

530.145.06(09)

РОЖДЕНИЕ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ *)

Дж. Мехра

Мне доставляет огромное удовольствие выступать на этом известном коллоквиуме, и я нахожу особенно волнующим то, что это собрание посвящено памяти Вернера Гейзенберга.

Гейзенберг внес важный вклад в развитие многих разделов квантовой физики: в атомную и молекулярную физику, физику ядер и элементарных частиц, в квантовую теорию поля — но именно с открытием квантовой механики неразрывно связано его имя. Рождение квантовой механики подарило нам один из наиболее замечательных эпизодов в истории науки; он также богат, сложен, драматичен и трогателен, как и все в истории человеческой мысли.

С моей стороны было бы слишком самонадеянно претендовать на большее, чем просто вызвать несколько образов, имеющих отношение к идеям и событиям, которые привели к рождению квантовой механики, и я приглашаю вас разделить со мной эти образы.

1. ЗАВЕЩАНИЕ ВОЛЬФСКЕЛЯ

Рождение квантовой механики имеет любопытное отношение к великой теореме Ферма 1637 г. В этой теореме Ферма отрицал существование целых чисел x , y , z , удовлетворяющих уравнению $x^n + y^n = z^n$ для x , y , $z \neq 0$ и $n > 2$. Эта теорема до сих пор не доказана, но является, вероятно, задачей, для которой было опубликовано наибольшее количество неправильных «доказательств».

В 1906 г. математик Пауль Вольфскель из Дармштадта завещал 100 000 марок Королевской Академии наук в Гёттингене для выдачи в качестве награды тому, кто первым, в течение следующих 100 лет (т. е. до 13 сентября 2007 г.), опубликует полное доказательство теоремы Ферма. В 1908 г. Вольфскелевская комиссия, состоящая из Элерса, Гильберта, Клейна, Минковского и Рунге, решила использовать прибыль с основного капитала, достигавшую 5000 марок в год, для приглашения в Гёттинген выдающихся ученых в качестве гостящих лекторов. Были такие, кто предлагал Гильберту самому представить доказательство теоремы Ферма, чтобы получить премию Вольфскеля, однако он отшучивался, говоря, что «не следует убивать гуся, несущего золотые яйца».

В апреле 1909 г. Анри Пуанкаре стал первым ученым, приглашенным в Гёттинген в соответствии с этим соглашением. В своей первой лекции,

*) Jagdish Mehra, *The Birth of Quantum Mechanics*, CERN 76-10, 14 May 1976, Geneva, 56 p. Лекция, посвященная памяти Вернера Гейзенберга; прочитана на коллоквиуме ЦЕРН 30 марта 1976 г. Перевод М. Б. Волошина.

Джагдিশ Мехра — сотрудник Международных сольвеевских институтов физики и химии в Брюсселе и Женевского университета.

состоявшейся 22 апреля, он рассказывал об уравнениях Фредгольма в связи с работой Г. В. Хилла и Хельги фон Кох. Связь этого вопроса с квантовой теорией не была осознана вплоть до 1925 г. В последней лекции, 28 апреля, «О новой механике», единственной прочитанной на французском языке, Пуанкаре обсуждал теорию относительности, не упоминая, между прочим, имя Эйнштейна ¹.

На следующий год был приглашен Гендрик Антон Лоренц. С 24 по 29 октября 1910 г. он прочитал шесть лекций «О старых и новых проблемах физики», которые впоследствии были изданы Максом Борном и опубликованы в «Physikalische Zeitschrift» ². Лоренц посвятил последние три из этих лекций проблеме излучения черного тела.

Весной 1913 г. Гильберт организовал в Гёттингене *Конгресс по кинетической теории газов*, на котором выступали с лекциями Планк, Дебай, Лоренц и Смолуховский ³. В летнем семестре 1914 г. Зоммерфельд прочитал курс лекций по проблемам математической физики, в 1915 г. Гильберт пригласил в Гёттинген Эйнштейна. В последующие три года были приглашены выдающиеся ученые — Мариан Смолуховский ⁴, Густав Ми ⁵ и Макс Планк ⁶. По настоянию Гильберта Министерством образования были выделены фонды, дополнительные к поступлениям от прибылей с пожертвования Вольфскеля, что позволило каждый год приглашать в Гёттинген на срок до одного семестра выдающегося ученого в качестве гостящего профессора на факультет математики и естественных наук. Первым человеком, удостоенным этого приглашения после первой мировой войны, был Нильс Бор. Вольфскелевская комиссия пригласила Бора выступить в Гёттингене весной 1921 г. с лекциями по проблемам теории атома ⁷. Болезнь не позволила ему сделать это в 1921 г., и лекции были прочитаны с 12 по 22 июня 1922 г. Позднее, в том же году, Бору вслед за Эйнштейном была присуждена Нобелевская премия по физике ⁸.

2. ЛЕКЦИИ БОРА: СТРОЕНИЕ АТОМА

В семи гёттингенских лекциях, названных впоследствии *Фестивалем Бора*, Нильс Бор охватил полный диапазон теории строения атома, начиная с ядерной модели атома Эрнеста Резерфорда (1911) и своей попытки, предпринятой в 1913 г., использовать квантовую теорию для объяснения некоторых из наиболее важных характеристик атома ⁹. Например, он обсуждал формулу, связывающую дискретные частоты ν спектра водорода с параметрами, определяющими его строение:

$$\nu = \frac{2\pi^2 m e^4}{h^3} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right), \quad (1)$$

где m и e означают соответственно массу и заряд электрона, h — постоянная Планка, а n_1 и n_2 — положительные целые числа, такие, что $n_1 < n_2$.

За десять лет захватывающей работы, начиная с 1913 г., выдающиеся умелые экспериментаторы и глубокие теоретики, такие, как Фридрих Пашен и Арнольд Зоммерфельд, подготовили почву для исключительно успешной теории, которая, казалось, объясняла все известные факты, касающиеся атомов: это была теория Бора *периодической системы элементов*, основанная на детальном рассмотрении строения атомов. К концу 1922 г. эта теория получила блестящее подтверждение в экспериментальной работе Дирка Костера и Георга де Хевеши. Костер и де Хевеши, в институте Бора в Копенгагене, доказали существование элемента с атомным номером $Z = 72$, химические свойства которого обнаруживали большое сходство со свойствами циркония и выраженное отличие от свойств редких земель. Несколько ранее Александр Даувиллер, работавший вме-

сте с Морисом де Бройлем в Париже, основываясь на изучении рентгеновских спектров этого элемента, отнес его к редким землям, однако такая интерпретация была несовместима с теорией Бора, поэтому новый элемент был справедливо окрещен *Гафнием* в честь места своего рождения.

В гёттингенских лекциях Нильс Бор подробно обсуждал принципы своей теории строения атома и их приложение к реальным конфигурациям электронов. Основной была идея о том, что механические орбиты электронов, движущихся в кулоновском поле ядра, определяются фазовым интегралом, удовлетворяющим квантовому условию

$$\oint p \, dq = nh \quad (2)$$

— условию, которое ведет начало от Планковского рассмотрения теплового излучения в 1906 г. Здесь p — импульс, а q — координата электрона, совершающего периодическое движение.

Начиная с 1915 г. Арнольд Зоммерфельд исследовал в своей теории атома водорода систематическое применение квантовых условий. Например, в нерелятивистском приближении, радиальное квантовое число n_r и азимутальное число n_φ определяют кеплеровские эллипсы электрона при помощи уравнений

$$\oint p_r \, dr = n_r h \quad \text{и} \quad \int_0^{2\pi} p_\varphi \, d\varphi = n_\varphi h. \quad (3)$$

Сумма этих двух квантовых чисел

$$n = n_r + n_\varphi \quad (4)$$

играет роль *главного* квантового числа n , которое возникло еще в теории Бора (1913) *бальмеровского* спектра.

Для неводородоподобных атомов, т. е. атомов, имеющих более одного электрона, устойчивость орбит не могла быть гарантирована простыми квантовыми условиями, определяемыми уравнениями (2) и (3), так как отталкивание другими электронами атома вызывает сильные возмущения плоских движений. Новые степени свободы, возникающие подобным образом, могут быть описаны другими квантовыми числами, при этом имелаась надежда теоретиков, что движения в атоме остаются многократно-периодическими.

Подробно рассмотрев все взаимодействия электронов с ядром и электронов с электронами, Нильс Бор пришел к объяснению строения атомов, включая существование конечных групп электронов с очень близкими энергиями. Максимальные числа электронов в этих группах представлялись равными 2, 8, 8, 18, 18, 32 в согласии с наблюдаемыми длинами периодов системы химических элементов.

В своих лекциях в Гёттингене Бор уделял основное внимание физическим принципам теории, в особенности двум наиболее плодотворным принципам: во-первых, *адиабатическому принципу* Пауля Эренфеста, который утверждал, что путем *«адиабатического»* изменения можно преобразовать одну разрешенную траекторию в другую разрешенную траекторию, и, во-вторых, своему собственному *принципу соответствия*, который позволял в пределе больших квантовых чисел связать все свойства атомной системы, определяемые квантовыми условиями, с аналогичными свойствами системы, определяемыми средствами классической механики. Например, такое рассмотрение аналогии требовало, чтобы характерная частота квантового излучения атома переходила, в пределе соответствия, в частоту обращения электрона в атоме.

3. АУДИТОРИЯ БОРА

Лекции Бора привлекли широкую аудиторию. Все физики и математики Гёттингена, молодые и старые, включая Борна, Франка и Гильберта, посещали эти лекции. Многие другие прибыли слушать лекции из отдаленных университетов, среди них Эренфест из Лейдена и Зоммерфельд из Мюнхена. Зоммерфельд, второй после Бора выдающийся представитель теории атома, привез с собой двух своих наиболее способных студентов. Лекции Бора оказали историческое влияние на Вольфганга Паули и Вернера Гейзенберга, и, вероятно, не будет преувеличением сказать, что квантовая теория явилась главным наследником завещания Вольфскеля, предназначенного для поощрения доказательства теоремы Ферма.

Среди прочих вопросов в своих лекциях Бор обсуждал расчет квадратичного эффекта Штарка, который был проведен Гендриком Крамерсом (1920)¹⁰ на основе соображений соответствия. Гейзенберг выдвинул серьезное возражение на том основании, что результат не согласовывался ни с одной из классических частот атома. С другой стороны, явление квадратичного эффекта Штарка можно было сопоставить с рассеянием света малых частот электронами, связанными в атоме; более того, в рамках существовавшего описания рассеяния результат всегда зависел только от классической частоты движения электрона.

Бор дал уклончивый ответ на это возражение — правильный ответ в действительности отсутствовал до весны 1925 г., однако на него произвела глубокое впечатление пронизательность молодого человека, который поставил его в тупик вопросом, касающимся применимости принципа соответствия к рассмотрению квадратичного эффекта Штарка. Он пригласил юного Гейзенберга совершить с ним прогулку на гору Хейнберг в Гёттингене и обсудить проблемы атомной теории.

Вернер Карл Гейзенберг родился 5 декабря 1901 г. в Вюрцбурге в Баварии. Он посещал Максимилиановскую гимназию в Мюнхене, где изучал древние языки, математику и некоторые другие предметы.

Весной 1919 г., семнадцатилетним юношей, Гейзенберг участвовал в добровольной охране в составе кавалерийского стрелкового отряда во время революции, связанной с «республикой советов». В течение службы он часто проводил ночи на крыше здания Теологической семинарии, где совершенствовался в греческом языке, читая с огромным увлечением платоновского «Тимея»¹¹. Идеи Платона о строении материи произвели на него большое впечатление и порой направляли его более поздние взгляды на физику атома и элементарных частиц.

Гейзенберг поступил в Мюнхенский университет осенью 1920 г. Под дружеским руководством Зоммерфельда он был сразу же вовлечен в исследование теории атома: его задачей было объяснить частоты линий, наблюдавшихся в так называемом аномальном эффекте Зеемана, на основе боровской теории строения атома, т. е. найти, каким образом расстояния между энергетическими термами определяются квантовыми числами. Гейзенберг решил задачу, введя *полуцелые квантовые числа*, которые до этого не появлялись в описании атомных явлений. Паули высмеял это решение словами: «Сейчас Вы вводите полуцелые квантовые числа, потом Вы введете четверть-целые и кратные одной восьмой, пока, наконец, вся квантовая теория не рассыплется в пыль в Ваших умелых руках»¹².

Зоммерфельд, сам преданный магии целых квантовых чисел, не слишком высоко оценил полуцелые квантовые числа, однако он был восхищен необычным подходом Гейзенберга.

Он пригласил Гейзенберга помочь ему переформулировать «феноменологическую» теорию Вольдемара Фохта аномального эффекта Зеемана, и в 1922 г. они опубликовали совместную статью об интенсивностях аномальных зеемановских линий¹³. Результат этой работы остался верным даже после открытия квантовой механики. Таким образом, Гейзенберг был хорошо знаком с теорией Бора еще до того, как впервые встретился с ним в Гёттингене.

Для докторской диссертации Зоммерфельд дал Гейзенбергу задачу из классической гидродинамики — переход течения из ламинарного в турбулентное. Гейзенберг разработал собственные приближенные методы для рассмотрения нелинейной задачи и показал, что течение Пуазейля между двумя параллельными стенками должно стать нестабильным, если число Рейнольдса превышает значение, равное приблизительно 1000¹⁴. Этот результат, полученный в 1923 г., был подтвержден в 1952 г. Л. Г. Томасом¹⁵. Ранний успех Гейзенберга в проблеме турбулентности привил ему известную любовь к нелинейным теориям, которой он всегда оставался верен.

Устный экзамен Гейзенберга на докторскую степень граничил с бедствием. Кроме теоретической физики, по которой он экзаменовался у Зоммерфельда с большим успехом, он должен был сдать экзамен по экспериментальной физике Вилли Вину (автору известного закона, носящего его имя). Вин задавал Гейзенбергу вопросы по теории аккумуляторов и о разрешающей силе микроскопов, телескопов и интерферометра Фабри — Перо — вопросы, на которые Гейзенберг не мог ответить. Вин настаивал на выставлении неудовлетворительной оценки, но вмешательство Зоммерфельда спасло положение, и Гейзенберг получил наименьшую возможную оценку «удовлетворительно», как раз достаточную, согласно правилам, для получения искомой степени¹⁶. Как добросовестный немецкий студент, Гейзенберг изучил вопрос о разрешающей силе оптических приборов и применил эти идеи в 1927 г. в своем мысленном эксперименте с гамма-микроскопом в связи с рассмотрением принципа неопределенности.

4. ПРОВАЛ ВЫЧИСЛЕНИЙ; ПРОБЛЕМА ГЕЛИЯ И АНОМАЛЬНОГО ЭФФЕКТА ЗЕЕМАНА

Сразу после экзамена, в июле 1923 г., полностью подавленный нападениями Вилли Вина, Гейзенберг поехал в Гёттинген искать убежища у Макса Борна. Его приезд Борн описывал следующими словами: «Он был похож на простого крестьянского парня, с короткими, светлыми волосами, ясными живыми глазами и чарующим выражением лица. Он выполнял свои обязанности ассистента более серьезно, чем Паули, и оказывал мне большую помощь. Его непостижимая быстрота и острота понимания всегда позволяли ему проделывать колоссальное количество работы без особых усилий. Окончив свою диссертацию по гидродинамике, он работал над атомными проблемами, частично в одиночку, частично в сотрудничестве со мной, а также помогал мне руководить моими студентами-исследователями»¹⁷.

Вместе с Борном Гейзенберг начал систематическое изучение сложных атомов с помощью методов теории возмущений классической механики и астрономии. Борн и Гейзенберг рассматривали атом гелия как «многократно-периодическую» систему¹⁸. Применяя квантовые условия типа соотношения (2), они обнаружили, что вычисленные ими энергетические уровни не согласуются с экспериментальными данными; потенциал ионизации парагелия оказался на 4 вольта больше наблюдаемого значения.

Гейзенберг¹⁹, однако, еще до этого обнаружил, что если взять азимутальное квантовое число равным $1/2$, т. е. положить

$$\oint p_{\varphi} d\varphi = \frac{1}{2} h, \quad (5)$$

то может быть получено экспериментальное значение 24,6 вольт для потенциала ионизации. Итак, опять появилось полуцелое квантовое число.

Из Копенгагена Паули сообщил реакцию Бора и свою собственную на такое положение вещей. Бор полагал, что была неправильной и подлежала исправлению механика, так что можно было обойтись без полуцелых квантовых чисел. Бор также предложил Паули изучить проблему аномальных эффектов Зеемана, над которой ранее работали Зоммерфельд, Ланде и Гейзенберг, однако Бор не одобрял их подхода, и Паули сообщил Гейзенбергу свои предварительные заключения по этому вопросу²⁰. Гейзенберг пришел в негодование. Он писал Зоммерфельду: «Я убежден в неправильности идей Паули, но что я нахожу более всего ужасным, так это то, что Бор все неправильное считает верным, а все верное неправильным»²¹. Так, учась преодолевать трудности, которые преподносила теория атома, Гейзенберг начинал знакомиться с диалектической мыслью Бора и критицизмом Паули.

Паули, со своей стороны, тоже не был в восторге от того, что представляла собой атомная физика в то время. Пятью годами раньше, в 1918 г., восемнадцатилетний Вольфганг Паули уехал из Вены изучать физику у Зоммерфельда. Еще до приезда в Мюнхен он написал работу о тензоре энергии-импульса в гравитационном поле²², а в декабре 1920 г. он мастерски написал обзор²³ по теории относительности для Энциклопедии математических наук, работу, которую Эйнштейн назвал «зрелой и тщательно продуманной»²⁴. Паули также активно занялся проблемами теории атома, заканчивая свою подготовку к докторской степени летом 1921 г. диссертацией о молекулярном ионе водорода, в которой он указал на трудности применения известных методов²⁵. Осенью 1921 г. он провел семестр в Гёттингене, работая с Борном над построением систематической теории возмущений сложных механических систем²⁶. Опасаясь, что атмосфера Гёттингена может сделать из него математика, он принял приглашение приехать в Гамбург в качестве ассистента Вильгельма Ленца, а осенью 1922 г. поехал в Копенгаген по приглашению Бора помочь ему в подготовке немецкого издания его (Бора) обширной статьи о строении атома²⁷. Это, разумеется, был всего лишь предлог для того, чтобы Паули приехал в Копенгаген; в действительности он был нужен Бору, чтобы взяться за многочисленные сложные проблемы теории атома, включая аномальный эффект Зеемана. В это время, как вспоминал много лет спустя Паули, «один из моих коллег, встретив меня бесцельно бродящего по прекрасным улицам Копенгагена, дружески сказал мне: «Ты выглядишь очень несчастным», на что я сурово ответил: „Как можно выглядеть счастливым, когда думаешь об аномальном эффекте Зеемана?“»²⁸. Продолжая эту работу, он менее чем через два года откроет принцип запрета, носящий ныне его имя²⁹. Однако к концу 1924 г. и Паули и Гейзенберг были убеждены, что аномальные зеемановские расщепления спектральных линий нельзя было объяснить, просто вводя полуцелые квантовые числа, без привлечения действительно *новых идей*, возможно, таких, как боровское понятие «Unmechanischer Zwang», т. е. немеханических напряжений.

Ввиду существующей связи³⁰ между мультиплетной структурой спектральных линий, такой, как релятивистская дублетная структура линий бальмеровского спектра, и аномальным эффектом Зеемана, Паули

утверждал, что на существовавшую квантовую теорию нельзя было полагаться даже при объяснении свойств атома водорода.

Так, к концу 1924 г., радостная уверенность, преобладавшая на фестивале Бора в июне 1922 г., развеялась, и трудности теории атома казались непреодолимыми.

[5. ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ ПРОБЛЕМА: КВАНТ СВЕТА

Даже Бор был расстроен. Появились другие трудности, наступавшие на его концепцию атомных явлений, основанную на принципе соответствия, в особенности в связи с открытием эффекта Комптона в октябре 1922 г.³¹ Этот эффект был сразу объяснен Комптоном и, независимо, Дебаем, как направленное рассеяние отдельных квантов света или фотонов электронами, с результирующим получением отдачи электроном, при сохранении, таким образом, импульса и энергии в индивидуальном атомном процессе³².

Эффект Комптона явился доказательством существования квантов света, которое подвергалось сомнению многими серьезными физиками (включая Макса Планка) всегда с тех пор, как Эйнштейн ввел их в 1905 г. и объяснил фотоэлектрический эффект³³. Сам Бор использовал испускание и поглощение квантов света в своей теории спектра водорода просто как эвристический прием, не веря в их существование³⁴. Подобно Планку, Бор полагал, что простая «корпускулярная теория света» привела бы к огромным трудностям в описании электростатических полей и что пришлось бы пожертвовать некоторыми из величественных достижений максвелловской электродинамики. Бор не видел, каким образом можно было бы установить предельное соответствие или аналогию между квантом света и классическим волновым излучением, и заявлял: «Даже если Эйнштейн пришлет мне телеграмму с объявлением доказательства квантов света, она не сможет дойти до меня, потому что должна быть перенесена электромагнитными волнами»³⁵.

И все же Бор был чрезвычайно обеспокоен проблемой, как объяснить эффект Комптона, *не привлекая идею о квантах света*. Поэтому он был очень обрадован, когда в конце 1923 г. молодой американец из Гарварда, Джон Слэйтер, привез в Копенгаген идею «виртуального осциллятора», с помощью которой Слэйтер пытался примирить дискретную теорию квантов света с непрерывной волновой теорией электромагнитного поля³⁶. На основе этой идеи Бор, Крамерс и Слэйтер³⁷ разработали схему новой теории излучения, которую Крамерс³⁸ применил к теории дисперсии.

Начало квантовой теории дисперсии было положено в 1924 г., когда Рудольф Ладенбург³⁹ успешно применил принцип соответствия для перевода на квантовый язык анализа, использовавшегося в классической теории. Вместо классических движущихся внутри атома электронов Ладенбург ввел в формулы переходы между стационарными состояниями, так что вместо того чтобы рассматривать атом как резерфордскую планетарную систему из ядра и электронов, подчиняющуюся законам классической динамики, поведение атома по отношению к падающему излучению предсказывалось с помощью расчета, основанного на том, что Бор, Крамерс и Слэйтер называли теперь «виртуальными осцилляторами».

Крамерс³⁸ сразу же обобщил дисперсионную формулу Ладенбурга, учтя *оба* типа дисперсионных эффектов атомов в произвольном состоянии n , а именно, эффекты, связанные с поглощением характерных частот $\nu_a(n + \alpha, n)$ и их последующим испусканием, а также эффекты, не рассмотренные Ладенбургом, т. е. связанные с испусканием частот $\nu_e(n, n - \beta)$ и их последующим поглощением. Эти последние давали

отрицательный вклад в дисперсионную формулу для индуцированного электрического момента M :

$$M = E \frac{2}{h} \sum_{\alpha} \left[\frac{\Gamma_{\alpha}(n+\alpha, n) v_{\alpha}(n+\alpha, n)}{v_{\alpha}^2(n+\alpha, n) - v^2} - \frac{\Gamma_e(n, n-\alpha) v_e(n, n-\alpha)}{v_e^2(n, n-\alpha) - v^2} \right], \quad (6)$$

где E — электрическое поле падающей волны, Γ_e соответствует эйнштейновскому *вынужденному испусканию* ⁴⁰ и как Γ_{α} , так и Γ_e отвечают квадратам модулей коэффициентов Фурье A_{τ} электрического момента невозмущенного атома, как показал в 1924 г. Борн ⁴¹ в своем систематическом исследовании теории дисперсии Крамерса.

По отношению к падающему свету высоких частот, т. е. при $v \gg v_{\alpha}$, v_e , электрон в атоме водорода должен вести себя как свободный *классический* электрон. Соответствующая классическая формула для рассеяния рентгеновских лучей одним электроном была получена Дж. Дж. Томсоном ⁴² в 1907 г.:

$$M = -\frac{e^2 E}{4\pi^2 m} \frac{1}{v^2}. \quad (7)$$

Сравнивая соотношения (6) и (7) в пределе высоких частот, В. Томас ⁴³ и В. Кун ⁴⁴ независимо получили правило сумм:

$$\sum_i p_i = \frac{8\pi^2 m}{e^2 h} \sum [\Gamma_{\alpha} v_{\alpha} - \Gamma_e v_e] = 1, \quad (8)$$

где p_i — число рассеивающих электронов. Число в правой части этого соотношения равно 1 для водорода и 2 для гелия.

Результаты теории дисперсии были весьма обнадеживающими, однако концептуальная канва, в которой Бор представил в 1924 г. теорию излучения Бора — Крамерса — Слэйтера, встретила серьезные трудности весной 1925 г. При описании дисперсии световых волн атомами предполагалось, что процессы испускания и поглощения в атомах, удаленных друг от друга, статистически независимы и что энергия и импульс не сохраняются в индивидуальных актах испускания и поглощения, в противоречии с объяснением эффекта Комптона на основе эйнштейновского кванта света. Нильс Бор полагал, что в атомных процессах энергия и импульс сохраняются лишь статистически. Даже когда это представление впервые было выдвинуто в 1924 г., такие люди, как Эйнштейн и Паули, верившие в строгое сохранение энергии и импульса как в божественное предначертание упорядоченной Вселенной, считали идею Бора чем-то граничащим с безнравственностью. Это по существу было началом дискуссий Эйнштейн — Бор относительно статистической интерпретации квантовой теории, которым еще предстояло развернуться.

В апреле 1925 г. Вальтер Боте и Ганс Гейгер получили результаты своего *эксперимента на совпадении*, показавшие, что вторичное комптоновское излучение действительно появлялось после рассеяния *единичным* электроном ⁴⁵. Этот простой результат представлял собой кончину теории излучения Бора, Крамерса и Слэйтера и триумф не только добродетели в виде сохранения энергии и импульса, но и их современного носителя — кванта света. Эйнштейн был убежден, что *это должно было быть так*, и был рад, что *это было так*. Бор написал трогательное письмо Резерфорду об ужасных трудностях физики, или физики, которую он себе представлял, и рассказал ему как он (Бор) был несчастен ⁴⁶.

В том же месяце, апреле 1925 г., Вернер Гейзенберг начал размышлять о расчете интенсивностей линий водорода с помощью «уточненного» применения принципа соответствия, что было успешно выполнено в теории дисперсии.

6. УТОЧНЕНИЕ ПРИНЦИПА СООТВЕТСТВИЯ

Гейзенберг отправился в свой первый визит в Копенгаген на пасху 1924 г. Он с нетерпением стремился критически обсудить методы и результаты Бора в теории атома. Однако, прежде чем у него появилась такая возможность, Бор увез его в прогулочную поездку по Дании, где показывал ему живописные виды, беседовал с ним об истории и философии, и, наконец, о физике. Гейзенберг был очарован. Конечно, он знал Зоммерфельда, который был великим учителем и хорошим человеком, однако он был «тайным советником». С другой стороны Борн, он хорошо владел формальными методами, был дружелюбным, но довольно отдаленным. Бор же был идеалом. Он был дружелюбным, вдохновляющим, любезным и умел думать о проблемах атомной физики, как никто другой. Гейзенберг ехал в Копенгаген сражаться против принципа соответствия с самим пророком, а вместо этого стал его апостолом.

Осенью 1924 г. Гейзенберг возвратился в Копенгаген на шесть месяцев. Он работал с Бором и Крамерсом над конкретными задачами, в которых искал способ сформулировать содержание принципа соответствия в виде уравнений, из которых могли бы быть выведены новые физические результаты. Например, он рассматривал вопрос о поляризации света, испускаемого атомами при резонансной флуоресценции ⁴⁷. Вместе с Крамерсом Гейзенберг обобщил дисперсионную формулу Крамерса, соотношение (6), на некогерентное рассеяние света атомами, т. е. на случай, когда частота рассеянного света ν изменяется и определяется формулой

$$\nu' = \nu \pm \nu_a, \tag{9}$$

где ν_a — одна из характерных частот атома ⁴⁸.

Успехи, достигнутые подобным образом с помощью того, что он называл *уточнением* («Verschärfung») принципа соответствия, утвердили уверенность Гейзенберга в правильности копенгагенского подхода, и он надеялся, как он вспоминал позднее, что «может быть, в один прекрасный день окажется возможным осуществить переход, просто путем разумного отгадывания, к полной математической схеме квантовой механики» ⁴⁹.

В апреле 1925 г. Гейзенберг возвратился в Гёттинген, чтобы приступить к своим обязанностям приват-доцента на летний семестр.

7. НОВАЯ СХЕМА ГЕЙЗЕНБЕРГА

В Гёттингене Гейзенберг пытался отгадать интенсивности линий водорода, но в этом вопросе он потерпел неудачу. Он пришел к заключению, что трудности, возникающие из-за правил квантования, имеют более общую природу и должны быть рассмотрены в первую очередь. Эти трудности возникали не столько из-за отхода от классической механики, сколько из-за нарушения кинематики, лежащей в основе этой механики. В поисках новой кинематики Гейзенберг применил совершенно новую идею: он предположил, что уравнение движения электрона, например

$$\ddot{x} + f(x) = 0, \tag{10}$$

может быть сохранено, однако кинематическая интерпретация величины x как положения, зависящего от времени, должна быть отвергнута. Какого же типа величины должны быть подставлены в уравнение движения?

При классическом периодическом движении $x(t)$ может быть разложено в ряд Фурье:

$$x(t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} a_{\alpha} e^{i\alpha\omega t}. \tag{11}$$

В квантовой теории коэффициенты a_α и частота ω зависят от квантового числа n . Поэтому вместо соотношения (11) Гейзенберг записал $x(t)$ в виде

$$x(t) = \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} a_\alpha(n) e^{i\alpha\omega n t}. \quad (12)$$

Затем члены фурье-разложения (12) он заменил членами нового типа,

$$a(n, n - \alpha) e^{i\omega(n, n - \alpha)t}, \quad (13)$$

которые соответствуют переходу из состояния n в состояние $n - \alpha$; временной фактор $\omega(n, n - \alpha)$ есть частота света, отвечающая этому переходу, умноженная на 2π . Для Гейзенберга основной задачей был расчет интенсивности излучения, испускаемого при переходе $P \rightarrow Q$. Он знал, что эта интенсивность пропорциональна эйнштейновской вероятности испускания A_{PQ} , и предположил, что вероятность пропорциональна квадрату модуля a , т. е.

$$A_{PQ} \propto |a(n, n - \alpha)|^2. \quad (14)$$

Он мотивировал введение величин $a(n, n - \alpha)$ тем, что интенсивности и, следовательно, $|a(n, n - \alpha)|^2$ являются *наблюдаемыми*, в отличие от функций $x(t)$.

Из классического комбинационного закона для частот

$$\nu(n, \alpha) = \nu(n, \beta) + \nu(n, \alpha - \beta), \quad (15)$$

переформулированного квантотеоретически Гейзенбергом в виде

$$\nu(n, n - \alpha) = \nu(n, n - \beta) + \nu(n - \beta, n - \alpha), \quad (16)$$

стало «почти неизбежным» (nahezu zwangsläufig) потребовать, чтобы коэффициенты $C(n, n - \alpha)$ произведения двух переформулированных рядов Фурье

$$x(t) y(t) = \sum_{\alpha} C(n, n - \alpha) e^{i\omega(n, n - \alpha)t}, \quad (17)$$

подчинялись правилу умножения

$$C(n, n - \alpha) = \sum_{\beta} A(n, n - \beta) B(n - \beta, n - \alpha). \quad (18)$$

Путем такой переформулировки принцип соответствия был включен в самые основы его кинематической схемы.

Гейзенберг заметил, что уравнение (18) вносит новую большую трудность: в то время как в классической теории $x(t) y(t)$ всегда равняется $y(t) x(t)$, при определениях (17) и (18) это не обязательно имеет место. Поэтому он заключил, что, вообще говоря, неясно, как определить произведение двух динамических переменных в квантовой теории.

Вместо того, чтобы быть обескураженным необычной ситуацией, которая никогда ранее не встречалась в физике и которую он не понимал, Гейзенберг искал пример, в котором он мог бы применить свою квантотеоретическую переформулировку (Umdeutung) величин классической механики, избегая новой трудности с определением произведения. Он остановил свой выбор на ангармоническом осцилляторе, описываемом в классической теории уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + \lambda x^3 = 0, \quad (19)$$

в котором член возмущения λx^3 содержит произведения одних лишь $x(t)$. Допустив, что член возмущения есть малая поправка, он решил восполь-

зоваться классическим методом теории возмущений, т. е. предположил, что

$$x(t) = a_1 \cos(\omega t) + \lambda a_3 \cos(3\omega t) + \lambda^2 a_5 \cos(5\omega t) + \dots, \quad (20)$$

и переформулировал это равенство квантотеоретически в виде

$$x(t) = a(n, n-1) \cos[\omega(n, n-1)t] + \lambda a(n, n-3) \cos[\omega(n, n-3)t] + \dots \quad (21)$$

Он также разложил частоты в ряд по λ :

$$\omega(n, n-1) = \omega_0(n, n-1) + \lambda \omega_1(n, n-1) + \dots \quad (22)$$

Подставив эти выражения, т. е. равенства (21) и (22), в уравнение (19), он получил при $\lambda = 0$

$$[\omega_0^2 - \omega^2(n, n-1)] a(n, n-1) = 0 \quad (23)$$

— решение для гармонического осциллятора—и в первом приближении $[\omega_0^2 - \omega^2(n, n-3)] a(n, n-3) + a(n, n-1) a(n-1, n-2) a(n-2, n-3) = 0$ (24)

для ангармонического осциллятора.

Гейзенберг нашел, что величины $a(n, n-\alpha)$, названные им *амплитудами перехода*, определяются как решения уравнений движений (23) или (24) только лишь с точностью до константы. Что делать с этой константой он не знал. Это было в начале июня 1925 г., и его программа застопорилась.

8. ГЕЛЬГОЛАНД И РАДОСТЬ ОТКРЫТИЯ

С приходом весны 1925 г. Гейзенберг тяжело заболел сенной лихорадкой, которая долгое время не оставляла его, и решил провести неделю или десять дней в июне 1925 г. на скалистом острове Гельголанд в Северном море. На Гельголанде он не только вылечился от лихорадки, но и избавился от подобных насморку, вызванному хронической простудой, прежних проблем атомной механики. Об этом открытии Дирак говорил позднее: «Мы оба в одно и то же время были молодыми людьми, работали над одной и той же проблемой. Он преуспел там, где я потерпел неудачу»⁵⁰.

На Гельголанде Гейзенберг делил время между продолжительными прогулками, чтением Гётевского «Западно-восточного Дивана» и поисками способа придать своим смутным мыслям о квантовой механике более определенную форму⁵¹. Там он решал две задачи.

Прежде всего он должен был получить в новой схеме квантовое условие, которое было бы эквивалентно соотношению (2). В одномерном случае соотношение (2) может быть записано в виде

$$\int m \dot{x} dx = J = nh, \quad (25)$$

где интеграл берется по полному периоду движения. Подставляя разложение Фурье (12) для x в это соотношение, он получил

$$nh = 2\pi m \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} |a_{\alpha}(n)|^2 \alpha^2 \omega_n. \quad (26)$$

Далее Гейзенберг заменил эту формулу ее производной по n , т. е.

$$h = 2\pi m \sum_{\alpha=-\infty}^{\infty} \alpha \frac{d}{dn} (\alpha \omega_n |a_{\alpha}|^2), \quad (27)$$

где выражение в скобках определено только при целом n . Гейзенберг рассматривал такую замену как более естественную с точки зрения принципа соответствия. Используя соотношение (27) в качестве промежуточного шага, он заменил производную разностью и получил

$$h = 4\pi m \sum_{\alpha=0}^{\infty} \{ |a(n, n+\alpha)|^2 \omega(n+\alpha, n) - |a(n, n-\alpha)|^2 \omega(n, n-\alpha) \}. \quad (28)$$

Это равенство и есть квантовое условие Гейзенберга, оно также эквивалентно правилу сумм Куна и Томаса (соотношение (8)). Так как для основного состояния переход в более низкие невозможен, необходимо положить

$$a(n, n-\alpha) = 0, \quad (29)$$

если n есть квантовое число, отвечающее основному состоянию. В уравнении (14) Гейзенберг уже предположил, что квадраты модулей $|a(n, n-\alpha)|^2$ пропорциональны вероятностям переходов $n \rightarrow n-\alpha$.

Вывод квантового условия (28) и последующее определение амплитуд перехода были, таким образом, первой решенной задачей. Второй проблемой, мучившей Гейзенберга, был вопрос, будет ли справедлив закон сохранения энергии в новой схеме. Именно этот вопрос стал жизненно важным после появления результата эксперимента Бете — Гейгера.

В классической механике закон сохранения энергии сразу следует из уравнения движения ангармонического осциллятора (уравнение (19)), которое после умножения на $m\dot{x}$ может быть переписано в виде

$$\frac{d}{dt} H = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{4} \lambda x^4 \right] = 0, \quad (30)$$

где H — величина в квадратных скобках — с очевидностью является энергией и сохраняется. Эта связь, вообще говоря, не обязательно останется справедливой, если переформулировать уравнение (30) квантотеоретически, и Гейзенберг провел вычисления до членов второго порядка по λ , делая по пути ошибки и исправляя их. Он нашел, что в переформулированном в новой кинематике гамильтониане не остается членов, зависящих от времени.

Этот пример с ангармоническим осциллятором показал, что с помощью его новой схемы можно решать динамические задачи квантовой теории. Как он вспоминал: «Было почти три часа утра, когда передо мной наконец лежал окончательный результат моих вычислений. Закон сохранения энергии выполнялся для всех членов, и так как все получалось само собой, без всякого принуждения, я более не мог сомневаться в математической непротиворечивости и стройности квантовой механики, на которую указывали мои вычисления. Прежде всего я был глубоко взволнован. У меня было чувство, что сквозь поверхность атомных явлений я смотрю на неведомо прекрасный внутренний мир, и у меня едва не кружилась голова при мысли, что теперь я должен был исследовать богатство математических структур, которые природа столь щедро раскрыла передо мной. Я был слишком возбужден, чтобы уснуть, и поэтому, как только занялся новым днем, я отправился на южную оконечность острова, где давно собирался взобраться на одинокую скалу, выдающуюся в море. Я проделал это без особых затруднений и стал ожидать на ее вершине восхода солнца»⁵². Гейзенберг был счастлив. С этой радостью, блаженным опытом нового знания, хотя все еще не осознавая полностью, что в его квантотеоретической схеме найден ключ к последовательному решению атомных проблем, Гейзенберг возвратился в Гёттинген.

На обратном пути он остановился в Гамбурге, чтобы встретиться с Паули. Паули был для него гением критики, и он научился уважать его критические способности еще со времени их первой встречи на семинаре Зоммерфельда в 1920 г. в Мюнхене. Паули ободрил его продолжать работу. В течение следующей пары недель Гейзенберг обменялся с ним несколькими письмами, а 9 июля 1925 г. послал ему рукопись законченной статьи. Мнение Паули было благоприятным: «Это была утренняя заря», начало рассвета квантовой теории, сказал он.

Получив положительный вердикт Паули, в середине июля Гейзенберг отдал статью ⁵³ Максу Борну и попросил сделать с ней то, что Борн сочтет нужным.

9. МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Когда Борн прочел статью Гейзенберга, он был, по его выражению, совершенно «очарован». «Я начал размышлять о его символическом умножении, — рассказывал он, — и скоро втянулся в это так, что продумал целый день и с трудом смог уснуть ночью... Утром я внезапно увидел свет: гейзенберговское символическое умножение было ничем иным, как матричным исчислением, хорошо известным мне со студенческих дней из лекций Розана в Бреславле» ⁵⁴.

Борн перевел квантовое условие Гейзенберга, соотношение (28), в матричную форму

$$\sum_k [p(nk)q(kn) - q(nk)p(kn)] = \frac{h}{2\pi i} \quad (31)$$

и определил, что два матричных произведения pq и qp не равны друг другу. Борн догадался, что недиагональные элементы матрицы $pq - qp$ равняются нулю, и квантовое условие можно записать в общем виде как

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i} 1 \quad (32)$$

(где 1 обозначает единичную матрицу), однако это была только догадка, доказать которую он не мог. Доказательство было дано независимо Иорданом и Дираком.

Через несколько дней, 19 июля 1925 г., Борн отправился из Гёттингена в Ганновер, чтобы присутствовать на заседании Германского физического общества, куда также прибыл из Гамбурга Паули. На вокзале он рассказал Паули о матрицах и своих трудностях с определением недиагональных элементов. Он предложил Паули вместе заняться этим вопросом, на что тот ответил саркастическим отказом, говоря: «Да, я знаю, что вам нравятся скучный и сложный формализм. Вы только испортите физические идеи Гейзенберга своей пустяковой математикой» ⁵⁵.

Паули искренне верил, что новая квантовая теория была «*физикой мальчишек*» (Knabenphysik), т. е. игрой молодых людей, таких, как Гейзенберг и он сам, и что было бы лучше, если бы Борн продолжал заниматься своей работой над кристаллическими решетками. Он так никогда и не простил по-настоящему Борна за то, что, по его мнению, было «незаконным вторжением» на новую территорию. Паули писал Кронигу: «Механика Гейзенберга вновь вселила в меня надежду и радость жизни (заметьте, это пишет молодой человек, которому едва исполнилось двадцать пять лет). Она пока не принесла решения загадки, но я верю, что теперь снова можно двигаться вперед. Следует прежде всего искать путь освободить механику Гейзенберга от гёттингенского (т. е. Макса Борна)

потока формальной учености (*formalen Gelehrsamkeitsschwall*) и лучше выявить ее физическую сущность»⁵⁸. Сам Паули решил не вмешиваться в развитие мыслей и планов Гейзенберга⁵⁷.

Возвратившись из Ганновера, Борн сразу же уговорил Иордана помочь ему в работе, что привело Борна и Иордана к матричной формулировке квантовой механики, которая была завершена 27 сентября 1925 г. Эта работа содержала резюме матричных методов, интерпретацию гейзенберговского символического умножения, доказательство соотношения (32) для разности произведений pq и qp , доказательство сохранения энергии и доказательство условия частот Бора. Эта работа уже содержала попытку, предпринятую одним только Иорданом, квантования электромагнитного поля на основе рассмотрения его компонент как матриц. Эта работа явилась систематической формулировкой матричной механики, в которой «гёттингенская ученость» позволила довести теорию до полного совершенства.

Дальнейшее продвижение по пути к окончательному завершению матричной схемы квантовой механики началось сразу после этого при сотрудничестве Борна, Гейзенберга и Иордана. Это сотрудничество началось с письма Иордана Гейзенбергу в начале сентября 1925 г. — перед возвращением в Гёттинген к зимнему семестру Гейзенберг провел несколько недель в Копенгагене. Каждый — Гейзенберг, Борн, Иордан — вносил свою лепту. Общей подготовкой статьи к публикации занимался Иордан, а вводная часть была написана Гейзенбергом. Эта работа Борна, Гейзенберга и Иордана была третьей по счету после открытия Гейзенберга⁵³ и содержала логически последовательное представление матричной механики. Она была закончена к концу октября 1925 г., и ее обычно называют «работой трех авторов» («Drei-Männer Arbeit») ⁵⁹. Это была действительно «ученая» статья, несущая весь «поток учености» Гёттингена: собственные значения и собственные векторы, канонические преобразования, приведение к главным осям, гильбертовы квадратичные формы в пространстве бесконечного числа переменных, общие перестановочные соотношения и физические применения, включая квантование электромагнитного поля и расчет его флуктуаций, выполненные Иорданом⁶⁰. Эта статья содержала в основном весь аппарат современной матричной механики и является одной из наиболее «ученых» работ в научной литературе.

Насколько нам известно, Паули, очевидно, желал бы участвовать в этой игре, в действительности же он оставался лишь наблюдателем этого развития, до тех пор пока сам не назначил себя его судьей. Как критик формального подхода он слал взрывы сарказма в письмах Гейзенбергу и Кронигу, тогда находившимся в Копенгагене, направленные против методов Борна, Гейзенберга и Иордана⁵⁶. По прочтении этой критики Гейзенберг, впервые раздраженный Паули, писал ему в середине октября 1925 г.: «Твои постоянные оскорбления Копенгагена и Гёттингена — ужасный позор. Ты вынужден будешь признать, что, во всяком случае, мы не собираемся разрушить физику из злостных намерений. Когда ты бранишь нас, что мы такие ослы, что не придумали ничего физически нового, то это вполне может быть правдой. Но тогда ты такой же болван, потому что ты тоже не даешь нового»⁶¹.

По-видимому, эти слова затронули Паули достаточно глубоко. Он взялся за проблему атома водорода и решил ее в течение нескольких недель с помощью матричных методов, применяя всю формальную математическую ученость, против которой возмущался раньше. Он остроумно применил метод интегрирования, который был использован Вильгельмом Ленцем для определения влияния скрещенных электрического и магнитного полей на энергетические состояния атома водорода в теории

Бора — Зоммерфельда ⁶². С помощью «вектора Ленца» Паули получил формулу Бальмера и показал, как можно естественно объяснить положение с запрещенными орбитами. Прошло ровно два года с тех пор, как Паули впервые начал серьезно сомневаться в теории Бора, и теперь круг замкнулся. Это был настоящий триумф новой квантовой механики, и Нильс Бор отпраздновал его новым письмом Резерфорду, в котором сообщал, что причины его несчастья прошлой весной теперь исчезли ⁶⁴.

10. НЕКОММУТАТИВНОСТЬ И СКОБКИ ПУАССОНА: ОТКРЫТИЕ ДИРАКА

Незадолго до того; как статья Борна, Гейзенберга и Иордана была опубликована в «*Zeitschrift für Physik*» в январе 1926 г., в «*Proceedings of the Royal Society*» появилась еще одна статья, содержащая полную схему квантовой механики ⁶⁵.

Вернемся назад к тому моменту в июле 1925 г., когда Гейзенберг отдал свою статью о квантотеоретической кинематике Макс Борну. Передав статью Борну, Гейзенберг сразу отправился в Лейден и Кембридж.

В Лейдене он остановился у Пауля Эренфеста и обсуждал с ним физические проблемы. Эренфест был восприимчивым человеком, скорее интересующимся и критичным в своем отношении к физике, нежели созидующим. При первой встрече с Паули Эренфест заявил: «Господин Паули, Ваши работы иногда мне нравятся больше, чем Вы», на что Паули ответил: «Странно, что касается меня, то по отношению к Вам положение прямо противоположное». Эренфест проявлял большую заботу об успехах своих студентов, среди которых в то время были Уленбек и Гаудсмит. Их обсуждения с Гейзенбергом были сосредоточены вокруг спектроскопических проблем. Ранее, весной того же года, он завершил другую работу об аномальном эффекте Зеемана ⁶⁶, а Уленбек и Гаудсмит были крайне озабочены вопросом, что означал принцип запрета Паули и приписывание нового магнитного квантового числа электрону, в сочетании с работой Гейзенберга об аномальном эффекте Зеемана, для расположения спектроскопических термов. Вскоре они постулируют гипотезу существования спина электрона ⁶⁷, придав тем самым смысл полупелым квантовым числам, впервые появившимся в работе Гейзенберга об аномальном эффекте Зеемана. Спин также объяснил то, что Паули называл «двузначностью электрона», которая не может быть описана классически ⁶⁸.

Из Лейдена Гейзенберг отправился в Кембридж, где остановился у Р. Г. Фаулера, с которым он познакомился в Копенгагене. 28 июля 1925 г. Гейзенберг выступал в клубе Капицы, круг членов которого ограничивался студентами и друзьями Петра Капицы. Темой его доклада были «Зоология термов и ботаника Зеемана». Он говорил об огромных трудностях в понимании скрытых причин, управляющих деталями атомной спектроскопии, с помощью принятых *ad hoc* правил ⁶⁹. Примечательным является то, что Гейзенберг избрал для доклада эту тему, хотя непосредственно перед этим он, казалось, нашел решение квантовой головоломки. Очевидно, что он не был уверен, что решение действительно было в его руках. Однако в частной обстановке он рассказал Фаулеру о своей новой схеме.

Поль Дирак, студент-исследователь у Фаулера в Кембридже, вероятно, присутствовал на семинаре Гейзенберга, и через неделю сам выступил с докладом в клубе Капицы ⁷⁰. Фаулер получил гранки статьи Гейзенберга ⁵³ в начале сентября, нашел статью интересной, но испытывал некоторые сомнения и поэтому решил узнать, какой будет реакция Дирака. Дирак вспоминал: «Я тогда находился под таким большим впечатле-

нием от гамильтонова формализма как основы атомной физики, что считал, что любой другой подход не может сравниться с ним. Я подумал, что в ней (т. е. в статье Гейзенберга) было не так много интересного, и отложил ее на неделю или около того»⁷¹.

Когда Дирак вернулся к статье, ему вдруг стало ясно, что идея Гейзенберга давала ключ ко «всей тайне». В течение следующих недель Дирак пытался связать гейзенберговскую квантотеоретическую переформулировку кинематических величин с переменными действия и угловыми переменными теории Гамильтона — Якоби. «Я усиленно работал над этим с сентября 1925 г., — рассказывал Дирак. — Во время продолжительной прогулки в один из воскресных дней мне пришло в голову, что коммутатор может быть аналогом скобок Пуассона, но я не очень хорошо знал, что такое скобки Пуассона. Я только что прочел кое-что о них и забыл большую часть из того, что прочел. Я решил проверить эту мысль, но не мог этого сделать, поскольку дома у меня не было ни одной книги, в которой говорилось бы о скобках Пуассона, а все библиотеки были закрыты. Таким образом, мне оставалось лишь с нетерпением дожидаться утра понедельника, когда откроются библиотеки, и выяснить, что же такое на самом деле скобки Пуассона. Потом я нашел, что они действительно являются тем, что мне нужно, но мне пришлось провести ночь в нетерпеливом ожидании»².

С самого начала дираковское разъяснение взаимосвязи между переменными Гейзенберга и классическими переменными сделало формулировку теории более близкой к классической, и в то же время оно ясно выделило ту точку, в которой переформулировка порывала с классической теорией.

Из квантовых условий, выраженных в угловых переменных. Дирак нашел соответствие между гейзенберговскими коммутационными скобками и классическими скобками Пуассона для переменных X и Y :

$$XY - YX = i\hbar \sum_r \left\{ \frac{i\partial X}{\partial q_r} \frac{\partial Y}{\partial p_r} - \frac{\partial Y}{\partial q_r} \frac{\partial X}{\partial p_r} \right\}, \quad (33)$$

где q_r и p_r могут рассматриваться как угловые переменные и переменные действия (w_r и J_r).

Теперь Дирак благополучно возвратился на почву гамильтонова подхода. Он показал свои новые результаты Фаулеру, который полностью оценил их важность. Фаулер знал, что происходило в Копенгагене и Гёттингене, и понимал, что отсюда следует ждать конкуренции. Он решил, что полученные в Англии результаты в этой области должны быть немедленно опубликованы, и настаивал на том, чтобы «Proceedings of the Royal Society» незамедлительно предоставили приоритет публикации статьи Дирака «Основные уравнения квантовой механики». Сэр Джеймс Джинс, бывший тогда издателем «Proceedings of the Royal Society» и секретарем Королевского общества, с желанием и готовностью сделал это одолжение. Таким образом, все статьи Дирака с 1925 по 1933 г. публиковались чрезвычайно быстро.

В своей фундаментальной работе⁶⁵ Дирак впервые обобщил идеи Гейзенберга, упростив математику и сделав ее сразу более изящной. Он предвосхитил все основные результаты статей Борна и Иордана⁵⁸, а также Борна, Гейзенберга и Иордана⁵⁹. Он разработал квантовую алгебру, вывел гейзенберговские правила квантования и получил канонические уравнения движения для квантовых систем. В этой же работе Дирак ввел в первоначальной форме операторы рождения и уничтожения, указав их аналоги в классической теории.

Через несколько недель Дирак написал еще одну статью ⁷³. В ней он разработал алгебру q -чисел, т. е. динамических переменных, которые удовлетворяют всем правилам для нормальных чисел, за исключением того, что их произведение не обязательно является коммутативным. Он привел подробные теоремы об операциях с q -числами и применил полученные правила к многократно-периодическим системам в тесной аналогии со старыми квантовыми правилами.

Целью Дирака было применение этой схемы к атому водорода. Он записал гамильтониан, описывающий атом, просто заменив координату и импульс в классическом гамильтониане q -числами и приступил к получению формулы Бальмера, чтобы показать, что эта абстрактная схема могла давать результаты, имеющие непосредственное отношение к эксперименту. Дирак, однако, не стал входить в подробности этих расчетов, так как Паули ⁶³ (в работе, опубликованной в том же месяце, марте 1926 г.) уже показал, что это может быть сделано, и Дирак отметил этот факт в сноске ⁷⁴. После этого он перешел к расчету различных характеристик расщепления и интенсивностей спектральных линий в магнитном поле (включая эффект Зеемана) в согласии с экспериментами.

За эти работы о принципах квантовой механики Дирак был удостоен степени доктора в Кембридже в мае 1926 г. ⁷⁵.

С помощью понятия спина, появившегося незадолго до этого и ставшего приемлемым даже для Паули, который длительное время сопротивлялся ему, Гейзенберг и Иордан весной 1926 г. решили проблему аномального эффекта Зеемана с помощью матричной схемы квантовой механики ⁷⁶. В этом было, по крайней мере, символическое удовлетворение, поскольку Гейзенберг сделал свои первые твердые шаги в квантовой теории, работая над проблемой аномального эффекта Зеемана, а теперь стало возможным показать, что эти же шаги можно сделать бегом.

Данная последовательность событий относится только к части рождения квантовой механики, поскольку это было рождение близнецов. Было бы, однако, неуместным с моей стороны рассказывать сегодня о развитии волновой механики. Но все же положение требует, чтобы я дал краткий обзор этих событий для того, чтобы закончить рассказ. Кроме того, волновая механика Шрёдингера и связанные с ней идеи завершили формулировку рациональной теории атомных явлений, которая началась с открытия Гейзенбергом квантовой кинематики.

11. КВАНТОВАНИЕ КАК ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

С 1921 г. Эрвин Шрёдингер работал в Цюрихском университете, где занимал кафедру теоретической физики, которой когда-то, хотя и недолго, руководил Эйнштейн ⁷⁷. Шрёдингер был родом из Вены и являлся человеком глубокой личной культуры, которая включала изучение греческой литературы и философии в оригинале и сложение стихов. Выдающийся по любым, самым высоким, критериям физик, Шрёдингер вел свою научную родословную от Больцмана через своего учителя Фритца Хазенпёрля, но сам он еще не заставил мир восхищаться, хотя и имел отличные работы по броуновскому движению, удельной теплоемкости и квантовой статистике, а также по общей теории относительности. К лету 1925 г. Шрёдингер начал уставать от пребывания в Цюрихе из-за того, что, как он писал Зоммерфельду, «die Schweizer sind gar zu ungemütlich» («швейцарцы слишком неприветливы»), и решил вернуться в Австрию ⁷⁸. Он вел переговоры относительно места в Инсбруке, но так как руководство Инсбрукского университета торговалось по мелочам относительно зарплаты, он позволил все й тяжбе, скорее чем искомому месту, перейти в руки Артура

Марха. Через восемнадцать месяцев Шрёдингер будет назначен преемником Макса Планка в Берлинском университете.

Осенью 1925 г. Шрёдингер страдал не только от недостатка приветливости у своих цюрихских коллег, работы Гейзенберга, Борна и Иордана по матричной механике также доставляли ему беспокойство, как он заметил: «... Меня отпугивали (*ich fühlte mich abgestreht*), если не сказать отталкивали, казавшиеся мне очень трудными методы трансцендентной алгебры и отсутствие наглядности (*Anschaulichkeit*)»⁷⁹. Он решил избавиться от своей социальной и научной неудовлетворенности разработкой и обнародованием схемы атомной механики, которая не только казалась настоящей альтернативой матричной механике Гейзенберга, Борна, Иордана или механике q -чисел Дирака, но также сыграла роль в завершении здания квантовой механики и в открытии дискуссий, которые привели к ее физической и философской интерпретации.

В четырех статьях, направленных в «*Annalen der Physik*» с конца января по конец июня 1926 г., Шрёдингер изложил свою теорию волновой механики, озаглавленную «Квантование как проблема собственных значений». Без каких-либо церемоний он представил свое фундаментальное уравнение

$$H\left(q, \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}\right) \psi(q) = E\psi(q) \quad (34)$$

и решил задачу о спектре атома водорода⁸⁰. В некоторых математических аспектах этой работы неоценимую помощь ему оказал Герман Вейль, также работавший тогда в Цюрихе, в Е. Т. Н. *), за которую Шрёдингер выразил благодарность⁸¹. Диссертация Вейля⁸², выполненная в 1908 г. под руководством Гильберта, была посвящена интегральным уравнениям, задачам на собственные значения, ортогональным функциям и т. д., и можно считать счастливым то стечение обстоятельств, которое свело вместе Вейля и Шрёдингера. В 1917 г. Вейль был приглашен в Гёттинген стать преемником Феликса Клейна, но он отказался; в 1930 г. он не сможет отказаться от приглашения стать преемником Гильберта в Гёттингене и покинет Цюрих и Е. Т. Н., которую при расставании он назвал «*Wartesaal erster Klasse*» (зал ожидания первого класса). В изменившихся политических условиях 1933 г. интеллектуальные станции континентальной Европы опустеют в пользу Кембриджа, Дублина, Принстона и сотни других более скромных залов ожидания науки. Но в 1926 г. было приятно находиться в Цюрихе и наблюдать быстрое развитие волновой механики.

В своих статьях Шрёдингер дал основу рассмотрения всех тех проблем атомной физики, которые невозможно было решить в старой теории Бора — Зоммерфельда. В работе Шрёдингера нашли свое естественное выражение фундаментальные идеи Эйнштейна и Луи де Бройля⁸³. Вскоре Шрёдингер осознал, что, несмотря на глубокое различие, два подхода, его собственный и подход Гейзенберга и Борна, не сталкивались в противоречии, а скорее дополняли друг друга. Действительно, уже ранней весной 1926 г. перед публикацией третьей статьи Шрёдингер открыл то, что он называл «формально-математическим тождеством» волновой механики и матричной механики⁸⁴. Эта формальная эквивалентность была также продемонстрирована, независимо, Карлом Эккартом⁸⁵ в Соединенных Штатах и Паули⁸⁶ в его письме Иордану.

Гейзенберг был глубоко убежден, что решение проблем атомной механики должно привести к *одной-единственной общей математической схеме*, и когда он открыл свою, он полагал, что это и есть искомая един-

*) Высшее техническое училище в Цюрихе. (Прим. ред.)

ственная схема. С появлением теории Шрёдингера Гейзенберг был сильно расстроен и считал, скорее даже надеялся, что эта теория окажется неправильной⁸⁷. Когда в июне 1926 г. Борн⁸⁸ применил метод Шрёдингера к рассмотрению атомных столкновений в работе, которая привела к статистической интерпретации шрёдингеровской волновой функции, Гейзенберг осудил его за переход «во вражеский лагерь»⁸⁹. Он писал Паули: «Чем больше я размышляю о физической части теории Шрёдингера, тем более отвратительной (*desto abscheulicher*) она мне кажется»⁹⁰. Разумеется, этот вопрос нельзя было разрешить волевым образом. Гейзенберг искренне верил, что утверждение Шрёдингера о том, что квадрат модуля волновой функции, $|\psi|^2$, описывает распределение заряда электрона в пространстве, было абсолютно неверным. И все же Гейзенберг не чувствовал себя особенно несчастным, когда в июне и июле 1926 г. успешно применил теорию Шрёдингера к рассмотрению атома гелия⁹¹.

23 июля 1926 г. Шрёдингер прочел в Мюнхене лекцию под названием «Основные идеи теоретико-волновой атомной физики»⁹², в которой подробно изложил свои взгляды. Гейзенберг, присутствовавший на этой лекции, обсуждал со Шрёдингером много вопросов и открыто сказал ему, что на основе своей интерпретации он (Шрёдингер) не сможет вывести даже закон Планка; тогда Вилли Вин, присутствовавший при этом разговоре, колко заметил Гейзенбергу, что «он понял мое сожаление по поводу конца квантовой механики и вместе с ней всех несуразностей, таких, как квантовые скачки и тому подобные, и что трудности, о которых я упомянул, несомненно будут решены Шрёдингером в самом ближайшем будущем»⁹³.

12. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ДОПОЛНИТЕЛЬНОСТЬ

С появлением борновской статистической интерпретации⁸⁸ волновой функции в июле 1926 г. начались серьезные и длительные дискуссии о фундаментальном физическом смысле квантовой механики, представленной двумя схемами. Эквивалентность этих схем была строго установлена теорией преобразований Дирака⁹⁴, Иордана⁹⁵ и Фритца Лондона⁹⁶ к поздней осени 1926 г., поэтому вопрос о физической интерпретации стал первостепенным. В этих дискуссиях прежде всего принимали участие Бор, Гейзенберг, Паули и Шрёдингер.

Проблема интерпретации квантовой теории все сильнее захватывала Нильса Бора, начиная с 1923 г., когда вопрос о природе излучения стал жизненно важным для понимания эффекта Комптона. Для Гейзенберга, который энергично продвигался вперед путем отказа от использования классических понятий, таких, как электронные орбиты в атомах, проблема интерпретации встала в конце 1925 г., когда он размышлял об одновременном существовании дискретного спектра энергии электронов, связанных в атомах, и непрерывного спектра свободных электронов, движущихся по вполне определенным траекториям. Ему теперь пришло в голову, что в некотором смысле, который пока не был ясен, пространственно-временное описание должно также быть применимо к электронам в атоме.

Осенью 1926 г. Гейзенберг вернулся к вопросу о пространственно-временном описании поведения электрона в атоме. Паули указал ему, что шрёдингеровскую волновую функцию можно рассматривать в импульсном пространстве как $\psi(p)$, точно так же как в координатном пространстве как $\psi(q)$, на что Гейзенберг ответил: «Фундаментальная эквивалентность p и q меня очень радует. Таким образом, в волновой формулировке уравнение $pq - qp = \hbar/2\pi i$ всегда отвечает тому факту, что не имеет смысла говорить о монохроматической волне в определенный

момент времени (или в очень короткий интервал времени)⁹⁷. В этом месте на полях письма Паули сделал заметку: «Не имеет также смысла говорить о состоянии (энергии) за интервал времени, который мал по сравнению с периодом (потому что состояние или энергия могут быть определены только за целый период)». Гейзенберг продолжал: «Если (спектральная) линия может считаться не слишком узкой, т. е. интервал времени не слишком мал, то это, безусловно, имеет смысл. Аналогично не имеет смысла говорить о положении частицы, обладающей определенной скоростью. Однако такой смысл появляется, если рассматривать скорость и положение не слишком точно. Совершенно ясно, что, макроскопически, имеет смысл говорить о положении и скорости тела»⁹⁷.

К этому времени Гейзенберг лишь смутно сформулировал свои мысли о «грубом» пространственно-временном описании, отражавшие его новое понимание, основанное на волновой механике. Осенью 1926 г. Гейзенберг находился в Копенгагене, где приступил к своим новым обязанностям в качестве лектора, преемника Крамерса, назначенного профессором в Утрехте. Бор, с которым он ежедневно беседовал, развивал свой собственный подход к проблеме интерпретации, подчеркивая *дуализм волновой и корпускулярной картин квантовой теории*. Гейзенберг предпочитал оставаться верным квантовомеханической схеме в том виде, в каком она была сформулирована Борном, Гейзенбергом и Иорданом, а также Дираком; он считал, что волновые характеристики должны вводиться только с помощью теории преобразований, которую Дирак⁹⁴ разработал в Копенгагене осенью 1926 г.

Дирак с определенностью показал, что матрица S , применявшаяся в решении задачи приведения к главным осям в случае эрмитовой функции Гамильтона $H(p, q)$, могла быть отождествлена со шрёдингеровской волновой функцией. Другими словами, для каждого вектора-столбца существует тождество

$$S_{q,E} = \psi_E(q), \quad (35)$$

где E — дискретное или непрерывное собственное значение матрицы энергии. Для того чтобы обращаться с непрерывными индексами, Дирак ввел *дельта-функцию*, δ :

$$1(\alpha' \alpha'') = \delta(\alpha' - \alpha''), \quad (36)$$

обладающую тем свойством, что

$$\int d\alpha'' \delta(\alpha' - \alpha'') f(\alpha'') = f(\alpha'), \quad (37)$$

и ее производную $\delta'(\alpha' - \alpha'')$, определенную соотношением *)

$$\int d\alpha'' \delta'(\alpha' - \alpha'') f(\alpha'') = \frac{\partial f(\alpha')}{\partial \alpha'}. \quad (38)$$

Тогда импульс p , сопряженный с непрерывной координатной переменной q , может быть формально записан в виде

$$p(q', q'') = \frac{\hbar}{2\pi i} \delta'(q' - q'') = \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q'} \quad (39)$$

и матричное уравнение Борна — Иордана для диагонализации гамильтониана H ,

$$H(q, p) S_E(q) = E S_E(q), \quad (40)$$

может, таким образом, быть преобразовано в волновое уравнение

*) Общепринятое в настоящее время определение $\delta'(x)$ отличается от (38) знаком. (Прим. перев.)

Шрёдингера

$$H\left(q, \frac{\hbar}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q}\right) \psi_E(q) = E\psi_E(q). \quad (34), (41)$$

Дискуссии между Бором и Гейзенбергом о физической интерпретации квантовой механики, временами весьма яростные, продолжались в течение зимних месяцев 1926—1927 гг. Около середины февраля Бор уехал на лыжный отдых в Норвегию, а Гейзенберг остался в Копенгагене. Он пытался привести в относительный порядок свои мысли и результаты немногих последних месяцев. 23 февраля 1927 г. он написал длинное письмо Паули, в котором говорил о проблеме одновременного наблюдения координаты и импульса атомных систем. Он утверждал, что «перестановочное соотношение» $pq - qp = \hbar/2\pi i$ имеет следующую физическую интерпретацию: если точно задан импульс электрона в атоме p , то его положение является полностью неопределенным, и наоборот⁹⁸. Чтобы поддержать эту точку зрения и сделать ее более наглядной, Гейзенберг кратко обсудил Gedankenexperiment (мысленный эксперимент.— *Перев.*) с наблюдением электрона с помощью γ -лучевого микроскопа — пример, пришедший ему на ум в связи с устным экзаменом на докторскую степень у Вина, несколько лет назад. После этого он обратился к точному вычислению погрешности в измерении p и q .

Амплитуда вероятности для положения объекта, заключенного внутри пространственного интервала $q_0 - q_1 < q < q_0 + q_1$, определяется величиной

$$S(q) = \text{const} \cdot \exp \left[-\frac{(q - q_0)^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i p_0 (q - q_0)}{\hbar} \right], \quad (42)$$

где первый член представляет собой распределение Гаусса, а второй — общую волновую функцию. Из $S(q)$ он нашел $S(p)$ с помощью преобразования

$$S(p) = \int dq S(q) e^{2\pi i pq/\hbar} = \text{const} \cdot \exp \left[-\frac{2\pi^2 q_1^2 (p - p_0)^2}{\hbar^2} + \frac{2\pi i}{\hbar} (p - p_0) q_0 \right]. \quad (43)$$

Следовательно, при заданной неопределенности положения $\delta q = q_1$ распределение вероятности значений импульса p , $|S(p)|^2$, отлично от нуля в области $p_0 - p_1 < p < p_0 + p_1$ такой, что

$$\frac{4\pi^2 q_1^2 p_1^2}{\hbar^2} \approx 1. \quad (44)$$

Таким образом, одновременное измерение координаты и импульса электрона ограничено соотношением неопределенностей

$$\delta p \cdot \delta q \approx \frac{\hbar}{2\pi}. \quad (45)$$

Гейзенберг искал у Паули его сурового критицизма (unnachsichtige Kritik)⁹⁸. Однако Паули сразу же одобрил идеи Гейзенберга о принципе неопределенности и считал, что эта интерпретация наделяла квантовую механику согласованным физическим смыслом. По возвращении из Норвегии Бор не сразу удовлетворился гейзенберговской формулировкой «интуитивного содержания квантотеоретической кинематики и механики», но Гейзенберг не хотел вносить какие-либо исправления в свою статью⁹⁹. Однако в приписке, добавленной при корректуре, он включил предложения Бора¹⁰⁰.

В своей специальной теории относительности (1905) Эйнштейн¹⁰¹ подчеркивал фундаментальную важность использования при построении физической теории исключительно только «наблюдаемых величин». Эта концепция Эйнштейна была путеводной для Гейзенберга в его открытии квантовотеоретической кинематики⁵³. Но когда весной 1926 г. Гейзенберг встретился в Берлине с Эйнштейном, тот сказал ему: «... Эвристически, возможно, полезно иметь в виду, что в действительности измеряется. Однако, принципиально, совершенно неправильно пытаться основывать теорию на одних только наблюдаемых величинах. В действительности происходит прямо противоположное. Теория сама решает, что мы можем наблюдать»¹⁰². Гейзенберг использовал этот переворот первоначального представления Эйнштейна в выводе физической интерпретации из математического формализма квантовой механики. Эта интерпретация, воплощенная в принципе неопределенности, соотношение (45), могла быть обобщена на любую пару сопряженных динамических переменных и вскоре была принята как «настоящая суть новой теории»¹⁰³.

После обсуждений со Шрёдингером в Копенгагене в сентябре 1926 г., в которых часто возникал вопрос о «квантовых скачках», Бор глубоко задумался о смысле основных уравнений квантовой теории. Его целью было построение общей философской канвы физической интерпретации, независимой от использовавшейся математики. Бор пришел к выводу, что положение в атомной физике могло быть описано только в терминах дуальных, *дополнительных* картин, которые в классической физике исключают друг друга. Соотношения неопределенностей гарантируют, что не возникнет никаких противоречий при применении *принципа дополнительности* в природе; они исключают возможность возникновения ситуаций, в которых проявлялись бы одновременно как волновой, так и корпускулярный аспекты явления. В своем обращении к Международному физическому конгрессу в Комо, состоявшемуся в сентябре 1928 г. по случаю столетия со дня смерти Алессандро Вольты, Нильс Бор представил свои взгляды на дополнительную¹⁰⁴.

На пятом Сольвеевском конгрессе в Брюсселе, проходившем с 24 по 29 октября 1927 г., квантовая механика вместе с «копенгагенской интерпретацией» была публично представлена ее многочисленными борниками, лидером которых был Нильс Бор, как полная и окончательная теория атомных явлений. Эйнштейн выразил некоторые оговорки относительно новой теории, начав тем самым дискуссию с Бором о детерминистичном описании как противостоящему статистической причинности. Во время одного из докладов на Сольвеевском конгрессе Пауль Эренфест передал Эйнштейну записку, в которой говорилось: «Не смейтесь! В чистилище есть специальное место для исповедующих квантовую теорию, где они будут обязаны слушать лекции по классической физике по десять часов ежедневно». На что Эйнштейн ответил: «Я смеюсь только над их наивностью. Как знать, кто будет смеяться через несколько лет?»¹⁰⁵.

Дискуссии Эйнштейн — Бор по вопросу, является ли квантовомеханическое описание физической реальности «полным», были продолжены на шестом Сольвеевском конгрессе в октябре 1930 г. С тех пор к дискуссии об интерпретации и гносеологии квантовой механики присоединялось все возрастающее число участников. Однако квантовая теория, «*физика мальчишек*», игра молодых людей, продолжает расти в своих проявлениях во всех областях физического познания.

Я хочу поблагодарить доктора Гельмута Рехенберга за обсуждение различных вопросов, касающихся изложения этой лекции. Как друг и сотрудник д-р Рехенберг оказал мне неоценимую помощь в изучении развития представлений квантовой теории.

ЛИТЕРАТУРА И ПРИМЕЧАНИЯ

1. Н. Р о и н с а р é, La mécanique nouvelle (лекция 6-я); in: Sechs Vorträge über ausgewählte Gegenstände der reinen Mathematik und mathematischen Physik (auf Einladung der Wolfskehl-Kommission der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften gehalten zu Göttingen vom 22 bis 28 April 1909), Leipzig und Berlin, B. G. Teubner, 1910, S. 49—58.
2. Н. А. Л о р е н т з, Alte und neue Fragen der Physik, in: Sechs Vorträge auf Einladung der Wolfskehl-Kommission (gehalten zu Göttingen vom 22 bis 28 Oktober 1910), bearbeitet von M. Born, Phys. Zs. 11, 1234—1257 (1910).
3. Vorträge über die kinetische Theorie der Materie und der Elektrizität (gehalten vom 21 bis 26 April 1913, auf Einladung der Kommission der Wolfskehlstiftung von M. Planck, P. Debye, W. Nernst, M. V. Smoluchowski, A. Sommerfeld und H. A. Lorentz. Mit Beiträgen von H. Kamerlingh-Onnes und H. Keesom, einem Vorwort von D. Hilbert), Leipzig, B. G. Teubner, 1914.
4. М. В. С м о л у ч о в с к и, Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen (Wolfskehl Vorträge vom 20 bis 22 Juni 1916), Phys. Zs. 17, 557—571, 585—599 (1916).
5. G. M i e, Die Einsteinsche Gravitationstheorie und das Problem der Materie (Drei Wolfskehl Vorträge vom 5 bis 8 Juni 1917), Phys. Zs. 18, 551—556, 576—580, 596—602 (1917).
6. М. П л а н с к, Vier Wolfskehl Vorträge über Quantentheorie vom 13 bis 17 Mai 1918, Phys. Zs. 19, 176 (1918) (только объявлены).
7. Письмо Н. Бору от 10 ноября 1920 г. Ф. Клейна, Д. Гильберта, К. Рунге, Э. Вихерта, Л. Прандтля, Э. Ландау, Й. Гартманна, Р. Куранта и Р. Поля.
8. О присуждении Эйнштейну Нобелевской премии за 1921 г. было объявлено в 1922 г.; Эйнштейн выступил с Нобелевской лекцией, озаглавленной «Основные идеи и проблемы теории относительности», 11 июля 1923 г.; Бор прочитал свою лекцию «Строение атома» 11 декабря 1922 г.
9. N. B o h r, Der heutige Stand der Atomphysik (семь лекций; заметки, составленные Р. Минковским). (Я признателен профессору Минковскому за присылку фотографий этих заметок.)
10. Н. А. К р а м е р с, Über den Einfluss eines elektrischen Feldes auf die Feinstruktur der Wasserstofflinien, Zs. Phys. 3, 199—223 (1920).
11. W. H e i s e n b e r g, Physics and Beyond, New York-Evanston-London, Harper and Row, 1971, p. 7 (немецкий оригинал: W. H e i s e n b e r g, Der Teil und das Ganze, München, 1969).
12. W. H e i s e n b e r g, *ibid.*, p. 35.
13. A. S o m m e r f e l d, W. H e i s e n b e r g, Die Intensität der Mehrfachlinien und ihrer Zeemankomponenten, Zs. Phys. 11, 131—154 (1922).
14. W. H e i s e n b e r g, Über die Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeiten. Dissertation 1923; Ann. d. Phys. 74, 577—627 (1924).
15. L. H. T h o m a s, The Stability of Poincaré Flow, Phys. Rev. 86, 812—813 (1952).
16. Беседы с Гейзенбергом. Гейзенберг держал устный экзамен 23 июля 1923 г. По физике, основному предмету (Hauptfach), он получил оценку III, т. е. минимально необходимую. По вспомогательным предметам (Nebenfächer), математике и астрономии, он получил соответственно I и II. Общая оценка, выставленная ему за устный экзамен, была III, т. е. «удовлетворительно». Однако его диссертацию Зоммерфельд оценил как отличную, и он получил степень доктора «cum laude» (с отличием).
17. М. В о р н, Recollections XIX (неопубликованные заметки). p. 4.
18. М. В о р н, W. H e i s e n b e r g, Die Elektronenbahnen im angeregten Helium, Zs. Phys. 16, 229—243 (1923).
19. W. H e i s e n b e r g to A. Sommerfeld, 28 October 1922.
20. W. H e i s e n b e r g to A. Sommerfeld, ¼ January 1923, p. 1.
21. W. H e i s e n b e r g to A. Sommerfeld, 4 January 1923, p. 2.
22. W. P a u l i, Über die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes, Phys. Zs. 20, 25—27 (1919).
23. W. P a u l i, Relativitätstheorie, in: Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. V/2, Leipzig, B. G. Teubner, 1921.
24. A. E i n s t e i n, рецензия на книгу W. Pauli, Relativitätstheorie, Naturwissenschaften 10, 184—185 (1922).
25. W. P a u l i, Über das Modell des Wasserstoffmolekulations, Ann. d. Phys. 68, 177—240 (1922) (исправленный вариант Мюнхенской диссертации автора, 1921).
26. М. В о р н, W. P a u l i, Über die Quantelung gestörter mechanischer Systeme, Zs. Phys. 10, 137—158 (1922).
27. N. B o h r, Linienspektren und Atombau, Ann. d. Phys. 71, 228—288 (1923).

28. W. P a u l i, Remarks on the History of the Exclusion Principle, *Science* 103, 213—215 (1946) (речь Паули на обеде 10 декабря 1945 г. в Институте перспективных исследований в Принстоне, штат Нью-Джерси (США), данном в его честь по случаю присуждения ему Нобелевской премии по физике 1945 г.).
29. W. P a u l i, Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen in Atom mit der Komplexstruktur der Spektren, *Zs. Phys.* 31, 765—783 (1925).
30. M. A. C a t a l a n, Series and Other Regularities in the Spectrum of Manganese, *Phil. Trans. Roy. Soc. (Lnd.)* 223, 127—173 (1923).
31. A. H. C o m p t o n, Secondary Radiation Produced by X-rays, *Bull. Nat. Res. Council* 4 (pt. 2), No. 20, (October 1922).
32. A. H. C o m p t o n, A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements, *Phys. Rev.* 21, 483—502 (1923); P. D e b y e, Zerstreuung von Röntgenstrahlen und Quantentheorie, *Phys. Zs.* 24, 161—166 (1923).
33. A. E i n s t e i n, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt, *Ann. d. Phys.* 17, 132—148 (1905).
34. N. B o h r, On the Constitution of Atoms and Molecules, *Phil. Mag.* 26, 1—25, 476—502, 857—875 (1913).
35. Беседы с Гейзенбергом.
36. J. C. S l a t e r, Radiation and Atoms, *Nature* 133, 307—308 (1924).
37. N. B o h r, H. A. K r a m e r s, J. C. S l a t e r, The Quantum Theory of Radiation, *Phil. Mag.* 47, 785—802 (1924) (то же: Über die Quantentheorie der Strahlung, *Zs. Phys.* 24, 69—87 (1924)).
38. H. A. K r a m e r s, The Law of Dispersion and Bohr's Theory of Spectra, *Nature* 113, 673—674 (1924); The Quantum Theory of Dispersion, *ibid.* 114, 310.
39. R. L a d e n b u r g, Die quantentheoretische Deutung der Zahl der Dispersions-elektronen, *Zs. Phys.* 4, 451—471 (1921).
40. A. E i n s t e i n, Zur Quantentheorie der Strahlung, *Mitt. Phys. Ges. Zürich* 16, 47—62 (1916); Strahlungs-Emission und - Absorption nach der Quantentheorie, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* 18, 318—323 (1916); Quantentheorie der Strahlung, *Phys. Zs.* 18, 121—128 (1917).
41. M. B o r n, Über Quantenmechanik, *Zs. Phys.* 26, 379—395 (1924).
42. J. J. T h o m s o n, The Corpuscular Theory of Matter, *Lnd.*, A. Constable, 1907.
43. W. T h o m a s, Über die Zahl der Dispersionselektronen, die einem stationären Zustande zugeordnet sind, *Naturwissenschaften* 13, 627 (1925).
44. W. K u h n, Über die Gesamtstärke der von einem Zustande ausgehenden Absorptionslinien, *Zs. Phys.* 33, 408—412 (1925).
45. W. B o t h e, H. G e i g e r, Experimentelles zur Theorie von Bohr, Kramers und Slater, *Naturwissenschaften* 13, 440—441 (1925); Über das Wesen des Compton-effekts. Ein experimenteller Beitrag zur Theorie der Strahlung, *Zs. Phys.* 32, 639—663 (1925).
46. N. B o h r to E. Rutherford, 18 April 1925.
47. W. H e i s e n b e r g, Über eine Anwendung des Korrespondenzprinzips auf die Frage nach der Polarisation des Fluoreszenzlichtes, *Zs. Phys.* 31, 617—626 (1925).
48. H. A. K r a m e r s, W. H e i s e n b e r g, Über die Streuung von Strahlung durch Atome, *ibid.*, S. 681—708.
49. W. H e i s e n b e r g, Erinnerungen an die Zeit der Entwicklung der Quantenmechanik, in: *Theoretical Physics in the Twentieth Century. A Memorial Volume to Wolfgang Pauli*, Ed. M. Fierz and V. F. Weisskopf, N. Y., Interscience, 1960, pp. 40—47, см. с. 42.
50. P. A. M. D i r a c, From a Life of Physics, Lecture at Trieste, June 1968, *Special Supplement of the IAEA Bulletin*, 1969.
51. Беседы с Гейзенбергом.
52. W. H e i s e n b e r g, см. ¹¹, p. 61.
53. W. H e i s e n b e r g, Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, *Zs. Phys.* 33, 879—893 (1925) (перевод см. на с. 574.—*Ред.*).
54. M. B o r n, см. ¹⁷, p. 11.
55. M. B o r n, *ibid.*, p. 12.
56. W. P a u l i to R. Kronig, 9 October 1925. Большая часть ранних писем Паули Гейзенбергу оказалась уничтоженной во время второй мировой войны.
57. Во всяком случае, Паули был все еще сильно увлечен своей статьей о квантовой теории (Quantentheorie, in: *Handb. Phys.*, Bd. 23, Hrsg. H. Geiger und K. Scheel, *Brl.*, J. Springer, 1926). См. письмо Кронигу ⁵⁶.
58. M. B o r n, P. J o r d a n, Zur Quantenmechanik, *Zs. Phys.* 34, 858—888 (1925) (перевод см. на с. 586.—*Ред.*).
59. M. B o r n, W. H e i s e n b e r g, P. J o r d a n, Zur Quantenmechanik. II, *ibid.* 35, 557—615 (1926).
60. Из квантовой механики П. Иордан вывел формулу для флуктуаций энергии излучения E частоты ν в объеме V : $\overline{(E - \bar{E})^2/E^2} = (h\nu/\bar{E}) + (1/z, V)$, где h — постоянная

- ная Планка, а $\sum dv$ — число мод колебаний в единичном объеме в интервале частот от ν до $\nu + d\nu$. Эта формула ((26) на с. 685.—*Ред.*) была получена Эйнштейном еще в 1909 г. (A. Einstein, Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems, Phys. Zs. 10, 185—193 (1909)).
61. W. Heisenberg to W. Pauli, 12 October 1925.
 62. W. Lenz, Über den Bewegungsablauf und die Quantenzustände der gestörten Keplerbewegung, Zs. Phys. 24, 197—207 (1924).
 63. W. Pauli, Über das Wasserstoffspektrum von Standpunkt der neuen Quantenmechanik, *ibid.* 36, 336—363 (1926).
 64. N. Bohr to E. Rutherford, 27 January 1926.
 65. P. A. M. Dirac, The Fundamental Equations of Quantum Mechanics, Proc. Roy. Soc. (Lnd.) A109, 642—653 (1925) (перевод см. на с. 611.—*Ред.*).
 66. W. Heisenberg, Zur Quantentheorie der Multiplettstruktur und der Zeeman-effekte, Zs. Phys. 32, 841—860 (1925).
 67. G. E. Uhlenbeck, S. Goudsmit, Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons, Naturwissenschaften 13, 953—954 (1925); Spinning Electrons and the Structure of Spectra, Nature 117, 264—265 (1926).
 68. W. Pauli, Über den Einfluss der Geschwindigkeitsabhängigkeit der Elektronenmasse auf den Zeemanefekt, Zs. Phys. 31, 373—385 (1925), см. с. 385.
 69. Kapitza Club Minute Book. Гейзенберг выступал на 94-м заседании Клуба 28 июля 1925 г.
 70. Дирак выступал с докладом «Бозевский и де-бройлевский выводы закона Планка» на 95-м заседании клуба Капицы 4 августа 1925 г.
 71. Беседы с Дираком. См. статью автора: The Golden Age of Theoretical Physics: P. A. M. Dirac's Scientific Work from 1924 to 1933, in: Aspects of Quantum Theory, Ed. A. Salam and E. P. Wigner, Cambridge, Univ. Press, 1972, pp. 17—59.
 72. P. A. M. Dirac, см. ^{50,71}.
 73. P. A. M. Dirac, Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom, Proc. Roy. Soc. (Lnd.) A110, 561—579 (1926). Окончательное развитие алгебры q -чисел изложено Дираком в статье: On Quantum Algebra, Proc. Camb. Phil. Soc. 23, 412—418 (1926).
 74. Дирак ссылается на «еще не опубликованную работу» Паули об атоме водорода в примечании к работе ⁷³, с. 570.
 75. P. A. M. Dirac, Quantum Mechanics, Cambridge University Dissertation, May 1926.
 76. W. Heisenberg, P. Jordan, Anwendung der Quantenmechanik auf das Problem der anomalen Zeemanefekte, Zs. Phys. 37, 263—277 (1926).
 77. Эйнштейн был экстраординарным профессором Цюрихского университета с осени 1909 г. до весны 1911 г.
 78. E. Schrödinger to A. Sommerfeld, 21 July 1925.
 79. E. Schrödinger, Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen, Ann. d. Phys. 79, 734—756 (1926); см. сноску ² на с. 735.
 80. E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem. I, Ann. d. Phys. 79, 361—376 (1926) (перевод см. на с. 621.—*Ред.*).
 81. Шрёдингер благодарил Германа Вейля за помощь в решении дифференциального уравнения на собственные значения для атома водорода; см. ⁸⁰, примечание 1 на с. 363.
 82. H. Weyl, Singuläre Integralgleichungen mit besonderer Berücksichtigung der Fourierschen Integraltheorems, Göttingen Dissertation, February 1908.
 83. L. de Broglie, Recherches sur la théorie de quanta, Thèse, Paris, Masson et Cie, november 1924; Ann. de Phys. 3, 22—128 (1925).
 84. См. ⁷⁹. Сам Шрёдингер впервые нашел доказательство формальной тождественности этих двух подходов.
 85. C. Eckart, The Solution of the Problem of the Single Oscillator by a Combination of Schrödinger's Wave Mechanics and Lanczos' Field Theory, Proc. Nat. Ac. Sci. 12, 473—475 (1926).
 86. W. Pauli to P. Jordan, 12 April 1926.
 87. Беседы с Борном.
 88. M. Born, Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge, Zs. Phys. 37, 863—867 (1926); Quantenmechanik der Stossvorgänge, *ibid.* 38, 803—827 (1926) (перевод см. на с. 632.—*Ред.*).
 89. Беседы с Борном.
 90. W. Heisenberg to W. Pauli, 8 June 1926.
 91. W. Heisenberg, Über die Spektren von Atomsystemen mit zwei Elektronen, Zs. Phys. 39, 499—518 (1926).
 92. E. Schrödinger, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 7, 38 (1926) (объявление о лекции).

93. W. Heisenberg, см. ¹¹, p. 73.
94. P. A. M. Dirac, The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics, Proc. Roy. Soc. (Lnd.) A113, 621—644 (1927).
95. P. Jordan, Über eine neue Begründung der Quantenmechanik, Zs. Phys. 40, 809—838 (1927).
96. F. London, Winkelvariable und kanonische Transformationen in der Undulationsmechanik, ibid. 193—210 (1926).
97. W. Heisenberg to W. Pauli, 28 October 1926.
98. W. Heisenberg to W. Pauli, 23 February 1927.
99. W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Zs. Phys. 43, 172—198 (1927) (перевод см. на с. 651.—*Ред.*).
100. W. Heisenberg, см. ⁹⁹, дополнение при корректуре на с. 197—198 (перевод см. на с. 670—671.—*Ред.*).
101. A. Einstein, Elektrodynamik bewegter Körper, Ann. d. Phys. 17, 891—924 (1905).
102. W. Heisenberg, см. ¹¹, p. 63.
103. E. H. Kennard, Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen, Zs. Phys. 44, 326—352 (1927).
104. N. Bohr, The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory, in: Atti del Congresso Internazionale dei Fisici, 11—20 Settembre 1927, vol. 2, Bologna, Nicola Zanichelli, 1928, pp. 565—588.
105. J. Mehra, The Solvay Conferences on Physics, Dordrecht, Holland/Boston, U.S.A., D. Reidel Publishing Company, 1975, p. xvii and 152.