1977 г. Август *Том 122, вып. 4*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

530.145.(09)

ОТ ВОЗНИКНОВЕНИЯ КВАНТОВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ДО СТАНОВЛЕНИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

М. А. Ельяшевич

1. ВВЕДЕНИЕ

В истории развития естествознания особое место занимает замечательный период 1925—1928 гг., когда были открыты основные законы квантовой механики и произошло необычайно быстрое ее становление как новой науки, как самостоятельного и полноправного раздела теоретической физики. Этому периоду предшествовал охватывающий первую четверть XX века период возникновения и бурного развития квантовых представлений, коренным образом отличающихся от стройной системы представлений классической физики, сложившихся в XIX веке. Планком и Эйнштейном, Бором и де Бройлем были выдвинуты новые фундаментальные идеи, означавшие подлинную революцию в физике — идеи кванта действия, квантов энергии и квантов света, стационарных состояний атомных систем и скачкообразных переходов между ними, принципа соответствия, корпускулярно-волнового дуализма для излучения и для микрочастиц. Новые идеи не укладывались в привычные рамки классических представлений, а сочетавшие классические и квантовые представления наглядные модели атомов и молекул, согласно которым электроны движутся вокруг ядер по определенным классическим траекториям (орбитам модельной теории Бора), удовлетворяющим дополнительным квантовым условиям (условиям Бора — Зоммерфельда), были внутренне противоречивы. Притом эти модели хотя и означали значительный шаг вперед, но не позволяли объяснить всю совокупность экспериментально установленных свойств атомов и молекул. Неясной оставалась сущность корпускулярно-волнового дуализма, резко противоречившего всем классическим представлениям как о волнах, так и о частицах в отдельности. До 1925 г. не удавалось, несмотря на все усилия многих выдающихся ученых, построить на основе квантовых представлений последовательную и внутренне согласованную теорию микроскопических явлений, происходящих на атомно-молекулярном уровне. Важнейшая задача построения такой теории в нерелятивистском приближении была решена за время с середины 1925 г. (первая работа Гейзенберга по квантовой механике) до конца 1927 г., а в начале 1928 г. Дирак дал релятивистское обобщение теории для случая одной частицы со спином — для электрона, что можно рассматривать как завершение периода становления квантовой механики.

Это был очень насыщенный событиями период. Был найден математический аппарат, адекватно описывающий закономерности микроскопических явлений в нерелятивистском приближении, сперва алгебраический (летом и осенью 1925 г.) в виде дискретного аппарата матричной механики (Гейзенберг, Борн, Иордан) и алгебры q-чисел (Дирак), затем аналити-

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1977 г.

ческий (в начале 1926 г.) в виде аппарата волновой механики (Шрёдингер), оперирующего с непрерывными величинами и оказавшегося особенно эффективным для решения конкретных задач. Весной 1926 г. была показана математическая идентичность матричной механики и волновой механики (Шрёдингер, а также Паули и Эккарт) и стала быстро развиваться единая теория, которую мы сейчас и называем квантовой механикой *). В качестве фундаментальной встала проблема правильной физической интерпретации математического аппарата квантовой механики. Важнейший шаг в данном направлении сделал Борн, давший летом 1926 г. вероятностное истолкование волновой функции и коэффициентов ее разложения для состояний, представляющих суперпозицию независимых состояний. Это вероятностное истолкование было сразу использовано Дираком и Иорданом, разработавшими, независимо друг от друга, в конце 1926 г. обобщенную математическую формулировку квантовой механики как единой теории. В начале 1927 г. Гильбертом и фон Нейманом (при участии Нордгейма) были выполнены исследования математических оснований квантовой механики (которые были потом продолжены фон Нейманом). Дальнейшим весьма существенным шагом в физической интерпретации формализма квантовой механики было открытие Гейзенбергом весной 1927 г. соотношений неопределенностей. Наиболее общим глубоким образом принципиальные вопросы квантовой механики были рассмотрены Бором, сформулировавшим принцип дополнительности. Эти вопросы стали предметом знаменитой дискуссии Бора с Эйнштейном, начавшейся осенью 1927 г.

Наряду с созданием нерелятивистской квантовой механики, в основном завершенной в 1927 г., делались попытки построения релятивистской квантовой механики. В 1926 г. рядом ученых было независимо получено релятивистски инвариантное волновое уравнение второго порядка; оно, однако, оказалось неприменимым к электрону, как обладающему спином (гипотеза о спине электрона, предложенная в конце 1925 г. Уленбеком и Гаудсмитом и позволившая построить полную систематику атомных спектров, быстро стала общепринятой). Наконец, Дираку в начале 1928 г. удалось разработать релятивистскую квантовую теорию электрона, из основного уравнения которой, релятивистски инвариантного волнового уравнения первого порядка — уравнения Дирака — автоматически вытекало существование спина электрона и спин-орбитального взаимодействия.

Очень важно, что в период становления квантовой механики не только был разработан ее математический аппарат и была дана его физическая интерпретация, но и начались ее применения к разнообразным проблемам физики микроскопических явлений — в теории атомов и теории молекул, в теории столкновений и теории излучения. Были развиты различные методы решения квантовомеханических задач, точные и приближенные. Наметились пути дальнейшего развития квантовой механики и ее приложений.

Квантовая механика в середине 1926 г. была успешно применена к многоэлектронным системам. В работах Гейзенберга и особенно в работе Дирака была вскрыта глубокая связь квантовых статистик с квантовой механикой систем, состоящих из одинаковых микрочастиц, которые в квантовой теории следует рассматривать как неразличимые. Квантовая статистика, предложенная в 1924 г. Бозе и Эйнштейном, оказалась статистикой симметричных состояний, а квантовая статистика, предложенная

*) В период становления единой теории часто название «квантовая механика» относили лишь к ее матричному аспекту, а для ее волнового аспекта применяли название «волновая механика»; многие ученые пользовались этим последним названием для единой теории и в дальнейшем, например Шрёдингер, де Бройль, Зоммерфельд, Я. И. Френкель.

в начале 1926 г. Ферми, исходя из сформулированного Паули на год раньше принципа запрета, оказалась статистикой антисимметричных состояний таких систем; сейчас общепринято статистику первого типа называть статистикой Бозе — Эйнштейна, а статистику второго типа — статистикой Ферми — Дирака. Стала развиваться квантовая теория излучения. сперва на основе классического рассмотрения электромагнитного поля и применения принципа соответствия. Фундаментальная работа Дирака по теории излучения в начале 1927 г. явилась исходной для развития квантовой электродинамики. В этой работе Дирак рассматривал атом и излучение как единую систему и впервые произвел вторичное квантование электромагнитного поля.

Для решения конкретных задач весьма эффективными оказались методы квантовомеханической теории возмущений. Успешно начали применяться и вариационные методы. Уже в 1926 г. был развит квазиклассический метод, позволивший обосновать квантовые условия Бора — Зоммерфельда, применявшиеся в модельной теории. Исключительно важное значение для решения как общих, так и конкретных задач имела разработка методов, основанных на учете свойства симметрии квантовых систем (в частности, перестановочной симметрии для систем, состоящих из одинаковых микрочастиц); при этом успешно была применена, Вейлем и Вигнером, математическая теория групп.

Для понимания сложного процесса становления квантовой механики необходимо сначала рассмотреть развитие квантовых представлений, возникновение новых идей в предшествующий период, начиная с работ Планка.

2. ОТ ПЛАНКА К КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Последнее десятилетие XIX века ознаменовалось в физике крупнейшими открытиями — рентгеновских лучей (1895 г.), радиоактивности (1896 г.), электрона (1897 г.). Началось быстрое развитие физики микроскопических явлений, объяснение закономерностей которых удалось дать лишь впоследствии на основе новых, квантовых представлений. Они были впервые введены, как известно, Планком в конце того же десятилетия, на самом рубеже XIX и XX веков, при разработке теории теплового излучения.

Планк рассматривал тепловое излучение как результат испускания и поглощения электромагнитных волн веществом и применял законы термодинамики и классической электродинамики [1,3]. Для нахождения спектрального распределения энергии излучения, находящегося в равновесии с веществом при определенной температуре,— равновесного излучения (излучения черного тела или «черного излучения»)— Планк искал максимум энтропии системы, состоящей из моделирующих вещество совокупностей «резонаторов»— гармонических осцилляторов с различными частотами ν (от 0 до ∞) и из электромагнитных волн соответствующих частот, при этом осцилляторы определенной частоты испускают и поглощают электромагнитное излучение той же частоты. В результате, на основе представлений классической физики и сделав определенные предположения относительно вида энтропии резонаторов, Планк получил закон распределения Вина для спектральной интенсивности равновесного излучения E_λ — потока энергии излучения, рассчитанного на единицу интервала длин волн λ, на 1 *см*^{2}, на 1 *сек* и на единицу телесного угла,— в виде

$$E_\lambda = \frac{2c^2b}{\lambda^5} e^{-ac/\lambda T}, \qquad (1)$$

где T — абсолютная температура, $c = 3{,}00 \cdot 10^{10}$ *см/сек* — скорость света, a и b — постоянные. Эти постоянные Планк охарактеризовал как *универсальные постоянные* и вычислил из экспериментальных данных их численные значения

$$a = 0{,}4818 \cdot 10^{-10} \text{ сек}, \qquad b = 6{,}885 \cdot 10^{-27} \text{ эрг} \cdot \text{сек}. \tag{2}$$

Постоянная b, имеющая размерность действия, представляет знаменитую постоянную Планка h, а постоянная $a = b/k = h/k$, где k — постоянная, которую сейчас общепринято называть постоянной Больцмана (из (2) получалось ее значение $k = 1{,}429 \cdot 10^{-16}$ *эрг/град*). Результаты (1) и (2) были доложены Планком 18 мая 1899 г. на заседании Прусской Академии наук в Берлине, и именно тогда впервые появилась универсальная постоянная h, которую Планк позже, в 1906 г. [11], назвал *квантом действия*. Разумеется, только гораздо позже выявилось все фундаментальное значение этой квантовой постоянной, особенно ярко раскрывшееся при создании квантовой механики (см. ниже (29), (30) и (32)).

Интересно отметить, что уже тогда, в 1899 г., Планк предлагал выбрать постоянную b в качестве «естественной единицы» измерения, наряду со скоростью света c, гравитационной постоянной $f = 6{,}685 \cdot 10^{-8}$ *см*^{3}*/г*$\cdot$*сек*^{2} и постоянной a (правда, лишь позже, в 1902 г., Планк обратил должное внимание на зависимость постоянной $k = h/a$ от выбора шкалы температур [309]). Отметим также, что уже тогда [1] Планк ввел понятие элементарной длины, составленной из постоянных b, c и f, которая в наше время применяется при квантовогравитационных построениях ($\sqrt{bf/c^3} = \sqrt{hf/c^3} = 4{,}13 \cdot 10^{-33}$ *см*).

Однако закон Вина при больших длинах волн не согласовывался с опытными данными, согласно которым зависимость интенсивности излучения E_λ от температуры при высоких температурах приближается к линейной. Осенью 1900 г. Планку удалось найти [4] полуэмпирическим методом (путем обобщения выражения для энтропии резонаторов определенной частоты, из которого получался закон Вина) закон спектрального распределения

$$E_\lambda = \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{c_2/\lambda T} - 1}, \tag{3}$$

где c_1 и c_2 — постоянные. Этот закон в случае малых длин волн переходит в закон Вина, а в случае больших длин волн приводит к пропорциональности абсолютной температуре (к закону Рэлея — Джинса [2,8,9], который впервые был выведен Рэлеем в начале 1900 г., исходя из равномерного распределения энергии по степеням свободы; однако работа Рэлея не была тогда известна Планку). Планк доложил о формуле (3) (получившей в дальнейшем название формулы Планка) 19 октября 1900 г. на заседании Немецкого физического общества, и она оказалась в согласии с опытом как для коротких, так и для длинных волн. «Но оставалась,— как вспоминал Планк впоследствии [294],— важнейшая в теоретическом отношении проблема: дать надлежащее обоснование этого закона, и это была несравненно более тяжелая задача, ибо при этом шла речь о теоретическом выводе выражения для энтропии осциллятора...» И Планк решил такую задачу [5], перейдя от термодинамического к статистическому рассмотрению энтропии и применив метод Больцмана, связавшего энтропию с вероятностью W. Планк положил энтропию S_N системы, состоящей из N резонаторов с полной колебательной энергией U_N, равной

$$S_N = k \ln W + \text{const}; \tag{4}$$

здесь k — коэффициент пропорциональности, который сам Больцман не вводил [294] (введя этот коэффициент, Планк сразу обозначил его через k [5]).

Так как для нахождения вероятности W «необходимо представлять себе U_N не в виде непрерывной, неограниченно делимой величины, а в виде величины дискретной, состоящей из целого числа конечных равных частей» [6], то Планк сделал фундаментальное предположение, что

$$U_N = P\varepsilon, \tag{5}$$

где ε —«элемент энергии», а P — очень большое целое число. P элементов энергии ε могут распределяться различными способами по N резонаторам, и, следовательно, отдельный резонатор может обладать не любой энергией, а лишь энергией, кратной ε. Таким образом, впервые появилась идея, в применении к резонаторам, т. е. гармоническим осцилляторам, *дискретности* энергии — идея *квантования* энергии. Планк вычислил вероятность W и, согласно (5), нашел среднюю энтропию, $S = S_N/N$, как функцию от отношения U/ε средней энергии одного резонатора, $U = U_N/N$, к элементу энергии ε в виде

$$S = k\left[\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right)\ln\left(1+\frac{U}{\varepsilon}\right) - \frac{U}{\varepsilon}\ln\frac{U}{\varepsilon}\right]. \tag{6}$$

С другой стороны, Планк показал, что закон смещения Вина можно представить в виде

$$S = f\left(\frac{U}{\nu}\right), \tag{7}$$

где f — произвольная функция, и сравнение (6) и (7) показывает, что

$$\varepsilon = h\nu, \tag{8}$$

где h — универсальная постоянная, совпадающая [7] с ранее введенной Планком постоянной b, имеющей размерность действия. Из выражения (6), при $\varepsilon = h\nu$, получается (см. [6]) средняя энергия одного резонатора

$$U = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}-1}. \tag{9}$$

Объемная плотность энергии равновесного излучения (отнесенная к единице интервала частот) равна, как показал Планк,

$$u_\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3}U, \tag{10}$$

и окончательно получается формула Планка

$$u_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/kT}-1}. \tag{11}$$

Ей соответствует, если учесть, что $cu_\nu/4\pi = E_\nu$ и $cE_\nu/\lambda^2 = E_\lambda$, формула (3) [5] (где $c_1 = 2hc^2$, а $c_2 = hc/k$).

Из сравнения с опытом Планк нашел уточненные по сравнению с (2) значения постоянных h и k:

$$\begin{aligned} h &= 6{,}55\cdot10^{-27}\ эрг\cdot сек,\\ k &= 1{,}346\cdot10^{-16}\ эрг/град, \end{aligned} \tag{12}$$

и вычислил из них значение элементарного электрического заряда (т. е. заряда электрона), равное $e = 4{,}69\cdot10^{-10}$ CGSE, что близко к современному значению.

День 14 декабря 1900 г., когда Планк доложил свои новые и особенно важные результаты на заседании Немецкого физического общества [5], обычно и считают днем рождения квантовых представлений. Появился *квант энергии* как дискретная порция энергии (отметим, что сам Планк

пользовался термином «элемент энергии» и лишь позже стали говорить о «квантах энергии»). Планковские резонаторы могли обладать лишь энергиями, кратными энергии $h\nu$, откуда вытекало, что они могут испускать и поглощать только порции электромагнитной энергии, кратные $h\nu$, т. е. вытекала скачкообразность элементарных актов испускания и поглощения электромагнитного излучения, в резком противоречии с классической электродинамикой. Дискретность энергии при этом оказалась неразрывно связанной с постоянной h — квантом действия.

Характерным для подхода Планка являлось то, что дискретность энергии он относил к свойствам *вещества*, в его теории квантовалась энергия разонаторов, а излучение рассматривалось как непрерывное, как электромагнитные волны. Притом Планк еще не ставил конкретно вопрос об элементарных актах испускания и поглощения отдельных порций электромагнитной энергии $h\nu$, его интересовало в первую очередь решение задачи о спектральном распределении энергии равновесного излучения. Чрезвычайно важный следующий шаг в развитии квантовых представлений сделал в марте 1905 г. Эйнштейн в работе «Об одной эвристической точке зрения, касающейся возникновения и превращения света». Он выдвинул идею дискретности самого электромагнитного излучения — гипотезу *квантов света* — и рассмотрел элементарные процессы поглощения и испускания этих квантов [10]. Основная идея Эйнштейна очень четко выражена во введении к этой работе: «Волновая теория света, оперирующая с непрерывными пространственными функциями, прекрасно оправдалась при описании чисто оптических явлений и, вероятно, никогда не будет заменена другой теорией. Но все же следует помнить, что оптические наблюдения относятся не к мгновенным, а к средним по времени величинам. Поэтому, несмотря на полное подтверждение экспериментом теории дифракции, отражения, преломления, дисперсии и т. д., можно себе представить, что теория света, оперирующая с непрерывными пространственными функциями, приведет к противоречию с опытом, когда ее будут применять к явлениям возникновения и превращения света.

Мне и в самом деле кажется, что опыты, касающиеся «черного излучения», фотолюминесценции, возникновения катодных лучей при облучении ультрафиолетовым светом и других групп явлений, относящихся к возникновению и превращению света, представляются более понятными на основе предположения, что энергия света распределяется по пространству дискретным образом. Согласно этому сделанному здесь предположению, при распространении луча света, вышедшего из некоторой точки, энергия не распределяется непрерывным образом во все бóльших и бóльших объемах, а складывается из конечного числа локализованных в отдельных точках пространства квантов энергии, которые движутся как неделимые и поглощаются или возникают только целиком» *).

Для развития квантовых представлений оказались весьма существенными две стороны гипотезы Эйнштейна о квантах света. Это, во-первых, само основное представление об излучении, состоящем из неделимых и локализованных квантов энергии, что соответствует корпускулярной теории света, и, во-вторых, вытекающая из такого представления дискретность элементарных процессов возникновения и прерващения света. Обе эти стороны были обсуждены Эйнштейном в его работе, и мы вкратце ее рассмотрим (подробнее см. статью Клейна [302]).

В первой части работы Эйнштейн дал обоснование корпускулярного подхода к излучению. Он нашел энтропию излучения как функцию объе-

*) В переводе этой и ряда последующих цитат автором сделаны некоторые уточнения.

ма, исходя из закона Вина, т. е. для больших значений отношения ν/T, и сравнил ее с энтропией идеального газа или разбавленного раствора. Закон Вина для плотности энергии излучения Эйнштейн записывает в виде

$$\rho = \alpha\nu^3 e^{-\beta\nu/T}, \tag{13}$$

получающемся из закона Планка (11) при больших значениях ν/T (здесь $\alpha = 8\pi/c^3$, $\beta = h/k$, $\rho = u_\nu$; в данной работе Эйнштейн еще не вводит, как Планк, постоянные h и k, он пишет R/N вместо k, где R — газовая постоянная, а N — число Авогадро, и $\beta R/N$ вместо h).

С помощью термодинамических соотношений Эйнштейн из формулы (13) находит выражение для энтропии S излучения, занимающего объем v,

$$S - S_0 = \frac{E}{\beta\nu} \ln \frac{v}{v_0}, \tag{14}$$

где E — полная энергия излучения, а S_0 — энтропия излучения при объеме v_0. Это выражение имеет такой же вид, как и энтропия идеального газа или разбавленного раствора, содержащего n частиц:

$$S - S_0 = R\frac{n}{N} \ln \frac{v}{v_0} = \frac{R}{N} \ln \left(\frac{v}{v_0}\right)^n = \frac{R}{N} \ln W, \tag{15}$$

где $W = (v/v_0)^n$ — вероятность того, что все n движущихся частиц соберутся в объеме v, представляющем часть полного объема v_0. Сравнение (14) и (15) показывает, что $n = NE/R\beta\nu$, т. е. «Монохроматическое излучение малой плотности (в пределах области применимости закона излучения Вина) в смысле теории теплоты ведет себя так, как будто оно состоит из независимых друг от друга квантов энергии величиной $R\beta\nu/N$» [10] (т. е. $h\nu$. — *М. Е.*). Таким образом, Эйнштейн пришел к корпускулярной теории света. Дальнейшая разработка этой теории квантов света привела его к идее корпускулярно-волнового дуализма, которая в свою очередь была перенесена де Бройлем на микрочастицы, т. е. на вещество (см., например, [303]).

Первую часть своей работы Эйнштейн заканчивает так: «Но если монохроматическое излучение (достаточно малой плотности) в смысле зависимости энтропии от объема ведет себя как дискретная среда, состоящая из квантов энергии величиной $R\beta\nu/N$, то напрашивается вопрос, не являются ли и законы возникновения и превращения света такими, как будто свет состоит из подобных же квантов энергии» [10]. Во второй части работы Эйнштейн объясняет закон Стокса как результат испускания кванта света частоты ν_2, которая меньше или равна частоте ν_1 поглощенного кванта света (в обозначениях Эйнштейна $R\beta\nu_2/N \leqslant R\beta\nu_1/N$, т. е. $h\nu_2 \leqslant h\nu_1$ и $\nu_2 \leqslant \nu_1$). Далее он рассматривает «возбуждение катодных лучей при освещении твердых тел» и дает свое знаменитое уравнение для фотоэффекта *), согласно которому кинетическая энергия вырываемых квантом света электронов равна $h\nu - P$ (в обозначениях Эйнштейна $R\beta\nu/N - P$), где P — работа выхода. Наконец, Эйнштейн разбирает «ионизацию газов ультрафиолетовым светом», предполагая, что «каждый поглощенный квант вызывает ионизацию одной молекулы газа», что представляет первоначальную формулировку закона фотохимического эквивалента (который впоследствии Эйнштейн рассмотрел и с термодинамической точки зрения [24]).

Конкретный анализ Эйнштейном элементарных процессов поглощения и испускания излучения сыграл большую роль в развитии квантовой

*) До сих пор о данной статье [10] часто говорят, как о «работе Эйнштейна по фотоэффекту», что неправильно, так как не отражает главного в этой работе.

теории атомов и молекул. В сочетании с идеей квантования энергии микрочастиц идея дискретности этих процессов была применена Бором; в своей первой статье по теории атома [30] Бор ссылается на работы Эйнштейна и пишет: «На всеобщее значение теории Планка для обсуждения поведения атомных систем впервые указал Эйнштейн». При этом Бор подразумевал именно идеи Эйнштейна о дискретности элементарных процессов взаимодействия атомных систем с излучением. Следует подчеркнуть, что данные идеи Эйнштейна получили развитие в работах других ученых, в частности Штарка, Нернста, Зоммерфельда, тогда как представления о корпускулярной структуре самого излучения — представления о квантах света как о частицах — очень долго не получали широкого признания. Так, в 1913 г. при рекомендации Эйнштейна в члены Прусской Академии наук в Берлине Планком, Нернстом, Рубенсом и Варбургом в соответствующем представлении было, после перечисления научных заслуг Эйнштейна, написано: «То, что он в своих рассуждениях иногда выходит за пределы цели, как, например, в своей гипотезе световых квантов, не следует слишком ставить ему в вину. Ибо, не решившись пойти на риск, нельзя осуществить нового даже в самом точном естествознании» [296]. А уже значительно позже, в 1922 г., Бор в работе об основных постулатах квантовой теории [42] писал о гипотезе световых квантов, что она «не может никоим образом рассматриваться как удовлетворительное решение. Как известно, именно эта гипотеза приводит к непреодолимым трудностям при объяснении явлений интерференции, представляющих основное средство при исследовании свойств излучения». И лишь в июне 1925 г. Бор отказался от такой точки зрения (см. его послесловие к статье «О действии атомов при соударениях» [55] *)). Это было после результатов Боте и Гейгера (доказавших справедливость законов сохранения энергии и импульса в элементарном процессе при эффекте Комптона), непосредственно перед созданием квантовой механики (см. подробнее [311]).

Необходимо подчеркнуть, что, наряду с представлениями Эйнштейна о корпускулярной структуре излучения, идеи о дискретности энергии излучения стали развиваться и в другой форме. Сперва Эренфест в 1906 г. [12], а затем Дебай в 1910 г. [17] применили эти идеи к собственным колебаниям равновесного излучения в полости (число которых на единицу интервала частот равно $8\pi\nu^2/c^3$, что и приводит, при равномерном распределении энергии по колебательным степеням свободы, по kT на каждую из них, к закону Рэлея — Джинса $u_\nu = 8\pi\nu^2 kT/c^3$, получающемуся из закона Планка (11) при $h\nu \ll kT$). Согласно Эренфесту и Дебаю, энергия каждого собственного колебания электромагнитного поля квантуется и должна быть кратной $\varepsilon = h\nu$, как и для планковского резонатора. Исходя из этого предположения и определив по вероятностному методу (аналогичному методу, примененному Планком для распределения полной колебательной энергии U_N по N резонаторам; см. (4) — (6)) среднюю энергию одного колебания частоты ν (она оказалась равной средней энергии одного резонатора; см. (9)), Дебай смог вывести закон Планка (11). Идеи данного подхода — идеи *квантования электромагнитного поля* — положили начало квантовой электродинамике [298]. Однако связь этих идей с гипотезой квантов света Эйнштейна была установлена лишь много позже, при создании квантовой механики, когда была раскрыта сущность корпускулярно-волнового дуализма.

Начиная с 1905—1906 гг. квантовые представления получили широкое распространение и в их разработке стало участвовать все большее и большее число ученых. В частности темой первого Сольвеевского кон-

*) См. данный выпуск, с. 571.

гресса по физике, на который собрались почти все ведущие физики того времени, стала «Теория излучения и кванты» [301, 324]. Развитие квантовых представлений происходило по нескольким различным, хотя и связанными между собой, направлениям, идущим от Планка и Эйнштейна. Эти направления опирались на идеи *квантования энергии вещества*, на идеи *дискретности процессов взаимодействия вещества и излучения*, на идеи *дискретности излучения* в форме *гипотезы квантов света*, с одной стороны, и в виде предположения о *квантовании энергии собственных колебаний электромагнитного поля*, с другой. Именно развитие, в значительной степени независимое, квантовых представлений в различных направлениях привело впоследствии к двум различным подходам при создании квантовой механики — к *подходу, основанному на идеях принципа соответствия* (Бор, Гейзенберг), и к *подходу, основанному на идеях корпускулярно-волнового дуализма* (Эйнштейн, де Бройль, Шрёдингер). Здесь нет возможности подробно описать данное развитие, и мы рассмотрим в общих чертах лишь некоторые его наиболее существенные этапы.

Ряд важных работ был посвящен вопросам квантования энергии вещества:

Планк в 1906 г. в первом издании своих «Лекций по теории теплового излучения» [11] рассмотрел квантование резонатора — гармонического осциллятора — как результат выделения в фазовом пространстве элементарных областей, равных по величине кванту действия h. Для осциллятора на (pq)-плоскости (q и p — обобщенные координата и импульс) площадь между двумя эллипсами, соответствующими значениям энергии E и $E + \varepsilon$, будет

$$\int dq\, dp = h \tag{16}$$

(см. доклад Планка «Законы теплового излучения и гипотеза кванта действия» на первом Сольвеевском конгрессе [22] *)), и условие квантования энергии $E/\nu = nh$ может быть записано в виде

$$\int p\, dq = nh, \tag{17}$$

где *фазовый интеграл* берется по площади, ограниченной эллипсом, соответствующим значению энергии $E = nh\nu$, а n — целое число, которое стали впоследствии называть *квантовым числом*. В дальнейшем условие (17) было обобщено на случай многих степеней свободы и были сформулированы условия для квантования многократно-периодических систем (обычно называемые квантовыми условиями Бора — Зоммерфельда) в в виде [39]

$$\int p_k\, dq_k = n_k h, \tag{18}$$

где q_k и p_k — обобщенные координата и импульс для k-й степени свободы, а n_k — соответствующее квантовое число.

Очень существенным было применение Эйнштейном в конце 1906 г. закона квантования гармонического осциллятора в теории темплоемкостей. В работе «Теория излучения Планка и теория удельной теплоемкости» [13] Эйнштейн, следуя Планку, рассмотрел осцилляторы с кванто-

*) Отметим, что Планк пытался, производя усреднение по фазовому пространству, отказаться от прерывности процесса поглощения [20], а затем и от прерывности процесса испускания [34], но эти попытки не были удачными. В работах [20, 22] впервые появилась нулевая энергия колебаний $h\nu/2$, однако только на основе квантовой механики она получается естественным образом (см. с. 690 и 695).

ванными энергиями 0, ε, 2ε, . . . (где $\varepsilon = R\beta\nu/N$, т. е. $\varepsilon = h\nu$). Он очень просто нашел среднюю энергию такого осциллятора, исходя из распределения Больцмана и беря вероятность dW значений энергии осциллятора E, лежащих от E до $E + dE$, в виде

$$dW = Ce^{-(N/RT)E}\omega(E)\,dE, \tag{19}$$

где C — функция от T. Это среднее равно

$$\bar{E} = \frac{\int Ee^{-(N/RT)E}\omega(E)\,dE}{\int e^{-(N/RT)E}\omega(E)\,dE}. \tag{20}$$

В то время как в классической теории берется $\omega(E) = \text{const}$, Эйнштейн положил, что ω отлично от нуля только от 0 до $0 + \alpha$, от ε до $\varepsilon + \alpha$, от 2ε до $2\varepsilon + \alpha$, и т. д., где α бесконечно мало по сравнению с ε, и что

$$\int_0^{\alpha} \omega\,dE = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\alpha} \omega\,dE = \int_{2\varepsilon}^{2\varepsilon+\alpha} \omega\,dE = \ldots = A. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что

$$\bar{E} = \frac{0 + Ae^{-(N/RT)\varepsilon} + A\cdot 2\varepsilon e^{-(N/RT)2\varepsilon} + \ldots}{A + Ae^{-(N/RT)\varepsilon} + Ae^{-(N/RT)2\varepsilon} + \ldots} = \frac{\varepsilon}{e^{(N/RT)\varepsilon} - 1}, \tag{22}$$

т. е. получается планковское выражение (9) ($R/N = k$, $\varepsilon = h\nu$). Таким образом, Эйнштейн впервые применил распределение Больцмана к квантованным состояниям, что стало для нас столь привычным. С помощью соотношения (10) он сразу вывел формулу Планка (10). Далее Эйнштейн применил формулу (21) к атомам твердого тела, рассматривая каждый из них как осциллятор, колеблющийся с частотой ν и имеющий три степени свободы. Для N атомов получается энергия

$$\frac{3N\varepsilon}{e^{(N/RT)\varepsilon} - 1} = 3R\,\frac{\beta\nu}{e^{\beta\nu/T} - 1} \tag{22}$$

(учитывая, что $N\varepsilon = R\beta\nu$), а ее производная по T дает удельную теплоемкость (на грамм-атом) атомов данного рода:

$$3R\,\frac{e^{\beta\nu/T}(\beta\nu/T)^2}{(e^{\beta\nu/T} - 1)^2}. \tag{23}$$

Эта теплоемкость стремится к нулю при $T \to 0$. Данная работа Эйнштейна положила начало развитию квантовой теории теплоемкостей. Существенно, что Эйнштейн применил закон квантования гармонического осциллятора не к отвлеченной модели резонатора, как Планк (который развивал теорию испускания и поглощения, «совсем не интересуясь внутренним строением резонатора. Например, вовсе не существенно, основаны ли колебания элементарных резонаторов на токах проводимости ... либо на токах конвекции ...» [1]), а к конкретной, хотя и очень грубой, модели атомов, колеблющихся в твердом теле около положений равновесия. Квантование колебательного движения для более сложных моделей твердого тела было выполнено в 1912 г. Дебаем [27] и независимо Борном и Карманом [28, 29] (Борн в дальнейшем много занимался динамикой кристаллических решеток и выполнил в этой области ряд фундаментальных исследований; см. [304]).

Наряду с квантованием колебательного движения в ряде работ было выполнено и квантование энергии вращательного движения, на необходимость чего для молекул Нернст указал в 1911 г. [18] (см. также [309]). Для молекул энергия колебаний квантовалась Нернстом и Линдеманом [19]

в связи с теорией теплоемкостей при низких температурах, Бьерумом [25] в связи с исследованием молекулярных спектров. Эренфест [31] в связи с теорией теплоемкостей двухатомных газов рассмотрел и квантование момента импульса молекулы согласно формуле $M = \pm (h/2\pi)\, n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), что дает $M^2 = n^2\,(h^2/4\pi^2)$ и $E_n = n^2h^2/8\pi^2L$, где L — момент инерции молекулы.

Попытки применить квантование к энергии атома были сделаны в в 1910 г. Гаазом [16, 309], а в 1912 г. Никольсон [26] произвел квантование момента импульса электрона в атоме.

Таким образом, идеи квантования внутреннего движения атомов и молекул получили широкое распространение. Однако существенно, что когда шла речь о дискретных процессах испускания и поглощения, то предполагалось, что частота испускаемого или поглощаемого излучения (кванта энергии $h\nu$) совпадает с частотой движения в атомной системе. Равенство этих частот (которое имеет место лишь только для гармонического осциллятора) для всех случаев движения считалось очевидным.

Важнейшим этапом на пути создания теории микроскопических явлений стала работа Бора 1913 г. [30], в которой квантовые представления — идеи о квантовании энергии вещества и о дискретности испускания и поглощения — были применены к атомам и молекулам, прежде всего к атому водорода, как простейшей системе, и были весьма существенным образом дополнены новыми идеями о стационарных состояниях и частотах квантовых переходов, отличных от частот движения в системе. Бор исходил из предложенной Резерфордом в 1911 г. модели атома, состоящего из ядра и окружающих его электронов (которая согласно классическим законам должна была быть неустойчивой из-за потерь энергии на излучение ускоренно движущимися электронами), и в основу своей теории атомных систем положил знаменитые два постулата, получившие его имя. Мы приводим постулаты Бора в формулировке, данной Бором впоследствии [278] (он уточнял свои формулировки в течение ряда лет). Согласно первому постулату, «атомная система устойчива только для определенной совокупности состояний, которая в общем случае соответствует дискретной последовательности значений энергии атома. Каждое изменение этой энергии связано с полным переходом атома из одного стационарного состояния в другое». В этом постулате идея квантования энергии атомной системы сочетается с идеей *стационарности квантовых состояний*. Согласно второму постулату, «способность атомной системы поглощать и испускать излучение подчиняется закону, по которому излучение, связанное с переходом, должно быть монохроматическим и имеет частоту ν, определяемую соотношением (условием частот)

$$h\nu = E_i - E_k, \tag{24}$$

где h — постоянная Планка, E_i и E_k — энергии соответствующих стационарных состояний». В этом постулате идея дискретности процессов испускания и поглощения сочетается с идеей о *частоте квантового перехода, отличной от частот движения в стационарных состояниях* с энергиями E_i и E_k. Постулаты Бора вместе с модельной теорией Бора, согласно которой движение в стационарных состояниях рассматривается с помощью классической механики, а возможные значения энергии и других физических величин находятся с помощью квантовых условий, позволили интерпретировать огромный экспериментальный материал, прежде всего закономерности в спектрах, и дать физическое объяснение периодического закона химических элементов (см., например, [313]). Стала быстро развиваться атомная физика. Уже в 1919 г. Зоммерфельд, внесший наряду с самим Бором очень большой вклад в это развитие, выпустил первое издание своей

монографии «Строение атома и спектры», которая в течение следующих пяти лет вышла еще тремя (каждый раз переработанными) изданиями [39].

О значении и вместе с тем трудности того решительного шага, который сделал Бор, свидетельствует оценка теории Бора Резерфордом и Эйнштейном. Резерфорд впоследствии (в 1931 г.) говорил [293]: «Я считаю первоначальную квантовую теорию спектров, выдвинутую Бором, одной из самых революционных из всех когда-либо созданных в науке, и я не знаю другой теории, которая имела бы больший успех». А Эйнштейн писал (в 1949 г.)[295]: «Мне всегда казалось чудом, что этой колеблющейся и полной противоречий основы (речь идет о квантовых явлениях.— *М. Е.*) оказалось достаточной, чтобы позволить Бору — человеку с гениальной интуицией и и тонким чутьем — найти главнейшие законы спектральных линий и электронных оболочек атома, включая их значение для химии. Это кажется мне чудом и теперь. Это — наивысшая музыкальность в области мысли».

Однако, при очень больших успехах теории Бора, постулаты Бора, которые были всесторонне подтверждены огромным экспериментальным материалом (в частности, непосредственно подтверждены опытами Франка и Герца), не имели теоретического обоснования, а в модельной теории Бора на движение электронов по классическим законам в стационарных состояниях искусственно накладывались квантовые условия. Уже для таких двухэлектронных систем, как атом гелия и молекула водорода, теория не приводила к правильным результатам. Сам Бор хорошо понимал неудовлетворительность модельной теории, когда в своем докладе в конце 1913 г. говорил [33], применяя для стационарных состояний классическую механику: «Если мы желаем вообще составить наглядные представления о стационарных состояниях, у нас нет других средств, *по крайней мере сейчас* (курсив мой.— *М. Е.*), кроме обычной механики». Заканчивая доклад, Бор сказал: «Прежде чем закончить, я хотел бы лишь выразить надежду, что выражался настолько ясно, что все поняли, как резко противоречат изложенные соображения поразительно гармоничному кругу представлений, которые по справедливости названы классической электродинамикой. С другой стороны, я старался, чтобы у вас сложилось впечатление, что именно подчеркиванием указанного противоречия, быть может, удастся со временем внести некоторую связность в новые представления». И Бор в течение последующих лет упорно искал путей разрешения противоречий. Главное направление, в котором он шел и которое явилось одним из подходов при создании квантовой механики, реализованном в 1925 г., было направление, основанное на идеях *принципа соответствия*. Идею совпадения результатов классической и квантовой теорий в предельном случае малых частот излучения (когда закон Планка переходит в закон Рэлея—Джинса) Бор применил уже в первой части своей работы 1913 г., предположив, что частота квантового перехода ν между соседними круговыми орбитами большого радиуса в атоме водорода (соответствующими большим квантовым числом τ и $\tau + 1$) совпадает с частотой обращения ω электрона по этим орбитам. Именно таким образом он смог найти логически наиболее последовательным образом выражение постоянной Ридберга R через элементарный заряд, массу электрона и постоянную Планка h и показать, как следствие, что для круговых орбит получается условие квантования момента импульса в виде

$$M = \frac{h}{2\pi}\tau, \tag{25}$$

где квантовое число $\tau = 1, 2, 3, \ldots$

Развивая идею о соответствии между классической и квантовой теориями, Бор в 1918 г. в работе «О квантовой теории линейчатых спектров» [38] сформулировал общий принцип соответствия между классическим движением в атоме и излучением. В 1920 г. в работе «О сериальных спектрах элементов» Бор писал [40]: «...процесс излучения, связанный с переходом из одного состояния в другое, не может быть прослежен в деталях с помощью обычных электромагнитных представлений. Свойства излучения атома с точки зрения этих представлений обусловлены непосредственно движением системы и разложением этих движений на гармонические компоненты. Тем не менее оказалось, что существует далеко идущее *соответствие* между различными типами возможных переходов из одного стационарного состояния в другое, с одной стороны, и различными гармоническими компонентами разложения, с другой. Таким образом, рассматриваемая теория спектров может считаться до некоторой степени обобщением обычной теории излучения». Мы не будем здесь рассматривать подробно дальнейшее развитие принципа соответствия Бором и его сотрудниками (в частности, в применении к теории дисперсии — Крамерсом, а затем Крамерсом и Гейзенбергом), а также попытку Бора (совместно с Слэйтером и Крамерсом) отказаться от законов сохранения энергии и импульса при элементарных процессах *). Подчеркнем только, что особенно существенным было сопоставление классическому движению в стационарных состояниях не частот этого движения, а, для каждой пары состояний, частоты квантового перехода согласно условию частот (24), причем интенсивность излучения определяется соответствующими гармоническими компонентами разложения электрического момента. Отметим также связь принципа соответствия со сформулированным Эренфестом адиабатическим принципом [32, 35], согласно которому при очень медленном (адиабатическом) изменении параметров системы имеются величины (адиабатические инварианты), которые не изменяются; например, для гармонического осциллятора в квантовой теории сохраняется, при адиабатическом изменении частоты ν, отношение $E/\nu = J = nh$. Бор неоднократно подчеркивал эту связь (например, в [42]), а Эренфест ее рассмотрел в работе [45].

Глубокие идеи Бора о теории атома, подход, основанный на принципе соответствия, оказали решающее влияние на Вернера Гейзенберга. О его беседе с Бором во время прогулки в июне 1922 г. **) Гейзенберг впоследствии писал [310]: «Эта прогулка оказала сильнейшее влияние на мое последующее научное развитие, или, пожалуй, можно сказать лучше, что мое собственно научное развитие только и началось с этой прогулки». Применяя принцип соответствия в первой своей работе по квантовой механике летом 1925 г. ***), Гейзенберг развивал идеи Бора.

Другой подход к квантовой механике, реализованный Шрёдингером и связанный с идеей корпускулярно-волнового дуализма, можно проследить от первой работы Эйнштейна [10] по квантовой теории. Идеи о квантах света Эйнштейн развил в работах 1909 г., «К современному состоянию проблемы излучения» [14] и «О развитии наших взглядов на сущность и структуру излучения» [15]. Исходя из закона Планка (11) для плотности излучения (а не из закона Вина (13), как в первой работе), Эйнштейн вычислил среднее значение $\overline{\varepsilon^2}$ квадрата флуктуации энергии излучения:

$$\overline{\varepsilon^2} = h\nu\eta_0 + \frac{c^3}{8\pi\nu^2\, d\nu}\frac{\eta_0^2}{\nu}, \tag{26}$$

*) См. об этом в статье Мехры (см. данный выпуск, с. 719) и ссылки [36–39, 45, 47, 48] в его статье (с. 742).

**) См. статью Мехры, с. 722.

***) См. данный выпуск, с. 574.

где η_0 — средняя энергия излучения в объеме v, т. е. равно сумме двух членов. Второй член обратно пропорционален ν^2 и соответствует флуктуациям согласно волновой теории (вследствие интерференции); он является основным при малых частотах. Первый же член соответствует флуктуациям согласно корпускулярной теории — флуктуациям числа квантов света — и является основным при больших частотах (тогда, если положить $\eta_0 = h\nu \cdot n$ и $\varepsilon/h\nu = \Delta n$, будет $\overline{\Delta n^2} = n$, т. е. получается обычная формула для флуктуаций Δn числа частиц n). Таким образом, формула (26) отражает двойственный характер излучения — *корпускулярно-волновой дуализм.* Аналогичную формулу Эйнштейн получил и для среднего квадрата $\overline{\Delta^2}$ флуктуации светового давления (за время τ) на зеркало площади f, идеально отражающее излучение в интервале частот $d\nu$ (от ν до $\nu + d\nu$) и абсолютно прозрачное для других частот:

$$\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau} = \frac{1}{c}\left(h\nu \cdot \rho + \frac{c^3}{8\pi\nu^2}\rho^2\right) d\nu \cdot f, \tag{27}$$

где ρ — плотность излучения частоты ν ($\rho = u_\nu$). Первый член данной формулы, соответствующий корпускулярной теории, пропорционален $h\nu/c$. Это соответствует импульсу отдельного кванта света, равному $h\nu/c$, о чем Эйнштейн стал говорить явным образом лишь позже, в 1916 г. [37], однако существенно, что уже в 1909 г. Эйнштейн рассматривал наряду с энергией излучения и его импульс. Он подчеркивал [15]: «*Кроме пространственных неравномерностей в распределении количества движения излучения, вытекающих из волновой теории, существуют и другие неравномерности, которые при малой плотности энергии излучения намного превосходят неравномерности, упомянутые первыми*».

Вопросам квантовой теории излучения Эйнштейн уделил большое внимание и в докладе на первом Сольвеевском конгрессе в 1911 г. [23]. Важный анализ квантовой теории излучения выполнил в том же 1911 г. Эренфест в работе «Какие черты гипотезы световых квантов играют существенную роль в теории теплового излучения?» [21].

В 1916 г. Эйнштейн опубликовал очень важные статьи по квантовой теории излучения [36, 37]. В них он ввел получившие его имя коэффициенты A и B, характеризующие вероятности спонтанных и вынужденных (как при поглощении, так и при испускании) квантовых переходов, рассмотрел равновесие излучения и вещества и вывел формулу Планка (11). Этот «вывод формулы Планка по Эйнштейну» хорошо известен и излагается во всех учебниках, однако наряду с ним статья содержала очень важное рассмотрение вопроса о направленности излучения. Именно здесь Эйнштейн ввел в явном виде импульс кванта света $h\nu/c$ как результат рассмотрения движения молекул в поле излучения и определения среднего квадрата $\overline{\Delta^2}$ передаваемого молекулам импульса. Он писал, указав, что «из общей квантовой гипотезы для вещества» следует условие частот Бора (24) и формула Планка (11): «Однако самым важным, на мой взгляд, является вывод, касающийся импульса, который передается молекуле при спонтанном и вынужденном испусканиях». Особенно существенно заключение статьи: «Если молекула теряет энергию без внешнего возбуждения (спонтанное испускание), то этот процесс также является *направленным.* Спонтанного испускания в виде сферических волн не существует. В элементарном процессе спонтанного испускания молекула получает импульс отдачи, величина которого равна $h\nu/c$, а направление определяется, согласно современному состоянию теории, лишь «случайностью». Эти свойства элементарного процесса, требуемые соотношением (12) (для $\overline{\Delta^2}$.— *М. Е.*), делают почти неизбежным создание подлинной

квантовой теории излучения. Слабость теории заключается, с одной стороны, в том, что она не приводит нас к более тесному объединению с волновой теорией, и, с другой стороны, в том, что время и направление элементарного процесса предоставляются «случаю»; впрочем, я полностью уверен в надежности выбранного метода». Высказывание Эйнштейна соответствует корпускулярно-волновому дуализму ($E = h\nu$ и $p = h\nu/c = h/\lambda$) и рассмотрению электромагнитного поля как «поля-призрака» или «поля-пилота» *). Эйнштейн отчетливо понимал вероятностный характер связи волновой и корпускулярной теорий излучения.

Очень существенным доводом в пользу правильности представлений Эйнштейна о квантах света с энергией $E = h\nu$ и импульсом $p = h\nu/c$ явилось естественное объяснение открытого осенью 1922 г. Комптоном [41] эффекта (получившего его имя — эффект Комптона) рассеяния рентгеновских лучей электронами с изменением длины волны этих лучей. Данное объяснение было дано самим Комптоном [43] и независимо Дебаем [44] и было основано на рассмотрении элементарного процесса столкновения кванта света со свободным электроном при выполнении законов сохранения энергии и импульса.

Важнейшим этапом в развитии квантовых представлений явились три работы де Бройля 1923 г. [46-48] и его диссертация 1924 г. [52], в которых корпускулярно-волновой дуализм для излучения был перенесен на вещество, на его частицы (о работах де Бройля см. [299,328]). Уже в первой из этих работ де Бройль сопоставил частице волну с определенной фазовой скоростью и получил, исходя из волновых представлений, условие Бора (25) для квантования круговых орбит. Впервые квантовое условие было получено естественным образом.

Результаты первых трех работ были обобщены де Бройлем в статье «Попытка построения теории световых квантов», опубликованной в «Philosophical Magazine» [49] **). Де Бройль пытался рассматривать квант света как частицу с массой покоя m_0, отличной от нуля, что было неверно, однако его основная идея о волне, сопоставляемой частице, оказалась необычайно плодотворной. В этой его статье и в его диссертации впервые появилась в явном виде знаменитая *длина волны де Бройля* $\lambda = V/\nu$ (где V — фазовая скорость волны), которая определяется формулой

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h\sqrt{1-\beta^2}}{m_0 v} \tag{28}$$

(где $\beta = v/c$), связывающей эту длину волны со скоростью частицы v.

Фундаментальное значение работ де Бройля было прежде всего оценено Эйнштейном в статье [53], посвященной новой квантовой статистике, впервые предложенной Бозе в 1924 г. для квантов света [50] и сразу примененной Эйнштейном к атомам [51] (эта статистика, как известно, получила название статистики Бозе — Эйнштейна). В данной статье Эйнштейн, следуя де Бройлю (о диссертации которого он писал как о «заслуживающей всяческого внимания»), использовал сопоставление частице волнового поля и рассмотрел флуктуации этого поля. После этой статьи Эйнштейна на работы де Бройля обратил внимание и Шрёдингер (см., например, [303, 327]); он опубликовал важную статью «К эйнштейновской теории газа» [58], в которой применил идеи де Бройля, а затем появились его основополагающие первые работы по волновой механике. Таким образом и был реализован второй подход к квантовой механике.

---

*) См. статью Борна, с. 632.

**) См. в данном выпуске, с. 562.

3. ОБСТАНОВКА ПРИ СОЗДАНИИ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Успешное изучение физиками разнообразных микроскопических явлений, оптических, магнитных и электрических, накопление обширного экспериментального материала в сочетании с развитием плодотворных квантовых представлений подготовило условия для создания последовательной теории этих явлений — квантовой механики. Ее становление явилось результатом совместных усилий физиков-теоретиков из разных стран, в том числе советских ученых. В своих воспоминаниях о Резерфорде Бор впоследствии говорил [300]: «Те годы, когда неповторимое объединение усилий целого поколения физиков-теоретиков из многих стран шаг за шагом создавало логически непротиворечивое обобщение классической механики и электродинамики, иногда характеризовали как «героическую» эру квантовой физики. Для каждого, следившего за этим развитием (вдохновляющую и направляющую роль Бора в котором трудно переоценить.— *М. Е.*), незабываемым переживанием остается картина того, как в результате сочетания различных подходов и использования соответствующих математических методов возникал новый взгляд на понимание физического опыта. Пришлось преодолеть многочисленные препятствия, пока эта цель была достигнута, и прошло время, и, как это бывает, решающий успех был достигнут самыми молодыми из нас».

Одним из основных центров развития квантовой физики стала столица Дании Копенгаген, где Бор создал Институт теоретической физики, в который приезжали физики из разных стран. Копенгагенская школа Бора сыграла важнейшую роль в создании квантовой механики. Американский ученый Деннисон, приехавший для работы в Копенгаген из Мичиганского университета, вспоминает [323]: «Копенгаген в эти годы, от 1924 до 1926 г., как и во многие другие годы, был одним из крупных центров физики. Приезжал почти каждый, кто что-то делал в это время (идет, разумеется, речь о работах по квантовой физике.— *М. Е.*). Гейзенберг, Крамерс и Нишина *) находились там большую часть времени. Хунд, Паули, Фаулер, Дирак, Гаудсмит, Уленбек и многие другие приезжали от времени до времени. Это было, действительно, весьма волнующее время».

Наибольшее число ведущих физиков-теоретиков работало в Германии: Планк, Эйнштейн и Лауэ в Берлине, Зоммерфельд в Мюнхене, Борн в Гёттингене (где имелась и очень сильная математическая школа, возглавляемая Гильбертом). Зоммерфельд и Борн создали свои крупные научные школы. В 1924 г. вышло четвертое издание монографии Зоммерфельда «Строение атома и спектры» [39], а в 1925 г. были опубликованы «Лекции по атомной механике» Борна [56]. В первой половине 20-х годов учились у Зоммерфельда в Мюнхене [293a, 294a], а затем работали ассистентами в Гёттингене у Борна два крупнейших представителя молодого поколения физиков-теоретиков, родившихся на рубеже XIX и XX веков,— Паули (которому в апреле 1925 г. исполнилось 25 лет) и Гейзенберг (которому в 1925 г. было 23 года). Отметим, что Паули в январе 1925 г. [54] сформулировал принцип запрета — знаменитый *принцип Паули*, согласно которому в атоме не может быть двух или более эквивалентных электронов с одинаковой четверкой квантовых чисел. Паули также написал фундаментальный обзор по квантовой теории, отражающий ее состояние к середине 1925 г. [60]. Особенное значение в середине 20-х годов приобрела гёттингенская школа Борна. Сотрудниками Борна в это время были, помимо Гейзенберга и Паули (который с 1925 г. переехал в Гамбург), Иордан, Хунд, Гайтлер. Работать с Борном приезжали физики-теоретики из различных стран, в том числе из СССР — В. А. Фок, Я. И. Френкель, И. Е. Тамм. Из США приезжали выдающийся математик Винер, физики-теоретики Оппенгеймер, Кондон, Полинг и другие.

В Англии в знаменитой Кавендишской лаборатории в Кембридже, возглавлявшейся Резерфордом, работал крупный физик-теоретик Фаулер, под руководством которого начал свои исследования Дирак (ему в августе 1925 г. исполнилось 23 года). Из английских физиков-теоретиков следует также упомянуть работавшего в Эдинбурге Дарвина (внука знаменитого естествоиспытателя).

Во Франции, в Париже, работали де Бройль (ему было в 1925 г. 33 года) и Бриллюэн, а в Швейцарии, в Цюрихе, до 1927 г. (когда он переехал в Берлин) работал Шрё-

*) Нишина, соавтор известной формулы Клейна — Нишина, в то время занимался, как указывает Деннисон, экспериментом.

дингер (ему было в 1925 г. 38 лет). Отметим, что в Цюрихе в это время также работали Дебай (см. [329]) и выдающийся математик Вейль.

В Голландии, в Лейдене, создал свою теоретическую школу Эренфест, занимавший с 1912 г. кафедру в университете. До этого кафедрой руководил Лоренц, который передал ее Эренфесту. Учениками Эренфеста были Уленбек и Гаудсмит, выдвинувшие в конце 1925 г. гипотезу о спине электрона [57, 57а] (см. также [305, 325, 326]).

В Италии, в Риме, начинал свою научную деятельность один из крупнейших физиков, родившихся в начале XX века,— Ферми (ему в сентябре 1925 г. исполнилось 24 года). В 1923 г. он работал у Борна в Гёттингене, а в 1924 г. у Эренфеста в Лейдене. Очень важное значение имела работа Ферми марта 1926 г. «О квантовании идеального одноатомного газа» [59], в которой он, исходя из принципа Паули, предложил новый тип квантовой статистики, отличающийся от статистики Бозе — Эйнштейна и получивший в дальнейшем название статистики Ферми — Дирака.

В США начинал свою работу ряд молодых физиков-теоретиков, однако научные школы сложились там гораздо позднее, а в это время большинство молодых ученых ездило учиться в Европу, прежде всего к Бору в Копенгаген и к Борну в Гёттинген.

Особо следует остановиться на участии советских физиков-теоретиков в создании квантовой механики. До революции в России работали лишь отдельные молодые физики-теоретики, в частности Ю. А. Крутков (о нем см. [312]), являвшийся учеником Эренфеста, работавшего в России (в Петербурге) с 1907 до 1912 г. Только после революции физика стала быстро развиваться в нашей стране, были созданы первые научно-исследовательские институты, начали складываться крупные научные школы, прежде всего в Ленинграде; их возглавили А. Ф. Иоффе и Д. С. Рождественский. В начале 20-х годов активно вели исследования крупные физики-теоретики — в Москве Л. И. Мандельштам, в Ленинграде — А. А. Фридман, Ю. А. Крутков, В. Р. Бурсиан, В. К. Фредерикс. Выдвинулись своими работами Я. И. Френкель и В. А. Фок в Ленинграде, И. Е. Тамм в Москве, а в середине 20-х годов и более молодые физики-теоретики — Г. А. Гамов, Д. Д. Иваненко, Л. Д. Ландау в Ленинграде, М. А. Леонтович в Москве. Советские физики-теоретики внимательно следили за работами ведущих зарубежных ученых, и в период становления квантовой механики они стали активными его участниками. Такое участие способствовало развитию теоретической физики в Советском Союзе, созданию крупных научных школ Л. Д. Ландау, И. Е. Таммом, В. А. Фоком, Я. И. Френкелем.

Весьма важную роль в становлении квантовой механики сыграла быстрая публикация работ и многочисленные обсуждения самых животрепещущих вопросов рождающегося нового раздела теоретической физики, как при личном общении, так и путем переписки.

Большинство работ по квантовой механике публиковалось в немецких физических журналах, являвшихся в период 1925—1928 гг. в значительной степени международными, прежде всего в «Zeitschrift für Physik» и «Annalen der Physik». В первом из них было опубликовано, начиная с сентября 1925 г., самое большое число работ по квантовой механике — Гейзенберга и Борна, Паули и Иордана, Вентцеля и Клейна, Фока и Ландау, Лондона и Хунда и многих других физиков-теоретиков. Во втором были опубликованы основные статьи Шрёдингера. Английские ученые печатались в журнале «Proceedings of the Royal Society», и в нем появились все важнейшие работы Дирака. Начали публиковаться статьи по квантовой механике и в журналах других стран. Срок публикации статей в этот период, когда общее число работ по физике было несравнимо меньше, чем теперь, обычно не превышал двух месяцев, и поэтому специалисты знакомились с новыми статьями очень быстро.

Работа по созданию квантовой механики стала примером объединения ученых разных стран для решения фундаментальных проблем науки.

4. ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ СТАНОВЛЕНИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ

Первые работы по квантовой механике, исходящие из принципа соответствия и базирующиеся на применении алгебраического математического аппарата, были опубликованы, начиная с сентября 1925 г., когда в «Zeitschrift für Physik» появилась основополагающая статья Гейзенберга «О квантовотеоретическом истолковании кинематических и механических соотношений» от 29 июля [61] *). Характерным для подхода Гейзенберга

*) См. данный выпуск, с. 574. Здесь и в дальнейшем мы приводим даты поступления статей в редакции соответствующих журналов.

был отказ от классического описания движения при помощи «до сих пор ненаблюдавшихся величин (таких, как положение, и время обращения электрона)» и стремление «построить квантовотеоретическую механику, аналогичную классической механике, в которую входили бы лишь соотношения между наблюдаемыми величинами». Такой подход находился в согласии с общими идеями Бора о неприменимости классических представлений для описания микроскопических явлений *) и оказался весьма эффективным. При решении поставленной задачи Гейзенберг опирался, следуя Бору, на принцип соответствия и, в частности, на результаты работ по квантовой теории дисперсии, в которых этот принцип был успешно применен и уточнен **). Классическим частотам колебаний электрона в атоме Гейзенберг сопоставил частоты переходов, в согласии с комбинационным принципом Ритца, а классическим амплитудам колебаний — амплитуды, определяющие интенсивность излучения при этих переходах. Существенным было изменение кинематики при сохранении вида уравнений движения. При этом Гейзенберг сразу встретился с некоммутативностью введенных им выражений для динамических переменных, что он специально подчеркнул как трудность, и поэтому рассмотрел случай ангармонического осциллятора, в котором эта трудность не встречается. Гейзенберг показал, что энергия сохраняется (как для гармонического осциллятора, так и для простейшего вида ангармонического осциллятора) и нашел уровни энергии. В случае гармонического осциллятора энергия $W = (n + {}^1/_2)\, h\omega_0/2\pi$ (см. с. 583, формула (23)), т. е. не только естественным образом получился закон квантования, но и появилась «нулевая энергия» $h\omega_0/2\pi$. Гейзенберг нашел также закон квантования энергии ротатора и вывел формулы интенсивностей при эффекте Зеемана и для мультиплетов. Все это свидетельствовало об эффективности нового подхода (см. конец статьи Гейзенберга, с. 586). Важность работы Гейзенберга сразу оценил Бор в заключительном разделе работы «Атомная теория и механика», опубликованной в конце 1925 г. [269]. Он писал, что Гейзенберг «сделал, по-видимому, очень значительный шаг вперед на пути к новой формулировке проблем квантовой теории».

Дальнейший весьма важный шаг вперед сделал Борн, который, ознакомившись со статьей Гейзенберга, увидел, что введенное в этой статье «символическое произведение» дискретных величин, сопоставляемых классическим величинам, представляет произведение матриц ***). Вместе с Иорданом в статье «К квантовой механике» [62]****) Борн применил методы матричного исчисления, смог произвести «более глубокое математическое исследование» (о котором писал Гейзенберг в конце своей статьи) и получить ряд фундаментальных результатов. В статье было найдено *перестановочное соотношение* («уточненное квантовое условие») для матриц координаты q и импульса p в виде (см. с. 597, формула (38))

$$pq - qp = \frac{h}{2\pi i}\,\mathbf{1} \tag{29}$$

(где $\mathbf{1}$ — единичная матрица), в которое вошла характерная для микроскопических явлений постоянная Планка h. Был введен и рассмотрен гамиль-

*) Как раз в это время, в июле 1925 г., Бор в послесловии к статье «О действии атомов при соударениях» [55] писал о неприменимости «пространственно-временны́х понятий, опирающихся на классическую механику» (см. данный выпуск, с. 573).

**) Подробнее о работах по квантовой теории дисперсии и участии в них Гейзенберга см. в статье Мехра (данный выпуск, с. 725). В ней также детально рассмотрено, каким путем Гейзенберг пришел к результатам (в течение весны и лета 1925 г.), изложенным в его первой статье по квантовой механике.

***) См. статью Мехры, с. 731.

****) См. данный выпуск, с. 586.

тониан H как функция p и q, было показано, что для него выполняется закон сохранения энергии ($H = 0$), и было получено условие частот Бора. Таким образом, были созданы основы для решения конкретных задач, исходя из явного вида гамильтониана и применяя математический аппарат матричной механики. С помощью этого аппарата были рассмотрены случаи гармонического и ангармонического осциллятора. При этом вид матрицы координаты q для гармонического осциллятора (см. с. 601, формула (53)) был найден не путем использования принципа соответствия (как у Гейзенберга), а из основных соотношений теории. В статье было также получено, при некоторых предположениях, исходя из уравнений Максвелла, выражение для вероятностей дипольных спонтанных переходов (см. с. 610, формула (109)).

Как в работе Гейзенберга, так и в работе Борна и Иордана рассматривались системы с одной степенью свободы. Обобщение матричной механики на системы с любым числом степеней свободы и разработка ее методов были произведены в совместной фундаментальной статье Борна, Гейзенберга и Иордана «К квантовой механике. II» от 16 ноября 1925 г. [64]. В ней для системы с одной степенью свободы (гл. 1) были рассмотрены канонические преобразования, развиты методы теории возмущений, как не зависящих, так и зависящих от времени (при явной зависимости гамильтониана от времени). Далее, были рассмотрены основы теории систем с произвольным числом степеней свободы (гл. 2), причем было предположено, что перестановочные соотношения для координат q_k и импульсов p_k имеют вид

$$\left.\begin{aligned} p_k q_l - q_l p_k &= \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{kl}, \\ p_k p_l - p_l p_k &= 0, \\ q_k q_l - q q_{lk} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Теория возмущений была применена и к вырожденным системам. В гл. 3 была подробно рассмотрена связь теории и собственных значений эрмитовых форм, с применением к теории возмущений и к непрерывному энергетическому спектру. В гл. 4, посвященной физическим применениям теории, была прежде всего рассмотрена, исходя из перестановочных соотношений, весьма важная задача о квантовании квадрата момента импульса M^2 и его проекции M_z. Было показано, что

$$M^2 = j(j+1)\left(\frac{h}{2\pi}\right)^2, \tag{31}$$

где j может быть «*лишь „полуцелым" или „целым"*». Были найдены и формулы для интенсивностей при эффекте Зеемана. Существенным было и рассмотрение статистики волновых полей, как систем квантованных осцилляторов (со ссылками на Дебая [17], а также на Эренфеста [12]); при этом была выведена общая формула Эйнштейна (26) для флуктуаций энергии излучения. Специально подчеркивалась связь первого члена в данной формуле (не даваемого классической теорией) с нулевой энергией $C = (1/2)\, h \sum_k \nu_k$. При этом подчеркивалось, что «существенное отличие предлагаемой здесь теории от предшествующих заключается не в различии механических законов, а в характерной для данной теории кинематике. Можно было бы даже рассматривать формулу (55) гл. 4 (формула (26).— *М. Е.*)), в которой не используются никакие механические принципы, как один из наиболее наглядных примеров отличия квантовотеоретической кинематики от предшествующих».

Независимо от работы Борна и Иордана и от работы Борна, Гейзенберга и Иордана Дирак развил, исходя лишь из работы Гейзенберга *), математический аппарат «алгебры q-чисел». Первая статья Дирака «Основные уравнения квантовой механики» от 7 ноября 1925 г. [63] **) была опубликована в «Proceedings of the Royal Society» и положила начало замечательной серии его статей, сыгравшей очень большую роль в становлении квантовой механики (см. сборники [314] и [316], посвященные 70-летию Дирака, и особенно статью Мехры в первом из этих сборников [315]). В своей первой статье Дирак рассмотрел свойства квантовых величин в тесной аналогии со свойствами классических величин. Наряду с суммой и произведением двух квантовых величин x и y он определил понятие «квантового дифференцирования» и, что самое важное, сформулировал общие квантовые условия в виде (см. с. 617, формула (11))

$$xy - yx = \frac{ih}{2\pi}[x, y], \tag{32}$$

где

$$[x, y] = \sum_r \left\{ \frac{\partial x}{\partial q_r}\frac{\partial y}{\partial p_r} - \frac{\partial y}{\partial q_r}\frac{\partial x}{\partial p_r} \right\} \tag{33}$$

— классические скобки Пуассона. Так как $[q_r, p_s] = \delta_{rs}$, $[p_r, p_s] = [q_r, q_s] = 0$, то из (32) перестановочные соотношения (30) Борна, Гейзенберга и Иордана получаются как частный случай. Дирак сразу же смог получить канонические уравнения движения для квантовых систем. Уже в этой работе проявилось уменье Дирака представлять все результаты в весьма общей и очень изящной математической форме.

Статья Дирака была опубликована в декабре 1925 г., а в работе «О квантовотеоретической кинематике и механике» от 21 декабря, помещенной в «Mathematische Annalen» [66], Гейзенберг подвел первые итоги развития квантовой механики в ее алгебраической форме, ссылаясь как на статьи [61, 62, 64], так и на статью Дирака, а также на статью Крамерса [65] (который отметил согласие результатов работы Гейзенберга и работы Борна и Иордана с теорией дисперсии).

Весьма важным было успешное применение матричной механики к атому водорода в работе Паули «О спектре водорода с точки зрения новой квантовой механики» [69]. Паули удалось (правда, достаточно громоздким методом) вывести основную бальмеровскую формулу для уровней энергии атома с одним электроном, а также правильные формулы для эффекта Штарка. Как подчеркивал Паули, «в новой квантовой механике, в которой не вводится наглядное представление стационарных состояний при помощи определенных электронных орбит, становятся излишними особые дополнительные запреты и описанные трудности (прежней теории.— *М. Е.*) отпадают сами собой».

Частичное решение задачи об атоме водорода получил независимо и Дирак в работе «Квантовая механика и предварительное исследование атома водорода» [70]. В ней он дальше развил свой алгебраический метод и стал называть квантовые (в общем случае некоммутативные) переменные q-числами в отличие от c-чисел — классических переменных, удовлетворяющих коммутативному закону. Рассмотрев многократно периодические системы, Дирак в качестве конкретного примера разобрал случай орбитального движения в атоме водорода, однако не стал доводить решение задачи до конца, так как это было сделано Паули (на которого он ссылается в примечании).

*) См. подробнее статью Мехры, с. 733.
**) См. данный выпуск, с. 611.

Гейзенберг и Иордан [75] применили матричную механику для расчета расщепления при аномальном эффекте Зеемана, а Бриллюэн [72] и Люси Менсинг [81] — для расчета молекулярных спектров (вращательных и вращательно-колебательных). Вращение молекул было рассмотрено Деннисоном [84]. Независимо И. Е. Тамм применил матричную механику к ротатору [82]. Это была первая работа советского ученого по квантовой механике. В начале своей работы Тамм писал, что «новая квантовая механика Гейзенберга, Борна и Иордана представляется прокладывающей новые пути и вселяет надежду, что с ее помощью станет возможным решить задачу об атоме, по крайней мере формальным образом.»

Появились и работы, в которых рассматривались более общие вопросы теории. Среди них надо прежде всего отметить работу Борна и Винера (выдающегося американского математика, впоследствии одного из создателей кибернетики) [68] «О новой формулировке квантовых законов для периодических и непериодических процессов». В этой работе впервые в квантовой механике была применена теория линейных операторов и каждой физической величине сопоставлялся эрмитов оператор. В качестве примеров были рассмотрены гармонический осциллятор и одномерное свободное движение (случай, который при матричном рассмотрении представлял затруднения).

Дирак [79] рассмотрел вопрос о динамических переменных в квантовой теории для атома с несколькими электронами, первые работы по квантовой механике выполнили Вентцель [80] (по теории многократно периодических систем, развивая работу Дирака [70]) и Лондон [77] (давший доказательство закона сохранения энергии, независимое от комбинационного принципа).

Таким образом, в начале 1926 г. квантовая механика в ее алгебраической форме продолжала развиваться. Вместе с тем решение ряда конкретных задач в матричном виде было связано со значительными трудностями.

Следует еще остановиться на интересной работе Ланцоша от 22 декабря 1925 г. «О полевом представлении новой квантовой механики» [67] (затем Ланцош выполнил еще две работы [74, 86], представляющие меньший интерес). В этой работе была сделана попытка перейти от дискретной матричной формы квантовой механики к ее аналитической («континуальной») форме при помощи представления матричных элементов в интегральном виде. Ланцош выразил матричные элементы через образующие полную ортогональную систему собственные функции невырожденного симметричного ядра K. Собственные значения этого ядра равнялись обратным значениям энергии системы W_i, деленным на h. Однако явный вид ядра K Ланцошом найден не был и у него шла речь только об интегральном, а не дифференциальном уравнении для собственных функций (об оценке работы Ланцоша Шрёдингером см. ниже, с. 696).

Следующий этап становления квантовой механики связан с работами Шрёдингера, который, идя совсем другим путем, пришел к квантовой механике в ее аналитической форме. Первая его статья по волновой механике, «Квантование как задача о собственных значениях. Первое сообщение» [71*]), была опубликована в «Annalen der Physik» в марте 1926 г. (поступила в редакцию 27 января). В ней была введена функция ψ, связанная с функцией действия S соотношением $S = K \ln \psi$, и получено для атома водорода в нерелятивистском приближении дифференциальное уравнение (см. с. 623, формула (5))

$$\Delta\psi + \frac{2m}{K^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\psi = 0 \qquad (34)$$

(где имеющую размерность действия постоянную K Шрёдингер положил равной $h/2\pi$) — *стационарное уравнение Шредингера*, которое очень быстро

*) См. данный выпуск, с. 621.

приобрело широкую известность (см., например, [327]). В результате его решения методом разделения переменных (см. также работу Бриллюэна [110]) Шрёдингер получил бальмеровские термы для атома водорода гораздо более простым и естественным образом, чем Паули методами матричной механики.

В данной статье отсутствуют какие-либо ссылки на работы по матричной механике и имеется лишь ссылка на диссертацию де Бройля [52], «содержащую много глубоких идей», и на предыдущую статью самого Шрёдингера [58]. Следует отметить, что в конце статьи Шрёдингер говорит о наглядной картине биений для излучающего атома.

Меньше чем через месяц последовало «Второе сообщение» [73] той же серии статей (от 23 февраля), а затем появились «Третье сообщение» [90] (от 10 мая) и «Четвертое сообщение» [97] (от 21 июня); в этих сообщениях содержалось весьма полное изложение волновой механики. А в промежутке были опубликованы очень важная статья [78] (о связи матричной и волновой механики; см. ниже, с. 695) и статья [89] о непрерывном переходе от микро- к макромеханике для гармонического осциллятора (в начале 1927 г. все первые шесть статей Шрёдингера по волновой механике вышли отдельным сборником [272], в котором в качестве введения Шрёдингер поместил весьма интересное «Систематизированное (Sachlich geordnete) изложение содержания»).

Отметим, что в статье [89] рассматривались волновые пакеты, которые для гармонического осциллятора не расплываются. Отметим также, что вопрос о минимальных свойствах этих пакетов был рассмотрен Марковым в работе [175].

В фундаментальном втором сообщении [73] подробно рассмотрена оптико-механическая аналогия Гамильтона и произведено сравнение «геометрической» и «волновой» механики, что позволяет дать обоснование волнового уравнения (34). В добавление к первому сообщению во втором разобран ряд важных примеров — осциллятор, ротатор с закрепленной осью, твердый ротатор со свободной осью и упругий ротатор (двухатомная молекула). Все эти задачи решаются естественным и очень красивым образом, и можно понять то большое впечатление, которое произвели результаты Шрёдингера (для нас давно уже ставшие классическими). В третьем сообщении [90] Шрёдингер развил теорию возмущений (не зависящих от времени) и весьма успешно ее применил к эффекту Штарка. Работа содержит и математическое приложение, посвященное обобщенным полиномам Лагерра и ортогональным функциям, определенным интегралам произведений двух ортогональных функций Лагерра и интегралам с шаровыми функциями. Если третье сообщение носит более математический характер, то в четвертом сообщении [97] впервые дано волновое уравнение, зависящее от времени (*нестационарное уравнение Шрёдингера*), рассмотрена теория возмущений, зависящих от времени, и на этой основе теория дисперсии, произведен учет непрерывного энергетического спектра, обсужден случай резонанса, произведено релятивистское обобщение основных уравнений и, наконец, рассмотрен вопрос «О физическом значении полевого скаляра», т. е. волновой функции ψ, причем найдено выражение для плотности тока (см. также статью Ферми [139]). Таким образом, четвертое сообщение содержит целый ряд важных результатов.

Эффективность методов волновой механики очень быстро выявилась, их стали широко применять. Вместе с тем сразу же встало два основных вопроса: первый — о связи между матричной механикой и волновой механикой, второй — о физическом смысле волновой функции.

Результаты конкретных расчетов по волновой механике и по матричной механике оказались во всех случаях совпадающими. Уже во втором

сообщении Шрёдингер дал ссылки на работы [61-64] Гейзенберга, Борна, Иордана, Дирака и писал (см. с. 39 русского перевода статьи [73]): «... По применяемым методам предлагаемая попытка решения проблемы настолько отлична от подхода Гейзенберга, что мне пока не удалось найти звено, связывающее эти два способа. Я совершенно уверен в том, что обе эти попытки не только не будут противоречить друг другу, но даже, наоборот, вследствие полного различия исходных положений и методов окажутся взаимно дополняющими». А в случае гармонического осциллятора Шрёдингер, получив для его уровней формулу $E_n = (2n + 1)\, h\nu_0/2$, содержащую нулевую энергию, отмечает: «Замечательным образом наши квантовые уровни точно равны уровням, полученным по теории Гейзенберга!».

В работе «Об отношении квантовой механики Гейзенберга — Борна — Иордана к моей» от 18 марта 1926 г. [78] Шрёдингеру удалось решить вопрос о связи двух подходов к квантовой механике — алгебраического и аналитического. В ее начале Шрёдингер пишет: «Весьма странно, что обе эти новые квантовые теории совпадают *друг с другом*, в отношении полученных к настоящему времени конкретных результатов, также и в той области, где они отличаются от старой квантовой теории». И далее он говорит: «Ниже будет вскрыта весьма тесная *внутренняя взаимосвязь* гейзенберговской квантовой механики и моей волновой механики. С формально-математической точки зрения ее, пожалуй, можно рассматривать как *тождество* (обеих теорий)». Шрёдингер сопоставляет физическим величинам операторы (независимо от Борна и Винера, работа которых [68] ему еще не была известна), в частности, импульсу p_l — оператор $(h/2\pi i)\, \partial/\partial q_l$, и рассматривает в операторном виде уравнение

$$-[H, \psi] + E\psi = 0 \qquad (35)$$

для функции ψ от координат, о котором он пишет, что оно «*идентично с волновым уравнением, лежащим в основе моей волновой механики*». С помощью волновых функций находятся матричные элементы. В конце своей статьи Шрёдингер производит сравнение обеих теорий и рассматривает «перспективы классического понимания интенсивности и поляризации испускаемого излучения» как результата биений электрического момента атома (см. [78], формула (38); с. 74 русского перевода).

После данной работы Шрёдингера стало ясно, что имеется единая теория, квантовая механика, и что матричная механика и волновая механика представляют лишь разные формы этой единой теории.

К тому же результаты независимо от Шрёдингера пришли Паули и молодой американский физик-теоретик Эккарт. В статье от 31 мая 1926 г. [92] Эккарт рассмотрел связь волновой механики и матричной механики для гармонического осциллятора, а в статье [93] от 7 июня 1926 г.— в более общем виде (в ней Эккарт в примечании ссылается и на статью Шрёдингера [78]). Паули изложил результаты своего анализа связи между волновой механикой и матричной механикой в очень интересном письме Иордану от 12 апреля 1926 г., опубликованном лишь в 1973 г. в статье Ван-дер-Вердена [320] в сборнике [316]. Эти результаты Паули не стал печатать, по-видимому в связи с тем, что они в основном совпали с результатами Шрёдингера в статье [78], вышедшей в начале мая 1926 г.

Отметим, что Ван-дер-Верден, математик, широко известный своими работами по высшей алгебре (и являющийся автором монографии по применению теории групп в квантовой механике [288] и работ по спинорному анализу), много занимался и вопросами истории квантовой физики (см. статью «Принцип запрета и спин» в сборнике [297] и вводную историческую статью в сборнике оригинальных работ [308]). Статья Ван-дер-Вердена [320] представляет доклад, сделанный им на симпозиуме в Триесте в сентябре 1972 г., «О развитии представлений физика о природе в двадцатом веке» (посвященном 70-летию Дирака; на этом симпозиуме выступал сам Дирак [317], Гейзенберг [318], Иордан [319], Вигнер [321] и ряд других крупных физиков-теоретиков). Ван-дер-Верден подробно рассмотрел, как происходил переход от матричной механики к единой квантовой механике, привел текст письма Паули от 12 апреля 1926 г., адресованного Иордану, и, в частности, подчеркнул роль работы Ланцоша [67], показав, что из волнового

уравнения Шрёдингера вытекает интегральное уравнение с ядром, собственные значения которого представляют обратные значения энергии W_i (деленные на h), как это и получил Ланцош (см. выше, с. 693). Ван-дер-Верден указал, что Шрёдингер ошибся, когда в примечании к статье [78] (см. с. 73 русского перевода этой работы) писал об отличии функции Грина своего волнового уравнения от симметричного ядра Ланцоша. Эта функция Грина имеет в качестве собственных значений h/W_i, а не W_i/h, как полагал Шрёдингер. На докладе Ван-дер-Вердена присутствовал и Ланцош (которому в 1972 г. было уже 79 лет), о чем Ван-дер-Верден узнал лишь во время доклада. Аудитория тепло приветствовала Ланцоша, работа которого [67] сыграла определенную роль в становлении квантовой механики, хотя, разумеется, решающее значение в разработке аналитического аппарата квантовой механики имели работы Шрёдингера, в которых был найден явный вид гамильтониана.

В середине 1926 г., когда стала развиваться уже единая теория Борном было выполнено фундаментальное исследование по теории столкновений, в котором был решен и важнейший вопрос о физическом смысле волновой функции — было дано ее вероятностное истолкование (за что в 1954 г. Борн получил Нобелевскую премию).

Необходимо подчеркнуть, что вопрос об истолковании волновой функции и вообще математического аппарата квантовой механики был еще неясен (см., например, [108]). В то время как Гейзенберг шел по пути отказа от наглядных представлений (и лишь впоследствии выяснил пределы применимости понятий координаты и импульса в работе [177] о соотношениях неопределенностей, см. ниже с. 698), Шрёдингер стремился, как уже указывалось выше, дать наглядное истолкование функции ψ, рассматривая $e\psi\psi^*$ как плотность заряда и объясняя излучение изменением дипольного момента в результате биений собственных колебаний, соответствующих двум стационарным состояниям, между которыми происходит переход Во втором сообщении он писал (см. с. 39 русского перевода статьи [73]): «Мне лично особенно нравится приведенное в конце предыдущей статьи *) истолкование испускаемых частот как «биений», причем я думаю, что таким образом будет получено также наглядное истолкование формул для интенсивности». В примечании к статье [78] он говорил (см. с. 56 русского перевода),— указывая, что «моя теория была стимулирована работой Л. де Бройля [52] и короткими, но в высшей степени прозорливыми замечаниями Эйнштейна [53]»,— о теории Гейзенберга следующее: «Конечно, я знал о его теории, однако меня отпугивали, если не сказать отталкивали, казавшиеся мне очень трудными методы трансцендентной алгебры и отсутствие наглядности». Правда Шрёдингер понимал, что «ψ-функция в общем случае не может и не должна быть прямо интерпретирована в трехмерном пространстве, как это сделано в случае одноэлектронной задачи, так как она в общем случае есть функция в конфигурационном пространстве, а не в действительном пространстве» (см. с. 135 русского перевода статьи [97]).

Отметим, что в дальнейшем были сделаны и не имевшие успеха попытки механического истолкования уравнения Шрёдингера (см. об этом в последней монографии Джеммера [322]), в частности — Маделунгом [130].

Отметим также, что де Бройль, который очень высоко оценил [115] работы Шрёдингера, пытался построить «теорию двойного решения» [179], рассматривая частицы как особые точки при волновом процессе.

Физическая интерпретация волновой функции, предложенная Борном в предварительном сообщении от 25 июня 1926 г., опубликованном в в «Zeitschrift für Physik» [99] **), и развитая им в статье от 27 июля 1926 г.,

*) См. данный выпуск, с. 631.

**) Как правило, в «Zeitschrift für Physik» не публиковались предварительные сообщения. В примечании к [99] Борн писал: «Это сообщение первоначально предназначалось для «Naturwissenschaften», однако не смогло быть там принято из-за *недостатка*

напечатанной в том журнале [107] *), опиралась на идеи Эйнштейна о связи волнового поля с квантами света, на представление о «поле-призраке» (см. с. 633, а также выше, с. 687). Борн рассматривает волновую функцию, зависящую от координат всех частиц систем и от времени, как «волну вероятности», которая распространяется в соответствии с уравнением Шрёдингера. Борн дает следующую очень важную формулировку (см. с. 633): « Это представление можно было бы обобщить следующим, хотя и несколько парадоксальным образом: движение частиц следует вероятностным законам, но сама вероятность распространяется в соответствии с законом причинности». А в примечании о законе причинности Борн говорит: «Это значит, что знание состояния во всех точках в некоторый момент времени определяет распределение состояний для всех последующих времен». Положение, сформулированное Борном, стало для физиков привычным и правильно отражает специфику законов микроскопических явлений. Оно находится в согласии с диалектико-материалистическим пониманием причинности, соотношения динамической и статистической закономерностей.

Борновское вероятностное истолкование волновой функции сыграло очень важную роль в дальнейшем развитии квантовой механики, явилось основой правильной физической интереретации при разработке обобщенного математического аппарата квантовой механики как единой и последовательной теории микроскопических явлений.

Отметим, что де Бройль в статье [166] согласился с вероятностной интерпретацией волновой функции Борном и в течение ряда лет ее придерживался. Однако позже, уже в 50-х годах, он от нее отказался и стал поддерживать недостаточно обоснованные точки зрения, в частности развиваемые Вижье (см. высказывания де Бройля в книге [299]).

Развитию общей теории было, начиная с середины 1926 г, посвящено значительное количество работ.

К ним относятся работа Дирака «О квантовой алгебре» [112] и его же работы «О теории квантовой механики» [117], работы Гейзенберга «Задача многих тел и резонанс в квантовой механике» [94, 157] и «Флуктуационные явления и квантовая механика» [135], работа Борна «Адиабатический принцип в квантовой механике» [128], работы Иордана «О канонических преобразованиях в квантовой механике» [83, 104] и «О квантовомеханическом представлении квантовых скачков» [144], работы Лондона «О преобразованиях Якоби в квантовой механике» [91] и «Угловые переменные и канонические преобразования в волновой механике» [124], работа Ферми и Персико «Адиабатический принцип и понятие живой силы в новой квантовой механике» [136], работа Клейна «Электродинамика и волновая механика с точки зрения принципа соответствия» [149].

В весьма общей форме теория была развита в работах Иордана «О новом обосновании квантовой механики» [155, 202] и особенно в работе Дирака от 2 декабря 1926 г. «Физическая интерпретация квантовой динамики» [148]. В этих работах была рассмотрена теория преобразований, причем в работе Дирака была впервые введена его знаменитая δ-функция, что позволило представить результаты в очень красивой форме и, в частности, естественным образом получить уравнение Шрёдингера как уравнение для функций преобразования (уравнение Шрёдингера рассматривалось Дираком уже раньше в работе [117]). Как Дирак, так и Иордан при физической интерпретации математического аппарата исходили из вероятностных представлений Борна (отметим, что Иордан в статье [155], ссылаясь на работу Паули [152], говорит о функциях преобразования как об *амплитудах вероят-*

места (курсув мой.— *М. Е.*). Я полагаю, что его публикация здесь не покажется излишней». Редакция «Zeitschrift für Physik» проявила большее понимание и опубликовала предварительное сообщение Борна в номере от 10 июля, т. е. через полмесяца после его получения.

*) См. данный выпуск, с. 632.

ности). Фундаментальная работа Дирака легла в основу его широко известной книги «Принципы квантовой механики» [282], которая вышла первым изданием в 1930 г.

Различным вопросам, связанным с вероятностным истолкованием квантовой механики, были посвящены работы Иордана [170, 226а], Бека [188а], Ван Флека [249].

Математические методы квантовой механики получили дальнейшее развитие в работе Гильберта, фон Неймана и Нордгейма «Об основах квантовой механики» от 6 апреля 1927 г. [183], опубликованной в «Mathematische Annalen». В этой работе, возникшей в результате чтения Гильбертом зимой 1926—1927 г. лекций по новейшему развитию квантовой механики, дано последовательное построение теории с введением амплитуд вероятности, с применением теории линейных операторов (в гильбертовом пространстве) и использованием условий вещественности. Дальнейшее развитие данное направление исследований получило в работах фон Неймана от 25 мая [196] и 11 ноября 1927 г. [234, 235], опубликованных в «Göttingen Nachrichten». Последняя из этих работ была посвящена «Термодинамике квантовомеханических совокупностей», и в ней были рассмотрены смешанные ансамбли. Впоследствии фон Нейман обобщил свои результаты в известной монографии «Математические основания квантовой механики» [287], опубликованной в 1932 г.

Весьма важным заключительным этапом становления нерелятивистской квантовой механики явились установление Гейзенбергом *соотношений неопределенностей* и формулировка Бором *принципа дополнительности*. Соотношениям неопределенностей была посвящена статья Гейзенберга от 23 марта 1927 г. «О наглядном содержании квантовотеоретической кинематики и механики», опубликованная в «Zeitschrift für Physik» [177] *). Эта статья весьма богата содержанием. В ней сформулированы соотношения неопределенностей для координаты и импульса, а также для энергии и времени (см. с. 654, формула (1), и с. 657, формула (2)), проведено математическое рассмотрение соотношений неопределенностей на основе теории Дирака — Иордана и подробно проанализирован мысленный эксперимент с атомным пучком, последовательно проходящим через два неоднородных магнитных поля, разобран вопрос о переходе от микро- к макромеханике также на основе теории Дирака — Иордана, обсуждены другие мысленные эксперименты и, наконец, рассмотрены вопросы, связанные с соотношением неопределенностей для энергии и времени. Результаты данной работы Гейзенберг обсуждал с Бором и учел сделанные Бором замечания.

Важность работы Гейзенберга была быстро оценена физиками, и соотношения неопределенностей стали одной из основ квантовой механики, отражающей физическую сущность микроскопических явлений, для которых классические понятия имеют лишь ограниченную применимость.

Из работ, в которых разбирались вопросы, связанные с соотношениями неопределенностей, можно отметить выполненную в Копенгагене работу Кеннарда от 17 июля 1927 г. [211] «О квантовой механике простых типов движений», в которой волновые пакеты рассматриваются как «вероятностные пакеты» (на эту работу ссылался позже Бор в [224]), и работу Ландé [213]. К более поздним работам, в которых применялись соотношения неопределенностей, относятся работа Кеннарда [244] «Замечание о принципе неопределенности Гейзенберга» (см. также его работу [256]) и работы Руарка [261, 262].

---

*) См. данный выпуск, с. 651. О развитии идей Гейзенберга см. подробнее в статье Мехры (с. 719), а также в книге Гейзенберга [310].

Весьма глубокое рассмотрение принципиальных вопросов квантовой механики дал Бор в обобщающем докладе, сделанном им в сентябре 1927 г. в Комо (Италия) на международном конгрессе физиков, посвященном памяти Вольта, и затем в Брюсселе в октябре того же года на пятом Сольвеевском конгрессе. Доклад был опубликован весной 1928 г. в журналах «Nature» (по-английски) и «Naturwissenschaften» (по-немецки) [224]. В этом докладе («Квантовый постулат и новейшее развитие атомной теории») Бор выдвинул концепцию дополнительности. На Сольвеевском конгрессе началась знаменитая дискуссия Бора с Эйнштейном, которая продолжалась почти тридцать лет, до смерти Эйнштейна (см. об этой дискуссии, в частности, книгу Джеммера [322]).

5. ВАЖНЕЙШИЕ НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ, ВОЗНИКШИЕ В ПЕРИОД ЕЕ СТАНОВЛЕНИЯ

В период становления квантовой механики возникли различные направления ее обобщения, развития ее методов и их приложений, опирающиеся на созданный в данный период математический аппарат и на его физическую интерпретацию.

С самого начала встала *задача релятивистского обобщения квантовой механики*, законы которой удалось установить в нерелятивистском приближении, как это было рассмотрено выше. Отметим, что Шрёдингер первоначально пытался решить релятивистскую задачу об атоме водорода (см., например, [327], с. 374), опираясь на четырехмерную формулировку корпускулярно-волнового дуализма де Бройля, но это ему не удалось; лишь затем он пришел к рассмотрению нерелятивистского случая и получил свое волновое уравнение в виде (34) (см. с. 693). Естественно было искать релятивистское волновое уравнение для частицы в виде дифференциального уравнения второго порядка относительно координат и времени. Первым опубликовал такое уравнение (исходя из пятимерной формулировки теории относительности) Клейн в работе от 28 апреля 1926 г. [87] (он ссылался на работы Шрёдингера [71] и [73]). Это уравнение содержит, наряду со вторыми производными по координатам, вторую производную по времени $\partial^2/\partial t^2$. Оно затем было независимо получено в ряде работ — Фоком [95, 114], Шрёдингером (в четвертом сообщении [97]), Де Дондером и Ван-ден-Дунгеном [103], де Бройлем [111], Кударом [120], Гордоном [125] (в работе, посвященной теории эффекта Комптона). Это уравнение часто называют уравнением Клейна — Гордона; правильнее его называть уравнением Клейна — Фока. Получил его уже в апреле 1926 г. также и Паули, который привел его в письме Иордану (см. выше, с. 695; подробнее — в [320]), но не опубликовал, как и свои результаты по связи волновой механики с матричной. Простой способ получения уравнения Клейна — Фока был предложен Иваненко и Ландау в работе от 8 октября [127] (это была первая работа восемнадцатилетнего Ландау по квантовой механике); оно рассматривалось в работах Эренфеста и Уленбека [122а], Гамова и Иваненко [123], Шрёдингера [150], де Бройля [158], Бейтмана [178] (см. также работы Лондона [171], Винера и Струика [180]). Однако данное релятивистское уравнение второго порядка для скалярной волновой функции ψ оказалось неприменимым к электрону; мы знаем теперь, что оно применимо к частицам, не обладающим спином.

Спин электрона, магнитное взаимодействие которого с орбитальным моментом импульса электрона (спин-орбитальное взаимодействие) имеет релятивистскую природу, феноменологически учитывался уже в работе Паули и Иордана по аномальному эффекту Зеемана [75] и в других работах (например Бриллюэна [154], Рихтера [191], Розенфельда [207]). Весной 1927 г.

Паули в важной работе от 3 мая «К квантовой механике магнитного электрона» [188] удалось включить спин в нерелятивистскую квантовую механику путем введения двухкомпонентных волновых функций и соответствующих двумерных матриц (широко применяемых и в настоящее время *матриц Паули*). В конце 1927 г. фон Нейман и Вигнер [243] разобрали, исходя из работы Паули, эту задачу, применяя методы теории групп (см. ниже, стр. 703). Несколько другой подход предложил летом 1927 г. Дарвин [214] — замену скалярной функции ψ векторной, а Френкель предложил заменить скалярную функцию тензорной [255].

Решающего успеха для электрона как частицы, обладающей спином, равным 1/2, достиг в начале 1928 г. Дирак в знаменитых работах (от 2 января и 2 февраля) «Квантовая теория электрона» [247, 254]. Дирак исходил из требования, что релятивистское волновое уравнение электрона должно быть линейным относительно энергии, т. е. относительно $\partial/\partial t$, как и нерелятивистское уравнение Шрёдингера. Удовлетворить этому требованию с соблюдением релятивистской инвариантности оказалось возможным, заменив уравнение второго порядка уравнением первого порядка как относительно оператора $p_0 = ih\,\partial/c\,\partial t$, так и относительно операторов импульса $p_r = ih\,\partial/\partial q_r$ $(r = 1, 2, 3)$:

$$(p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta)\,\psi = 0. \tag{36}$$

Подчинив в этом *релятивистском волновом уравнении* не зависящие от времени и координат операторы α_1, α_2, α_3, β $(\beta^2 = m^2c^2)$ определенным перестановочным условиям и введя вместо двумерных матриц Паули четырехмерные матрицы (что соответствует четырехкомпонентным волновым функциям вместо двухкомпонентных), Дирак показал, что из его уравнения вытекает существование спина электрона и спин-орбитальное взаимодействие, правильно получается тонкая структура уровней энергии атома водорода. Это было весьма важным достижением Дирака, которое сразу было признано, и начали появляться статьи, посвященные исследованию и применениям уравнения Дирака. К февралю 1928 г. относится статья Гордона [257], а к марту 1928 г.— статьи Дарвина [258], Иваненко и Ландау [260], фон Неймана [264], Ландé [267]. Не останавливаясь на последующих работах, основанных на уравнении Дирака (см. о них в сборниках [314, 316], а также в сборнике [297]), отметим, что фундаментальное значение этого уравнения особенно выявилось в дальнейшем, когда было показано (в частности, самим Дираком в его «теории дырок»), что из уравнения Дирака вытекает возможность существования античастиц, рождения и аннигиляции пар, а затем такие античастицы были открыты (начиная с открытия позитрона в 1932 г.).

Очень существенным было установление *связи квантовых статистик с квантовой механикой систем, состоящих из одинаковых частиц*. Летом 1926 г. Гейзенберг в работе «Задача многих тел и резонанс в квантовой механике» [94] и Дирак в работе «О теории квантовой механики» [117] (уже упоминавшихся выше, см. с. 697) независимо показали, что состояния системы, состоящей из одинаковых неразличимых частиц, разделяются на симметричные и антисимметричные относительно перестановок двух таких частиц. К этому времени уже была показана идентичность волновой механики и матричной механики и как Гейзенберг, так и Дирак вводили волновую функцию системы электронов в виде произведения волновых функций отдельных частиц (при пренебрежении взаимодействиями) и рассматривали суммы таких произведений. Для двух электронов в состояниях m и n Дирак записывает полную волновую функцию в виде

$$\psi_{mn} = a_{mn}\psi_m(1)\,\psi_n(2) + b_{mn}\psi_m(2)\,\psi_n(1) \tag{37}$$

и указывает, что осуществляется либо случай симметричных состояний, $a_{mn} = b_{mn}$, либо случай антисимметричных состояний, $a_{mn} = -b_{mn}$ (аналогичные выражения выписывает и Гейзенберг). Случай симметричных состояний соответствует статистике Бозе — Эйнштейна, а случай антисимметричных состояний — статистике, при которой удовлетворяется принцип Паули, т. е. статистике, предложенной незадолго перед тем Ферми, к которой Гейзенберг и Дирак пришли независимо (в работах [94, 117] нет ссылок на работу Ферми [59]). Дирак подробно разобрал вопрос о статистике антисимметричных состояний, и эту статистику вскоре стали называть статистикой Ферми — Дирака. В дальнейшем вопрос о квантовых статистиках с точки зрения квантовой механики с введением волновых функций, симметричных и антисимметричных относительно перестановок одинаковых частиц, разбирался в работах Фаулера [133], Эренфеста и Уленбека [151, 164], Иваненко и Ландау [169]. Отметим, что позже статистика Ферми — Дирака была весьма успешно применена к электронам в металле Зоммерфельдом [241] и Френкелем [255а, 268].

В своей работе [117] Дирак подчеркивал, что «решение с симметричными собственными функциями должно быть справедливо для световых квантов, поскольку статистическая механика Бозе — Эйнштейна, как известно, приводит к закону Планка для излучения черного тела». Вопросы теории излучения очень интересовали Дирака, он не удовлетворялся полуклассической теорией излучения (которая рассматривалась, в частности, в работах Шрёдингера [97], Слэйтера [146, 165], Бека [172], Ландé [174], Ферми [187]). В фундаментальной работе от 2 февраля 1927 г. «Квантовая теория испускания и поглощения излучения» [167], выполненной в Копенгагене и представленной Бором в «Proceedings of the Royal Society», Дирак разработал основы *квантовой теории излучения*. Ему удалось найти гамильтониан для единой системы, состоящей из атома и поля излучения. К излучению он впервые применил метод *вторичного квантования*, исходя из перестановочных соотношений для динамических переменных, описывающих свободное поле излучения. При этом спонтанное испускание и вынужденное испускание описываются с единой точки зрения. В следующей работе (от 4 апреля 1927 г.) Дирак рассмотрел и вопросы теории дисперсии [182].

В работах Дирака по теории излучения органически сочетались корпускулярные и волновые представления, и с этих работ началось развитие квантовой электродинамики и вообще теории квантованных полей (см. обзор Вентцеля [298]). Отметим, что применение метода вторичного квантования для системы микрочастиц, подчиняющихся статистике Бозе — Эйнштейна, было рассмотрено в работе Иордана и Клейна [226], а для системы частиц, подчиняющихся статистике Ферми — Дирака,— в работах Иордана [210], Иордана и Вигнера [251]. Отметим также, что лишь впоследствии выяснилось и было обосновано в работах Паули (см. [297]), что статистике Бозе — Эйнштейна подчиняются микрочастицы с целым спином (включая нуль), а статистике Ферми — Дирака — частицы с полуцелым спином.

Вопросам теории излучения было в течение 1927 г. и начале 1928 г. посвящено ряд работ, в том числе работы Иордана [205], Горовица [225], Кронига и Крамерса [263].

Специально отметим работу Ландау от 21 июля 1927 г. «Проблема затухания в квантовой механике» [212], в которой впервые было введено очень важное понятие *матрицы плотности*, и работу Иордана и Паули от 7 декабря 1927 г. «К квантовой электродинамике свободных от зарядов полей» [237], которая явилась развитием основополагающей работы Дирака [167] в отношении учета релятивистской инвариантности. Упомянем также работы Фюса [194] и Оппенгеймера [231].

Весьма существенными были применения квантовой механики для решения разнообразных задач *теории атомов* и *теории молекул.*

Много работ было посвящено теории атома водорода. К ним относятся работа Эккарта «Спектр водорода в новой квантовой механике» [106], работы по интенсивностям в спектре водорода (включая теорию интенсивностей в сплошном спектре) — Лондона [116], Оппенгеймера [132, 160], Сугиуры [162], Слэка [242a], работы по эффекту Штарка и эффекту Зеемана — Валлера [98], Эпштейна [113, 126], Слэка [159], Руарка [236].

Очень важной была работа Гейзенберга от 24 июля 1926 г. «О спектрах атомных систем с двумя электронами» [109], в которой были рассмотрены, исходя из симметрии волновых функций, уровни энергии и спектры парагелия и ортогелия. Атому гелия (и Li^+) были также посвящены работы Слэйтера [186], Сугиуры [197], Кельнера [201, 206], Хиллерааса [266] (который вариационным методом с большой точностью рассчитал энергию ионизации этого атома), Джейн Дьюи [119,215] (по интенсивностям при эффекте Штарка, выполненную в Копенгагене). Отдельным вопросам теории сложных атомов были посвящены работы Полинга [131] и Унзольда [156]. Разработкой общих методов расчета сложных атомов потом стали заниматься Слэйтер в США и Хартри в Англии. К концу 1927 г. относится работа Слэйтера «Центральные поля и ридберговские формулы в квантовой механике» [245]. Как известно, Хартри разработал свой метод самосогласованного поля, который затем был обобщен (в 1930 г.) Фоком и получил название *метода Хартри — Фока.*

Успешно развивались и применения квантовой механики к молекулам. Теории вращательных и колебательных уровней энергии и спектров молекул были посвящены работы Фюса [85, 105], Рейхе [118] и Рademахера и Рейхе [146a], Кронига и Раби [134], Ландау («К теории спектров двухатомных молекул») [138], Витмера [163], Кондона [217]. Фундаментальное значение имела работа Борна и Оппенгеймера от 28 августа 1927 г. «К квантовой теории молекул» [219], в которой было обосновано (путем разложения по степеням параметра $(m/M)^{1/4}$, где m — масса электрона, M — порядка массы ядер) разделение энергии молекулы на электронную, колебательную и вращательную энергии. Вопросы интерпретации молекулярных спектров были подробно разобраны в серии работ Хунда [143, 168, 200]. Свойства симметрии уровней энергии молекул были рассмотрены Гейзенбергом во второй части работы «Задача многих тел и резонанс» [157] и в работе Хунда [199]. Вопросам молекулярных спектров были посвящены и более поздние работы Хультена [233] и Кронига [238]. Важное значение имела работа Кондона [176], который рассмотрел связь электронного и колебательного движений в двухатомных молекулах и дал квантовомеханическую интерпретацию принципа сохранения расстояния между ядрами при электронных переходах, ранее сформулированного Франком и который теперь называют *принципом Франка — Кондона.*

Квантовомеханическому расчету нормального состояния простейшей молекулы — молекулярного иона водорода H_2^+ — были посвящены работы Буррау [143a], Унзольда [192], Вилсона [242], Горовица и Финкельштейна [252a]. Нормальное состояние молекулы водорода H_2 рассчитывалось Кондоном [184] и Сугиурой [220]. Свойства двух модификаций молекулы водорода — пара- и орто- —были исследованы Деннисоном [203] (см. также [323]).

Очень важной была работа Гейтлера и Лондона от 30 июня 1927 г. «Взаимодействие нейтральных атомов и гомеополярная связь согласно квантовой механике» [209], которая положила начало развитию *квантовой химии.* Вслед за ней появились другие работы по квантовомеханической теории гомеополярной химической связи — Гейтлера [227, 252], Лондона [239], Полинга [259]. Гейтлер также рассмотрел движение электрона в решетке, учитывая ее периодичность [195].

Квантовомеханической *теории диэлектрической постоянной и магнитной проницаемости* были посвящены работы Менсинг и Паули [100], Кронига [101, 122], Ван-Флека [140 171a, 190, 253], Эпштейна [185] и Ванга [232].

Работа Борна [107] по теории столкновений *) (в которой он дал вероятностную интерпретацию волновой функции) явилась началом развития *квантовомеханической теории столкновений*; примененный в этой работе метод рассмотрения столкновений получил название *метода Борна*.

Теории столкновений были посвящены также работы Ферми [129], Дирака [208], Факсена и Хольстмарка [216], Эльзассера [218], Люси Менсинг [223]. Квантовая теория захвата электронов была рассмотрена Оппейнгеймером [246], а теория рассеяния медленных электронов — Хольстмарком [257a].

Особо следует отметить работу Мандельштама и Леонтовича от 15 декабря 1927 г. «К теории уравнения Шрёдингера» [240], в которой было исследовано поведение волновой функции в зависимости от хода потенциала и в которой, по существу дела, содержалась теория прохождения сквозь барьер (см. [304a]). Идея прохождения сквозь барьер была высказана и в работе Нордгейма [239a].

Вопросам теории апериодических движений были посвящены работы Оппенгеймера [221] и Дарвина [230].

Целый ряд работ был посвящен *квантовомеханической теории эффекта Комптона* (позволяющей рассчитывать вероятности рассеяния под разными углами). Первыми были работы Бека [76] и Дирака [88], за ними последовали работы Гордона [125], Шрёдингера [147] (вошедшая во второе издание сборника его работ [272], там помещена также работа [204]), Клейна [149], Вентцеля [181], [198]. *Теории фотоэлектрического эффекта* были посвящены работы Вентцеля [142] и Бека [161].

Для решения разнообразных квантовомеханических задач разрабатывались и применялись различные приближенные методы. Весьма эффективными оказались методы теории возмущений, не зависящих и зависящих от времени (см., например, работы [173, 193, 248, 267a]). Успешно начали применять вариационные методы. Уже в 1926 г. был развит *квазиклассический метод*, независимо предложенный Вентцелем [96], Бриллюэном [102] и Крамерсом [121]. Этот метод, основанный на представлении волновой функции в виде $\psi = \exp(2\pi i S/h)$ и разложении функции S по степеням h, получил названия *метода Вентцеля — Крамерса — Бриллюэна* (сокращенно метода ВКБ). Из него в первом приближении получаются условия Бора—Зоммерфельда для фазовых интегралов и при этом выявляется связь квантовой механики с классической. Данная связь может быть представлена особенно наглядно, если рассматривать зависимость от времени средних значений физических величин, как это показал Эренфест в известной работе от 5 сентября 1927 г. [222]: для средних значений получаются уравнения движения, совпадающие по виду с классическими (*теорема Эренфеста*). О квазиклассическом приближении и соответствии между квантовой механикой и классической см. также работы Дебая [153], Ниссона [250], Эккарта [141, 265], Гамова, Иваненко и Ландау [229]. Заметим, что впоследствии Фейнман разработал метод «интегралов по траекториям», позволяющий очень наглядно сопоставить квантовую механику с классической (см. книгу Р. Фейнмана и А. Хибса «Квантовая механика и интегралы по траекториям» пер. с англ., М., «Мир», 1968).

Очень важными были работы *по применению теории групп в квантовой механике* для рассмотрения свойств симметрии квантовых систем, важность учета которых уже подчеркивалась в начале статьи (см. с. 675). Основополагающими были работы Вигнера от 12 и 26 ноября 1926 г.

*) См. данный выпуск, с. 632.

«О некомбинирующих термах в новой квантовой механике» (части I и II) [137, 145] и работа Вейля от 13 октября 1927 г. «Квантовая механика и теория групп» [228], которая легла в основу его монографии под тем же названием [277]. Отметим также работу Вигнера [189].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итоги процесса становления квантовой механики как новой науки нашли свое отражение в многочисленных обобщающих работах, сперва в обзорах и сборниках, а затем в монографиях и учебниках. В них излагался новый математический аппарат квантовой теории, давалась его физическая интерпретация, описывались методы и результаты решения разнообразных задач физики микроскопических явлений.

Уже во второй половине 1926 г. появился обзор Гейзенберга [270] по квантовой механике в «Naturwissenschaffen», в конце года — обобщающая статья Шрёдингера [271] в «Physical Review», а в начале 1927 г. в «Naturwissenschaften» был напечатан обзор Борна [273] «Квантовая механика и статистика» и вышел в виде книги сборник статей Шрёдингера [272] (см. выше, с. 692). Отметим, что переводы обзоров [270, 271] были быстро опубликованы в УФН, а в начале 1927 г. в Ленинграде вышел сборник [274] «Основания новой квантовой механики». В нем были помещены статьи П. С. Тартаковского «Затруднения теории квантов до «новой квантовой механики», Г. А. Гринберга «Основы новой квантовой теории Гейзенберга — Борна», Н. Н. Андреева «Аналогия между механикой и оптикой», В. Р. Бурсиана «Волновая механика Шрёдингера», В. К. Фредерикса «Теория Шрёдингера и общая теория относительности», Б. Н. Финкельштейна «Квантовая механика и явление Комптона» и В. А. Фока «Математический аппарат теории Шрёдингера». В предисловии к сборнику его редактор А. Ф. Иоффе писал о «значении этих новых взглядов, как новой эпохи, открывающейся в физике».

В 1928 г. вышли сборник избранных работ де Бройля и Бриллюэна [276] и второе дополненное издание сборника работ Шрёдингера [272]. Появились первые монографии по квантовой механике, среди них —«Волновая механика» де Бройля [275] (быстро переведенная на другие языки) и фундаментальная книга Вейля «Теория групп и квантовая механика» [277].

В 1929 г. вышли книга Зоммерфельда «Строение атома и спектральные линии. Волномеханический дополнительный том» [279] (переведенная затем на русский язык под названием «Волновая механика») и «Введение в волновую механику» Я. И. Френкеля [280] (на немецком языке; это была первая книга советского ученого по квантовой механике). Очень важные монографии появились в 1930 г.: «Физические принципы квантовой теории» Гейзенберга [281] и «Принципы квантовой механики» Дирака [282] — книга, непревзойденная по стройности и красоте изложения, выдержавшая ряд изданий и до сих пор остающаяся настольной для каждого физика-теоретика.

В 1930 г. были также опубликованы «Элементарная квантовая механика» Борна и Иордана [283] («элементарность» которой состояла в применении исключительно алгебраического аппарата; авторы предполагали написать том с изложением шрёдингеровского аналитического аппарата, но не сделали этого) и «Введение в волновую механику» де Бройля [284]. В 1931 г. вышла монография Вигнера по применению теории групп в квантовой механике [285]; той же теме была посвящена появившаяся в 1932 г. монография Ван-дер-Вердена [288]. В 1932 г. опубликовали свои книги В. А. Фок [286] («Начала квантовой механики») и фон Нейман [287] («Математические основания квантовой механики», о которых уже упоминалось

на с. 698). В 1933 г. появились фундаментальный обзор Паули [289] в «Handbuch der Physik» («Общие принципы квантовой механики)» и первая часть [290] «Волновой механики» Я. И. Френкеля. Вторая ее часть [291] вышла в 1934 г. В 1934 г. была опубликована и книга де Бройля [292] «Магнитный электрон». В перечисленных монографиях и ряде других, опубликованных в начале 30-х годов, новая наука — квантовая механика — излагалась с большой полнотой, и в них нашли отражение основополагающие результаты, полученные в период ее становления.

Уже с 1927 г. начали читать циклы лекций по квантовой механике, первые курсы — в университетах и других высших учебных заведениях; многие монографии из перечисленных выше были написаны на основе прочитанных лекций. В Советском Союзе первые курсы по квантовой механике читали в Ленинграде в Политехническом институте В. А. Фок и Я. И. Френкель с осени 1928 г. Квантовая механика, как важный раздел физической науки, стала органической частью образования физиков, не только теоретиков, но и экспериментаторов, а в дальнейшем и образования представителей других специальностей, в первую очередь смежных.

Велико значение квантовой механики как одной из отраслей современного естествознания, положенных в ее основу идей, и для формирования диалектико-материалистического мировоззрения.

Современная квантовая теория элементарных частиц и процессов при высоких энергиях в своем развитии опирается на родившуюся 50 лет тому назад квантовую механику как неотъемлемую часть физики микроскопических явлений.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина, Минск

ЛИТЕРАТУРА

Ссылки на литературу систематизированы по разделам и по годам публикации, а в основном разделе, посвященном периоду становления квантовой механики, оригинальные статьи расположены по датам их поступления в редакции журналов (для этого периода в отдельный раздел выделены ссылки на обобщающие статьи, монографии и сборники). Для работ, опубликованных на иностранных языках, в скобках указаны имеющиеся русские переводы, причем в сокращенном виде приведены ссылки (автор, том, страницы) на следующие собрания научных трудов и сборники статей, вышедшие в издательстве «Наука»:

Эрнест Резерфорд, Избранные научные труды. Строение атома и искусственное превращение элементов, М., 1972;

Макс Планк, Избранные труды, М., 1975;

Альберт Эйнштейн, Собрание научных трудов, т. I—IV, М., 1965—1967;

Нильс Бор, Избранные научные труды, т. I—II, М., 1970—1971;

Эрвин Шрёдингер, Избранные труды по квантовой механике, М., 1976;

Энрико Ферми, Научные труды, т. I—II, М., 1971—1972;

Вольфганг Паули, Труды по квантовой теории, М., 1975;

Арнольд Зоммерфельд, Пути познания в физике. Сборник статей, М., 1973;

П. Эренфест, Относительность, кванты, статистика. Сборник статей, М., 1972;

Л. И. Мандельштам, Полное собрание трудов, т. I—V, М., 1947—1955;

Л. Д. Ландау, Собрание трудов, т. I—II, М., 1969;

И. Е. Тамм, Собрание научных трудов, т. I—II, М., 1975;

Я. И. Френкель, Собрание избранных трудов, т. I—III, М.— Л., 1956—1959.

Наиболее полным (хотя и не исчерпывающим) является раздел, содержащий ссылки на оригинальные статьи периода становления квантовой механики. Ссылки на оригинальные статьи по квантовой механике более позднего периода (с апреля 1928 г.) не приводятся; их можно найти в исторических работах, в частности в [297, 306, 314, 316],

[322]. Ссылки на материалы архивов по истории квантовой физики (в частности, на письма участников становления квантовой механики и на записи бесед с ними) имеются в [307].

Развитие квантовых представлений

(Оригинальные статьи и монографии с 1900 по 1926 г.)

1. M. Planck, Über irreversible Strahlungsvorgänge, Ann. d. Phys. **1**, 69—122 (1900) (М. Планк, Труды, 191—233).
2. Lord Rayleigh, Remarks upon the Law of Complete Radiation, Phil. Mag. **49**, 539—540 (1900).
3. M. Planck, Entropie und Temperatur strahlender Wärme, Ann. d. Phys. **1**, 719—737 (1900) (М. Планк, Труды, 234—248).
4. M. Planck, Über eine Verbesserung der Wienschen Spekralgleichung, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **2**, 202—204 (1900) (М. Планк, Труды, 249—250).
5. M. Planck, Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum, ibid., 237—245 (1900) (М. Планк, Труды, 251—257).
6. M. Planck, Über des Gesetz der Energieverteilung im Normalspektrum, Ann. d. Phys. **4**, 553—563 (1901) (М. Планк, Труды, 251—267).
7. M. Planck, Über irreversible Strahlungsvorgänge (Nachtrag), ibid. **6**, 818—831 (1901) (М. Планк, Труды, 271—281).
8. H. A. Lorentz, On the Emission and Absorption by Metals of Rays of Heat of Great Wave-Lengths, Proc. Amsterdam Acad. **5**, 666—685 (1903).
9. J. H. Jeans, On the Partition of Energy between Matter and Aether, Phil. Mag. **10**, 91—98 (1905).
10. A. Einstein, Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt, Ann. d. Phys. **17**, 132—148 (1905) (А. Эйнштейн, Труды, III, 92—107).
11. M. Planck, Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung, Leipzig, Barth, 1906 (2. Aufl., 1913; 3. Aufl., 1919; 4. Aufl. 1921; 5. Aufl., 1923) (М. Планк, Теория теплового излучения, пер. с 5-го нем. изд., М.— Л., 1935).
12. P. Ehrenfest, Zur Planckschen Strahlungstheorie, Phys. Zs. **7**, 528—532 (1906) (П. Эренфест, Статьи, 40—50).
13. A. Einstein, Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme, Ann. d. Phys. **22**, 180—190 (1907) (А. Эйнштейн, Труды, III, 134—143).
14. A. Einstein, Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems, Phys. Zs. **10**, 185—193 (1909) (А. Эйнштейн, Труды, III, 164—179).
15. A. Einstein, Über die Entwicklung unserer Anschauengen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung, ibid., 817—825 (1909) (А. Эйнштейн, Труды, III, 181—195).
16. A. E. Haas, Über die elektrodynamische Bedeutung des Planckschen Strahlungsgesetz und über eine neue Bestimmung des elektrischen Elementarquantums und der Dimensionen des Wasserstoffatoms, Sitzungber. Akad. Wiss. Wien, 2a, **119**, 119—144 (1910).
17. P. Debye, Der Warscheinlichkeitsbegriff in der Theorie der Strahlung, Ann. d. Phys. **33**, 1427—1434 (1910).
18. W. Nernst, Zur Theorie der spezifischen Wärme und über die Anwendung der Lehre von den Energiequanten auf physikalisch-chemische Fragen überhaupt, Zs. Elektrochem. **17**, 265—275 (1911).
19. W. Nernst, F. Lindemann, Spezifische Wärme und Quantentheorie, ibid., 817—827 (1911).
20. M. Planck, Eine neue Strahlungshypothese, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **13**, 138—148 (1911).
21. P. Ehrenfest, Welche Züge der Lichtquantenhypothese spielen in der Theorie der Wärmestrahlung eine wesentliche Rolle?, Ann. d. Phys. **36**, 91—118 (1911) (П. Эренфест, Статьи, 118—145).
22. M. Planck, Die Gesetze der Wärmestrahlung und die Hypothese der elementaren Wirkungsquanten. Vortrag, gehalten auf dem Solway-Kongress, Brüssel, 1911 (М. Планк, Труды, 282—310).
23. A. Einstein, Zum gegenwärtigen Stand des Problems der spezifischen Wärme. Vortrag, gehalten auf dem Solway-Kongress, Brüssel, 1911 (А. Эйнштейн, Труды, III, 277—313).
24. A. Einstein, Thermodynamische Bergründung des photochemisches Äquivalentgesetzes, Ann. d. Phys. **37**, 832—838 (1912) (А. Эйнштейн, Труды, III, 266—271).
25. Niels Bjerrum, Über die ultraroten Absorptionsspektren der Gase, in: W. Nernst Festschrift, Halle, 1912, S. 90—98.

26. W. Nicholson, The Constitution of the Solar Corona. II, Mon. Not. Roy. Astron. Soc. **72**, 677—692 (1912).
27. P. Debye, Zur Theorie der spezifischen Wärmen, Ann. d. Phys. **39**, 789—839 (1912).
28. M. Born, T. von Kármán, Über Schwingungen in Raumgittern, Phys. Zs. **13** 297—309 (1912).
29. M. Born, T. von Kármán, Zur Theorie der spezifischen Wärme, ibid. **14**, 15—19 (1913).
30. N. Bohr, On the Constitution of Atoms and Molecules, Phil. Mag. **26**, 1—25 (part I), 476—502 (part II), 857—875 (part III) (1913) (Н. Бор, Труды, III, 81—148).
31. P. Ehrenfest, Bemerkung betreffs der spezifischen Wärme zweiatomiger Gase, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 451—457 (1913).
32. P. Ehrenfest, A Mechanical Theorem of Boltzmann and Its Relation to the Theory of Energy Quanta, Proc. Amsterdam Acad. **16**, 591—597 (1914) (П. Эренфест, Статьи, 51—57).
33. N. Bohr, Om brintspektret, Fysisk Tidsskraft **12**, 97—114 (1914) (Н. Бор, Труды, 152—167).
34. M. Planck, Eine veränderte Formulierung der Quantenhypothese, Sitzungber. Akad. Wiss. Berl., 918—923 (1914) (М. Планк, Труды, 325—330).
35. P. Ehrenfest, On Adiabatic Changes of a System in Connection with the Quantum Theory, Proc. Amsterdam Acad. **19**, 576—597 (1916).
36. A. Einstein, Strahlungs-Emission und -Absorption nach der Quantentheorie, Verh. Deutsch. Phys. Ges. **18**, 318—323 (1916) (А. Эйнштейн, Труды, III, 386—392).
37. A. Einstein, Zur Quantentheorie der Strahlung, Mitt. d. Phys. Ges. Zürich, Nr. 18, 47—62 (1916) (А. Эйнштейн, Труды, III, 393—406).
38. N. Bohr, On the Quantum Theory of Line-Spectra. Kgl. danske vid. selskab. skr. IV, 1—36 (part I), 37—100 (part II), 101—118 (part III) (1918—1922) (нем. пер. в: Über die Quantentheorie der Linenspektren, Braunschweig, 1923).
39. A. Sommerfeld, Atombau and Spektrallinien, Braunschweig, Viewig, 1919 (2. Aufl., 1921; 3. Aufl., 1922; 4. Aufl., 1924) (А. Зоммерфельд, Строение атома и спектры, пер. с 3-го нем. изд., М.— Л., Госиздат, 1926).
40. N. Bohr, Über die Serienspektra der Elemente, Zs. Phys. **2**, 423—469 (1920) (Н. Бор, Труды, I, 247—284).
41. A. H. Compton, Secondary Radiations Produced by X-rays, Bull. Nat. Res. Council **4** (pt. 2), No. 20 (1922).
42. N. Bohr, Über die Anwendung der Quantentheorie auf den Atombau. I. Grundpostulate der Quantentheorie, Zs. Phys. **13**, 117—165 (1923) (Н. Бор, Труды, I, 482—525).
43. A. H. Compton, A Quantum Theory of the Scattering of X-rays by Light Elements, Phys. Rev. **21**, 483—502 (1923).
44. P. Debye, Zerstreuung von Röntgenstrahlen und Quantentheorie, Phys. Zs. **24**, 161—166 (1923).
45. P. Ehrenfest, Adiabatische Transformationen in der Quantentheorie und ihre Behandlung durch Niels Bohr, Naturwissenschaften **11**, 543—550 (1923) (П. Эренфест, Статьи, 58—75).
46. L. de Broglie, Ondes et quanta, C.R.Ac. Sci. **177**, 507—510 (1923) (УФН **93**, 178—180 (1967)).
47. L. de Broglie, Quanta de lumière, diffraction et interférence, ibid., 548—550 (1923) (УФН **93**, 180—181 (1967)).
48. L. de Broglie, Les quanta, la théorie cinétique des gaz et le principe de Fermat, ibid., 630—632 (1923) (УФН **93**, 182—183 (1967)).
49. L. de Broglie, A Tentative Theory of Light Quanta, Phil. Mag. **47**, 446—458 (1924) (перевод см. в данном выпуске, с. 562).
50. S. N. Bose, Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese, Zs. Phys. **26**, 178—181 (1924) (А. Эйнштейн, Труды, III, 475—478).
51. A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases, Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss., 261—267 (1924) (А. Эйнштейн, Труды, III, 481—488).
52. L. de Broglie, Recherches sur la théorie de quanta, Thèse de doctorat, Paris, Masson et Cie, 1924 (также в: Ann. de Phys. **3**, 22—128 (1925)) (перевод разделов 1—4 в кн. Вариационные принципы механики, М., Физматгиз, 1959, с. 641—668).
53. A. Einstein, Quantentheorie des einatomigen idealen Gases. Zweite Abhandbung, Sitzungber. Preuss. Akad. Wiss., 3—14 (1925) (А. Эйнштейн, Труды, III, 489—502).
54. W. Pauli, Über den Zusammenhang des Abschlusses der Elektronengruppen im Atom mit der Komplexstruktur der Spektren, Zs. Phys. **31**, 765—783 (1925) (В. Паули, Труды, I, 645—660).

55. N. Bohr, Über die Wirkung von Atomen bei Stössen, ibid. **34**, 142—157 (1925) (Н. Бор, Труды, I, 549—562: перевод послесловия см. в данном выпуске, с. 571).
56. M. Born, Vorlesungen über Atommechanik, Bd. 1, Springer, Berlin, 1925 (М. Борн, Лекции по атомной механике, т. 1, пер. с нем., Харьков — Киев, ГНТИУ, 1934).
57. G. Uhlenbeck, S. Goudsmit, Ersetzung der Hypothese vom unmechanischen Zwang durch eine Forderung bezüglich des inneren Verhaltens jedes einzelnen Elektrons, Naturwissenschaften **13**, 953—954 (1925).
57a. G. Uhlenbeck, S. Goudsmit, Spinning Electrons and the Structure of Spectra, Nature **117**, 264—265 (1926).
58. E. Schrödinger, Zur Einsteinsche Gastheorie, Phys. Zs. **27**, 95—101 (1926) (Э. Шрёдингер, Труды, 172—182).
59. E. Fermi, Zur Quantelung des idealen einatomigen Gases, Zs. Phys. **36**, 902—912 (1926) (Э. Ферми, Труды, I, 203—213).
60. W. Pauli, Quantentheorie, in: Handbuch der Physik, Bd. 23, Berlin, Springer, S. 1—278, 1926 (В. Паули, Труды, 7—351).

Становление квантовой механики

(Оригинальные статьи с июля 1925 г. до марта 1928 г.*))

61. W. Heisenberg, Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen, Zs. Phys. **33**, 879—893 (1925) [29 июля] (перевод см. в данном выпуске, с. 574).
62. M. Born, P. Jordan, Zur Quantenmechanik, ibid. **34**, 858—888 (1925) [27 сентября] (перевод см. в данном выпуске, с. 586).
63. P. A. M. Dirac, The Fundamental Equations of Quantum Mechanics, Proc. Roy. Soc. (London) **109**, 642—653 (1925) [7 ноября] (перевод см. в данном выпуске, с. 611).
64. M. Born, W. Heisenberg, P. Jordan, Zur Quantenmechanik. II, Zs. Phys. **35**, 557—615 (1926) [16 ноября 1925].
65. H. A. Kramers, Eenige opmerkingen over de quantuummechanica van Heisenberg, Physica **5**, 369—377 (1925) [ноябрь].
66. W. Heisenberg, Über quantentheoretische Kinematik und Mechanik, Math. Ann. **95**, 683—705 (1926) [21 декабря 1925 г.].
67. K. Lanczos, Über eine feldmässige Darstellung der neuen Quantenmechanik, Zs. Phys. **35**, 812—830 (1926) [22 декабря 1925 г.].
68. M. Born, N. Wiener, Eine neue Formulierung der Quantengesetze für periodische und nichtperiodische Vorgänge, ibid. **36**, 174—187 (1926) [5 января].
69. W. Pauli, Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik, ibid., 336—363 (1926) [17 января].
70. P. A. M. Dirac, Quantum Mechanics and a Preliminary Investigation of the Hydrogen Atom, Proc. Roy. Soc. (London) **110**. 561—579 (1926) [22 января].
71. E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem (Erste Mitteilung), Ann. d. Phys. **79**, 361—376 (1926) [27 января] (Э. Шрёдингер, Труды, 9—20; см. в данном выпуске, с. 621).
72. L. Brillouin, Les spectres de rotation, dans la nouvelle méchanique des quanta, avec le calcule des matrices, C.R. Ac. Sci. **182**, 374—376 (1926) [8 февраля].
73. E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem (Zweite Mitteilung), Ann. d. Phys. **79**, 489—527 (1926) [23 февраля] (Э. Шрёдингер, Труды, 21—50).
74. K. Lanczos, Variationsprinzip und Quantenbedingungen in der neuen Quantenmechanik, Zs. Phys. **36**, 401—409 (1926) [1 марта].
75. W. Heisenberg, P. Jordan, Anwendung der Quantenmechanik auf das Problem der anomalen Zeemaneffekte, ibid. **37**, 263—277 (1926) [16 марта].
76. G. Beck, Comptoneffekt und Quantenmechanik, ibid. **38**, 144—148 (1926) [16 марта].
77. F. London, Energiesatz und Rydbergprinzip in der Quantenmechanik, ibid. **36**, 775—777 (1926) [17 марта].
78. E. Schrödinger, Über das Verhältnis der Heisenberg-Born-Jordanschen Quantenmechanik zu der meinen, Ann. d. Phys. **79**, 734—756 (1926) [18 марта] (Э. Шрёдингер, Труды, 56—74).
79. P. A. M. Dirac, The Elimination of the Nodes in Quantum Mechanics, Proc. Roy. Soc. (London) **111**, 281—305 (1926) [27 марта].

*) Статьи расположены по указанным в квадратных скобках датам поступления в редакции соответствующих журналов (или датам докладов).

80. G. Wentzel, Die mehrfach periodischen Systeme in der Quantenmechanik, Zs. Phys. 37, 80—94 (1926) [27 марта].
81. Lucy Mensing, Die Rotations-Schwingungsbanden nach der Quantenmechanik, ibid. 36, 814—823 (1926) [29 марта].
82. I. Tamm, Zur Quantenmechanik des Rotators, ibid. 37, 685—696 (1926) [23 апреля].
83. P. Jordan, Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik, ibid., 383—386 (1926) [27 апреля].
84. D. Dennison, The Rotation of Molecules, Phys. Rev. 28, 318—333 (1926) [27 апреля].
85. E. Fues, Das Eigenschwingungsspektrum zweiatomiger Moleküle in der Undulationsmechanik, Ann. d. Phys. 80, 367—396 (1926) [27 апреля].
86. K. Lanczos, Über die komplexe Beschaffenheit der quantenmechanischen Matrizen, Zs. Phys. 37, 405—413 (1926) [28 апреля].
87. O. Klein, Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie, ibid., 895—905 (1926) [28 апреля].
88. P. A. M. Dirac, Relativity Quantum Mechanics with an Application to the Compton Scattering, Proc. Roy. Soc. (London) 111, 405—423 (1926) [29 апреля].
89. E. Schrödinger, Der stetige Übergang von der Mikro-zur Makromechanik, Naturwissenschaften 14, 664—666 (1926) [май] (Э. Шрёдингер, Труды, 51—55).
90. E. Schrödinger, Quantisierung als Eigenwertproblem (Dritte Mitteilung), Ann. d. Phys. 80, 437—490 (1926) [10 мая] (Э. Шрёдингер, Труды, 75—115).
91. F. London, Über die Jacobischen Transformationen in der Quantenmechanik, Zs. Phys. 37, 915—925 (1926) [22 мая].
92. C. Eckart, The Solution of the Problem of the Simple Oscillator by a Combination of the Schrcedinger and the Lanczos Theories, Proc. Nat. Ac. Sci. 12, 473—476 (1926) [31 мая].
93. C. Eckart, Operator Calculus and the Solution of the Equations of Quantum Dynamics, Phys. Rev. 28, 711—726 (1926) [7 июня].
94. W. Heisenberg, Mehrkörperprobleme und Resonanz in der Quantenmechanik, Zs. Phys. 38, 411—426 (1926) [11 июня].
95. V. Fock, Zur Schrödingerschen Wellenmechanik, ibid., 242—250 (1926) [11 июня].
96. G. Wentzel, Eine Verallgemeinerung der Quantenbedingungen für die Zwecke der Quantenmechanik, ibid., 518—529 (1926) [18 июня].
97. E. Schrödinger, Quantentisierung als Eigenwertproblem (Vierte Mitteilung), Ann. d. Phys. 81, 109—139 (1926) [21 июня] (Э. Шрёдингер, Труды, 116—138).
98. J. Waller, Der Starkeffekt zweiter Ordnung bei Wasserstoff und die Rydbergkorrektion der Spektra von He und Li^+, Zs. Phys. 38, 635—646 (1926) [21 июня].
99. M. Born, Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge (vorläufige Mitteilung), ibid. 37, 863—867 (1926) [25 июня].
100. L. Mensing, W. Pauli, Über Dielektrizitätskonstante von Dipolgasen nach der Quantenmechanik, Phys. Zs. 27, 509—512 (1926) [25 июня].
101. R. Kronig, The Dielectric Constant of Diatomic Dipole-Gases on the New Quantum Mechanics, Proc. Nat. Ac. Sci. 12, 488—493 (1926) [3 июля].
102. L. Brillouin, La méchanique ondulatoire de Schrödinger; une methode général de résolution par approximations successives, C.R. Ac. Sci. 183, 24—26 (1926) [5 июля].
103. T. De Donder, H. van den Dungen, La quantification dédnite de la graphique einsteinienne, ibid., 22—24 (1926) [5 июля].
104. P. Jordan, Über kanonische Transformationen in der Quantenmechanik. II, Zs. Phys. 38, 513—517 (1926) [6 июля].
105. E. Fues, Zur Intensität der Bandenlinien und des Affinitätsspektrums zweiatomiger Moleküle, Ann. d. Phys. 81, 281—313 (1926) [9 июля].
106. C. Eckart, The Hydrogen Spectrum in the New Quantum Theory, Phys. Rev. 28, 927—935 (1926) [17 июля].
107. M. Born, Quantenmechanik der Stossvorgänge, Zs. Phys. 38, 803—827 (1926) [21 июля] (перевод см. в данном выпуске, с. 632).
108. N. von Raschevsky, Einige Bemerkungen zur Heisenbergschen Quantenmechanik, ibid. 39, 153—158 (1926) [21 июля].
109. W. Heisenberg, Über die Spektra von Atomsystemen mit zwei Elektronen, ibid., 499—518 (1926) [24 июля].
110. L. Brillouin, Sur un type général des problèmes, permettant la séparation dans la mechanique ondulatoire de Schrödinger, C.R. Ac. Sci. 183, 270—272 (1926) [26 июля].
111. L. de Broglie, Remarques sur la nouvelle Méchanique ondulatoire, ibid., 272—274 (1926) [26 июля].

112. P. A. M. Dirac, On Quantum Algebra, Proc. Cambr. Phil. Soc. **23**, 412—418 (1926) [26 июля].
113. P. S. Epstein, The Stark Effect from the Point of View of Schroedinger's Quantum Theory, Phys. Rev. **28**, 695—710 (1926) [29 июля].
114. V. Fock, Über die invariante Form der Wellen- und Bewegungsgleichungen für einen gelandenen Massenpunkt, Zs. Phys. **39**, 226—232 (1926) [30 июля].
115. L. de Broglie, Les principes de la nouvelle méchanique ondulatoire, J. de Phys. **7**, 321—327 (1926) [5 августа].
116. F. London, Die Zahl der Dispersionselektronen in der Undulationsmechanik, Zs. Phys. **39**, 322—326 (1926) [19 августа].
117. P. A. M. Dirac, On the Theory of Quantum Mechanics, Proc. Roy. Soc. (London) **112**, 661—677 (1926) [26 августа].
118. F. Reiche, Die Quantelung des symmetrischen Kreisels nach Schrödingers Undulationsmechanik, Zs. Phys. **39**, 444—464 (1926) [26 августа].
119. Jane Dewey, Intensities in the Stark Effect of Helium, Phys. Rev. **28**, 1108—1125 (1926) [28 августа].
120. J. Kudar, Zur vierdimensionalen Formulierung der undulatorischen Mechanik, Ann. d. Phys. **81**, 632—636 (1926) [30 августа].
121. H. A. Kramers, Wellenmechanik und halbzahlige Quantisierung, Zs. Phys. **39**, 828—840 (1926) [9 сентября].
122. R. Kronig, The Dielectric Constant of Symmetrical Polyatomic Dipole-Gases in the New Quantum Mechanics, Proc. Nat. Ac. Sci. **12**, 608—612 (1926) [13 сентября].
122a. P. Ehrenfest, G. Uhlenbeck, Graphische Veranschaulichung der de Broglieschen Phasenwellen in der fünfdimensionalen Welt von O. Klein, Zs. Phys. **39**, 495—498 (1926) [16 сентября].
123. G. Gamow, D. Ivanenko, Zur Wellentheorie der Materie, ibid., 865—868 (1926) [19 сентября].
124. F. London, Winkelvariable und kanonische Transformationen in der Undulationsmechanik, ibid. **40**, 193—210 (1926) [19 сентября].
125. W. Gordon, Der Comptoneffekt nach der Schrödingerschen Theorie, ibid. 117—133 (1926) [29 сентября].
126. P. S. Epstein, The New Quantum Mechanics and the Zeeman Effect, Proc. Nat. Ac. Sci. **12**, 634—638 (1926) [7 октября].
127. D. Iwanenko, L. Landau, Zur Ableitung der Klein-Fockschen Gleichung, Zs. Phys. **40**, 161—162 (1926) [8 октября].
128. M. Born, Das Adiabatenprinzip in der Quantenmechanik, ibid., 167—192 (1926) [16 октября].
129. E. Fermi, Zur Wellenmechanik des Stossvorganges, ibid., 399—401 (1926) [23 октября] (Э. Ферми, Труды, I, 227—230).
130. E. Madelung, Quantentheorie in hydrodynamischer Form, ibid., 322—326 (1926) [25 октября].
131. L. Pauling, Die Abschirmungskonstanten der relativistischen oder magnetischen Röntgenstrahlendubletts, ibid., 344—350 (1926) [27 октября].
132. J. R. Oppenheimer, Quantum Theory and Intensity Distribution in Continuous Spectra, Nature **118**, 771 (1926) [30 октября].
133. R. H. Fowler, General Forms of Statistical Mechanics with Special Reference to the Requirements of the New Quantum Mechanics, Proc. Roy. Soc. (London) **113**, 432—449 (1927) [3 ноября 1926 г.]
134. R. Kronig, I. I. Rabi, The Symmetrical Top in the Undulatory Mechanics, Phys. Rev. **29**, 252—269 (1927) [4 ноября 1926 г.].
135. W. Heisenberg, Schwankungserscheinungen und Quantenmechanik, Zs. Phys. **40**, 501—506 (1926) [6 ноября].
136. E. Fermi, E. Persico, Il principio delle adiabatiche e la nozione di forza viva nelle nuova meccanica ondulatoria, Rend. Lincei **4**, 452—457 (1926) [7 ноября] (Э. Ферми, Труды, I, 231—236).
137. E. Wigner, Über nicht kombinierende Terme in die neuen Quantentheorie (Erster Teil), Zs. Phys. **40**, 492—500 (1926) [12 ноября].
138. L. Landau, Zur Theorie der Spektren der zweiatomiger Moleküle, ibid., 621—627 (1926) [13 ноября] (Л. Ландау, Труды, I, 11—18).
139. E. Fermi, Quantum Mechanics and the Magnetic Moment of Atoms, Nature **118**, 876 (1926) [14 ноября] (Э. Ферми, Труды, I, 243—245).
140. J. H. Van Vleck, The Dielectric Constant and Diamagnetism of Hydrogen and Helium in the New Quantum Mechanics, Proc. Nat. Ac. Sci. **12**, 662—670 (1926) [15 ноября].
141. C. Eckart, Note on the Correspondence Principle in the New Quantum Mechanics, ibid., 684—687 (1926) [16 ноября].
142. G. Wentzel, Zur Theorie des photoelektrischen Effekts, Zs. Phys. **40**, 574—589 (1926) [19 ноября].

143. F. Hund, Zur Deutung der Molekelspektren. I, ibid., 742—764 (1927) [19 ноября 1926 г.].
143a. Ø. Burrau, Berechnung des Eigenwerts des Wasserstoffmolekel Ions (H_2^+) im Normalzustand, Naturwissenschaften **15**, 16—17 (1927) [22 ноября 1926 г.].
144. P. Jordan, Über quantenmechanische Darstellung von Quantensprüngen, Zs. Phys. **40**, 661—666 (1927) [25 ноября 1926 г.]
145. E. Wigner, Über nicht kombinierende Terme in der neuen Quantenmechanik (Zweiter Teil), ibid., 883—892 (1927) [26 ноября 1926 г.].
146. J. S. Slater, Radiation and Absorption on Schroedinger's Theory, Proc. Nat. Ac. Sci. **13**, 7—12 (1927) [26 ноября 1926 г.].
146a. H. Radamacher, F. Reiche, Die Quantelung des symmetrischen Kreisels nach Schrödingerschen Undulationsmechanik. II. Intensitätsfragen, Zs. Phys. **41**, 453—492 (1927) [29 ноября 1926 г.]
147. E. Schrödinger, Über den Comptoneffekt, Ann. d. Phys. **82**, 257—264 (1927) [30 ноября 1926 г.] (Э. Шрёдингер, Труды, 139—144).
148. P. A. M. Dirac, The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics, Proc. Roy. Soc. (London) **113**, 621—641 (1927) [2 декабря 1926 г.].
149. O. Klein, Elektrodynamik und Wellenmechanik von Standpunkt der Korrespondenzprinzip, Zs. Phys. **41**, 407—442 (1927) [6 декабря 1926 г.].
150. E. Schrödinger, Der Energieimpulssatz der Materienwellen, Ann. d. Phys. **82**, 265—272 (1927) [10 декабря 1926 г.] (Э. Шрёдингер, Труды, 145—150).
151. P. Ehrenfest, G. Uhlenbeck, Die wellenmechanische Interpretation der Boltzmannschen Statistik neben der der neuen Statistiken, Zs. Phys. **41**, 24—26 (1927) [15 декабря 1926 г.] (П. Эренфест, Статьи, 79—81).
152. W. Pauli, Über Gasentartung und Paramagnetismus, ibid., 81—102 (1927) [16 декабря 1926 г.].
153. P. Debye, Wellenmechanik und Korrespondenzprinzip, Phys. Zs. **28**, 170—174 (1927) [16 декабря 1926 г.].
154. L. Brillouin, Les moments de rotation et le magnetisme dans la méchanique ondulatoire, J. de Phys. **8**, 74—84 (1927) [17 декабря 1926 г.].
155. P. Jordan, Über eine neue Bergründung der Quantenmechanik, Zs. Phys. **40**, 809—838 (1927) [18 декабря 1926 г.].
156. A. Unsöld, Beitrage zur Quantenmechanik der Atome, Ann. d. Phys. **82**, 355—393 (1927) [22 декабря 1926 г.].
157. W. Heisenberg, Mehrkörperprobleme und Resonanz in der Quantenmechanik. II, Zs. Phys. **41**, 239—267 (1927) [22 декабря 1926 г.].
158. L. de Broglie, L'univers a cinq dimensions et la méchanique ondulatoire, J. de Phys. **8**, 65—73 (1927) [23 декабря 1926 г.].
159. F. Slack, Die Intensitätsdissymmetrie beim Wasserstoff-Starkeffekt, Ann. d. Phys. **82**, 576—584 (1927) [24 декабря 1926 г.].
160. J. R. Oppenheimer, Zur Quantentheorie kontinuirlicher Spektren, Zs. Phys. **41**, 268—293 (1927) [24 декабря 1926 г.].
161. G. Beck, Zur Theorie des Photoeffekts, ibid., 443—452 (1927) [27 декабря 1926 г.].
162. M. Sugiura, Sur le nombre des électrons de dispersion pour les spectres continues et pour les spectres de séries de l'hydrogene, J. de Phys. **8**, 113—124 (1927) [30 декабря 1926 г.].
163. E. E. Witmer, The Quantization of the Rotational Motion of the Polyatomic Molecule by the New Quantum Mechanics, Proc. Nat. Ac. Sci. **13**, 60—65 (1927) [15 января].
164. P. Ehrenfest, G. Uhlenbeck, Zum Einsteinschen «Mischungsparadoxon» Zs. Phys. **41**, 576—582 (1927) [25 января].
165. J. C. Slater, Action of Radiation and Pertubations on Atoms, Proc. Nat. Ac. Sci. **13**, 104—111 (1927) [29 января].
166. L. de Broglie, La structure atomique de la matière et du rayonement et la Méchanique ondulatoire, C. R. Ac. Sci. **184**, 273—274 (1927) [31 января].
167. P. A. M. Dirac, The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation, Proc. Roy. Soc. (London) **114**, 243—265 (1927) [2 февраля].
168. F. Hund, Zur Deutung der Molekelspektren. II, Zs. Phys. **42**, 93—120 (1927) [7 февраля].
169. D. Iwanenko, L. Landau, Bemerkung über Quantenstatistik, ibid., 562—564 (1927) [12 февраля].
170. P. Jordan, Anmerkungen zur statistischen Deutung der Quantenmechanik, ibid. **41**, 797—810 (1927) [17 февраля].
171. F. London, Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl, ibid. **42**, 375—389 (1927) [25 февраля].
171a. J. H. Van Vleck, On Dielectric Constants and Magnetic Susceptibilities in the New Quantum Mechanics, Part I. A General Proof of the Langevin-Debye Formula, Phys. Rev. **29**, 727—744 (1927) [28 февраля].

172. G. Beck, Über die Strahlungreibung in der Quantenmechanik, Zs. Phys. **42**, 86—88 (1927) [1 марта].
173. J. Oppenheimer, Zur Quantenmechanik der Richtungsentartung, ibid. **43**, 27—46 (1927) [8 марта].
174. A. Landé, Spontane Quantenübergänge, ibid. **42**, 835—839 (1927) [17 марта].
175. A. Markoff, Über eine Minimaleigenschaft der Schrödinger Wellengruppen, ibid., 637—640 (1927) [18 марта].
176. E. U. Condon, Coupling of Electronic and Nuclear Motion in Diatomic Molecules, Proc. Nat. Ac. Sci. **13**, 462—466 (1927) [19 марта].
177. W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Zs. Phys. **43**, 172—198 (1927) [23 марта] (перевод см. в данном выпуске, с. 651).
178. H. Bateman, A Modification of Gordon's Equation, Phys. Rev. **30**, 55—60 (1927) [30 марта].
179. L. de Broglie, La méchanique ondulatoire et la structure atomique de la matière et du rayonnement, J. de Phys. **8**, 225—241 (1927) [1 апреля].
180. N. Wiener, D. Struik, Quantum Theory and Gravitational Relativity, Nature **119**, 853—854 (1927) [2 апреля].
181. G. Wentzel, Zur Theorie des Comptoneffekts, Zs. Phys. **43**, 1—8 (1927) [3 апреля].
182. P. A. M. Dirac, The Quantum Theory of Dispersion, Proc. Roy. Soc. (London) **114**, 710—728 (1927) [4 апреля].
183. D. Hilbert, J. von Neumann, L. Nordheim, Über die Grundlagen der Quantenmechanik, Math. Ann. **98**, 1—30 (1927) [6 апреля].
184. E. U. Condon, Wave Mechanics and the Normal State of the Hydrogen Molecule, Proc. Nat. Ac. Sci. **13**, 466—470 (1927) [18 апреля].
185. P. S. Epstein, The Dielectric Constant of Atomic Hydrogen in Undulatory Mechanics, ibid., 432—438 (1927) [20 апреля].
186. J. C. Slater, The Structure of the Helium Atom. I, ibid., 423—430 (1927) [26 апреля].
187. E. Fermi, Sul meccanismo dell'emissione nella meccanica ondulatoria, Rend. Lincei **5**, 795—800 (1927) [1 мая] (Э. Ферми, Труды, I, 271—277).
188. W. Pauli, Zur Quantenmechanik des magnetischen Elektrons, Zs. Phys. **43**, 601—623 (1927) [3 мая].
188a. G. Beck, Über einige Folgerungen aus dem Satz von der Analogie zwischen Lichtquant und Elektron, ibid., 658—674 (1927) [3 мая].
189. E. Wigner, Einige Folgerungen aus der Schrödingerschen Theorie für die Termstrukturen, ibid., 624—652 (1927) [5 мая].
190. J. H. Van Vleck, On Dielectric Constants and Magnetic Susceptibilities in the New Quantum Mechanics, Part II. Application to Dielectric Constants, Phys. Rev. **30**, 31—54 (1927) [5 мая].
191. C. Richter, The Hydrogen Atom with a Spinning Electron in Wave Mechanics, Proc. Nat. Ac. Sci. **13**, 476—479 (1927) [9 мая].
192. A. Unsöld, Quantentheorie der Wasserstoffmolekülions und die Born-Landéschen Abstossungskräfte, Zs. Phys. **43**, 563—574 (1927) [10 мая].
193. G. Wentzel, Über Strahlungslose Quantensprünge, ibid., 524—530 (1927) [11 мая].
194. E. Fues, Lebensdauer und Resonanzerscheinungen, ibid., 726—740 (1927) [11 мая].
195. W. Heitler, Freie Weglänge und Quantelung der Molekültranslation, ibid. **44**, 161—169 (1927) [20 мая].
196. J. von Neumann, Mathematische Begründung der Quantenmechanik, Gött. Nachr., 1—57 (1927) [20 мая].
197. L. Sugiura, Über die numerische Bestimmung der Mittelwerte zwischen Ortho- und Paratermen von He und Li^+, Zs. Phys. **44**, 190—206 (1927) [23 мая].
198. G. Wentzel, Zur Theorie des Comptoneffekts. II, ibid. **43**, 779—787 (1927) [26 мая].
199. F. Hund, Symmetriecharactere der Termen bei Systemen mit gleichen Partikeln in der Quantenmechanik, ibid., 788—804 (1927) [27 мая].
200. F. Hund, Zur Deutung der Molekelspektren. III, ibid., 805—826 (1927) [28 мая].
201. G. Kellner, Die Ionisierungsspannung des Heliums nach der Schrödingersche Theorie, ibid. **44**, 91—109 (1927) [1 июня].
202. P. Jordan, Über eine neue Begründung der Quantenmechanik. II, ibid., 1—25 (1927) [3 июня].
203. D. M. Dennison, A Note on the Specific Heat of the Hydrogen Molecule, Proc. Roy. Soc. (London) **115**, 483—493 (1927) [3 июня].
204. E. Schrödinger, Energieaustausch nach der Wellenmechanik, Ann. d. Phys. **83**, 956—968 (1927) [10 июня] (Э. Шрёдингер, Труды, 151—160).

205. P. Jordan, Über die Polarisation der Lichtquanten, Zs. Phys. **44**, 292—300 (1927) [16 июня].
206. G. Kellner, Der Grundterm des einfach ionisierten Lithiums nach der Schrödingersche Theorie, ibid., 110—112 (1927) [17 июня].
207. L. Rosenfeld, L'électron magnétique et la méchanique ondulatoire, C. R. Ac. Sci. **184**, 1540—1541 (1927) [20 июня].
208. P. A. M. Dirac, Über die Quantenmechanik der Stossvorgänge, Zs. Phys. **44**, 585—595 (1927) [28 июня].
209. W. Heitler, F. London, Wechselwirkung neutraler Atome und homöopolare Bindung nach der Quantenmechanik, ibid., 455—472 (1927) [30 июня].
210. P. Jordan, Zur Quantentheorie der Gasentartung, ibid., 473—480 (1927) [7 июля].
211. E. H. Kennard, Zur Quantenmechanik einfacher Bewegungstypen, ibid., 326—352 (1927) [17 июля].
212. L. Landau, Das Dämpfungsproblem in der Wellenmechanik, ibid. **45**, 430—441 (1927) [27 июля] (Л. Ландау, Труды, I, 19—31).
213. A. Landé, Zur Wellenmechanik der Kontinua und Elektrodynamik, ibid. **44**, 766—772 (1927) [28 июля].
214. C. G. Darwin, The Electron as a Vector Wave, Proc. Roy. Soc. (London) **116**, 227—253 (1927) [30 июля].
215. Jane Dewey, Intensities in the Stark Effect of Helium. II, Phys. Rev. **30**, 770—780 (1927) [июль].
216. H. Faxen, J. Holtsmark, Beitrag zur Theorie des Durchganges langsamer Elektronen durch Gase, Zs. Phys. **45**, 307—324 (1927) [6 августа].
217. E. U. Condon, Zeeman Effect of the Symmetrical Top According to the Wave Mechanics, Phys. Rev. **30**, 781—784 (1927) [8 августа].
218. W. Elsasser, Zur Theorie der Stossprozesse bei Wasserstoff, Zs. Phys. **45**, 522—538 (1927) [26 августа].
219. M. Born, R. Oppenheimer, Zur Quantentheorie der Molekeln, Ann. d. Phys. **84**, 457—484 (1927) [28 августа].
220. L. Sugiura, Über die Eigenschaften des Wasserstoffmoleküls im Grundzustand, Zs. Phys. **45**, 484—492 (1927) [30 августа].
221. J. R. Oppenheimer, Three Notes on the Quantum Theory of Aperiodic Effects, Phys. Rev. **31**, 66—81 (1927) [август].
222. P. Ehrenfest, Bemerkung über die angenäherte Gültigkeit der klassischen Mechanik innerhalb der Quantenmechanik, Zs. Phys. **45**, 455—457 (1927) [5 сентября] (П. Эренфест, Статьи, 82—84).
223. Lucy Mensing, Zur Theorie des Zusammenstosses von Atomen mit langsamen Elektronen, ibid., 603—609 (1927) [13 сентября].
224. N. Bohr, The Quantum Postulate and the Recent Development of Atomic Theory, Nature **121**, 580—590 (1928); Naturwissenschaften **16**, 245—257 (1928) [16 сентября 1927 г.— доклад на конгрессе в Комо, Италия] (Н. Бор, Труды, II. 30—53).
225. Г. Е. Горовиц, Силы лучистого торможения в квантовой механике, ЖРФХО, ч. физ. **60**, 51—56 (1928) [3 октября 1927 г.].
226. P. Jordan, O. Klein, Zum Mehrkörperproblem der Quantentheorie, Zs. Phys. **45**, 751—765 (1927) [4 октября].
226a. P. Jordan, Über Wellen und Korpuskeln in der Quantenmechanik, ibid., 766—775 (1927) [11 октября].
227. W. Heitler, Störugsenergie und Austausch beim Mehrkörperproblem, ibid. **46**, 47—72 (1927) [12 октября].
228. H. Weyl, Quantenmechanik und Gruppentheorie, ibid., 1—46 (1927) [13 октября].
229. Г. А. Гамов, Д. Д. Иваненко, Л. Д. Ландау, Мировые постоянные и предельный переход, ЖРФХО, ч. физ. **60**, 13—17 (1928) [20 октября 1927 г.].
230. C. G. Darwin, Free Motion in the Wave Mechanics, Proc. Roy. Soc. (London) **117**, 258—293 (1927) [25 октября].
231. J. R. Oppenheimer, On the Quantum Theory of the Polarization of Impact Radiation, Proc. Nat. Ac. Sci. **13**, 800—805 (1927) [26 октября].
232. S. C. Wang, The Diamagnetic Susceptibility of Hydrogen Molecule and of Helium in the New Quantum Mechanics, ibid., 798—800 (1927) [7 ноября].
233. E. Hulthén, Über nicht kombinierende Teilsysteme in den Bandenspektren. Zs. Phys. **46**, 349—353 (1928) [9 ноября 1927 г.].
234. J. von Neumann, Warscheinlichkeittheorietischen Aufbau der Quantenmechanik, Gött. Nachr., 245—272 (1927) [11 ноября].
235. J. von Neumann, Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten, ibid., 273—291 (1927) [11 ноября].
236. A. Ruark, The Zeeman and Stark Effects of Hydrogen in Wave Mechanics. The Force Equation and the Virial Theorem in Wave Mechanics, Phys. Rev. **31**, 533—538 (1928) [4 декабря 1927 г.].

237. P. Jordan, W. Pauli, Zur Quantenelektrodynamik ladungsfreier Felder, Zs. Phys. 47, 151—173 (1928) [7 декабря 1927 г.].
238. R. Kronig, Zur Deutung der Bandespektren, ibid. 46, 814—825 (1928) [8 декабря 1927 г.].
239. F. London, Zur Quantentheorie der homöopolaren Valenzzahlen, ibid., 455—477 (1928) [9 декабря 1927 г.].
239a. L. Nordheim, Zur Theorie der thermischen Emission und der Reflexion von Elektronen an Metallen, ibid., 833—855 (1928) [11 декабря 1927 г.].
240. L. Mandelstam, M. Leontovich, Zur Theorie der Schrödingerschen Gleichung, ibid. 47, 131—136 (1928) [15 декабря 1927 г.] (Л. Мандельштам, Труды, I, 286—292).
241. A. Sommerfeld, Zur Elektronentheorie der Metalle auf Grund der Fermischen Statistik. I, II, ibid., 1—32, 43—60 (1928) [17 декабря 1927 г.].
242. A. H. Wilson, The Ionized Hydrogen Molecule, Proc. Roy. Soc. (London) 118, 635—647 (1928) [19 декабря 1927 г.].
242a. F. Slack, Intensities in the Hydrogen Spectral Series, Phys. Rev. 31, 526—532 (1928) [20 декабря 1927 г.].
243. J. von Neumann, E. Wigner, Zur Erklärung einiger Eigenschaften der Spektren aus der Quantenmechanik des Drehelektrons, Zs. Phys. 47, 203—220 (1928) [28 декабря 1927 г.].
244. E. H. Kennard, Note on Heisenberg's Indetermination Principle, Phys. Rev. 31, 344—348 (1928) [29 декабря 1927 г.].
245. J. C. Slater, Central Fields and Rydberg Formulas in Wave Mechanics, ibid., 333—343 (1928) [декабрь 1927 г.].
246. J. R. Oppenheimer, On the Quantum Theory of the Capture of Electrons, ibid., 348—358 (1928) [декабрь 1927 г.].
247. P. A. M. Dirac, The Quantum Theory of the Electron, Proc. Roy. Soc. (London) 117, 610—624 (1928) [2 января].
248. V. Fock, Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld, Zs. Phys. 47, 446—448 (1928) [12 января].
249. J. H. Van Vleck, The Correspondence Principle in the Statistical Interpretation of Quantum Mechanics, Proc. Nat. Ac. Sci. 14, 178—188 (1928) [16 января].
250. K. Niesson, Über die annäherenden komplexen Lösungen der Schrödingerschen Differentialgleichung für den harmonischen Oszillator, Ann. d. Phys. 85, 497—514 (1928) [21 января].
251. P. Jordan, E. Wigner, Über das Paulische Äquivalenzverbot, Zs. Phys. 47, 631—651 (1928) [26 января].
252. W. Heitler, Zur Gruppentheorie der homöopolaren chemischen Rindung, ibid., 835—858 (1928) [26 января].
252a. Г. Е. Горовиц, Б. Н. Финкельштейн, К вопросу об энергии нормального атома гелия и положительного иона водородной молекулы, ЖРФХО, ч. физ. 60, 169—174 (1928) [январь].
253. J. H. Van Vleck, On Dielectric Constants and Magnetic Susceptibilities in the New Quantum Mechanics, Part III. Application to Dia- and Paramagnetism, Phys. Rev. 31, 587—613 (1928) [1 февраля].
254. P. A. M. Dirac, The Quantum Theory of the Electron (part II), Proc. Roy. Soc. (London) 118, 351—361 (1928) [2 февраля].
255. J. Frenkel, Zur Wellenmechanischen Theorie des rotierenden Elektrons, Zs. Phys. 47, 786—803 (1928) [3 февраля].
255a. J. Frenkel, Zur Wellenmechanischen Theorie der metallischen Leitfähigkeit, ibid., 819—834 (1928) [7 февраля].
256. E. H. Kennard, On the Quantum Mechanics of a System of Particles, Phys. Rev. 31, 876—890 (1928) [10 февраля].
257. W. Gordon, Die Energieniveaus des Wasserstoffatoms nach der Diracschen Quantentheorie des Elektrons, Zs. Phys. 48, 11—14 (1928) [23 февраля].
257a. J. Holstmark, Zur Theorie der Streuung langsamer Elektronen, ibid., 231—243 (1928) [27 февраля].
258. C. G. Darwin, The Wave Equation of the Electron, Proc. Roy. Soc. (London) 118, 654—680 (1928) [6 марта].
259. L. Pauling, The Shared-Electron Chemical Bond, Proc. Nat. Ac. Sci. 14, 359—362 (1928) [7 марта].
260. D. Iwanenko, L. Landau, Zur Theorie des magnetischen Elektrons. I, Zs. Phys. 48, 340—348 (1928) [8 марта].
261. A. Ruark, The Limits of Accuracy of Physical Measurements, Proc. Nat. Ac. Sci. 14, 322—328 (1928) [8 марта].
262. A. Ruark, A Critical Experiment on the Statistical Interpretation of Quantum Mechanics, ibid., 328—330 (1928) [9 марта].
263. R. Kronig, H. A. Kramers, Zur Theorie der Absorption und Dispersion in den Röntgengebiet, Zs. Phys. 48, 174—179 (1928) [10 марта].

264. J. von Neumann, Einige Bemerkungen zur Diracschen Theorie des relativistischen Drehelektrons, ibid., 868—881 (1928) [15 марта].
265. C. Eckart, Die Korrespondenzmässige Beziehung zwischen den Matrizen und den Formierkoeffizienten des Wasserstoffproblems, ibid., 295—301 (1928) [16 марта].
266. E. Hylleraas, Über den Grundzustand des Heliumatoms, ibid., 469—494 (1928) [16 марта].
267. A. Landé, Zu Diracs Theorie des Kreiselelektron, ibid., 601—606 (1928) [24 марта].
267a. F. Sexl, Bemerkung zur Quantelung des harmonischen Oszillators im Magnetfeld, ibid., 611—613 (1928) [28 марта].
268. J. Frenkel, Elementare Theorie magnetischer und elektrischer Eigenschaften der Metalle beim absoluten Nullpunkt der Temperatur, ibid., 49, 31—45 (1928) [30 марта] (Я. И. Френкель, Труды, II, 96—108).

Становление квантовой механики

(Обобщающие статьи, монографии и сборники с конца 1925 г. до 1932—1934 гг.)

269. N. Bohr, Atomic Theory and Mechanics, Nature 116, 845—852 (1925) (УФН 6, 93—111 (1927); Н. Бор, Труды, I, 7—24).
270. W. Heisenberg, Quantenmechanik, Naturwissenschaften 14, 989—994 (1926) (УФН 6, 425—434 (1926)).
271. E. Schrödinger, An Undulatory Theory of the Mechanics of Atoms and Molecules, Phys. Rev. 28, 1049—1070 (1926) (УФН 7, 176—201 (1927); Э. Шрёдингер, Труды, 183—203).
272. E. Schrödinger, Abhandlungen zur Wellenmechanik, Leipzig, Barth, 1927, 2. Aufl., 1928.
273. M. Born, Quantenmechanik und Statistik, Naturwissenschaften 15, 238—242 (1927) (пер. в кн.: М. Борн, Физика в жизни моего поколения, Сб. статей, М., ИЛ, 1963, с. 16—26).
274. Основания новой квантовой механики. Сб. статей под ред. А. Ф. Иоффе, М.— Л., Гос. изд-во, 1927.
275. Louis de Broglie, La mechanique ondulatoire, Paris, Gautier-Villard, 1928.
276. Louis de Broglie, Leon Brillouin, Selected Papers on Wave Mechanics, Glasgow, Blackie and Son, 1928.
277. H. Weyl, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Leipzig, Hirzel, 1928; 2. Aufl., 1931.
278. N. Bohr, Atom, Encyclopedia Brittanica, 14th ed., v. II, London, 1929.
279. A. Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. Wellenmechanischer Ergänzungsband, Braunschweig, Vievig, 1929 (А. Зоммерфельд, Волновая механика, пер. с нем., М.— Л., ГТТИ, 1933).
280. J. Frenkel, Einführung in die Wellenmechanik, Berlin, Springer, 1929.
281. W. Heisenberg, Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie, Leipzig, Hirzel, 1930 (В. Гейзенберг, Физические принципы квантовой теории, пер. с нем., М.— Л., ОНТИ, 1932).
282. P. Dirac, The Principles of Quantum Mechanics, Claderon Press, Oxford, 1930; 2 Ed., 1935 (П. Дирак, Основы квантовой механики, пер. с англ., М.— Л. ГТТИ, 1932; пер. с 2 англ. изд., 1937).
283. M. Born, P. Jordan, Elementare Quantenmechanik, Berlin, Springer, 1930.
284. Louis de Broglie, Introduction a l'étude de la mécanique ondulatoire, Paris, Hermann, 1930 (Л. де Бройль, Введение в волновую механику, пер. с франц., Харьков — Киев, ГНТИУ, 1934).
285. E. Wigner, Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atomspektren, Braunschweig, Viewig, 1931.
286. В. А. Фок, Начала квантовой механики, Л., КУБУЧ, 1932.
287. J. von Neumann, Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin, Springer, 1932 (И. фон Нейман, Математические основы квантовой механики, пер. с нем., М., «Наука», 1964).
288. B. L. Van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin, Springer, 1932 (Б. Ван-дер-Верден, Метод теории групп в квантовой механике, пер. с нем., Киев, ГНТИУ, 1938).
289. W. Pauli, Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, in: Handbuch der Physik, Bd. 24, Teil 1, Berlin, Springer, 1933 (В. Паули, Общие принципы волновой механики, пер. с нем., М.— Л., Гостехиздат, 1947).
290. Я. И. Френкель, Волновая механика, ч. I, Л., ГТТИ, 1933.
291. Я. И. Френкель, Волновая механика, ч. II, Л., ГТТИ, 1934.
292. L. de Broglie, L'electron magnétique (Théorie de Dirac), Paris, Hermann, 1934 (Л. де Бройль, Магнитный электрон (теория Дирака), Харьков, ГНТИУ, 1936).

История развития квантовых представлений и становления квантовой механики

(Воспоминания, юбилейные и мемориальные сборники, исторические статьи и монографии)

293. E. Rutherford, Forty Years of Physics. II. The Development of the Theory of Atomic Structure, in: Background to Modern Science, Cambridge, 1940, pp. 47—74 (Э. Резерфорд, Труды, II, 479—492).
293а. A. Sommerfeld, Zwanzig Jahre spektroskopischer Theorie in München, Scientia 72, 123—130 (1942) (А. Зоммерфельд, Статьи, 29—39).
294. M. Planck, Zur Geschichte der Auffindung des physikalischen Wirkungsquantums, Naturwissenschaften 31, 153—159 (1943) (М. Планк, Труды, 431—442).
294а. A. Sommerfeld, Some Reminescences of My Teaching Career, Am. J. Phys. 17, 315—317 (1949) (А. Зоммерфельд, Статьи, 185—189).
295. A. Einstein, Autobiographisches (Autobiographical Notes), in: Albert Einstein — Philosopher-Scientist, Evanston, 1949 (А. Эйнштейн, Труды, IV, 259—293).
296. M. Born, Albert Einstein und Lichtquanten, Naturwissenschaften 42, 425—433 (1955) (пер. в кн.: М. Борн, Физика в жизни моего поколения, Сб. статей, М., ИЛ, 1963, 361—380).
297. Theoretical Physics in the Twentieth Century, A Memorial Volume to Wolfgan Pauli, N. Y., Interscience Publ., 1960 (пер.: Теоретическая физика 20 века, М. ИЛ, 1962).
298. G. Wentzel, Quantum Theory of Fields, in [297] (пер. см. с. 60—93), см. также [316] (pp. 380—403).
299. L. de Broglie, Sur les sentiers de la science, Paris, Michel Albin, 1960 (Л. де Бройль, По тропам науки, пер. с франц., М., ИЛ, 1962).
300. N. Bohr, The Rutherford Memorial Lecture 1958: Reminiscences of the Founder of Nuclear Science and of Some Developments Based on his Work, Proc. Phys. Soc. 78, 1083—1115 (1961) (Н. Бор, Труды, II, 545—590).
301. N. Bohr, The Solway Meetings and the Development of Quantum Physics, in: La théorie quantique des champs, N. Y., Interscience Publ., 1962 (УФН 91, 737—753 (1967); Н. Бор, Труды, II, 591—612).
302. M. Klein, Einstein's First Paper on Quanta, The Natural Philosopher, № 2 (1963) (М. Клейн, Первая работа Эйнштейна по квантам, в кн.: Эйнштейновский сборник, 1966, М., «Наука», 1966, 259—283).
303. M. Klein, Einstein and the Wave-Particle Duality, The Natural Philosopher, No. 3 (1964) (М. Клейн, Эйнштейн и дуализм волны-частиц, ibid., 212—258).
304. M. Born, Reminiscences on my Work in the Dynamics of Crystall Lattices, Proc. of the International Conference on Lattice Dynamics at Copenhagen, 1964 (М. Борн, Размышления и воспоминания физика, М., «Наука», 1977, с. 201—214).
304а. И. Е. Тамм, Характерные особенности творчества Л. И. Мандельштама, УФН 87, 3—8 (1965) (также в кн.: И. Е. Тамм, Труды, 456—460).
305. S. Goudsmit, Die Entdeckung des Elektronspins, Phys. Blätt. 21, 445—452 (1965) (УФН 93, 151—158 (1967)).
306. M. Jammer, The Conceptional Development of Quantum Mechanics, N. Y., McGraw-Hill, 1966.
307. Sources for History of Quantum Physics. An Inventory and Report, The American Philosophical Society, Philadelphia, 1967.
308. Sources of Quantum Mechanics. Edited with a Historical Introduction by B. L. Van der Waerden, Amsterdam, North-Holland, 1967.
309. A. Hermann, Frühgeschichte der Quantentheorie (1899—1913), Mosbach in Baden, Physik Verlag, 1969.
310. W. Heisenberg, Der Teil und das Ganze, München, R. Piper Verlag, 1969; англ. изд., Physics and Beyond, N. Y., Harper and Row, 1971.
311. M. Klein, The First Phase of the Bohr-Einstein Dialogue, in: Historical Studies in the Physical Sciences, v. II, Philadelphia, 1970, pp. 1—39 (М. Клейн, Первая фаза диалога Бора и Эйнштейна, в кн.: Эйнштейновский сборник, 1974, М., «Наука», 1976, с. 115—155).
312. В. Я. Френкель, Юрий Александрович Крутков, УФН 102, 639—654 (1970).
313. М. А. Ельяшевич, Периодический закон Д. И. Менделеева и строение атома, УФН 100, 5—43 (1970) (см. также сб. «Периодический закон и строение атома», М., Атомиздат, 1971, 41—106).
314. Aspects of Quantum Theory, Ed. Abdus Salam and E. P. Wigner, Cambridge, University Press, 1972.
315. J. Mehra, «The Golden Age of Theoretical Physics»: P. A. M. Dirac's Scientific Work from 1924 to 1933, in [314], pp. 17—59.

316. The Physicist's Conception of Nature, Ed. by Jagdish Mehra, Dordrecht, Holland D. Reidel, 1973.
317. P. A. M. Dirac, Development of the Physicist's Conception of Nature, in [316], pp. 1—14.
318. W. Heisenberg, Development of Concepts in the History of Quantum Mechanics, ibid., pp. 264—275.
319. P. Jordan, Early Years of Quantum Mechanics: Some Reminiscences, ibid., pp. 294—299.
320. B. L. Van der Waerden, From Matrix Mechanics to Unified Quantum Mechanics, ibid., pp. 276—293.
321. E. P. Wigner, Relativistic Equations in Quantum Mechanics, ibid., pp. 320—330.
322. M. Jammer, The Philosophy of Quantum Mechanics, N. Y., Wiley-Interscience, 1974.
323. D. Dennison, Recollections of Physics and Physicists during 1920's, Am. J. Phys. 42, 1051—1056 (1974).
324. J. Mehra, The Solway Conferences on Physics. Aspects of the Development of Physics since 1911. With a foreword by Werner Heisenberg, Dordrecht, Holland, D. Reidel, 1975.
325. S. Goudsmit, It Might as well Be Spin, Phys. Today 29(6), 40—43 (June 1976).
326. G. Uhlenbeck, Personal Reminiscences, ibid., pp. 43—48.
327. Л. С. Полак, Эрвин Шрёдингер и возникновение квантовой механики, в кн.: Э. Шрёдингер, Труды, 1976, с. 347—392.
328. E. MacKinnon, De Broglie's Thesis. A Critical Retrospectrum, Am. J. Phys. 44, 1047—1055 (1976).
329. F. Bloch, Heisenberg and the Early Days of Quantum Mechanics, Phys. Today 29, 23—26 (December 1976).