

530.145.6

**О НАГЛЯДНОМ СОДЕРЖАНИИ  
КВАНТОВОТЕОРЕТИЧЕСКОЙ КИНЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ \*\*\*)**

*B. Гейзенберг* (Копенгаген)

(Поступило 23 марта 1927 г.)

В предлагаемой работе вначале даются точные определения слов: положение, скорость, энергия и т. д. (например, для электрона), которые справедливы и в квантовой механике, и показывается, что канонически сопряженные величины могут быть одновременно определены только с характерной неточностью (§ 1). Эта неточность и представляет, собственно говоря, основание для появления статистических взаимосвязей в квантовой механике. Ее математическая формулировка получается с помощью теории Дирака — Иордана (§ 2). На основе установленных таким образом фундаментальных законов оказывается, как, исходя из квантовой механики, могут быть поняты макроскопические процессы (§ 3). Для пояснения теории обсуждаются некоторые специальные мысленные эксперименты (§ 4).

Мы считаем, что физическая теория обладает наглядностью, когда с помощью этой теории во всех простых случаях можно качественно представить себе экспериментальные следствия из нее и когда мы одновременно убедились, что применение теории никогда не приводит к внутренним

\*) Как мне кажется, причиной тех трудностей, которые встречались до сих пор при введении в оптику «полей-призраков», частично является молчаливое предположение, что центр волны и излучающая частица должны находиться в одном и том же месте. Однако уже при эффекте Комптона это, несомненно, не имеет места и, вообще, пожалуй, никогда не осуществится.

\*\*) См., например, только что вышедшую статью: O. Klein, Zs. Phys. 37, 895 (1926).

\*\*\*) W. Heisenberg, Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik, Zs. Phys. 43, 172—198 (1927). Перевод Л. З. Понизовского.

противоречиям. Например, мы считаем, что наглядно представляем себе замкнутое трехмерное *эйнштейновское* пространство, поскольку для нас экспериментальные следствия из этого представления мысленно лишены противоречий. Разумеется, эти следствия противоречат нашим привычным наглядным представлениям о пространстве — времени. Однако мы можем убедиться в том, что возможность рас пространения этих привычных представлений о пространстве — времени на очень большие пространства не следует ни из наших законов мышления, ни из опыта. Наглядное толкование квантовой механики пока еще полно внутренних противоречий, которые проявляются в борьбе идеей о прерывности и непрерывности, о частицах и волнах. Уже из этого можно было бы заключить, что, во всяком случае, невозможна интерпретация квантовой механики, исходя из привычных кинематических и механических представлений. Квантовая механика как раз и возникла в результате попыток порвать с этими привычными кинематическими понятиями и заменить их соотношениями между конкретными числами, получаемыми из эксперимента. Так как, по-видимому, это удалось сделать, то, с другой стороны, математическая схема квантовой механики не нуждается ни в каком пересмотре. Столь же мало нуждается в пересмотре геометрия пространства — времени для малых объемов и времен; так как, выбрав достаточно тяжелые массы, мы можем с любой степенью приближения свести квантовоременные законы к классическим, даже в случае еще меньших объемов и времен. Однако необходимость пересмотра кинематических и механических представлений, по-видимому, непосредственно вытекает из основных уравнений квантовой механики. Если нам дано тело с определенной массой  $m$ , то с точки зрения наших привычных представлений вполне понятно, что имеет смысл говорить о положении и скорости центра тяжести этого тела. Однако в квантовой механике между массой, положением и скоростью должно существовать соотношение  $qr - qr = \hbar/2\pi i$ . Таким образом, у нас имеются веские основания с подозрением относиться к некритическому употреблению этих слов: «положение» и «скорость». Если к этому добавить, что для процессов, протекающих в очень малых объемах и за очень малые времена, характерна та или иная прерывность, то сразу становится приемлемым даже прямой отказ именно от таких понятий, как «положение» и «скорость». Например, если представить себе одномерное движение материальной точки, то в теории, предполагающей непрерывность движения, можно нарисовать график движения частицы (точнее, ее центра тяжести) в виде кривой  $x(t)$  (рис. 1), причем касательная к кривой в любой точке

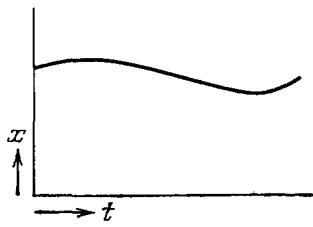


Рис. 1.

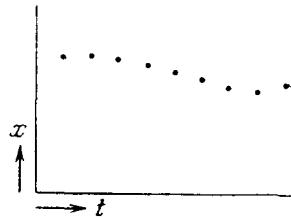


Рис. 2.

определяет скорость движения. Напротив, в случае теории, учитывающей прерывность движения, эта кривая заменится рядом точек, находящихся на конечных расстояниях друг от друга (рис. 2). Совершенно очевидно, что в этом случае бессмысленно говорить о скорости в определенном положении, поскольку скорость может быть определена только с помощью зада-

ния двух положений, и следовательно, наоборот, каждой точке будут соответствовать две различные скорости.

Отсюда возникает вопрос, нельзя ли с помощью более точного анализа этих кинематических и механических представлений разрешить противоречия, возникавшие до сих пор при попытке дать наглядное толкование квантовой механики, и прийти к наглядному пониманию квантовомеханических соотношений \*).

§ 1. Понятия: положение, траектория, скорость, эн ergия. Для того чтобы проследить за квантовомеханическим поведением какого-либо объекта, необходимо знать его массу и силы взаимодействия с различными полями и другими объектами. Только в этом случае может быть составлена функция Гамильтона этой квантовомеханической системы. (Дальнейшие рассуждения должны, вообще говоря, относиться к нерелятивистской квантовой механике, поскольку законы квантовой электродинамики известны пока далеко не полностью \*\*).) «Вид» объекта не нуждается в каком-либо дальнейшем уточнении, наиболее целесообразно обозначить словом вид всю совокупность сил взаимодействия.

Если мы хотим себе уяснить, что следует понимать под словом «положение объекта», например электрона (по отношению к заданной системе отсчета), необходимо указать определенные эксперименты, при помощи которых намереваются определить «положение электрона»; в противном случае это слово не имеет смысла. Нет недостатка в таких экспериментах, в которых в принципе можно определить «положение электрона», и даже с какой угодно точностью. Например, мы освещаем электрон и рассматриваем его в микроскоп. При таком способе максимально достижимая точность определения положения в основном задается длиной волны используемого света. Но в принципе можно построить, например,  $\gamma$ -лучевой микроскоп и с его помощью определить положение с желаемой точностью. Однако в этом измерении существенно побочное обстоятельство — эффект Комптона. Каждое наблюдение света, рассеянного электронами, предполагает фотоэффект (в глазу, на фотопластинке, в фотоэлементе) и, следовательно, может быть истолковано и таким образом, что квант света встречается с электроном, отражается или отклоняется от первоначального направления и затем, отклоняясь еще раз при прохождении через линзы микроскопа, производит фотоэффект. В мгновение, когда определяется положение, иначе говоря, в мгновение, когда квант света отклоняется электроном, последний прерывно изменяет свой импульс. Это изменение тем сильнее, чем меньше длина волны используемого света, иначе говоря, чем выше точность определения положения. Поэтому в то мгновение, когда

\* ) Данная работа возникла из устремлений и желаний, которые выразили в отчетливой форме еще гораздо раньше, до возникновения квантовой механики, другие исследователи. Особо я напоминаю здесь о работах Бора по основным постулатам квантовой теории (например, Zs. Phys. 13, 117 (1923) (имеется перевод: Собр. научн. трудов, т. I, М., «Наука», 1970, с. 482—525. — Ред.)) и обсуждение Эйнштейном связи между волновым полем и квантами света. В последнее время наиболее четко обсуждаемые здесь проблемы были рассмотрены В. Паули (Quantentheorie, Handb. Phys., Bd. 23, в дальнейшем — указ. соч.) (имеется перевод: Квантовая теория, в кн. В. Паули, Труды по квантовой теории, М., «Наука», 1975, с. 7—351. — Ред.), который частично ответил на возникающие здесь вопросы; квантовая механика лишь мало изменила формулировку этих проблем, данную Паули. В этой связи мне доставляет особую радость поблагодарить здесь г-на В. Паули за те стимулы, которые я неоднократно получал из наших устных и письменных обсуждений и которые внесли значительный вклад в предлагаемую работу.

\*\*) Однако в последнее время благодаря работам П. Дирака (Proc. Roy. Soc. A114, 243 (1927) и более поздние публикации) в этой области были достигнуты большие успехи.

известно положение электрона, импульс может быть определен лишь с точностью до величин, соответствующих такому прерывному изменению; итак, чем точнее определяется положение, тем менее точно известен импульс, и наоборот. В этом мы видим непосредственное наглядное толкование соотношения  $pq - qp = h/2\pi i$ . Пусть  $q_1$  — точность, с которой известно значение  $q$  ( $q_1$  примерно равно средней квадратичной ошибке определения  $q$ ), в нашем случае — это длина световой волны, а  $p_1$  — точность, с которой может быть установлено значение  $p$ , в нашем случае — прерывное изменение  $p$  при эффекте Комптона, тогда, согласно элементарным формулам для эффекта Комптона,  $p_1$  и  $q_1$  связаны соотношением

$$p_1 q_1 \sim h. \quad (1)$$

Что формула (1) математически непосредственно связана с перестановочным соотношением  $pq - qp = h/2\pi i$ , будет показано ниже. Здесь следует указать, что уравнение (1) есть точное выражение тех фактов, которые ранее пытались описывать путем деления фазового пространства на ячейки размером  $h$ .

Для определения положения электрона можно поставить и другие эксперименты, например опыты по столкновению частиц. Для точного измерения положения требуется, чтобы сталкивались очень быстрые частицы, так как в случае медленных электронов точному определению положения препятствуют явления дифракции, которые, согласно Эйнштейну, являются следствием волн де Броиля (см., например, эффект Рамзауэра). Итак, при точном измерении положения электрона его импульс и в этом случае изменяется прерывно и простая оценка точностей по формулам для волн де Броиля снова приводит к соотношению (1).

Благодаря этим рассуждениям понятие «положение электрона» кажется определенным достаточно ясно, следует добавить только несколько слов по поводу «размеров» электрона. Если две очень быстрые частицы последовательно встречают электрон в течение очень малого промежутка времени  $\Delta t$ , то разница  $\Delta l$  в определении положений электрона при помощи этих двух частиц будет также очень мала. Из законов, установленных при наблюдении  $\alpha$ -лучей, можно заключить, что  $\Delta l$  можно уменьшить до величин порядка  $10^{-12}$  см, если только выбрать  $\Delta t$  достаточно малым, а частицы достаточно быстрыми. Именно в этом смысле мы говорим об электроне как о корпускуле, радиус которой не превышает  $10^{-12}$  см.

Перейдем теперь к понятию «траектория электрона». Под траекторией мы понимаем ряд точек пространства (в заданной системе отсчета), которые электрон последовательно занимает как «положения». Поскольку мы уже знаем, что следует понимать под «положением в определенный момент времени», то здесь никаких новых трудностей не возникает. И все же легко видеть, что, например, часто употребляемое выражение «траектория  $1S$  электрона в атоме водорода» с нашей точки зрения не имеет никакого смысла. Для измерения этой «траектории»  $1S$  необходимо было бы осветить атом светом, длина волны которого во всяком случае значительно короче, чем  $10^{-8}$  см. Однако достаточно лишь одного кванта света из такого светового потока, чтобы полностью выбросить электрон с его «траектории» (так что на этой траектории всегда может быть определена лишь одна единственная пространственная точка). Значит, в данном случае слово «траектория» не имеет разумного содержания. Такое заключение может быть сделано уже просто из анализа экспериментальных возможностей, без знания более новых теорий.

В противоположность этому на многих атомах в состоянии  $1S$  можно провести мысленное измерение положения электрона. (В принципе, например, с помощью опыта Штерна — Герлаха можно изолировать

атомы, находящиеся в заданном «стационарном» состоянии.) Итак, для определенного состояния атома, например состояния  $1S$ , должна существовать вероятностная функция для положений электрона, которая соответствует усреднению классической траектории по всем фазам и которая может быть с любой точностью определена путем измерений. Согласно Борну \*), эта функция дается произведением

$$\psi_{1S}(q) \bar{\psi}_{1S}(q),$$

где  $\psi_{1S}(q)$  означает волновую функцию Шрёдингера, соответствующую состоянию  $1S$ . Следуя Дираку и Иордану \*), я мог бы, принимая во внимание те обобщения, которые будут сделаны ниже, сказать: вероятность дается произведением  $S(1S, q) \bar{S}(1S, q)$ , где  $S(1S, q)$  означает тот столбец матрицы преобразования  $S(E, q)$  от  $E$  к  $q$ , который соответствует  $E = E_{1S}$  ( $E$  — энергия).

В том, что в квантовой теории каждому определенному состоянию, например  $1S$ , можно поставить в соответствие только вероятностную функцию положения электрона, можно, следуя Борну и Иордану, усмотреть характерную статистическую черту квантовой теории в противоположность классической. Однако при желании можно, следуя Дираку, также сказать, что статистика привнесена сюда нашими экспериментами. Действительно, до тех пор, пока нам неизвестны фазы атома, очевидно, и классическая теория также не в состоянии была бы дать ничего, кроме вероятности определенного положения электрона. Различие между классической и квантовой механикой состоит скорее в следующем: в классической теории мы можем всегда считать фазу определенной из предыдущих опытов. Однако на самом деле это невозможно, так как каждый эксперимент по определению фазы приводит к разрушению или изменению атома. В определенном стационарном «состоянии» атома его фазы принципиально неопределены, что можно рассматривать как непосредственное столкновение известных соотношений

$$Et - tE = h/2\pi i \quad \text{или} \quad Jw - wJ = h/2\pi i$$

( $J$  — переменная действия,  $w$  — угловая переменная).

Слово «скорость» в применении к некоторому объекту легко определить путем измерений, когда речь идет о движениях в отсутствии силы. Можно, например, осветить объект красным светом и по эффекту Допплера рассеянного света установить скорость частиц. Определение скорости будет тем точнее, чем больше длина волны используемого света, так как в этом случае уменьшается изменение скорости частицы из-за эффекта Комптона при каждом акте рассеяния кванта света. Определение положения при этом будет неточным, в соответствии с уравнением (1). Если

\* ) Статистическая интерпретация волн де Броиля впервые была дана А. Эйнштейном (Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 3 (1925)) (имеется перевод: Собр. научн. трудов, т. III, М., «Наука», 1966, с. 489.— Ред.). Этот статистический подход к квантовой механике сыграл существенную роль в работах: М. Борн, В. Гейзенберг, П. Иордан, Квантовая механика, II, Zs. Phys. 35, 557 (1926), особенно в § 3 гл. 4; П. Иордан, ibid. 37, 376 (1926); в фундаментальной работе М. Борна (ibid. 38, 803 (1926)) он был математически проанализирован и применен для объяснения явлений, происходящих при столкновениях (перевод см. в данном выпуске, с. 632.— Ред.). Обоснование вероятностного подхода с помощью теории преобразования матриц можно найти в работах: В. Гейзенберг, ibid. 40, 501 (1926); П. Иордан, ibid. 40, 661 (1926); В. Пали, ibid. 41, 81 (1927); П. Дирак, Proc. Roy. Soc. A113, 621 (1926); П. Иордан, Zs. Phys. 40, 809 (1926). В общем виде статистические аспекты квантовой механики обсуждены в работах: П. Иордан, Naturwissenschaften 15, 105 (1927); М. Борн, ibid. 15, 238 (1927).

необходимо измерить скорость электрона в атоме в некоторый момент времени, то именно в этот момент следует заставить внезапно исчезнуть заряд ядра и силы взаимодействия с другими электронами, так чтобы движение продолжалось в отсутствие сил, а затем для измерения скорости использовать только что описанный метод. И в этом случае, как и в предыдущем, можно легко убедиться в том, что для данного состояния атома, например  $1S$ , нельзя определить функцию  $p(t)$ . Зато для этого состояния также существует вероятностная функция от  $p$ , которая, согласно Дираку и Иордану, имеет вид  $S(1S, p) \bar{S}(1S, p)$ . И в этом случае  $S(1S, p)$  означает столбец матрицы преобразования  $S(E, p)$  от  $E$  к  $p$ , соответствующий  $E = E_{1S}$ .

Наконец, следует указать на те эксперименты, которые позволяют измерять энергию или значения переменной действия  $J$ ; такие эксперименты особенно важны, так как только с их помощью можно определить, какой смысл мы вкладываем в понятие дискретного изменения энергии и переменной действия  $J$ . Опыты Франка и Герца по столкновениям позволяют свести, благодаря справедливости закона сохранения энергии в квантовой теории, измерение энергии атома к измерению энергии прямолинейно движущихся электронов. Это измерение можно в принципе провести с любой степенью точности, если только отказаться от одновременного определения положения электронов, т. е. фазы (ср. выше определение  $p$ ) в соответствии с соотношением  $Et - tE = \hbar/2\pi i$ . Опыт Штерна и Герлаха позволяет определить магнитный или средний электрический моменты атома, т. е. измерить те величины, которые зависят только от переменных действия  $J$ . Фазы принципиально остаются неопределенными. Говорить об энергии атома в определенный момент времени так же бессмысленно, как говорить о частоте световой волны в данное мгновение. Этому соответствует в опыте Штерна и Герлаха то обстоятельство, что точность измерения энергии тем меньше, чем короче промежуток времени, в течение которого атом находится под воздействием отклоняющей силы \*). А именно верхний предел для величины отклоняющей силы задается тем условием, что потенциальная энергия этой отклоняющей силы в пределах атомного пучка должна изменяться в интервале, существенно меньшем, чем разности энергий стационарных состояний, для того чтобы определение энергий стационарных состояний было вообще возможно. Если  $E_1$  — величина интервала энергий, удовлетворяющая этому условию ( $E_1$  задает одновременно точность такого измерения энергии), а  $d$  — ширина пучка (измеряемая по размеру примененной диафрагмы), то  $E_1/d$  — максимально возможная величина отклоняющей силы. Угловое отклонение атомного пучка равно  $E_1 t_1 / dp$ , где  $t_1$  — промежуток времени, в течение которого атомы находятся под воздействием отклоняющей силы,  $p$  — импульс атома в направлении оси пучка. Для того чтобы измерение стало возможным, это отклонение должно иметь по меньшей мере тот же порядок величины, что и естественное расширение пучка вследствие дифракции на диафрагме. Угловое отклонение при дифракции приближенно равно  $\lambda/d$ , если  $\lambda$  — длина волны де Броиля; следовательно,  $\lambda/d \sim E_1 t_1 / dp$ , или, поскольку  $\lambda = \hbar/p$ ,

$$E_1 t_1 \sim \hbar. \quad (2)$$

Это уравнение, соответствует соотношению (1) и показывает, что точность в определении энергии может быть достигнута только за счет соответствующей неточности в определении времени.

\*.) Ср.: W. Pauli, указ. соч., с. 61.

§ 2. Теория Дирака — Иордана. Результаты, полученные в предыдущем разделе, можно было бы объединить и обобщить в следующем утверждении: Для всех понятий, которые в классической теории применяются для описания механической системы, можно точно определить соответствующие аналоги в атомных процессах. Однако эксперименты, которые служат для определения этих аналогов, в случае если мы требуем, чтобы в результате их были одновременно определены обе канонически сопряженные величины, несут в себе неопределенность, связанную именно с опытом. Степень этой неопределенности определяется соотношением (1) (обобщенным на любые канонически сопряженные величины). Само собой напрашивается сравнение квантовой теории со специальной теорией относительности. Согласно теории относительности, понятие «одновременно» нельзя определить иначе, как через эксперименты, в которых существенно знание скорости распространения света. Если бы существовало более «жесткое» определение одновременности, например, при помощи сигналов, распространяющихся с бесконечно большой скоростью, то теория относительности была бы невозможна. Но поскольку таких сигналов не существует и, более того, в определение одновременности уже входит скорость света, то создана почва для постулата *постоянства* этой скорости, и следовательно, данный постулат не противоречит разумному употреблению слов: «положение», «скорость», «время». Аналогично обстоит дело с определением понятий «положение электрона», «скорость» в квантовой теории. Все опыты, которые могут служить для определения этих слов, неизбежно содержат неопределенность, даваемую уравнением (1), хотя они и позволяют точно определить понятия  $p$  и  $q$  в отдельности. Если бы существовали эксперименты, которые одновременно давали возможность более «жесткого», чем предписываемого соотношением (1), определения  $p$  и  $q$ , то квантовая механика была бы невозможна. Эта неопределенность, задаваемая уравнением (1), создает, таким образом, прежде всего возможность того, чтобы были справедливы взаимосвязи, точно выражаемые квантовомеханическими перестановочными соотношениями

$$pq - qp = \frac{\hbar}{2\pi i};$$

она делает это уравнение возможным, позволяя в то же время сохранить физический смысл величин  $p$  и  $q$ .

Для тех физических явлений, для которых квантовотеоретическая формулировка еще неизвестна<sup>1</sup> (например, электродинамика), соотношение (1) является требованием, которое может быть полезным при поиске новых законов. В случае квантовой механики соотношение (1) путем некоторого небольшого обобщения выводится из формулировки Дирака — Иордана. Если мы, определяя положение электрона  $q$  для заданного значения  $\eta$  какого-либо параметра, получим значение  $q'$  с точностью  $q_1$ , то этот факт мы можем выразить при помощи амплитуды вероятности  $S(\eta, q)$ , которая заметно отлична от нуля примерно в интервале от  $q' + q_1$  до  $q' - q_1$ . В частности, можно, например, положить:

$$S(\eta, q) \text{ пропорционально } \exp \left[ -\frac{(q - q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i p'}{\hbar} (q - q') \right]; \quad (3)$$

следовательно,

$$S\bar{S} \text{ пропорционально } e^{-(q - q')^2/q_1^2}.$$

Тогда для соответствующей  $p$  амплитуды вероятности справедливо выражение

$$S(\eta, p) = \int S(\eta, q) S(q, p) dq. \quad (4)$$

Согласно Иордану, для  $S(q, p)$  можно положить

$$S(q, p) = e^{2\pi i pq/h}. \quad (5)$$

Тогда, согласно формуле (4),  $S(\eta, p)$  заметно отлично от нуля лишь для тех значений  $p$ , для которых  $2\pi(p - p')q_1/h$  не превышает существенно единицы. В частности, в случае (3) справедливо

$$S(\eta, p) \text{ пропорционально } \int \exp \left[ \frac{2\pi i(p - p')q}{h} - \frac{(q' - q)^2}{2q_1^2} \right] dq,$$

т. е.

$$S(\eta, p) \text{ пропорционально } \exp \left[ -\frac{(p - p')^2}{2p_1^2} + \frac{2\pi i}{h} q_1(p - p') \right];$$

следовательно,  $S\bar{S}$  пропорционально  $\exp \left[ -\frac{(p - p')^2}{p_1^2} \right]$ , где

$$p_1 q_1 = \frac{h}{2\pi}. \quad (6)$$

Предположение, что  $S(\eta, q)$  задается выражением (3), соответствует, таким образом, экспериментальному факту, что при измерении мы получили значение  $p'$  для  $p$  и значение  $q'$  для  $q$  (с точностью, ограниченной соотношением (6)).

С чисто математической точки зрения характерным для квантовой механики в формулировке Дирака — Иордана является то, что соотношения между  $p, q, E$  и т. д. могут быть записаны в виде уравнений для матриц весьма общего вида таким образом, что любая наперед заданная квантовотеоретическая величина оказывается представленной диагональной матрицей. Возможность такого способа записи становится очевидной, если наглядно представить себе матрицы как тензоры (например, моменты инерции) в многомерных пространствах, связанные друг с другом математическими соотношениями. Оси координатной системы, использованной для выражения этих математических связей, всегда можно совместить с главными осями одного из указанных тензоров. И, наконец, математическую связь между двумя тензорами  $A$  и  $B$  всегда можно представить в виде формул преобразования, которые переводят координатную систему, ориентированную вдоль главных осей тензора  $A$ , в другую, ориентированную вдоль главных осей тензора  $B$ . Эта последняя формулировка отвечает теории Шредингера. По-настоящему «инвариантной», не зависящей ни от какой координатной системы формулировкой квантовой механики следует считать, напротив, способ записи Дирака, использующий  $q$ -числа. Если мы хотим с помощью изложенной математической схемы получить физические результаты, то должны квантовомеханическим величинам, т. е. матрицам (или «тензорам» в многомерном пространстве), сопоставить числа. Это следует понимать в том смысле, что в соответствующем многомерном пространстве произвольно задается некоторое определенное направление (а именно оно определяется характером поставленного эксперимента) и спрашивается, каково «значение» матрицы в этом заданном направлении (например, в нашей наглядной картине — значение момента инерции). Поставленный вопрос имеет однозначный смысл только в случае, если заданное направление совпадает с направлением одной из главных осей рассматриваемой матрицы, и в этом случае на него можно дать точный ответ. Однако и тогда, когда данное направление лишь слегка отклоняется от одной из главных осей матрицы, можно еще с известной неточностью, задаваемой относительным отклонением, с определенной вероятностью ошибкой говорить о «значении» матрицы в заданном направлении. Итак, можно утверждать: каждой квантовотеоретической величине или матрице можно

сопоставить число, которое с определенной вероятной ошибкой задает «значение» этой величины; вероятная ошибка зависит от выбора координатной системы; для любой квантово-теоретической величины существует такая координатная система, в которой вероятная ошибка для этой величины обращается в нуль. Следовательно, из одного определенного эксперимента никогда нельзя получить точных сведений обо всех квантово-теоретических величинах; напротив того, этим опытом все физические величины разделяются, характерным для него образом, на «известные» и «неизвестные» (или: величины известные с большей и меньшей точностью). Результаты двух экспериментов можно только тогда точно получить один из другого, когда в обоих экспериментах физические величины одинаковым образом разделяются на «известные» и «неизвестные» (т. е. когда в обоих экспериментах тензоры в многомерном пространстве, которое мы уже неоднократно использовали в целях наглядности, «рассматриваются» с одного и того же направления). Если в двух экспериментах величины различным образом разделяются на «известные» и «неизвестные», то связь между результатами этих экспериментов может быть надлежащим образом представлена только статистически.

Для того чтобы более основательно обсудить эту статистическую связь, проделаем мысленный эксперимент. Пусть в опыте Штерна — Герлаха атомный пучок проходит вначале через магнитное поле  $F_1$ , которое настолько неоднородно в направлении движения пучка, что «встряхивает» атомы, вызывая заметное число переходов между различными уровнями. Затем пучок в течение некоторого времени движется свободно и на определенном расстоянии от  $F_1$  попадает в другое магнитное поле  $F_2$ , столь же неоднородное, как и  $F_1$ . Пусть имеется возможность измерять с помощью дополнительно налагаемого магнитного поля число атомов в различных стационарных состояниях, между  $F_1$  и  $F_2$  и за областью  $F_2$ . Интенсивность излучения атомов положим равной нулю. Если мы знаем, что до прохождения области  $F_1$  атом находился в состоянии с энергией  $E_n$ , то этот экспериментальный факт можно выразить, сопоставив данному атому волновую функцию (например, в  $p$ -пространстве) с определенной энергией  $E_n$  и неопределенной фазой  $\beta_n$ :

$$S(E_n, p) = \Psi(E_n, p) \exp \left[ -\frac{i2\pi E_n(t + \beta_n)}{\hbar} \right].$$

После прохождения атомом поля  $F_1$  эта волновая функция превратится в другую \*):

$$S(E_n, p) \xrightarrow{F_1} \sum_m c_{nm} \Psi(E_m, p) \exp \left[ -\frac{i2\pi E_m(t + \beta_m)}{\hbar} \right]. \quad (7)$$

Пусть в этой формуле  $\beta_m$  выбраны любым произвольным образом, так чтобы коэффициенты  $c_{nm}$  однозначно определились полем  $F_1$ . Матрица  $c_{nm}$  преобразует значения энергии, имевшиеся до прохождения атомами поля  $F_1$ , в значения, получающиеся после прохождения поля  $F_1$ . Если мы теперь определим, например, с помощью неоднородного магнитного поля стационарные состояния, то с вероятностью  $c_{nm}c_{nm}^*$  найдем, что атом перешел из состояния  $n$  в состояние  $m$ . Установив экспериментально, что атом действительно перешел именно в состояние  $m$ , мы для дальнейших расчетов сопоставим ему не функцию  $\sum_m c_{nm}S_m$ , а новую функцию  $S_m$  с неопределен-

\*) Ср.: P. D. Ira c, Proc. Roy. Soc. A112, 661 (1926); M. Вогн, Zs. Phys. 40, 167 (1926).

ной фазой; констатируя в эксперименте, что атом находится в «состоянии  $m$ », мы тем самым из совокупности всех возможностей ( $c_{nm}$ ) выбираем одну определенную — состояние  $m$ , однако одновременно разрушаем, как будет показано в дальнейшем, все фазовые соотношения, которые еще содержались в коэффициентах  $c_{nm}$ . При прохождении атомного пучка через поле  $F_2$  повторяется вся ситуация, имевшая место при прохождении поля  $F_1$ . Пусть  $d_{nl}$  — коэффициенты матрицы преобразования, превращающей энергию атомов до прохождения поля  $F_2$  в энергию атомов после его прохождения. Если в области между  $F_1$  и  $F_2$  не производилось определения состояния атомов, то собственная функция преобразуется по следующей схеме:

$$S(E_n, p) \xrightarrow{F_1} \sum_m c_{nm} S(E_m, p) \xrightarrow{F_2} \sum_m \sum_l c_{nm} d_{ml} S(E_l, p). \quad (8)$$

Положим  $\sum_m c_{nm} d_{ml} = e_{nl}$ . Если мы экспериментально определим стационарное состояние атома после прохождения  $F_2$ , то с вероятностью  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$  обнаружим его в состоянии  $l$ . Напротив, если мы в промежутке между  $F_1$  и  $F_2$  установили наличие «состояния  $m$ », то вероятность найти атом в «состоянии  $l$ » после прохождения поля  $F_2$  будет выражаться как  $d_{ml} \bar{d}_{ml}$ . Повторяя многократно весь эксперимент (при этом *каждый раз* определяется состояние атома между  $F_1$  и  $F_2$ ), мы, таким образом, будем наблюдать атом в состоянии  $l$  после прохождения поля  $F_2$  с относительной частотой появления  $Z_{nl} = \sum_m c_{nm} \bar{c}_{nm} d_{ml} \bar{d}_{ml}$ . Это выражение не совпадает с  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$ . Поэтому Иордан (цит. раб.) и говорил об «интерференции вероятностей». Но я не хотел бы присоединяться к этому мнению. Ведь с физической точки зрения те два эксперимента, в которых определяется  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$  или  $Z_{nl}$ , существенно различаются между собой. В одном случае атом, проходя между  $F_1$  и  $F_2$ , не испытывает никакого возмущения, в другом — подвергается воздействию прибора, дающего возможность определить стационарное состояние. Наличие этого прибора приводит к тому, что «фаза» атома изменяется на величину, которая принципиально не поддается контролю, так же как в случае определения положения электрона изменяется его импульс (ср. § 1). Магнитное поле, используемое для определения состояний атома между  $F_1$  и  $F_2$ , изменяет собственные значения энергии  $E$ ; при наблюдении траектории атомного пучка (я имею в виду, скажем, снимки в камере Вильсона) происходит торможение атомов статистически по-разному и неконтролируемым образом и т. д. Вследствие этого результирующая матрица преобразования  $e_{nl}$  (переводящая значения энергии атомов до вхождения в поле  $F_1$  в значения их энергии после выхода из поля  $F_2$ ) уже не задается через  $\sum_m c_{nm} d_{ml}$ , а каждый член суммы умножается на неизвестный фазовый множитель. Следовательно, мы можем ожидать только то, что в результате всех этих случайных изменений фазы среднее значение  $e_{nl} \bar{e}_{nl}$  равно  $Z_{nl}$ . Простой расчет показывает, что это действительно так. Таким образом, мы можем с помощью определенных статистических правил по результатам одного эксперимента делать заключения о возможных результатах другого эксперимента. Сам же этот другой эксперимент выбирает из всей совокупности возможностей одну вполне определенную и ограничивает тем самым возможности для всех последующих экспериментов. Такое толкование уравнения для матрицы преобразования  $S$ , или волнового уравнения Шредингера, возможно толь-

ко потому, что сумма его решений снова представляет собой решение. В этом мы усматриваем глубокий смысл линейности уравнений Шредингера; поэтому их можно толковать только как уравнения для воли в фазовом пространстве, и поэтому любая попытка заменить эти уравнения нелинейными, например, в релятивистском случае (в задаче многих электронов) представляется нам безнадежной.

§ 3. Переход от микро- к макромеханике. Мне кажется, что проведенный в предыдущих разделах анализ слов: «положение электрона», «скорость», «энергия» и т. д., настолько полно разъяснил понятия квантовотеоретической кинематики и механики, что стало возможным наглядно представить себе с точки зрения квантовой механики также и макроскопические процессы. Переход от микро- к макромеханике уже обсуждался Шредингером \*); однако я не думаю, что рассуждения Шредингера соответствуют сути дела, и вот почему: согласно Шредингеру, сумма собственных колебаний, соответствующих высоко возбужденным состояниям, должна образовывать не слишком большой волновой пакет, который, периодически меняя свой размер, осуществляет периодическое движение классического «электрона». Против этого можно сделать следующее возражение: если бы волновой пакет обладал описанными здесь свойствами, то испускаемое атомом излучение можно было бы разложить в ряд Фурье, в котором частоты обертонов являлись целыми кратными от основной частоты. Однако, согласно квантовой механике, частоты испускаемых атомом спектральных линий никогда не бывают целыми кратными от основной частоты, за исключением особого случая гармонического осциллятора. Рассуждения Шредингера, таким образом, применимы лишь к рассмотренному им случаю гармонического осциллятора, *во всех других* случаях волновой пакет со временем расплывается по всему пространству в окрестности атома. Чем выше возбужденное состояние атома, тем медленнее происходит это расплывание волнового пакета, однако, спустя достаточно большой промежуток времени, он все же расплывается. Приведенный выше аргумент, касающийся испускаемого атомом излучения, можно прежде всего выдвинуть против любой попытки добиться непосредственного перехода от квантовой механики к классической для больших квантовых чисел. Поэтому ранее пытались обойти этот аргумент ссылками на естественную излучательную ширину стационарных состояний. Несомненно, эти попытки неправомерны, так как, во-первых, уже в случае атома водорода такой аргумент не работает из-за слабости излучения для высоких уровней энергии, во-вторых, переход от квантовой механики к классической должен быть понятен и без привлечения электродинамики. На эти известные трудности, стоящие на пути попыток непосредственно связать квантовую теорию с классической, уже ранее многократно указывал Бор \*\*). Мы только потому столь подробно опять говорим о них, что, по-видимому, в последнее время об этом забыли.

Я считаю, что возникновение классической «траектории» можно четко определить следующим образом: «Траектория» возникает только благодаря тому, что мы ее наблюдаем. Пусть, например, атом находится в 1000-м возбужденном состоянии. Размеры траектории здесь уже относительно велики, так что в соответствии с § 1 для определения положения электрона достаточно сравнительно длинноволновый свет. Если положение электрона должно быть определено не слишком неточно, то, вследствие отдачи при эффекте Комptonа, атом после столкновения сможет

\*) E. Schrödinger, *Naturwissenschaften* 14, 664 (1926) (имеется перевод в «Избранных трудах по квантовой механике», М., «Наука», 1976, с. 51.—Ред.)

\*\*) N. Bohr, *Grundpostulate der Quantentheorie* (указ. соч.) (имеется перевод в «Избранных научных трудах», т. I, М., «Наука», 1970. с. 482.—Ред.).

находиться в каком-либо состоянии, скажем, между 950-м и 1050-м. Одновременно по эффекту Доплера можно сделать заключение о величине импульса электрона с точностью, определяемой соотношением (1). Установленный таким способом экспериментальный факт можно описать при помощи волнового пакета или, лучше сказать, пакета вероятностей в  $q$ -пространстве, размер которого задается длиной волны использованного света. Этот пакет вероятностей должен быть составлен в основном из собственных функций, соответствующих всем состояниям между 950-м и 1050-м, и ему должен соответствовать аналогичный пакет в  $p$ -пространстве. Пусть через некоторое время проводится новое определение положения с той же точностью. Результаты этого определения, согласно § 2, можно представить только статистически; в качестве вероятных положений принимаются во внимание все положения с вычисляемой вероятностью, лежащие внутри уже расплывшегося волнового пакета. Дело обстояло бы совершенно аналогично и в классической теории, поскольку в ней результат вторичного измерения положения можно было бы представить только статистически из-за ненадежности результатов первого эксперимента; траектории системы, рассчитанные по классической теории, расплывались бы совершенно аналогично волновому пакету. Конечно, даже статистические законы в квантовой механике и в классической теории различны. Второе определение положения выбирает из всей совокупности возможностей одно определенное « $q$ » и ограничивает возможности для всех последующих определений. После второго определения положения результаты последующих измерений можно вычислить, только вновь связав с электроном «меньший» волновой пакет размером  $\lambda$  ( $\lambda$  — длина волны света, использованного для наблюдения). Таким образом, каждое измерение положения редуцирует волновой пакет к его первоначальному размеру  $\lambda$ . «Значения» переменных  $p$  и  $q$  в течение всех опытов известны с определенной точностью. Внутри этих границ точности величины  $p$  и  $q$  подчиняются классическим уравнениям движения, что можно непосредственно заключить из квантовомеханических законов

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}. \quad (9)$$

Но, как уже было сказано, траектория может быть рассчитана из начальных условий только статистически, что можно рассматривать как следствие принципиальной неточности начальных условий. Статистические законы различны для квантовой механики и классической теории; при известных условиях это может привести к грубым макроскопическим различиям между классической и квантовой теориями. Прежде чем обсуждать пример такого различия, я хотел бы на простой механической системе — движении материальной точки в отсутствие сил — показать, как следует математически сформулировать обсуждавшийся выше переход к классической теории. Уравнения движения (для одномерного случая) гласят:

$$H = \frac{1}{2m} p^2, \quad \dot{q} = \frac{1}{m} p, \quad \dot{p} = 0. \quad (10)$$

Поскольку в отсутствие внешних сил, зависящих от времени, само время может рассматриваться как параметр (как «с-число»), то решение этих уравнений гласит:

$$q = \frac{1}{m} pt + q_0, \quad p = p_0, \quad (11)$$

где  $p_0$  и  $q_0$  — импульс и положение для момента времени  $t = 0$ . Пусть в момент времени  $t = 0$  (см. уравнения (3) — (6)) измерены значения  $q_0 =$

$= q'$  с точностью  $q_1$  и  $p_0 = p'$  с точностью  $p_1$ . Для того чтобы на основании «значений»  $p_0$  и  $q_0$  сделать заключение о «значении»  $q$  в момент времени  $t$ , должна быть найдена, согласно Дираку и Иордану, такая функция преобразования, которая все матрицы, где  $q_0$  выступает как диагональная матрица, переводит в такие, где  $q$  выступает как диагональная матрица. В матричной схеме, в которой  $q_0$  выступает как диагональная матрица,  $p_0$  можно заменить на оператор  $\frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_0}$ . Согласно Дираку (указ. соч., уравнение (11)), для искомой амплитуды преобразования  $S(q_0, q)$  тогда справедливо дифференциальное уравнение

$$\left( \frac{t}{m} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial}{\partial q_0} + q_0 \right) S(q_0, q) = q S(q_0, q), \quad (12)$$

$$\frac{t}{m} \frac{h}{2\pi i} \frac{\partial S}{\partial q_0} = (q_0 - q) S(q_0, q),$$

$$S(q_0, q) = \text{const} \cdot \exp \left[ \frac{2\pi i m \int (q - q_0) dq_0}{\hbar t} \right]. \quad (13)$$

Итак  $S\bar{S}$  не зависит от  $q_0$ , т. е. если в момент времени  $t = 0$   $q_0$  известно точно, то в любой момент времени  $t > 0$  все значения  $q$  равновероятны, иначе говоря, вероятность того, что  $q$  лежит в конечном интервале, вообще равна нулю. Это совершенно ясно и исходя из наглядных представлений. Ведь точное определение  $q_0$  ведет к бесконечно большой комптоновской отдаче. Естественно, что то же самое было бы справедливо для любой произвольной механической системы. Но если в момент времени  $t = 0$   $q_0$  было известно только с некоторой точностью  $q_1$  и  $p_0$  с точностью  $p_1$  (ср. уравнение (3)), то

$$S(\eta, q_0) = \text{const} \cdot \exp \left[ -\frac{(q_0 - q')^2}{2q_1^2} - \frac{2\pi i}{\hbar} p' (q_0 - q') \right],$$

и функция вероятности для  $q$  вычисляется по формуле

$$S(\eta, q) = \int S(\eta, q_0) S(q_0, q) dq_0.$$

Отсюда получается

$$S(\eta, q) = \text{const} \cdot \int \exp \left\{ \frac{2\pi i m}{\hbar t} \left[ q_0 \left( q - \frac{t}{m} p' \right) - \frac{q_0^2}{2} \right] - \frac{(q' - q_0)^2}{2q_1^2} \right\} dq_0. \quad (14)$$

Если ввести обозначение

$$\beta = \frac{th}{2\pi m q_1^2}, \quad (15)$$

то экспонента в (14) приведется к виду

$$-\frac{1}{2q_1^2} \left\{ q_0^2 \left( 1 + \frac{i}{\beta} \right) - 2q_0 \left[ q' + \frac{i}{\beta} \left( q' - \frac{t}{m} p' \right) \right] + (q')^2 \right\}.$$

Член, содержащий  $(q')^2$ , можно ввести в константу (множитель, не зависящий от  $q$ ) и после интегрирования получается

$$S(\eta, q) = \text{const} \cdot \exp \left\{ \frac{1}{2q_1^2} \frac{(q' + (i/\beta)(q - (t/m)p'))^2}{1 + (i/\beta)} \right\} =$$

$$= \text{const} \cdot \exp \left[ -\frac{(q - (t/m)p' - i\beta q')^2 (1 - (i/\beta))}{2q_1^2 (1 + \beta^2)} \right]. \quad (16)$$

Отсюда следует

$$S(r, q) \overline{S(\eta, q)} = \text{const} \cdot \exp \left[ -\frac{(q - (t/m)p' - q')^2}{q_1^2 (1 + \beta^2)} \right]. \quad (17)$$

Следовательно, в момент времени  $t$  электрон находится в положении  $(t/m) p' + q'$  с точностью  $q_1 \sqrt{1 + \beta^2}$ . «Волновой пакет» или лучше сказать «пакет вероятностей» увеличился в  $\sqrt{1 + \beta^2}$  раз. Согласно (15),  $\beta$  пропорционально  $t$ , обратно пропорционально массе (что вполне приемлемо) и обратно пропорционально  $q_1^2$ . Слишком большая точность в определении  $q_0$  имеет следствием большую неточность в определении  $p_0$ , и поэтому приводит также и к большой неточности в определении  $q$ . Параметр  $\eta$ , который мы ввели выше из формальных соображений, можно было бы опустить во всех формулах, так как в расчете он не участвует.

Различия между классическими статистическими законами и квантово-теоретическими при определенных условиях ведут к грубым макроскопическим различиям результатов, даваемых обеими теориями. В качестве примера этого мы коротко обсудим случай отражения потока электронов от дифракционной решетки. Если постоянная дифракционной решетки имеет тот же порядок, что и длина волны де Броиля для электрона, то отражение происходит в определенных дискретных пространственных направлениях, так же как и отражение света от дифракционной решетки. Грубо макроскопически классическая теория дает другой ответ. Но, несмотря на это, по траектории одного-единственного электрона мы не можем никак установить, имеется ли противоречие с классической теорией. Мы могли бы это противоречие обнаружить в случае, если бы удалось направить электрон на определенную точку штриха дифракционной решетки, и при этом оказалось бы, что отражение там происходит неклассическим образом. Однако если мы хотим настолько точно определить положение электрона, чтобы суметь сказать, на какую точку штриха он попадет, то в результате такого определения положения электрона он приобретает большую скорость, длина волны де Броиля для него становится настолько мала, что теперь отражение может и будет в этом приближении происходить в направлении, предписываемом классическими законами, и не будет при этом противоречить квантовой теории.

**§ 4. Обсуждение некоторых частных мысленных экспериментов.** Согласно рассматриваемой попытке наглядного толкования квантовой теории, должна иметься возможность установить путем измерения моментов времени переходов — «квантовых скачков», примерно так же конкретно, как энергии стационарных состояний. Точность, с которой такой момент времени может быть определен, задается, согласно уравнению (2), отношением  $\hbar/\Delta E^*$ , если  $\Delta E$  означает изменение энергии при квантовом скачке. Мы представляем себе, примерно, следующий эксперимент: атом, который в момент времени  $t = 0$  находится в состоянии 2, мог бы путем излучения перейти в нормальное состояние 1. Тогда по некоторой аналогии с уравнением (7) атому может быть сопоставлена собственная функция вида

$$S(t, p) = e^{-\alpha t} \psi(E_2, p) e^{-2\pi i E_2 t/\hbar} + \sqrt{1 - e^{-2\alpha t}} \psi(E_1, p) e^{-2\pi i E_1 t/\hbar}.$$

если мы примем, что затухание излучения учитывается в собственной функции множителем вида  $\exp(-\alpha t)$  (истинная зависимость, возможно, не так проста). Для измерения энергии атома мы пропускаем его через неоднородное магнитное поле, как это обычно делается в опыте Штерна и Герлаха, однако атомный пучок должен проходить через это неоднородное поле на достаточно большом участке. Соответствующее ускорение может быть измерено, если, например, разбить весь путь, проходимый

\*) Ср.: W. Pauli, указ. соч., с. 12.

атомным пучком, на малые участки и на границах каждого из них определить отклонение пучка. В зависимости от скорости атомного пучка разделению пути атома на малые участки соответствует разделение на малые интервалы времени  $\Delta t$ . Согласно уравнению (2) § 1, интервалу  $\Delta t$  соответствует точность в определении энергии  $h/\Delta t$ . Вероятность получить при измерении определенное значение энергии  $E$  задается непосредственно функцией  $S(p, E)$  и, следовательно, в интервале от  $n\Delta t$  до  $(n+1)\Delta t$  вычисляется как

$$S(p, E) = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} S(p, t) e^{2\pi i Et/h} dt.$$

Если к моменту времени  $(n+1)\Delta t$  будет установлено, что «атом находится в состоянии 2», то для всех последующих моментов времени атому надо сопоставлять уже не собственную функцию (18), а такую, которая получается из (18) заменой  $t$  на  $t - (n+1)\Delta t$ . Напротив, если будет установлено, что «атом находится в состоянии 1», то, начиная с этого момента, ему можно сопоставить собственную функцию

$$\psi(E_1, p) e^{-2\pi i E_1 t/h}.$$

Итак, в течение ряда интервалов  $\Delta t$  будет сначала наблюдаться «состояние 2», а затем продолжительное время — «состояние 1». Для того чтобы была еще возможность различить оба состояния,  $\Delta t$  не должно быть меньше, чем  $\frac{h}{\Delta E}$ . С такой точностью, следовательно, может быть установлен момент времени перехода. Мы рассматриваем эксперимент описанного выше типа вполне в духе старого понимания квантовой теории, обоснованного Планком, Эйнштейном и Бором, когда говорим о дискретном изменении энергии. Поскольку такой эксперимент принципиально выполним, то должно быть возможно единое мнение о его исходе.

В боровских основных постулатах квантовой теории энергия атома, так же как и величина переменной действия  $J$ , имеет то преимущество перед другими подлежащими определению величинами (положение электрона и т. д.), что всегда может быть задано ее численное значение. Это преимущественное положение, занимаемое энергией среди других квантовомеханических величин, обязано, однако, только тому обстоятельству, что в замкнутых системах энергия есть интеграл уравнений движения (для матрицы энергии справедливо условие  $E = \text{const}$ ); напротив, для незамкнутых систем энергия ничем не выделяется среди других квантовомеханических величин. В частности, можно указать эксперименты, в которых возможно точно измерить фазы атома  $w$ , однако энергия при этом остается принципиально неопределенной в соответствии с соотношением  $Jw = -wJ = h/2\pi i$  или  $J_1 w_1 \sim h$ . Пример такого эксперимента представляет резонансная флуоресценция. Если облучить атом собственной частотой, скажем,  $v_{12} = (E_2 - E_1)/h$ , то он будет колебаться в фазе с внешним излучением, при этом принципиально нет никакого смысла спрашивать, в каком состоянии,  $E_1$  или  $E_2$ , колеблется атом. Связь между фазой атома и фазой внешнего излучения можно определить, например, по соотношению фаз многих атомов между собой (опыты Буда). Если же хотят отказаться от экспериментов с излучением, то можно также измерить соотношение между фазами, произведя (на большом числе атомов) точные определения, в смысле § 1, положения электрона в различные моменты времени по отношению к фазе облучающего света. Отдельному атому приближенно

можно сопоставить «волновую функцию»

$$S(q, t) = c_2 \psi_2(E_2, q) \exp \left[ -\frac{2\pi i (E_2 t + \beta)}{\hbar} \right] + \\ + \sqrt{1 - c_2^2} \psi_1(E_1, q) \exp \left( -\frac{2\pi i E_1 t}{\hbar} \right). \quad (19)$$

Здесь  $c_2$  зависит от интенсивности, а  $\beta$  — от фазы облучающего света. Таким образом, вероятность определенного положения  $q$  равна

$$S(q, t) \overline{S(q, t)} = c_2^2 \psi_2 \bar{\psi}_2 + (1 - c_2^2) \psi_1 \bar{\psi}_1 + \\ + c_2 \sqrt{1 - c_2^2} \left( \psi_2 \bar{\psi}_1 \exp \left\{ -\frac{2\pi i}{\hbar} [(E_2 - E_1) t + \beta] \right\} + \right. \\ \left. + \bar{\psi}_2 \psi_1 \exp \left\{ +\frac{2\pi i}{\hbar} [(E_2 - E_1) t + \beta] \right\} \right). \quad (20)$$

Периодический член в формуле (20) может быть экспериментально отделен от непериодического, так как определения положения могут быть проведены при различных фазах облучающего света.

Бор предложил известный мысленный эксперимент. В опыте Штерна и Герлаха в определенной точке пути атомного пучка под воздействием внешнего света в атомах сначала возбуждается резонансная флуоресценция. Пройдя некоторый отрезок пути, атомы пересекают неоднородное магнитное поле; испускаемое ими излучение можно наблюдать в течение всего пути как до, так и после прохождения пучком магнитного поля. До того, как атомы оказываются в магнитном поле, наблюдается обыкновенная резонансная флуоресценция, т. е. по аналогии с теорией дисперсии следует принять, что все атомы излучают сферические волны в фазе с падающим светом. Это последнее представление находится прежде всего в противоречии с теми выводами, к которым приводит грубое применение теории квантов света или основных квантово-теоретических правил: ведь из них следовало бы сделать заключение, что лишь небольшое число атомов при поглощении кванта света поднимется в «верхнее состояние», и, таким образом, общее резонансное излучение приходило бы от немногих интенсивно излучающих возбужденных центров. Поэтому ранее напрашивался вывод: понятие о квантах света можно привлекать здесь только для вычисления баланса энергии и импульса, а «в действительности» все атомы излучают в нижнем состоянии когерентные сферические волны малой амплитуды. Но не может быть никакого сомнения, что атомный пучок, покинув магнитное поле, разделится на два пучка, из которых один содержит атомы в верхнем, а второй — в нижнем состоянии. Если бы теперь излучали атомы, находящиеся в нижнем состоянии, то это было бы грубым нарушением закона сохранения энергии, так как вся энергия возбуждения сосредоточена в пучке, содержащем атомы в верхнем состоянии. Более того, не может быть никакого сомнения, что за магнитным полем свет, и притом некогерентный, будет испускаться небольшим числом интенсивно излучающих атомов в верхнем состоянии. Как показал Бор, в этом мысленном эксперименте особенно отчетливо проявляется, насколько надо иногда быть осторожным, применяя понятие «стационарное состояние». Обсуждение мысленного эксперимента Бора можно без затруднений провести на основании развивающегося в этой работе толкования квантовой теории. Фазы атомов, находящихся во внешнем поле излучения, точно определены, поэтому нет смысла говорить о значении энергии атома. Поскольку мы интересуемся когерентными свойствами излучения, то даже после того, как атом покинул поле излучения, нельзя было бы говорить, что он находится в определенном стационарном состоянии. Но мы можем

поставить эксперименты для выяснения, в каком состоянии находится атом; результат такого эксперимента можно представить только статистически. Реально подобный эксперимент проводится с помощью неоднородного магнитного поля. После прохождения атомами магнитного поля величина их энергии — определенная, следовательно, фазы — неопределенные. Излучение теперь происходит некогерентным образом и источником его служат только атомы, находящиеся в *верхнем* состоянии. Магнитное поле определяет энергию и поэтому нарушает соотношение между фазами. Мысленный эксперимент Бора является прекрасным объяснением того факта, что «в действительности» энергия атома также не число, а матрица. Закон сохранения справедлив для матрицы энергии и, следовательно, для величины энергии с той точностью, с которой, смотря по обстоятельствам, эта величина измеряется. Математически нарушение соотношения между фазами можно проследить, скажем, следующим образом: если  $Q$  — координаты центра тяжести атома, то вместо собственной функции (19) атому сопоставляется собственная функция вида

$$S(Q, t) S(q, t) = S(Q, q, t), \quad (21)$$

где  $S(Q, t)$  — функция, которая (подобно  $S(\eta, q)$  в (16)) отлична от нуля только в малой окрестности некоторой точки в  $Q$ -пространстве и распространяется с той же скоростью, что и атом, в направлении движения пучка. Вероятность относительной амплитуды  $q$  для какого-либо значения  $Q$  дается интегралом по  $Q$  от  $S(Q, q, t) \bar{S}(Q, q, t)$ , т. е. формулой (20). Однако собственная функция (21) изменяется в магнитном поле вычисляемым образом. Вследствие того, что атомы, находящиеся в верхнем и нижнем состояниях, после прохождения магнитного поля отклоняются по-разному, собственная функция будет иметь вид

$$S(Q, q, t) = c_2 S_2(Q, t) \psi_2(E_2, q) \exp\left[\frac{2\pi i(E_2 t + \beta)}{\hbar}\right] + \\ + \sqrt{1 - c_2^2} S_1(Q, t) \psi_1(E_1, q) \exp\left(\frac{2\pi i E_1 t}{\hbar}\right). \quad (22)$$

$S_1(Q, t)$  и  $S_2(Q, t)$  будут функциями в  $Q$ -пространстве, которые отличны от нуля только в малой окрестности некоторой точки; однако эта точка иная для  $S_1$ , чем для  $S_2$ ; следовательно,  $S_1 S_2$  — всюду нуль. Отсюда вероятность относительной амплитуды  $q$  и некоторого определенного значения  $Q$  будет

$$S(Q, q, t) \bar{S}(Q, q, t) = c_2^2 S_2 \bar{S}_2 \psi_2 \bar{\psi}_2 + (1 - c_2^2) S_1 \bar{S}_1 \psi_1 \bar{\psi}_1. \quad (23)$$

Периодический член, имевшийся в формуле (20), исчез, и тем самым исчезла возможность измерения соотношения между фазами. Результат статистического определения положения будет всегда одним и тем же, независимо от того, при какой фазе падающего света оно производится. Мы можем предположить, что эксперименты с излучением, теория которого еще не разработана, приведут к тем же результатам для соотношений между фазами атомов и фазой падающего света.

В заключение необходимо еще рассмотреть связь уравнения (2)  $E_1 t_1 \sim \hbar$  с проблемами, обсуждавшимися Эренфестом и другими учеными \*), исходя из принципа соответствия Бора, в двух важных работах \*\*). Эренфест и Толмен говорят о «слабом квантования», если квантованное периодическое движение прерывается вследствие квантовых скачков или

\*) P. Ehrenfest, G. Breit, Zs. Phys. 9, 207 (1922); P. Ehrenfest, R. C. Tolman, Phys. Rev. 24, 287 (1924). См. также дискуссию в указ. соч. Н. Бора «Основные посгутаты квантовой теории». (Zs. Phys. 13, 117 (1923). — Ред.).

\*\*) На эту связь обратил мое внимание г-н В. Паули.

других возмущений за времена, которые не очень велики по сравнению с периодом колебаний системы. В этом случае должны появиться не только точные квантованные значения энергии, но и такие, которые не слишком сильно отличаются от квантованных и имеют меньшую априорную вероятность появления, которую можно качественно определить. В квантовой механике такое поведение может быть истолковано следующим образом: Ввиду того, что энергия действительно изменяется либо под влиянием внешнего возмущения, либо вследствие квантовых скачков, каждое измерение энергии, для того чтобы оно давало однозначный ответ, должно производиться в промежутке времени между двумя возмущениями. Этим задается верхняя граница для  $t_1$  в смысле, указанном в § 1. Таким образом, мы измеряем значение энергии квантового состояния  $E_0$  только лишь с точностью  $E_1 \sim \hbar/t_1$ . При этом принципиально не имеет смысла вопрос, «действительно» ли система принимает значения энергии  $E$ , отличные от  $E_0$ , с соответственно уменьшающимся статистическим весом, или причиной их появления в эксперименте является только неточность наших измерений. Если  $t_1$  меньше периода колебаний системы, то теперь не имеет смысла говорить о дискретных стационарных состояниях или о дискретных значениях энергии.

Эренфест и Брейт (указ. соч.) обращают внимание на следующий парадокс в похожем случае. Пусть в роторе, который мы можем себе представить, например, как шестеренку, предусмотрено устройство, позволяющее после  $f$  оборотов колеса изменить направление вращения на противоположное. Пусть, например, шестеренка соединена с зубчатой рейкой, которая в свою очередь имеет возможность двигаться прямолинейно между двумя колодками; после определенного количества оборотов шестеренки колодки заставляют рейку, а вместе с ней и колесо сменить направление движения на обратное. Истинный период  $T$  движения системы велик по сравнению с временем одного оборота шестеренки  $t$ ; соответственно дискретные уровни энергии расположены близко друг к другу и тем ближе, чем больше  $T$ . Поскольку с точки зрения последовательной квантовой теории все стационарные состояния имеют одинаковый статистический вес, то при достаточно большом  $T$  практически будут встречаться одинаково часто все значения энергии, в противоположность тому, что можно было бы ожидать для ротора. Этот парадокс вначале еще более усиливается, если рассматривать его с нашей точки зрения. А именно, чтобы установить, будет ли энергия системы принимать только дискретные значения, соответствующие ротору (или принимать их особенно часто), либо она с одинаковой вероятностью будет принимать все возможные значения (т. е. значения, соответствующие малым интервалам энергии  $\hbar/T$ ), достаточно, чтобы время измерения  $t_1$  было мало по сравнению с  $T$  (но  $\gg t$ ). Это означает, что хотя при таком измерении большой период никак не проявляется, его присутствие, как кажется, выражается в том, что могут появиться все возможные значения энергии. Мы придерживаемся такого мнения, что подобные эксперименты, имеющие целью определить общую энергию системы, *действительно* должны были бы с одинаковой вероятностью дать все возможные значения энергии, и ответственность за этот результат не большой период  $T$ , а прямолинейно движущаяся рейка. Даже если система уже находится в некотором состоянии, энергия которого соответствует квантовым уровням ротора, то под влиянием внешних сил, действующих на рейку, система может быть легко переведена в состояния, не соответствующие квантованию ротора \*). Связанная

\*) Согласно Эренфесту и Брейту, это *не* может произойти или будет происходить крайне *редко* под влиянием сил, действующих на само колесо.

система ротатор — рейка обладает совершенно другими свойствами периодичности, чем сам ротатор. Можно сказать, что решение парадокса заключается в следующем: если мы хотим измерить энергию только одного ротатора, то должны прежде всего убрать связь между ним и рейкой. Если масса рейки достаточно мала, то по классической теории разъединение ротатора и рейки может не вызвать изменения энергии, поэтому энергия полной системы могла бы быть приравнена (при малой массе рейки) энергии ротатора. В квантовой механике энергия взаимодействия рейки и колеса по меньшей мере того же порядка, что и разность энергий между уровнями энергии ротатора (даже при малой массе рейки для упругого взаимодействия между ней и колесом сохраняется большая нулевая энергия!). При разъединении рейки и колеса для каждого из них восстанавливаются из значения энергии, соответствующие квантовой теории. Итак, поскольку мы можем измерять *отдельно* значения энергии ротатора, то мы будем всегда с точностью, задаваемой условиями эксперимента, находить значения энергии, соответствующие квантовой теории. Но даже при исчезающей малой массе рейки энергия *связанной* системы отличается от энергии ротатора; эта энергия может принимать с равной вероятностью *все* возможные значения (допускаемые квантованием, связанным с периодом  $T$ ).

Квантовотеоретические кинематика и механика существенно отличаются от привычных. Однако применимость классических кинематических и механических понятий не может быть выведена ни из законов нашего мышления, ни из опыта. Мы вправе сделать такое заключение на основании соотношения (1)  $p_1 q_1 \sim h$ . Поскольку импульс, положение, энергия и т. д. для электрона — точно определенные понятия, то нас не должен смущать чисто качественный характер фундаментального соотношения (1). Кроме того, поскольку во всех простых случаях мы можем качественно представить себе экспериментальные следствия из теории, то не следует более считать квантовую механику абстрактной и лишенной наглядности наукой \*). Разумеется, если мы с этим согласимся, то хотелось бы из наглядных основ, т. е. по существу из соотношения (1) непосредственно вывести также и количественные законы квантовой механики. Поэтому Иордан попытался истолковать уравнение

$$S(qq'') = \int S(qq') S(q'q'') dq'$$

как соотношение между вероятностями. Однако мы не можем присоединиться к этому истолкованию (см. § 2). Напротив, мы полагаем, что количественные законы пока могут быть поняты, исходя из наглядных основ, только если использовать принцип максимальной простоты. Если, например, координата  $X$  электрона не является больше «числом», как можно заключить экспериментально из соотношения (1), то наиболее простым мыслимым предположением (которое не противоречит уравнению (1)) будет утверждение, что эта координата  $X$  — диагональный член матрицы, у которой наличие недиагональных членов выражается в появлении неопределенности, или после преобразований эти члены проявляются

\*) Шрёдингер называет квантовую механику формальной теорией, отпугивающей и даже отталкивающей отсутствием наглядности и абстрактностью. Конечно, невозможно переоценить того глубокого математического (и постольку наглядного) проникновения в сущность квантовомеханических законов, которое дала нам теория Шрёдингера. Однако в принципиальных физических вопросах общедоступная наглядность волевой механики увела нас, по моему мнению, с прямой дороги, проложенной работами Эйнштейна и де Броиля, с одной стороны, и работами Бора и квантовой механикой, с другой.

иными способами (ср., например, § 4). Утверждение, что «в действительности» скорость в направлении  $\hat{X}$  не число, а диагональный член матрицы, возможно, не более абстрактно и не более лишено наглядности, чем утверждение, что напряженность электрического поля «в действительности» есть временная часть антисимметричного тензора в пространстве — времени. Слово «в действительности» будет здесь так же достаточно и так же мало оправдано, как при любом математическом описании природных процессов. Если допустить, что все величины в квантовой теории «в действительности» — матрицы, то вывод количественных закономерностей может быть произведен без затруднений.

Если считать, что сделанная здесь попытка истолкования квантовой механики в основных пунктах уже верна, то можно позволить себе в нескольких словах остановиться на ее принципиальных следствиях. Мы не считаем, что квантовая теория, в противоположность классической, является по существу статистической теорией в том смысле, что на основании точных данных можно делать лишь статистические выводы. Ведь против такого утверждения говорят, например, результаты известных опытов Гейгера и Боте. Более того, во всех случаях, когда в классической теории справедливы соотношения между величинами, действительно поддающимися точным измерениям, аналогичные соотношения справедливы также и в квантовой теории (законы сохранения импульса и энергии). На самом деле, однако, в жесткой формулировке закона причинности, гласящей: «Если мы точно знаем настоящее, мы можем вычислить будущее», ложной является не вторая часть, а предпосылка. Мы принципиально не можем узнать настоящее во всех деталях. Поэтому любое наблюдение есть выбор из некоторой совокупности возможностей и ограничение возможного в будущем. Поскольку статистический характер квантовой теории так тесно связан с неточностью любых восприятий, то можно было бы соблазниться предположением, что за реально воспринимаемым статистическим миром скрывается еще один «действительный» мир, в котором действует закон причинности. Мы настойчиво подчеркиваем, что такие спекуляции кажутся нам бесплодными и бессмысленными. Физика должна только формально описывать связь между восприятиями. Более того, истинное положение вещей можно еще лучше охарактеризовать следующим образом: так как все эксперименты подчинены законам квантовой механики и тем самым уравнению (1), то именно квантовая механика окончательно установила несправедливость закона причинности.

*Дополнение при корректуре.* После того, как данная работа была завершена, новые исследования, проведенные Бором, привели к точкам зрения, допускающим существенное углубление и уточнение анализа квантовомеханических соотношений, который я пытался произвести в моей статье. В этой связи Бор обратил мое внимание на то, что в некоторых рассуждениях, имеющихся в настоящей работе, я упустил существенные моменты. Прежде всего неопределенность при наблюдениях не основана исключительно на существовании дискретностей, но непосредственно связана с требованием, чтобы одновременно удовлетворялись результаты различных опытов, описываемых корпускулярной теорией, с одной стороны, и волновой теорией, с другой. Например, при использовании в мысленных экспериментах  $\gamma$ -лучевого микроскопа следует учесть неизбежное расхождение пучка лучей; именно вследствие него при измерении положения электрона направление отдачи в эффекте Комptonа может быть определено лишь с некоторой неточностью, которая затем приводит к соотношению (1). Далее, недостаточно подчеркнуто, что простая теория эффекта Комptonа применима строго лишь к свободным электронам. Отсюда

следует, что нужно быть осторожным при применении соотношения неопределенностей, в частности, как показал проф. Бор, это существенно при всестороннем обсуждении проблемы перехода от микро- к макромеханике. Наконец, наши рассуждения по поводу резонансной флуоресценции не совсем корректны, так как связь между фазой света и фазой движения электронов не так проста, как мы принимали. Я сердечно благодарен проф. Бору за предоставленную мне возможность изучить и обсудить (еще в процессе возникновения) его упомянутые выше исследования, которые вскоре будут опубликованы в работе об основных понятиях квантовой теории.

Институт теоретической физики  
Копенгагенского университета