\right] + \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left[\frac{1-\cos\theta}{2}\sin\theta\cdot P(\theta, t)\right]. \tag{2.53}$$

Но уравнение (2.53) есть не что иное, как уравнение Фоккера — Планка на сфере $S^2 = \{\mathbf{n} : \mathbf{n}^2 = 1\}$ для функции $f(\theta, t) = \sin\theta\cdot P(\theta, t)$. Это уравнение содержит коэффициент «смещения», который приводит к движению распределения f как целого по поверхности сферы. Кроме того, распределение расширяется (или сужается), что определяется коэффициентом диффузии $D(\theta) = (1 - \cos\theta)/2$, который принимает наибольшее значение для $\theta = \pi$ и исчезает для $\theta = 0$. Комбинированный эффект коэффициента «смещения» и диффузионного члена приводит к расширению распределения на сфере и перемещению его максимума к точке $\theta = 0$. При $t \to +\infty$ матрица плотности стремится к $\rho = |j, -j\rangle\langle j, -j|$. Заметим, что максимум распределения находится при $\theta = \theta_{\max}$, для которого получается уравнение

$$\frac{d}{dt}\theta_{\max} = -j \sin\theta_{\max}. \qquad (2.54)$$

в) Система когерентных состояний для группы $SU(1, 1)$

Как уже отмечалось в разделе в) гл. 1, группа $SU(1, 1)$ имеет несколько серий унитарных неприводимых представлений. В соответствии с этим существует несколько серий систем КС, связанных с этой группой. КС, связанные с основной серией представлений группы $SU(1, 1)$ [11], описывают переход с гиперболоида на конус в трехмерном псевдоэвклидовом пространстве и за недостатком места в данном обзоре рассматриваться не будут. Мы рассмотрим здесь лишь некоторые системы КС, связанные с представлениями так называемой дискретной серии группы $SU(1, 1)$.

Такие состояния удобно использовать при решении некоторых задач, связанных с нахождением спектра и волновых функций гамильтониана, квадратичного по операторам рождения и уничтожения бозонов. Например, как было показано в работе [63], такие КС возникают при рассмотрении рождения пар частиц нулевого спина в однородном переменном электрическом поле или же гравитационном поле расширяющейся Вселенной *).

В данном разделе мы рассмотрим две задачи.

1) Параметрическое возбуждение квантового осциллятора. Эта задача была подробно рассмотрена в работах [30], [72–75]. Здесь мы решим эту задачу, используя систему КС для дискретной серии группы $SU(1, 1)$ (см. раздел в) гл. 1). Интересующая нас система — квантовый осциллятор с переменной частотой — описывается уравнением Шрёдингера

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \mathcal{H}(t)|\psi(t)\rangle, \qquad (2.55)$$

где

$$\mathcal{H}(t) = \frac{p^2}{2} + \frac{\omega^2(t)}{2}q^2. \qquad (2.56)$$

Выражая операторы координаты и импульса через бозонные операторы рождения и уничтожения, получаем

$$\mathcal{H}(t) = -\frac{\hbar}{4}(1-\omega^2(t))(a^2+a^{+2}) + \\ + \frac{\hbar}{4}(\omega^2(t)+1)(aa^+ + a^+a) = \hbar(AK_+ + \bar{A}K_- + BK_0). \qquad (2.57)$$

Воспользовавшись выражением (1.111), перепишем $\mathcal{H}(t)$ в виде

$$\mathcal{H}(t) = \hbar\Omega_0(t)K_0 - \hbar\Omega_1(t)K_1, \qquad (2.58)$$

где

$$\Omega_0 = 1 + \omega^2(t), \quad \Omega_1 = 1 - \omega^2(t), \qquad (2.59)$$

*) Задача о рождении пар частиц нулевого спина подробно рассмотрена в работах [63–68], а также в ряде других работ. В работах [69–71] рассмотрена задача о рождении пар частиц спина 1/2. В работах [63,69] показано, что динамической группой симметрии задачи о рождении пар спина S является группа $SU(2S+1, 2S+1)$ при целом S и группа $SU(2(2S+1))$ при полуцелом S. В исключительном случае $S = 1/2$ группой симметрии является группа $SO(5)$ [71].

K_0 и K_1 — генераторы представления дискретной серии группы SU (1, 1) с $k = 1/4$ и $k = 3/4$.

Таким образом, наш гамильтониан линеен по генераторам алгебры Ли группы SU (1, 1). Поэтому существует решение уравнения Шрёдингера вида

$$|\psi(t)\rangle = e^{(-i\varphi(t))}|\zeta(t)\rangle, \qquad |\zeta|<1, \tag{2.60}$$

где $|\zeta\rangle$ — когерентное состояние с $k = 1/4$ или 3/4. Подставляя (2.60) в уравнение Шрёдингера (2.55), аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, получаем уравнения для величин ζ и φ:

$$\dot{\zeta} = A + \bar{A}\zeta^2 + B\zeta, \tag{2.61}$$

$$\dot{\varphi} = k(A\bar{\zeta} + \bar{A}\zeta + B). \tag{2.62}$$

Заметим, что плоскость ζ является в данном случае плоскостью Лобачевского и представляет фазовую плоскость для рассматриваемой задачи. Уравнение (2.61) описывает движение классической системы (осциллятора) на фазовой плоскости. Квантовое состояние $|\zeta(t)\rangle$ при этом в точности следует классическому движению. Что касается фазового множителя $\varphi(t)$, то он в точности равняется площади в метрике Лобачевского, заметаемой радиусом-вектором при его движении. Оба эти обстоятельства связаны с тем, что в данном случае «квазиклассическое приближение» приводит к точному ответу.

Хотя этот результат справедлив для произвольного изменения величины $\omega(t)$ с течением времени, физически интересными представляются два случая.

а) Величина $\omega(t)$ достаточно быстро стремится к определенным пределам при $t \to \pm\infty$. В этом случае существуют асимптотические состояния $|n\rangle_\pm$ при $t \to \pm\infty$ и имеет смысл говорить о вероятности перехода W_{mn} из состояния $|m\rangle_-$ в состояние $|n\rangle_+$. Мы предположим для простоты, что предельные гамильтонианы ($\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$) при $t \to \pm\infty$ совпадают. Тогда

$$W_{mn} = |\langle m|T(g_0)|n\rangle|^2, \qquad g_0 = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \qquad |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1. \tag{2.63}$$

Используя выражение (1.113) для $\langle m|T|n\rangle$, из [30] получаем окончательный ответ:

$$W_{mn} = \frac{n_<!}{n_>!}\sqrt{1-\rho}\,|P^{|m-n|/2}_{(m+n)/2}(\sqrt{1-\rho})|^2, \qquad \rho = \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2}. \tag{2.64}$$

б) Рассмотрим теперь случай периодической зависимости $\omega(t)$ от времени: $\omega(t+T) = \omega(t)$. В этом случае существуют решения уравнения Шрёдингера с определенной квазиэнергией, т. е. состояния, обладающие свойством

$$|\psi_\varepsilon(t+T)\rangle = e^{(-i\varepsilon T/\hbar)}|\psi(t)\rangle. \tag{2.65}$$

Нас будет интересовать спектр квазиэнергий. Для того чтобы найти его, рассмотрим оператор эволюции системы $U(t, t_0)$: $U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle$. С его помощью образуем унитарный оператор

$$S(t_0) = U(t_0 + T, t_0). \tag{2.66}$$

Поскольку этот оператор унитарен, то его можно представить в виде

$$S = e^{-iT\tilde{\mathcal{H}}/\hbar}, \tag{2.67}$$

где $\tilde{\mathcal{H}}$ — эрмитов оператор. Спектр этого оператора и есть спектр квазиэнергий.

В рассматриваемом нами случае оператор S есть оператор конечного преобразования группы $S(1, 1)$, а оператор $\tilde{\mathscr{H}}$ принадлежит представлению алгебры Ли этой группы и потому имеет вид

$$\tilde{\mathscr{H}} = \hbar(\Omega_0 K_0 - \Omega_1 K_1 - \Omega_2 K_2). \tag{2.68}$$

В зависимости от вида вектора $\Omega = (\Omega_0, \Omega_1, \Omega_2)$ здесь могут осуществляться различные случаи.

1) $$\Omega^2 = \Omega_0^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2 > 0, \quad \Omega_0 > 0. \tag{2.69}$$

Здесь с помощью унитарного преобразования $\tilde{\mathscr{H}} \to \tilde{\mathscr{H}}' = U\tilde{\mathscr{H}}U^+$ оператор $\tilde{\mathscr{H}}$ можно преобразовать к виду

$$\tilde{\mathscr{H}}' = \hbar\Omega K_0. \tag{2.70}$$

Спектр квазиэнергий в этом случае дискретен, ограничен снизу и имеет вид

$$\varepsilon_n = \hbar\Omega(k + n). \tag{2.71}$$

Основное состояние такого гамильтониана является когерентным состоянием, связанным с представлением T^k дискретной серии группы $SU(1, 1)$.

1′) Пусть

$$\Omega^2 > 0, \quad \Omega_0 < 0. \tag{2.72}$$

В этом случае имеем $\tilde{\mathscr{H}}' = -\hbar\Omega K_0$. Спектр квазиэнергий здесь дискретен и ограничен сверху:

$$\varepsilon_n = -\hbar\Omega(k + n).$$

2) Пусть $\Omega_0^2 - \Omega_1^2 - \Omega_2^2 = -\lambda^2 < 0$. Тогда оператор $\tilde{\mathscr{H}}$ можно привести к виду

$$\tilde{\mathscr{H}}' = -\hbar\lambda K_1. \tag{2.73}$$

Спектр квазиэнергий в этом случае непрерывен и заполняет всю ось $-\infty < \varepsilon < +\infty$. В классическом случае это соответствует неустойчивому движению.

3) Если же $\Omega^2 = 0$, $\Omega_0 > 0$, то $\tilde{\mathscr{H}} = \hbar\Omega_0(K_0 - K_1)$ и спектр непрерывен и заполняет полуось $0 < \varepsilon < \infty$.

3′) Наконец, в случае $\Omega^2 = 0$, $\Omega_0 < 0$ имеем

$$\tilde{\mathscr{H}}' = -\hbar\Omega_0(K_0 - K_1). \tag{2.74}$$

Здесь спектр также непрерывен и заполняет полуось $-\infty < \varepsilon < 0$. Для классического осциллятора случаи 3) и 3′) отвечают границам зоны неустойчивости. Перейдем к рассмотрению следующего примера.

2) Сверхтекучесть слабонеидеального бозе-газа. Как было показано Боголюбовым [76], эта задача сводится к задаче нахождения спектра и волновых функций гамильтониана, квадратичного по операторам рождения и уничтожения бозонов. В той же работе был указан и способ решения задачи, состоящий в диагонализации гамильтониана с помощью линейного канонического преобразования, которое получило затем название канонического преобразования Боголюбова.

Множество линейных канонических преобразований этой задачи образует определенную группу, а именно прямое произведение групп $SU(1, 1)$. При этом основное состояние гамильтониана оказывается КС, связанным с определенным представлением этой группы.

Рассмотрим сначала упрощенную модель сверхтекучести [77]. Пусть наша система состоит из N слабо взаимодействующих бозонов и описывается следующим гамильтонианом:

$$\mathcal{H} = \sum_k \varepsilon_k a_k^+ a_k + \frac{1}{2} \sum_{k,\,p,\,q} V_k a_{p+k}^+ a_{q-k}^+ a_p a_q, \qquad \varepsilon_k = \frac{k^2}{2m}. \tag{2.75}$$

Ограничимся сперва тремя состояниями, так что p, q и k принимают лишь значения $(-1,\ 0,\ +1)$, и пусть $\varepsilon_{\pm 1} = \varepsilon$, $V_{\pm 1} = V$ и $\varepsilon_0 = V_0 = 0$ [77, 78]. Тогда гамильтониан (2.75) принимает вид

$$\mathcal{H} = \varepsilon\,(a_+^+ a_+ + a_-^+ a_-) + V\,[a_0^+ a_0\,(a_+^+ a_+ + a_-^+ a_-) + a_0^2 a_+^+ a_-^+ + a_0^{+2} a_+ a_-], \tag{2.76}$$

где мы использовали обозначения $a_\pm = a_{\pm 1}$. Для $V = 0$ основное состояние состояло бы из N частиц с нулевой энергией. Предположим, что для слабо взаимодействующей системы состояние с нулевой энергией является макроскопически заполненным (так что мы можем считать операторы a_0 и a_0^+ c-числом, равным $\sqrt{N_0}$, где $N_0 = \langle a_0^+ a_0 \rangle$). Это и есть физическое предположение, из которого следует сверхтекучий характер модели. Таким образом, редуцированный гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}_{\mathrm{red}} = (\varepsilon + N_0 V)\,(a_+^+ a_+ + a_-^+ a_-) + N_0 V\,(a_+^+ a_-^+ + a_+ a_-). \tag{2.77}$$

Мы видим, что редуцированный гамильтониан линеен по операторам представления $T^{1/2}$ алгебры Ли группы $SU\,(1,\,1)$:

$$\mathcal{H}_{\mathrm{red}} = 2N_0 V \left(\mu K_0 + K_1 - \frac{1}{2}\,\mu\right), \qquad \mu = 1 + \frac{\varepsilon}{N_0 V}. \tag{2.78}$$

Таким образом, наша задача свелась к уже решенной ранее задаче о спектре и собственных функциях оператора

$$\mathcal{H}_\Omega = \Omega_0 K_0 - \Omega_1 K_1 - \Omega_2 K_2 = \mathbf{\Omega K}, \tag{2.79}$$

где

$$\Omega_0 = 2N_0 V\mu, \qquad \Omega_1 = -2N_0 V, \qquad \Omega_2 = 0. \tag{2.80}$$

В рассматриваемом нами случае оператор $\mathcal{H}$ дается формулами (2.79), (2.80), а для его упрощения достаточно рассмотреть «вращение» вокруг оси x_2: $R\,(\theta) = e^{-iK_2\theta}$,

$$\begin{aligned} K_1' &= R\,(\theta)\,K_1 R^{-1}\,(\theta) = \operatorname{ch}\theta\cdot K_1 + \operatorname{sh}\theta\cdot K_0, \\ K_0' &= R\,(\theta)\,K_0 R^{-1}\,(\theta) = \operatorname{ch}\theta\cdot K_0 + \operatorname{sh}\theta\cdot K_1, \end{aligned} \tag{2.81}$$

так что

$$R\,(\theta)\,\mathcal{H} R^{-1}\,(\theta) = 2N_0 V \left[K_0\,(\mu\operatorname{ch}\theta - \operatorname{sh}\theta) + K_1\,(\operatorname{ch}\theta - \mu\operatorname{sh}\theta) - \frac{\mu}{2}\right]. \tag{2.82}$$

Поскольку $|\operatorname{th}\theta| < 1$, то в зависимости от знака потенциала V можно использовать поворот K_1 или K_0. Таким образом, в случае:

1) если $V < 0$ — потенциал притяжения, $\mu < 1$, возьмем $\operatorname{th}\theta = \mu$:

$$R\mathcal{H}R^{-1} = -2N_0 V \left(K_1 \operatorname{sech}\theta + \frac{\mu}{2}\right), \quad 2N_0\,|V| > \varepsilon; \tag{2.83}$$

2) если $V > 0$ — потенциал отталкивания, $\mu > 1$, возьмем $\operatorname{cth}\theta = \mu$:

$$R\mathcal{H}R^{-1} = 2N_0 V \left(K_0 \operatorname{cosech}\theta - \frac{\mu}{2}\right). \tag{2.84}$$

Отсюда следует, что в случае 1) спектр энергий непрерывен. Второй случай представляет больший физический интерес; в этом случае спектр энергий дискретен. Из (2.84) следует, что

$$E_n = (2n + 1 + |\Delta|)\,E - N_0 V - \varepsilon, \tag{2.85}$$

где $E = \sqrt{2\varepsilon N_0 V + \varepsilon^2}$, а Δ — собственное значение оператора $a_+^+ a_+ - a_-^+ a_-$. При этом собственные векторы имеют вид

$$|\psi_n\rangle = R^{-1}(\theta)\,|n\rangle = \frac{1}{n!}(b_+^+ b_-^+)^n\,|\psi_0\rangle, \tag{2.86}$$

где

$$|\psi_0\rangle = R^{-1}(\theta)\,|0\rangle, \quad b_+^+ = R^{-1}(\theta)\,a_+^+ R(\theta). \tag{2.87}$$

Таким образом, собственные векторы являются когерентными состояниями, связанными с представлениями T^k дискретной серии группы $SU(1, 1)$. В простейшем случае $\Delta = 0$, $k = 1/2$ имеем

$$|\psi_0\rangle = \sum_m (-1)^m \operatorname{sech}\frac{\theta}{2}\left(\operatorname{th}\frac{\theta}{2}\right)^m |m\rangle, \tag{2.88}$$

или

$$|\psi_0\rangle = \sqrt{1-t^2}\, e^{-t a_+^+ a_-^+}|0\rangle, \tag{2.89}$$

где

$$t = \operatorname{th}\frac{\theta}{2} = -\frac{E_0}{N_0 V}.$$

Заметим, что преобразование (2.87) является линейным каноническим преобразованием операторов a_+^+ и a_-:

$$\begin{aligned} b_+^+ &= u a_+^+ + v a_-, \\ b_- &= u a_- + v a_+^+. \end{aligned} \tag{2.90}$$

Это преобразование было впервые использовано для решения задачи о сверхтекучести слабонеидеального бозе-газа в известной работе Боголюбова [76].

Перейдем теперь к рассмотрению слабонеидеального бозе-газа, описываемого гамильтонианом (2.75). Используя, как и ранее, приближение Боголюбова $a_0 = a_0^+ \approx \sqrt{N_0}$, мы можем записать $\mathscr{H}$ в виде

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}N_0^2 V_0 + \sum_k (\varepsilon_k + N_0 V_k + N_0 V_0)\, a_k^+ a_k + \frac{1}{2} N_0 \sum_k V_k\,(a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k}), \tag{2.91}$$

где суммирование проводится по всем значениям k, за исключением значения $k = 0$, и оставлены лишь члены второго порядка по a_k и a_k^+. В этом же приближении мы имеем $N = N_0 + \sum a_k^+ a_k$ и наш гамильтониан можно переписать в виде

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}N^2 V_0 + \sum (\varepsilon_k + N V_k)\, a_k^+ a_k + \frac{N}{2}\sum V_k\,(a_k^+ a_{-k}^+ + a_k a_{-k}). \tag{2.92}$$

Введем операторы

$$\begin{aligned} K_1^{(q)} &= \frac{1}{2}(a_q^+ a_{-q}^+ + a_q a_{-q}), \\ K_2^{(q)} &= -\frac{i}{2}(a_q^+ a_{-q}^+ - a_q a_{-q}), \\ K_0^{(q)} &= \frac{1}{2}(a_q^+ a_q + a_{-q}^+ a_{-q} + 1). \end{aligned} \tag{2.93}$$

Мы видим, что эти операторы генерируют алгебру Ли группы $SU(1, 1)_{(q)}$, а гамильтониан является линейной комбинацией генераторов этой алгебры:

$$\mathcal{H} = \sum_q \oplus NV_q \left(K_1^{(q)} + \mu_q K_0^{(q)} - \frac{\mu_q}{2}\right) + \frac{1}{2} N^2 V_0, \tag{2.94}$$

$$\mu_q = 1 + \frac{\varepsilon_q}{NV_q}.$$

Как и раньше, в случае $V_{(q)} < 0$, $|\mu_q| < 1$ мы имеем непрерывный спектр, а в случае $V_q > 0$ или $\mu_q > 1$ гамильтониан можно упростить с помощью унитарного преобразования

$$R = \prod_q \otimes R(\theta_q), \qquad R(\theta_q) = e^{-iK_2^{(q)}\theta_q}, \qquad \theta_q = \operatorname{cth} \mu_q, \tag{2.95}$$

так что

$$RHR^{-1} = \sum_q \oplus \left(\operatorname{csech} \theta_q K_0^{(q)} - \frac{\mu_q}{2}\right) NV_q + \frac{1}{2} N^2 V_0. \tag{2.96}$$

Операторы Казимира имеют вид

$$C_q = K_0^{(q)2} - K_1^{(q)2} - K_2^{(q)2} = \frac{1}{4}(\Delta_q^2 - 1), \tag{2.97}$$

где интегралами движения $\Delta_q = a_q^+ a_q - a_{-q}^+ a_{-q}$ являются разности чисел частиц в состояниях с противоположными импульсами. Поскольку спектр энергий должен быть ограничен снизу, то единственное разрешенное представление — это

$$\prod_q \otimes T^{K_q}, \qquad K_q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Delta_q. \tag{2.98}$$

Мы видим теперь, что спектр энергий имеет вид

$$E(n_1, \ldots, n_l, \ldots) = \sum \left(n_l + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\Delta_l|\right) E_l + \text{const}, \tag{2.99}$$

где $E_l = \sqrt{2\varepsilon_l NV_l + \varepsilon_l^2}$. Волновая функция основного состояния для случая $\Delta_l = 0$ имеет вид

$$|\Psi_0\rangle = \left\{\prod_l \sqrt{1 - t_l^2} \exp\left[\sum_m (-t_m a_m^+ a_{-m}^+)\right]\right\} |0\rangle, \tag{2.100}$$

где $t_l = \operatorname{th}(\theta_l/2)$.

Институт теоретической
и экспериментальной физики,
Москва

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. E. Schrödinger, Naturwissenschaften 14, 664 (1926).
2. R. J. Glauber, Phys. Rev. 130, 2529; 131, 2766 (1963).
3. Дж. Клаудер, Э. Сударшан, Основы квантовой оптики, М., «Мир», 1970.
4. Когерентные состояния в квантовой теории поля. Сб. статей, М., «Мир», 1972.
5. А. М. Переломов, Препринт ИТЭФ № 46, Москва, 1974.
6. A. M. Perelomov, Comm. Math. Phys. 26, 222 (1972).
7. A. O. Barut, L. Girardello, ibid. 21, 41 (1971).
8. J. M. Radcliffe, J. Phys. A4, 313 (1971).
9. А. М. Переломов, Динамические симметрии в квантовой физике. Автореферат докторской диссертации, М., ИТЭФ, 1973.
10. M. I. Monastyrsky, A. M. Perelomov, Rept. Math. Phys. 6, 1 (1974).
11. A. M. Perelomov, Comm. Math. Phys. 44, 197 (1975).

12. M. I. Monastyrsky, A. M. Perelomov, Ann. Inst. H. Poincaré 23, 23 (1975).
13. H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig, Hirzel, 1928.
14. И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, М., «Наука», 1964.
15. J. R. Klauder, Ann. Phys. (N.Y.) 11, 123 (1960).
16. V. Bargmann, Comm. Pure and Appl. Math. 14, 187 (1961).
17. I. E. Segal, Mathematical Problems of Relativistic Physics, Providence, R. I., 1963.
18. Ф. А. Березин, Метод вторичного квантования, М., «Наука», 1965.
19. J. von Neumann, Math. Ann. 104, 570 (1931).
20. А. М. Переломов, ТМФ 6, 213 (1971).
21. V. Bargmann, P. Butera, L. Girardello, J. R. Klauder, Rept. Math. Phys. 2, 221 (1971).
22. V. Fock, Zs. Phys. 49, 339 (1928).
23. Ф. А. Березин, Матем. сб. 86, 578 (1971).
24. E. C. G. Sudarshan, Phys. Rev. Lett. 10, 277 (1963).
25. J. Schwinger, Phys. Rev. 91, 728 (1953).
26. R. P. Feynman, ibid. 80, 440 (1950).
27. F. T. Arecchi, E. Courtens, R. Gilmore, H. Thomas, ibid. A6, 2211 (1972).
28. V. Bargmann, Ann. Math. (Lpz.) 48, 568 (1947).
29. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин, Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений, М., Физматгиз, 1962.
30. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ 56, 1375 (1969).
31. И. С. Шапиро, ДАН СССР 106, 647 (1956).
32. А. И. Никишов, В. И. Ритус, ЖЭТФ 46, 776 (1964).
33. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 51, 1492 (1966).
34. Я. Б. Зельдович, УФН 110, 139 (1973).
35. В. И. Ритус, ЖЭТФ 51, 1544 (1966).
36. A. Casher, M. Revzen, Ann. Phys. 48, 441 (1968).
37. J. Ginibre, Comm. Math. Phys. 8, 26 (1968).
38. K. Hepp, ibid. 35, 265 (1974).
39. M. Rasetti, T. Regge, Coherent States and Virial Theorem, CTS Preprint, 1973.
40. J. C. Botke, D. J. Scalapino, R. L. Sugar, Phys. Rev. D9, 813 (1974).
41. И. С. Шапиро, Письма ЖЭТФ 19, 345 (1974); ЖЭТФ 70, 2050 (1976).
42. K. Cahill, Phys. Lett. B53, 174 (1974).
43. P. Vinciarelli, ibid. B59, 380 (1975).
44. И. В. Волович, ТМФ 29, 18 (1976).
45. Y. R. Shen, Phys. Rev. 155, 921 (1967).
46. Б. Я. Зельдович, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ 55, 589 (1968); Препринт ИТЭФ № 612, Москва, 1968.
47. Б. Я. Зельдович, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ 57, 196 (1969); Препринт ИТЭФ № 618, Москва, 1968.
48. L. D. Landau, Zs. Phys. 45, 430 (1927).
49. G. E. Uhlenbeck, L. S. Ornstein, Phys. Rev. 36, 823 (1930).
50. E. H. Lieb, Comm. Math. Phys. 31, 327 (1973).
51. K. Hepp, E. H. Lieb, Phys. Rev. A8, 2517 (1973).
52. L. M. Narducci, C. M. Bowden, V. Bluemel, G. P. Garrazana, R. A. Tuft, Phys. Rev. A11, 973 (1975).
53. R. H. Dicke, ibid. 93, 99 (1954).
54. M. Gross, C. Fabre, P. Pillet, S. Haroche, Phys. Rev. Lett. 36, 1035 (1976).
55. J. Bellissard, R. Holtz, J. Math. Phys. 15, 1275 (1974).
56. E. Majorana, Nuovo Cimento 9, 43 (1932).
57. I. I. Rabi, Phys. Rev. 51, 652 (1937).
58. В. С. Попов, ЖЭТФ 35, 985 (1958).
59. А. А. Белавин, Б. Я. Зельдович, А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ 56, 264 (1969); Препринт ИТЭФ № 622, Москва, 1968.
60. L. M. Narducci, C. M. Bowden, C. A. Coulter, Lett. Nuovo Cimento 8, 57 (1973).
61. L. M. Narducci, C. A. Coulter, C. M. Bowden, Phys. Rev. A9, 829 (1974).
62. L. M. Narducci, C. A. Coulter, C. M. Bowden, ibid., p. 999.
63. A. M. Perelomov, Phys. Lett. A39, 165 (1972); ТМФ 16, 303 (1973).
64. L. Parker, Phys. Rev. 183, 1057 (1969); D3, 346 (1971).
65. А. А. Гриб, С. Г. Мамаев, ЯФ 10, 1276 (1969).
66. Н. Б. Нарожный, А. И. Никишов, ЯФ 11, 1072 (1970).

67. Я. Б. Зельдович, А. А. Старобинский, ЖЭТФ **61**, 2161 (1971).
68. В. С. Попов, ЖЭТФ **62**, 1248 (1972).
69. A. M. Perelomov, Phys. Lett. **A39**, 353 (1972); ТМФ **19**, 83 (1974).
70. В. С. Попов, М. С. Маринов, ЯФ **16**, 809 (1972).
71. A. M. Perelomov, Phys. Lett. **A54**, 191 (1975).
72. А. М. Переломов, В. С. Попов, ЖЭТФ **57**, 1684 (1969).
73. А. М. Переломов, В. С. Попов, ТМФ **1**, 360 (1969).
74. А. М. Переломов, В. С. Попов, ТМФ **3**, 377 (1970).
75. А. И. Базь, Я. Б. Зельдович, А. М. Переломов, Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, М., «Наука», 1971.
76. Н. Н. Боголюбов, Изв. АН СССР, сер. физ. **11**, 77 (1947).
77. W. H. Bassichis, L. L. Foldy, Phys. Rev. **A133**, 935 (1964).
78. A. I. Solomon, J. Math. Phys. **12**, 390 (1969).