1977 г. Июль

Том 122, вып. 3

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.184.27

ШТАРКОВСКОЕ УШИРЕНИЕ ЛИНИЙ ВОДОРОДА В ПЛАЗМЕ

В. С. Лисица

СОДЕРЖАНИЕ

1.	Введение	449
2.	«Старая» адиабатическая теория уширения	451
3.	Статическая теория Хольцмарка. Плазменное микрополе	458
4.	Учет теплового движения ионов	462
5.	Ударное приближение. Профиль водородной линии при фиксированном	
	ионном поле	466
6.	Точное решение задачи об уширении в бинарном приближении	471
7.	Совместное уширение ионами и электронами	475
8.	Утирение линий водородоподобных ионов	478
9.	Квантовый подход к проблеме уширения	481
10.	Численные расчеты. Сравнение с экспериментом	486
11.	Заключение	492
Циз	тированная литература	494

1. ВВЕДЕНИЕ

Проблема штарковского уширения водородных линий в плазме, начиная с основополагающей работы Хольцмарка¹, уже почти в течение 60 лет привлекает внимание физиков. Интерес к этой проблеме сохраняется, по-видимому, не только ввиду ее практической значимости для диагностики цлазмы, но и потому, что в ней мы имеем дело с двумя объектами (водородным атомом и плазмой), для которых особенно ярко проявляются специфические черты дальнодействующего кулоновского закона взаимодействия. Если учесть, что водородный атом является простейшей квантовой системой, то становится ясным, что задача об уширении относится к числу тех немногих практически интересных задач, для которых можно рассчитывать на построение достаточно простых и вместе с тем строгих моделей явления. Более того, эти модели допускают непосредственную экспериментальную проверку, причем точность современного плазменного эксперимента здесь весьма высока — от 10% до 1%.

Теория уширения линий включает в себя комплекс вопросов атомной спектроскопии, теории атомных столкновений и статистики флуктуирующего плазменного микрополя. Ее задачей является исследование зависимости контура линии $I(\omega)$, излучаемой (или поглощаемой) атомом в плазме, от параметров окружающей среды. Такими параметрами являются концентрация частиц N, скорости электронов v_e и ионов v_i , напряженности электрических и магнитных полей в плазме и др. Важнейшим параметром контура линии является расстройка $\Delta \omega$ наблюдаемой частоты ω относительно невозмущенной частоты атома ω_0 ($\Delta \omega = \omega - \omega_0$).

Информация, извлекаемая из наблюдений штарковских контуров линий, представляет двоякий интерес. Во-первых, измерения I (ω) позво-

6 УФН, т. 122, вып. 3

С Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1977 г.

ляют определить свойства окружающей плазмы, не прибегая к введению в нее зондов и других объектов, искажающих ее свойства. Во-вторых, детальное исследование контуров линий обогащает наши представления о статистике флуктуирующего кулоновского микрополя в плазме и динамике его взаимодействия с атомом, представляющих общефизический интерес.

Появление настоящего обзора связано с завершением определенного этапа в теории уширения, связанного в первую очередь с выходом эксперимента на новый уровень, позволяющий осуществлять прямую проверку теории. Ниже при изложении преследуются цели не столько строгости, сколько наглядности изложения. Дело в том, что в последние годы сильно увеличилось количество теоретических подходов к проблеме уширения. Достаточно назвать метод кинетического уравнения ², «релаксационную» теорию ^{3, 4}, метод функций Грина ⁵, технику проекционных операторов ⁶ и др. Мы не ставим своей целью отразить все эти возможные методы расчета в теории уширения, а остановимся лишь на основных теоретических и экспериментальных результатах, полученных в этой области в последние годы. Читателя, интересующегося историей вопроса, мы отсылаем к книге Брина ⁷, экспериментальная сторона вопроса содержится в книге Грима ⁸ и обзоре Визе ⁹. Ясное изложение основ теории уширения дано в книге Собельмана ¹⁰. Отметим также обзоры Баранже ¹¹ и Травинга ¹².

Рассмотрим водородную линию, образованную при дипольном переходе с верхнего уровня (a) на нижний (b). Каждый из уровней водородного атома с главным квантовым числом n содержит n^2 вырожденных состояний *), которые для верхнего уровня нумеруются индексами α , α' , а для нижнего — индексами β , β' . Основной формулой теории уширения является формула для контура линии I_{ab} (ω), излучаемой атомом ⁸, ¹⁰:

$$I_{ab}(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{0}^{\infty} e^{-i\omega\tau} K_{ab}(\tau) d\tau, \qquad (1.1)$$

где K_{ab} (τ) — корреляционная функция дипольных моментов атома:

$$K_{ab}(\tau) = \left\{ \sum_{\alpha, \beta, \sigma} \langle \psi_{\alpha}(\tau) | d_{\sigma} | \psi_{\beta}(\tau) \rangle \langle \psi_{\beta}(0) | d_{\sigma} | \psi_{\alpha}(0) \rangle \right\},$$
(1.2)

здесь d_{σ} — компонента дипольного момента атома; ψ_{α} , ψ_{β} — Волновые функции верхнего и нижнего состояния; символ {...} обозначает усреднение по ансамблю возмущающих частиц плазмы, от переменных которого зависят волновые функции ψ_{α} , ψ_{β} атома в среде.

При записи (1.1), (1.2) предполагается, что единственной причиной уширения является взаимодействие атома с частицами плазмы. Это взаимодействие формирует волновые функции верхнего и нижнего состояний, между которыми затем происходит спонтанный переход, вызванный взаимодействием с полем излучения. Волновые функции ψ (t) удовлетворяют уравнению Шрёдингера с гамильтонианом

$$\hat{\mathscr{H}}(t) = \hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{V}(t) = \hat{\mathscr{H}}_0 + \mathbf{d} [\mathbf{F}_i(t) + \mathbf{F}_e(t)], \qquad (1.3)$$

где $\hat{\mathcal{H}}_0$ — невозмущенный гамильтониан, $\hat{V}(t)$ — взаимодействие дипольного момента атома **d** с электрическими полями ионов $\mathbf{F}_i(t)$ и электронов $\mathbf{F}_e(t)$ плазмы. Движение этих заряженных частиц будем считать классическим и прямолинейным, так что поле $\mathbf{F}(t)$, создаваемое отдельной

^{*)} Здесь и ниже не учитывается спин электрона, поскольку штарковское уширение обычно превосходит тонкую структуру уровней.

частицей, имеет вид

$$\mathbf{F}(t) = e \frac{\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t}{|\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t|^3} = e \frac{\rho + v(t - t_0)}{[\rho^2 + v^2(t - t_0)^2]^{3/2}},$$
(1.4)

где \mathbf{r}_0 — координата, \mathbf{v} — скорость частицы; удобно выразить \mathbf{r}_0 в цилиндрических координатах с осью Oz вдоль \mathbf{v} : $\mathbf{r}_0 = \boldsymbol{\rho} - \mathbf{v} t_0$, где $\boldsymbol{\rho}$ — прицельный параметр пролета ($\boldsymbol{\rho} \perp \mathbf{v}$), t_0 — момент наибольшего сближения частиц с атомом.

Поля $\mathbf{F}_{i}(t)$ и $\mathbf{F}_{e}(t)$ являются векторной суммой полей от отдельных частиц, так что, например

$$\mathbf{F}_{i}(t) = -e \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \frac{\mathbf{r}_{0k} + \mathbf{v}_{k}t}{|r_{0k} + v_{k}t|^{3}}, \qquad (1.5)$$

где $\mathcal{N} -$ полное число ионов в объеме плазмы V. Плотность частиц $N = \mathcal{N} / V$ в дальнейшем считается заданной постоянной.

Важно отметить, что за процессы уширения ответственны переходы между состояниями, принадлежащими к одному уровню с фиксированным главным квантовым числом n (так называемой «изоэнергетической поверхности»). Это значит, что переходами между уровнями a и b за счет взаимодействия с частицами плазмы можно пренебречь. Таким образом, процессы уширения отвечают малому обмену энергий между возбужденным атомом и уширяющими частицами. Эта энергия порядка наблюдаемого спектрального интервала $\hbar \Delta \omega$ и обычно гораздо меньше температуры kT плазмы.

Из сказанного ясно, что дипольный момент d водородного атома фигурирует в уширении двояким образом. Во-первых, матричные элементы dмежду разными уровнями a и b определяют взаимодействие атома с полем излучения. Во-вторых, для состояний с фиксированным n оператор dопределяет взаимодействие атома с плазменным микрополем.

Задача об уширении естественным образом распадается на две части: динамическую, связанную с решением уравнения Шрёдингера (1.3) для атома в переменных электрических полях, и статистическую, связанную с усреднением полученного решения по ансамблю возмущающих частиц плазмы. В общем виде обе эти задачи не решаются, и потому для определения спектра используется ряд приближений, рассматриваемых ниже.

2. «СТАРАЯ» АДИАБАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УШИРЕНИЯ

Рассмотрим вначале качественные основы процесса уширения на простой адиабатической модели уширения, предложенной Вейскопфом¹³ и усовершенствованной затем Линдхольмом¹⁴. Допустим, что атом водорода испытывает уширение заряженными частицами одного сорта. Тогда уровни атома испытывают, как известно¹⁵, штарковское расщепление частоты к, равное

$$\kappa = \frac{C}{e} F = \frac{3}{2} n (n_1 - n_2) \frac{\hbar}{me} F, \qquad (2.1)$$

где C — штарковская постоянная компоненты с параболическими квантовыми числами n_1 , n_2 , принадлежащая уровню n; F — модуль электрического поля, создаваемого заряженными частицами.

В основе адиабатической модели лежит допущение о том, что взаимодействие атома с переменным полем F (t) приводит только к изменению фазы волновой функции (фазовой модуляции)

$$\psi_a(t) \sim \exp\left[i \int_{-\infty}^{t} \varkappa_a(\tau) d\tau\right].$$
(2.2)

451

В С ЛИСИЦА

Очевидно, что корреляционная функция K (т) имеет согласно (1.2) в этом приближении вид

$$K(\tau) = \left\langle \exp\left[i\int_{0}^{\tau}\varkappa(t)\,dt\right]\right\rangle.$$
(2.3)

Допустим, что возмущение \varkappa (t) создается одной ближайшей к атому возмущающей частицей. Тогда сдвиг фазы $\Delta \varphi$ в течение полного пролета частицы от $t = -\infty$ до $t = +\infty$ равен

$$\Delta \varphi = \int_{-\infty}^{\infty} \varkappa(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C \, dt}{\rho^2 + v^2 \, (t - t_0)^2} = \pi \frac{C}{\rho v}.$$
 (2.4)

Изменение фазы $\Delta \varphi$ характеризует эффективность столкновения. Действительно, если $\Delta \varphi \sim \pi$, то фаза атома полностью «сбивается» и атом после такого столкновения «забывает» начальное значение фазы. Значение прицельного параметра ρ_B , при котором $\Delta \varphi \sim \pi$, называется радиусом Вайскопфа

$$\rho_B \sim \frac{C}{v} \,. \tag{2.5}$$

Этот радиус определяет эффективное сечение сбоя фазы $\sigma_B \sim \pi \rho_B^2$, называемое сечением оптического столкновения. Важную роль в дальнейшем играет вайсконфовская частота (или обратное время) столкновения

$$\Omega \sim \frac{v}{\rho_B} = \frac{v^2}{C}.$$
 (2.6)

Радиус Вайскопфа определяет некоторый эффективный объем взаимодействия порядка р³. При плотности частиц, равной N, внутри этого объема паходится в среднем

$$N\rho_B^3 \equiv g \tag{2.7}$$

частиц. Таким образом, если $g \gg 1$, то с атомом взаимодействует одновременно большое количество частиц. Если же $g \ll 1$, то взаимодействует практически только одна (ближайщая) частица. Следовательно, параметр gявляется параметром парности (бинарности) уширяющих столкновений.

Характерное время между столкновениями определяется частотой (или обратным временем свободного пробега)

$$\gamma \sim N v \sigma_B \sim \frac{N C^2}{v}.$$
 (2.8)

Заметим, что отношение характерных частот Ω и у также определяется параметром g: $\gamma/\Omega = g$.

Предположим теперь, следуя Андерсону ¹⁶, что сдвиг \varkappa в формуле (2.3) является суммой сдвигов \varkappa_k от отдельных частиц *)

$$\varkappa(t) = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} \varkappa_k(t).$$
(2.9)

Если частицы независимы, то полная корреляционная функция распадается на произведение функций отдельных частиц

$$K(\tau) = \left\langle \exp\left[i\sum_{k=1}^{\mathscr{M}}\int_{0}^{\tau}\varkappa_{k}(t)\,dt\right]\right\rangle_{\mathscr{M}} = -\left\langle \prod_{k=1}^{\mathscr{M}}\exp\left[i\int_{0}^{\tau}\varkappa_{k}(t)\,dt\right]\right\rangle_{\mathscr{M}} - \left\langle \exp\left[i\int_{0}^{\tau}\varkappa(t)\,dt\right]\right\rangle_{1}^{\mathscr{M}},$$

452

^{*)} Модель «скалярного» сложения возмущений применима к водородному атому лишь в бинарной области $g \ll 1$; см. ниже.

где символ $\langle \ldots \rangle_{\mathscr{N}}$ обозначает усреднение по фазовому объему всех \mathscr{N} частиц, а символ $\langle \ldots \rangle_i$ — одной частицы. Это последнее усреднение включает в себя интегрирование по координатам dr_0/V и распределению скоростей f(v) dv частиц

$$K(\tau) = \left\{ \left[1 - \frac{1}{V} \int d\mathbf{r}_0 \int d\mathbf{v} f(\mathbf{v}) \right] \left[1 - \exp\left(i \int_0^t \varkappa(t) dt\right) \right] \right\}^{\mathscr{N} = NV}$$

Переходя к пределу $\mathscr{N} \to \infty$, $V \to \infty$ при $N = \mathscr{N}/V = \text{const}$, получаем $K(\tau) = e^{-NV(\tau)}$, (2.10)

где функция V (т) называется «столкновительным объемом»

$$V(\tau) = \int \mathbf{dr} f(\mathbf{v}) \int_{0}^{\infty} 2\pi\rho \, d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dz \, \left\{ 1 - \exp\left(i \int_{z}^{z+v\tau} \frac{C}{\rho^{2} + u^{2}} \frac{du}{v}\right) \right\} \quad (2.11)$$

(мы перешли к цилиндрическим координатам: $d\mathbf{r}_0 = 2\pi\rho \ d\rho \ dz$). Примем в дальнейшем для простоты скорость v фиксированной и равной некоторой характерной скорости максвелловского распределения f(v).

Из формулы (2.11) видно, что мнимая часть Im $V(\tau)$ расходится линейно при больших значениях ρ , что связано со спецификой дальнодействующего кулоновского взаимодействия $\varkappa = C/r^2$. Эта расходимость, однако, физического смысла не имеет и, как будет видно ниже, несущественна при более строгом подходе. Действительно, выше не учитывалась симметрия штарковского расщепления, проявляющаяся в том, что величина C в (2.1) с равной вероятностью принимает положительные и отрицательные значения. Поэтому нечетные по C члены, входящие в Im $V(\tau)$, в действительности обращаются в нуль и ниже достаточно рассмотреть только Re V (τ).

Легко видеть, что единственным временны́м масштабом изменения столкновительного объема $V(\tau)$ является обратная вайскопфовская частота Ω^{-1} . Поэтому имеются две характерные области времен: $\Omega \tau \ll 1$ и $\Omega \tau \gg 1$. При малых временах из (2.11) имеем

Re
$$V(\tau) = \int_{0}^{\infty} 4\pi r_{0}^{2} dr_{0} \left[1 - \cos\left(C\tau/r_{0}^{2}\right)\right] = \frac{8}{3} (\pi C \tau)^{3/2}, \quad \Omega \tau \ll 1.$$
 (2.12)

При больших временах $\Omega \tau \gg 1$

Re
$$V(\tau) \approx V'(\infty) \tau = v\sigma_{\rm B}\tau$$
, (2.13)

где производная столкновительного объема V' (∞) равна

$$V'(\infty) = v2\pi \int_{0}^{\rho_{m}} \rho \, d\rho \left[1 - \cos\left(\frac{C}{v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{\rho^{2} + u^{2}}\right) \right] = 2\pi^{3} \, \frac{C^{2}}{v} \ln \frac{\rho_{m}}{\rho_{B}}.$$
 (2.14)

Здесь введен верхний параметр обрезания ρ_m для логарифмически расходящегося интеграла по ρ . Выбор ρ_m будет сделан ниже. Сейчас важно отметить, что при $\Omega \tau \gg 1$ эволюция столкновитель-

Сейчас важно отметить, что при $\Omega \tau \gg 1$ эволюция столкновительного объема связана с вайскопфовским сечением $\sigma_{\rm B}$, которое определяется интегралом по всему времени пролета от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, т. е. законченными пролетами. Область $\Omega \tau \gg 1$, отвечающая быстрым столкновениям (больше Ω), называется ударной. Как видно из (2.14), основной вклад в нее вносят далекие («слабые») пролеты $\rho \gg \rho_B \sim C/v$, вклад которых логарифмически велик по сравнению со вкладом «сильных» столкновений $\rho \leqslant \rho_B$.

Результат (2.12) в области $\Omega \tau \ll 1$ не зависит от скорости и целиком связан с видом статического потенциала взаимодействия C/r_0^2 . Поэтому эту область принято называть статической *).

Рассмотрим случай бинарных (парных) столкновений $g \ll 1$ и проследим, следуя ¹⁷, переход между ударной и статическими областями в контуре. линий $I(\omega)$. Для этого подставим (2.10) в (1.1) и проинтегрируем один раз по частям

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[-\frac{1}{\iota \Delta \omega} + \frac{N}{\iota \Delta \omega} \int_{0}^{\infty} d\tau e^{-\iota \Delta \omega \tau} V'(\tau) e^{-NV(\tau)} \right].$$
(2.15)

Характерным масштабом изменения функций $V(\tau)$ и $V'(\tau)$ является, как отмечалось, величина Ω^{-1} . Преобразуем тождественно выражение (2.15), прибавив и вычтя из $V'(\tau)$ его значение $V'(\infty)$. Тогда один из получающихся интегралов сводится к $I(\omega)$, а во втором можно положить $e^{-NV(\tau)} \approx 1$. Действительно, под знаком этого интеграла стоит разность $V'(\tau) - V'(\infty)$, обращающая в нуль при $\tau \geqslant \Omega^{-1}$; но в этой области значение $NV(\tau)$ малó: $N | V(\tau \sim \Omega^{-1}) | \leq N | V'(\infty) | \Omega^{-1} = g \ll 1$, что как раз совпадает с параметром малости $g \ll 1$, определяющим применимость бинарного приближения. Дальнейшие простые преобразования позволяют выразить контур линии $I(\omega)$ в следующем виде:

$$I(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\gamma(\omega)}{\Delta \omega^2 + \gamma^2(0)}, \qquad (2.16)$$

$$\gamma(\omega) = N \operatorname{Re} \int_{0}^{\infty} d\tau e^{\tau \Delta \omega \tau} V''(\tau) =$$

= $\pi N v \int_{0}^{\infty} d\rho \rho \left| \int_{-\infty}^{\infty} dt \,\varkappa(t) \exp\left[\tau \Delta \omega t - i \int_{0}^{t} d\tau \,\varkappa(\tau)\right] \right|^{2}.$ (2.17)

Из формул (2.16), (2.17) следует весьма интересный вывод: контур линии в бинарном приближении ($g \ll 1$) имеет структуру формулы Лоренца с «переменной шириной» ү (ω). Этот результат был получен и для общего (неадиабатического) случая методом функции Грина в работе Якимца ⁵. Характерным масштабом изменения функции ү (ω) является, очевидно, вайскопфовская частота Ω .

Таким образом, плавному изменению столкновительного объема $V(\tau)$ от малых значений τ к большим соответствует плавное изменение «переменной ширины» линии $\gamma(\omega)$ соответственно от больших значений $\Delta\omega$ к малым. Это соответствует «соотношению неопределенности» при фурьеобращении: $\Delta\omega\tau_{\circ\phi\phi} \sim 1$.

Из сказанного сразу ясен характер спектра при малых ($\Delta \omega \ll \Omega$) и больших ($\Delta \omega \gg \Omega$) расстройках частоты. Действительно, из (2.17) следует, что по порядку величины γ (ω) ~ N Re V' ($\tau_{a\phi\phi}$). Тогда, учитывая, что $\tau_{a\phi\phi} \sim \Delta \omega^{-1}$, из (2.12) и (2.13) получаем: γ ($\Delta \omega \gg \Omega$) ∞ $\infty NC^{3/2}\tau_{a\phi\phi}^{1/2} \propto NC^{3/2}\Delta \omega^{-1/2}$ и γ ($\Delta \omega \ll \Omega$) $\infty Nv\sigma_B \equiv \gamma$ (0). Подстановка этих значений γ (ω) в (2.16) дает

$$I(\omega) \approx \begin{cases} \frac{1}{\pi} \frac{\gamma(0)}{\Delta \omega^2 + \gamma^2(0)}, & \Delta \omega \ll \Omega, \\ \frac{2\pi N C^{2/2}}{\Delta \omega^{5/2}}, & \Delta \omega \gg \Omega. \end{cases}$$
(2.18)

^{*)} Этот термин представляется нам более удачным, чем часто используемый «квазистатическая» или более ранний — «статистическая».

Области $\Delta \omega \ll \Omega$ и $\Delta \omega \gg \Omega$ принято называть ударной и статической. Это соответствует тому, что профиль линии (2.18) при $\Delta \omega \ll \Omega$ имеет структуру (ударной) формулы Лоренца с постоянной шириной $\gamma(\omega) \approx \approx \gamma(0)$, а при $\Delta \omega \gg \Omega$ вообще не зависит от скорости частиц (статичность).

Для более детального исследования контура (в частности, при $\Delta \omega \sim \Omega$) удобно перейти к безразмерной частоте $x = \Delta \omega / \Omega$, определяя безразмерный профиль линии I(x) из соотношения $I(x) dx = I(\omega) d\omega$. Тогда из (2.16) следует

$$I(x) = \frac{1}{\pi} \frac{g_{\gamma}(x)}{x^2 + g^2 \gamma^2(x)}.$$
 (2.19)

Безразмерная ширина $\gamma(x)$ легко находится из (2.17). При этом, если воснользоваться конкретным видом взаимодействия $\varkappa(t) = C/(C\rho^2 + v^2t^2)$ и перейти в (2.17) к угловой переменной $\varphi = \arctan(vt/\rho)$, то оказывается, что $\gamma(x)$ допускает явное аналитическое выражение через вырожденную гипергеометрическую функцию $W_{\lambda, \mu}(z)$ (функцию Уиттекера ¹⁸ (стр. 419))

$$\gamma(x) = \pi \int_{0}^{\infty} \frac{dy}{y} k_{1/y}^{2} (2xy),$$

$$k_{\nu}(z) = \int_{0}^{\pi} d\varphi \cos(z \operatorname{tg} \varphi - \nu \varphi) = \frac{W_{\nu/2, 1/2} (2z)}{\Gamma (1 + \nu/2)}$$
(2.20)

(Г (z) — гамма-функция). Отметим, что существование аналитического результата (2.20) также связано со спецификой водорода.

Предельные значения у (х) таковы:

$$\gamma(x) \approx \begin{cases} -\pi^3 \left[\ln x + C \right] \equiv \gamma_{y_{\pi}}, & x \ll 1, \\ \frac{2\pi^2}{\sqrt{x}} \equiv \gamma_{c_T}(x), & x \gg 1. \end{cases}$$
(2.21)

Подстановка (2.21) в (2.19) дает, очевидно, прежние выражения (2.18). График функции у (x), рассчитанный по формуле (2.20) в работе ¹⁹,

вместе с ее предельными значениями (2.21) приведен на рис. 1.

Обсудим особенности контура в обеих областях значений $\Delta \omega$. В ударной области ($\Delta \omega \ll \Omega$) ширина линии логарифмически расходится при $\Delta \omega$ (или x) $\rightarrow 0$. Эта расходимость соответствует расходимости столкновительного объема (2.14) при $\rho_m \rightarrow \infty$. В действительности, в плазме всегда имеется верхний параметр обрезания, равный дебаевскому радиусу ρ_D экранирования

$$\rho_D = \sqrt{\frac{kT}{4\pi N e^2}}.$$
 (2.22)

Поэтому во всяком случае $\rho_m \leqslant \rho_D$. Заметим, однако, что при конечных зна-







взаимодействия. Специфика этого взаимодействия проявляется в том, что к нему, строго говоря, неприменимо ударное приближение, связанное с законченными пролетами от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Действительно, если более точно исследовать поведение столкновительного объема $V(\tau)$ при $\tau \to \infty$, то окажется, что при больших (но конечных) т величина $V'(\tau) \propto$ $\infty \ln (v\tau/\rho_B)$, что соответствует значению $\rho_m \sim v\tau$ в формуле (2.14). Это значит, что при конечном т можно считать законченными лишь пролеты с $\rho \ll v\tau$. Указанное обстоятельство было выявлено впервые в работе Когана²². В теории уширения время т при конечных $\Delta \omega$ всегда конечно: $\tau_{эф\phi} \sim \Delta \omega^{-1}$. Отсюда ясно, что параметр обрезания Льюиса $\rho_\omega \sim v/\Delta \omega \sim$ $\sim v\tau_{эф\phi}$ связан с учетом незаконченности далеких пролетов.

Отметим, наконец, что в плазме имеется, на первый взгляд, еще одна характерная длина — среднее расстояние между частицами $r_0 \sim N^{-1/3}$. Однако величина $N^{-1/3}$ не может входить в качестве верхнего параметра обрезания ρ_m , и это обстоятельство опять-таки связано с дальнодействующим характером возмущения. Дело в том, что для «слабых» пролетов с $\rho > \rho_B$, вносящих основной вклад в ударное уширение (см. (2.14)), справедлива теория возмущений по взаимодействию dF (t) дипольного момента d атома с электрическим полем F возмущающей частицы. Поэтому корреляционная функция $K(\tau)$ во втором порядке теории возмущений выражается через корреляционную функцию электрических полей $\langle F(0) F(\tau) \rangle$. Эта последняя, как показано Коганом ²², оказывается полностью бинарной, т. е. ее зависимость от плотности N — тривиальна: $\langle F(0) F(\tau) \rangle \propto N \langle F_1(0) F_1(\tau) \rangle$, где F_1 обозначает электрическое поле одной частицы (см. (1.4)). Поскольку бинарная корреляционная функция $\langle F_1(0) F_1(\tau) \rangle$ вообще не содержит плотности, величина $N^{-1/3}$ не входит в качестве верхнего параметра обрезания.

Резюмируя сказанное, укажем, что для совместного учета эффектов дебаевского экранирования и незаконченности пролетов в качестве ρ_m следует выбрать величину

$$\rho_m = \frac{\rho_D \rho_\omega}{\sqrt{\rho_D^2 + \rho_\omega^2}},\tag{2.23}$$

сводящуюся к наименьшему из двух радиусов ρ_{ω} и ρ_D . Напомним, что уречь идет об ударной области, для которой $\rho_{\omega} \gg \rho_B$.

В статической области ($\Delta \omega \gg \Omega$), как следует из (2.21), профиль линии вообще не зависит от скорости уширяющих частиц. Отсюда ясно, что этот профиль можно получить и из соображений, не связанных с представлениями о пролетах частиц. Это будет сделано ниже (гл. 3). Здесь важно отметить, что в бинарной области ($g \ll 1$) вклад отдельных частиц в контур линии аддитивен, что проявляется в пропорциональности $I(\omega)$ концентрации частиц N.

Следует указать, что степенной закон изменения $\gamma(x) \infty x^{-1/2}$ при $x \gg 1$ справедлив только в «положительном» статическом крыле линии x > 0. Это крыло отвечает одинаковым знакам сдвига частоты $\Delta \omega$ и штар-ковской постоянной *C*. В отрицательном крыле, которое уместно назвать «антистатическим», спад интенсивности происходит по экспоненциальному закону ^{17, 23, 24} *)

 $\gamma(x) \sim \exp\left(-4\sqrt{x}\right). \tag{2.24}$

Таким образом, контур штарковской компоненты (2.18) в целом несимметричен. Симметрия сохраняется лишь в ударной области $|x| \ll 1$.

^{*)} После усреднения (2.24) с максвелловской функцией распределения закон экспоненциального спада несколько изменится: $\gamma(x) \sim \exp(-x^{3/4})$.

штарковское уширение линий водорода

Крылья же профиля спадают в «положительную» сторону по степенному закону, а в «отрицательную» по экспоненциальному.

Рассмотренная картина уширения относилась в основном, к бинарному случаю $g \ll 1$. Если $g \gg 1$, то необходимо учитывать одновременное воздействие многих частиц на атом. При этом возникает вопрос о характере сложения возмущений от отдельных частиц. В самом деле, выше принимался аддитивный закон сложения для энергетических (частотных) сдвигов и от отдельных частиц. Такой закон сложения кажется, на первый взгляд, довольно естественным, поскольку он соответствует сложению гамильтонианов взаимодействия атома с каждой из частиц. Ясно, однако, что при вычислении штарковского сдвига (т. е. диагонализации каждого из гамильтонианов) надо выбрать определенную систему координат, ось z которой направлена вдоль электрического поля F_k, вызывающего данный сдвиг ж_h. Если частиц много, то заранее не ясно, вдоль какого из электрических полей F_k следует направить ось z. Предельным случаем является такая ситуация, когда возмущение вызывается только двумя зарядами (скажем, ионами), расположенными на одинаковом расстоянии по разные стороны от атома 25. Суммарный сдвиг здесь удваивается $\varkappa=\varkappa_1+\varkappa_2=$ $=2\varkappa_1$, хотя ясно, что результирующее поле ${f F}={f F}_1+{f F}_2$, действующее на атом, равно нулю.

Из сказанного следует, что «скалярный» закон сложения возмущений $\varkappa = \sum_k \varkappa_k$, отвечающий каждый раз новому выбору системы координат с осью $Oz \parallel \mathbf{F}_k$, в общем случае неверен. Единственным выделенным направлением, вдоль которого следует направить ось Oz системы координат, является вектор суммарного электрического поля $\mathbf{F} = \sum_k \mathbf{F}_k$. В этом случае

суммарный сдвиг $\varkappa = (C/e) |\mathbf{F}| = (C/e) |\sum_{k} \mathbf{F}_{k}|$ определяется модулем векторной суммы полей, которая отнюдь не сводится в общем случае к сумме модулей отдельных слагаемых.

Важно отметить, что результат «векторного» закона сложения для суммарного сдвига $\varkappa = (C/e) \mid \sum_{k} \mathbf{F}_{k} \mid$ не зависит от выбора системы координат. Система с осью Oz вдоль $\mathbf{F} = \sum_{k} \mathbf{F}_{k}$ является лишь одной из возможных, где вычисление сдвига наиболее просто. Можно, однако, выбрать и любую другую систему координат, лишь бы ее положение было фиксированным в пространстве, а не выбиралось каждый раз заново, как в «скалярной» модели.

Адиабатическая теория уширения, основанная на векторном законе сложения полей (для произвольного g) была развита Коганом²¹. Общее выражение для контура линии, полученное в²¹, имеет весьма сложную структуру вследствие сложной статистики многочастичного плазменного микрополя (см. гл. 3, 4). Не считая случая бинарного статического крыла, указанное выражение удается упростить лишь при $g \ll 1$ и $g \gg 1$. В первом случае получается тот же результат (2.16), что и при « скалярном» сложении возмущений — это вполне понятно, поскольку при $g \ll 1$ с атомом эффективно взаимодействует лишь одна частица, так что закон сложения несуществен. В случае $g \gg 1$ для основной части линии получается «множественный» статический (хольцмарковский; см. гл. 3) контур с поправками на тепловое движение возмущающих частиц, соответствующими эдиабатическому механизму фазовой модуляции (гл. 4).

Отметим, что теория уширения имеет непосредственную связь с теорией рассеяния. Так, в ударном приближении ширина и сдвиг линии могут быть выражены через сечения рассеяния заряженной частицы на атоме ^{26, 27}. При получении статического результата (см. (2.18)) из формулы (2.17) легко убедиться, что основной вклад в интеграл дает точка t_h , определяемая условием ¹⁰:

$$\varkappa(t_h) = \Delta \omega. \tag{2.25}$$

Условие (2.25) можно рассматривать как условия пересечения термов, а сам метод получения статического результата полностью аналогичен методу Ландау — Зинера ¹⁵ в теории рассеяния. В теории уширения этот метод впервые использовался Яблонским ²⁸. В дальнейшем он развивался Жуди ²⁹, получившим на основе единого квазиклассического подхода результаты ударной и статической теории; см. также ³⁰.

Адиабатическая модель уширения имеет аналогию с моделью неупругих переходов в двухуровневой системе при столкновениях с классическими частицами. Формула (2.17) для «переменной» ширины γ (ω) обладает структурой формулы для вероятности неупругого перехода, полученной Вайнштейном, Пресняковым и Собельманом³¹. При этом роль расстояния между уровнями ω_{12} двухуровневой системы играет расстройка частоты Δω. Поведение сечения неупругого перехода (или «переменной» ширины γ (ω)) определяется величиной параметра Месси ho_{200} $\Delta\omega/v$, где ho_{abb} — эффективный прицельный параметр столкновения (для задач уширения — радиус Вайскопфа). При $ho_{2\phi\phi} \Delta\omega/v \ll 1$ из формулы (2.17) получается, как отмечалось (2.18), результат ударной теории, отвечающий (в рамках теории возмущений) борновскому приближению в теории неупругих переходов. При $ho_{
m solution} \Delta \omega / v \gg 1$ вероятность перехода (а также и ширина у (w)) определяется наличием или отсутствием точки пересечения термов (2.25). В первом случае основной вклад в неупругий переход (и в контур линии) вносит точка пересечения, и сечение перехода определяется формулой Ландау — Зинера (соответственно профиль линии — результатом статической теории (2.18)). При отсутствии точки пересечения («антистатическое» крыло в уширении) сечение перехода и контур линии имеют экспоненциальный спад (2.24). Отмеченная аналогия позволяет установить соотношения подобия между сечениями неупругих переходов и контурами спектральных линий²⁴.

3. СТАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ХОЛЬЦМАРКА. ПЛАЗМЕННОЕ МИКРОПОЛЕ

Рассмотрим один из первых подходов к проблеме уширения, сформулированный Хольцмарком¹. Суть его сводится к тому, что электрическое поле, создаваемое ионами вблизи излучающего атома, считается полностью статическим (т. е. скорости всех ионов полагаются равными нулю, а воздействием электронов пренебрегается). Поскольку ионы расположены в плазме случайным образом, каждый атом «видит» свое значение ионного поля F. Спектр излучения отдельной штарковской компоненты атома имеет вид δ -функции

$$I_{\alpha\beta}(\omega) = I_{\alpha\beta}\delta(\Delta\omega - C_{\alpha\beta}F) \tag{3.1}$$

с частотой, сдвинутой на величину штарковского расщепления $C_{lphaeta}F.$

Наблюдаемая интенсивность получается суммированием интенсивностей от отдельных атомов или, что эквивалентно, усреднением (3.1) по распределению W(F) ионного поля. Функция W(F) определяет вероятность данного значения \mathbf{F} для ионного поля, являющегося векторной суммой (статических) полей \mathbf{F}_k от отдельных частиц

$$\mathbf{F} = \sum_{h=1}^{\mathscr{N}} \mathbf{F}_{h} = e \sum_{h=1}^{\mathscr{N}} \frac{\mathbf{r}_{h}}{r_{h}^{3}}.$$
 (3.2)

Интегрируя (3.1) по всем F с функцией распределения W(F), получаем статическое распределение интенсивности в штарковской компоненте $\alpha \rightarrow \beta$:

$$I_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{I_{\alpha\beta}}{C_{\alpha\beta}} W\left(\frac{\Delta\omega}{C_{\alpha\beta}}\right).$$
(3.3)

Таким образом, задача вычисления контура линии сводится к нахождению функции распределения W(F). Для вычисления этой функции Хольцмарк пренебрег взаимной корреляцией положения ионов, так что вероятность конфигурации \mathbf{r}_1 , $\mathbf{r}_1 + d\mathbf{r}_1$; \mathbf{r}_2 , $\mathbf{r}_2 + d\mathbf{r}_2$; ...; $\mathbf{r}_{\mathscr{N}}$, $\mathbf{r}_{\mathscr{N}} + d\mathbf{r}_{\mathscr{N}}$ пропорциональна элементу объема конфигурационного пространства $d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 \ldots d\mathbf{r}_{\mathscr{N}} (V)^{-\mathscr{N}}$.

Вероятность W(F) пропорционально, очевидно, той части конфигурационного пространства, в которой выполнено равенство (3.2). Чтобы автоматически выделить нужную часть

ионных координат, усредним по пространству δ-функцию, обеспечивающую выполнение (3.2):

$$W(\mathbf{F}) = \left\langle \delta \left(\mathbf{F} - \frac{e \sum_{k=1}^{\mathcal{W}} \mathbf{r}_{k}}{r_{k}^{3}} \right) \right\rangle = \\ = \int d\rho \, e^{i \mathbf{\rho} \mathbf{F}} \left\langle \exp \left(\frac{-i e \rho \sum_{k=1}^{\mathcal{W}} \mathbf{r}_{k}}{r_{k}^{3}} \right) \right\rangle,$$



Рис. 2. Распределение Хольцмарка *Ж* (β).

где мы записали δ-функцию с помощью дополнительного интегрирования по **ρ**. При усреднении воспользуемся, как и при выводе (2.10), независимостью частиц, что дает

$$W(F) = \int d\rho e^{i\rho \mathbf{F}} \exp\left[-N \int d\mathbf{r} \left(1 - e^{-ie\rho \mathbf{r}/r^3}\right)\right] = \int d\rho \exp\left[i\rho \mathbf{F} - N \left(\lambda e\rho\right)^{3/2}\right],$$

где $\lambda = 2\pi \; (4/15)^{2/3} \approx 2,603.$

Отсюда видно, что функция распределения зависит только от модуля поля $F = |\mathbf{F}|$. Действительно, интегрируя по углам ве́ктора ρ , находим ³²

$$W(\mathbf{F}) d\mathbf{F} = W(F) \cdot 4\pi F^2 dF = W(F) dF = \mathscr{H}\left(\frac{F}{F_0}\right) \frac{dF}{F}, \qquad (3.4)$$

где

$$\mathscr{H}(\beta) = \frac{2}{\pi} \beta \int_{0}^{\infty} dx \sin \beta x \exp\left(-x^{3/2}\right), \qquad (3.5)$$

 $F_0 = \lambda e N^{2/3}$ ($\lambda \approx 2,603$). (3.6)

Функция $\mathscr{H}(\beta)$ удовлетворяет условию нормировки $\int_{0}^{} d\beta \mathscr{H}(\beta) = 1.$

График распределения \mathscr{H} (β) приведен на рис. 2. Максимального значения функция \mathscr{H} (β) достигает в точке $\beta = 1,607$. Предельные значения функции $\mathscr{H}(\beta)$ таковы:

$$\mathscr{H}(\beta) \approx \begin{cases} 1,496\beta^{-5/2} (1+5,107\beta^{-3/2}), & \beta \gg 1, \\ \frac{4}{3\pi}\beta^2 (1-0,463\beta^2), & \beta \ll 1. \end{cases}$$
(3.7)

Распределение Хольцмарка существенно отличается от гауссова распределения. Оно близко к нему лишь при малых значениях β , тогда как при больших β это распределение совпадает с распределением полей от одной (ближайшей) частицы. Оба эти результата понятны: малые β отвечают слабым полям, создаваемым большим числом ионов, и суммарное поле, как всякая сумма большого числа случайных величин, должно обладать гауссовым распределением ³⁷; с ростом β , в данное значение ионного поля вносит вклад все меньшее число частиц и в пределе $\beta \gg 1$ лишь одна, ближайшая, частица определяет распределение (сильных) полей. Таким образом, в грубых чертах, распределение Хольцмарка описывает переход от гауссова распределения слабых полей к бинарному распределению сильных полей.

Отметим любопытную деталь. Хотя масштаб хольцмарковского распределения F_0 (3.6) должен совпадать с полем $F_{\rm cp}$ на среднем межчастичном расстоянии $F_{\rm cp} = e \left(\frac{4\pi}{3}N\right)^{2/3} \approx 2.61 e N^{2/3}$ лишь по порядку величины, фактическое численное различие между ними оказывается менее одного процента.

Для получения статического контура I_{ab} (ω) всей линии надо подставить в (3.3) распределение Хольцмарка (3.4), просуммировать по всем штарковским компонентам α и β верхнего и нижнего уровней и для нормировки разделить на полную интенсивность динии $I_0 = \sum_{n=0}^{\infty} I_{\alpha\beta}$:

$$I_{ab}(\omega) = \frac{1}{I_0} \sum_{\alpha,\beta} \frac{I_{\alpha\beta}}{C_{\alpha\beta}F_0} \mathscr{H}\left(\frac{\Delta\omega}{C_{\alpha\beta}F_0}\right).$$
(3.8)

Расчеты контуров по формуле (3.8) для ряда водородных линий были выполнены Андерхилл и Ваддель ³⁴.

Важно отметить, что хольцмарковский контур линии существенно небинарен. Переход к бинарному результату происходит согласно (3.7) лишь на крыле линии, отвечающем большим значениям $\Delta \omega$:

$$I_{ab} \sim \frac{2\pi N}{\Delta \omega^{5/2}} \frac{1}{I_0} \sum_{\alpha, \beta} C^{3/2}_{\alpha\beta} I_{\alpha\beta} \equiv \frac{2\pi N C^{3/2}}{\Delta \omega^{5/2}}, \qquad (3.9)$$

где мы ввели эффективную константу Штарка С для линии в целом. Ее приближенную оценку можно получить с помощью формулы ^{10, 35}

$$C = \left(\frac{3}{8}\right)^{2/3} \frac{\hbar}{m} (n_a^2 - n_b^2)$$
(3.10)

(n_a, n_b — главные квантовые числа уровней а и b).

Выражение (3.9), как и бинарный результат (2.21), уже линейно по плотности уширяющих частиц N. Отметим, что переход к бинарному результату происходит при

$$\Delta \omega \gg \frac{C}{e} F_0 = \lambda C N^{2/3} \equiv \Delta \omega_0. \tag{3.11}$$

Величина $\Delta \omega_0$ определяет характерный масштаб хольцмарковского уширения водородной линии. Его оценку легко получить с помощью (3.10), (3.11).

Контур линии (3.8) удовлетворяет условию нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\omega I_{ab}(\omega) = 1, \qquad (3.12)$$

следующему из нормированности функции Хольцмарка.

Таким образом, теория Хольцмарка представляет собой выход за рамки бинарной картины уширения. Она основана на последовательном «векторном» законе сложения возмущений. Ее главным ограничением является приближение статичности ионов, которое мы обсудим в гл. 4.

Распределение Хольцмарка представляет собой простейшую модель распределения электрического микрополя, создаваемого внутри плазмы ионами и электронами. В действительности, последовательный расчет функции распределения должен учитывать эффекты корреляции ионов и экранировки их электрических полей за счет взаимодействия с электронами. Уширяющие ионы в плазме взаимодействуют друг с другом посредством экранированных кулоновских потенциалов

$$V(r_1, r_2, \ldots, r_{\mathcal{M}}) = \sum_{0=k< l}^{\mathcal{M}} \frac{e^2}{r_{hl}} e^{-r_{hl}/\rho_D},$$

где ρ_D — дебаевский радиус.

В термически равновесной плазме с температурой T вероятность данной ионной конфигурации определяется произведением элемента объема $dr_1, dr_2, \ldots, dr_{\mathscr{N}'}(V)^{\mathscr{M}}$ на дополнительный множитель exp $[-V(r_1 \ldots r_{\mathscr{N}'})/kT]$, учитывающий взаимодействие ионов. Ясно, что учет этого множителя уменьшит вероятность конфигураций с большим значением V (т. е. с близкими расстояниями между ионами), которым отвечают большие значения полей F. Поэтому истинная функция распределения

должна давать большие вероятности слабых и меньшие вероятности сильных иолей по сравнению с распределением Хольцмарка. Отклонение 'от этого распределения зависит от отношения среднего расстояния между ионами r_0 ((4 $\pi/3$) $r_0^3 = 1$) к дебаевскому радиусу

$$\alpha = \frac{r_0}{\rho_D} \propto N^{1/6} T^{-1/2} .$$
(3.13)

Очевидно, что вели-

чина α⁻³ равна среднему рования. числу частиц N_D в сфере дебаевского радиуса. Ясно, что при α → 0 функция распределения должва

совпадать с хольцмарковской. Отклонения от последней тем больше, чем больше α . На рис. З показан вид функции распределения при различных значениях α , рассчитанный Хупером ³⁶. Видно, что отклонения от распределения Хольцмарка заметны уже при $\alpha = 0,4$. При этом число частиц в дебаевской сфере примерно равно: $N_D \approx 16$.

Критерием применимости теории Хольцмарка является условие

$$\alpha^{-3} = N_D = \frac{4\pi}{3} \left(\frac{kT}{4\pi c^2}\right)^{3/2} N^{-1/2} \gg 1.$$
 (3.14)

Оно ограничивает применимость распределения Хольцмарка со стороны низких температур.

Заметим в этой связи, что имеющиеся в литературе расчеты функций распределения $^{36-39}$ справедливы, строго говоря, лишь при $N_D \gg 1$,



Рис 3. Распределение электрического поля W_D (β) с учетом корреляции ионов и дебаевского экранирования.

в. с. лисица

когда отклонения от распределения Хольцмарка невелики. При $N_D \sim 1$ точность этих расчетов оценить довольно трудно. Подробное изложение эффектов, связанных с корреляцией ионов в плазме, содержится в книге Кудрина 40.

Обсудим еще одно обобщение распределения Хольцмарка — учет временной динамики ионного поля, обусловленной движением частип. Влияние этого движения на процессы уширения будут рассмотрены ниже (гл. 4). Здесь мы коснемся вкратие характера поведения двувременного распределения W (F₁, F₂), определяющего вероятность наблюдений значений $\mathbf{F_1}$ и $\mathbf{F_2}$ микрополя соответственно в моменты времени t = 0 и $t = \tau$. Эта задача была рассмотрена Коганом и Селидовкиным ⁴¹. Расчеты функции W (F₁, F₂) удается выполнить лишь в предельных

случаях малых и больших значений т. При т - 0 должно получаться, очевидно, распределение полей в два бесконечно близких момента времени, для которых корреляция полностью сохраняется:

$$W(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2) = (4\pi F_1^2 \mathbf{F}_0)^{-1} \mathscr{H} \left(\frac{F_1}{F_0}\right) \delta(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2), \qquad (3.15)$$

Характерное время разрушения корреляции тр можно определить из того условия, чтобы среднее (при данном F₁) изменение величины поля $\langle \Delta F^2 \rangle = \langle | F_1 - F_2 |^2 \rangle$ за время τ_p было того же порядка, что и сама величина F_1 , т. е. $\langle \Delta F^2 \rangle \approx F_1^2$. Это дает

$$\tau_p \approx (N^{1/3} v_0)^{-1} \begin{cases} 4,4\beta_1, & \beta_1 \ll 1, \\ 15\beta_1^{-1/2}, & \beta_1 \gg 1, \end{cases}$$
(3.16)

где $v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{M}}$ — скорость иона, $\beta_1 = F_1/F_0$. Из (3.16) видно, что корреляция наиболее быстро теряется малыми ($\beta_1 \ll 1$) и большими ($\beta_1 \gg 1$) полями. Эти оценки совпадают с оценками среднего времени жизни поля (гл. 4).

При больших значениях т функция распределения равна (Р (β) = $= \mathcal{H}(\beta)/(4\pi\beta^2)$:

$$W(\boldsymbol{\beta}_{1}, \boldsymbol{\beta}_{2}) = P(\boldsymbol{\beta}_{1}) P(\boldsymbol{\beta}_{2}) + \frac{8\sqrt{\pi}P'(\boldsymbol{\beta}_{1})P'(\boldsymbol{\beta}_{2})}{3\lambda^{2}N^{1/3}v_{0}\tau} \frac{(\boldsymbol{\beta}_{1}\boldsymbol{\beta}_{2})}{\boldsymbol{\beta}_{1}\boldsymbol{\beta}_{2}}.$$
 (3.17)

Главный член в (3.17) представляет собой, как и должно быть, произведение двух независимых распределений Хольцмарка. Второй член описывает медленно (~ 1/т) спадающую корреляцию полей. Сравнивая второе слагаемое с (3.17) с первым, можно оценить характерное время т_н, которое можно назвать временем «наведения корреляции»:

$$\tau_{\rm H} \approx (N^{1/3} v_0)^{-1} \times \begin{cases} 0.8, & \beta_1, \beta_2 \ll 1, \\ 14\beta_1^{-1}\beta_2^{-1}, & \beta_1, \beta_2 \gg 1. \end{cases}$$
(3.18)

Отсюда видно, что корреляция быстрее наводится между большими полями (β_1 , $\beta_2 \gg 1$), чем между малыми.

4. УЧЕТ ТЕПЛОВОГО ДВИЖЕНИЯ ИОНОВ

Возможность подхода к проблеме уширения, основанная на статической функции распределения полей в плазме, заранее отнюдь не очевидна*). Действительно, само существование плазмы связано с достаточно высокими температурами, при которых ионы обладают значительными скоро-

^{*)} Так, в 1926 г. Паули писал 42: «Хольцмарк предпринял попытку рассмотреть упирение спектральной линии, связанное с давлением газа, как эффект Штарка, обусловленный межмолекулярными полями. Результаты Хольцмарка мало обоснованы, поскольку вводимые им межмолекулярные поля нельзя считать однородными и, тем более, не зависящими от времени». (Автор признателен Г. В. Шолину и А. В. Демуре за указание этой цитаты.)

стями. Это означает, что ионное поле меняется с течением времени и потому важно выявить условия, при которых этим изменением можно пренебречь. Наиболее прямой путь состоит в вычислении поправок на тепловое движение ионов к статическому контуру линии. Тогда требование малости этих поправок по сравнению с нулевым (статическим) приближением даст критсрий статичности ионов. Такая программа в бинарном случае была проведена Холстейном ⁴³. Для множественного (хольцмарковского) уширения «тепловые» поправки были впервые рассчитаны Коганом²¹ в рамках модели фазовой модуляции. Наглядная физическая картина влияния тепдового движения ионов на атом в рамках той же модели была дана Виммелем 44. Полный расчет тепловых поправок с учетом эффектов неадиабатичности проведен в работе Шолина, Лисицы, Когана⁴⁵. Рассмотрим вначале, следуя⁴⁴, качественные особенности эффектов

теплового движения в рамках модели фазовой модуляции.

Пусть ионное поле \hat{F} (t) меняется достаточно медленно. Тогда корреляционную функцию (2.3) можно разложить в ряд по степеням производных поля F. Подставляя затем (2.3) в (1.1), получим

$$I_{ab}(\omega) \approx \int_{0}^{\infty} dFW(F) \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{0}^{\infty} d\tau e^{-\imath [\Delta \omega - (CF/e)]\tau} \langle e^{\imath CF\tau^{2}/2e} \rangle_{F}^{*}; \qquad (4.1)$$

здесь мы ограничились первой производной поля \dot{F} и разбили усреднение на два этапа: вначале выполняется усреднение по всем \dot{F} при фиксированном поле F (обозначаемое $\langle \ldots \rangle_F$), а затем — по всем полям F с хольцмарковской функцией распределения W(F). Внутренний интеграл по т в (4.1) представляет собой спектр атома

при фиксированном поле F, который в отсутствие теплового движения $(F \equiv 0)$ дает б-функцию (3.1). Множитель под знаком (...)_F описывает, очевидно, потерю фазовой когерентности атома вследствие теплового движения ионов. Действительно, при $|\dot{CF} \tau^2/2e| \sim 1$ атом «забывает» о своей первоначальной фазе, что приводит к размытию спектра при данном F на величину | $C\dot{F}/e$ |^{-1/2}. Время T_{Φ} , за которое происходит расстройка фазовой когерентности, по порядку величины равно

$$T_{\Phi}(F) \sim \left\langle \left| \frac{C}{e} \dot{F} \right|^{-1/2} \right\rangle_F \sim \sqrt{\frac{T_{F}e}{CF}},$$
 (4.2)

где $T_F \sim F \langle |\dot{F}|^2 \rangle_F^{-1/2}$ — среднее время жизни поля F. Таким образом, время потери когерентности T_{ϕ} связано с конечностью времени жизни ионного поля T_F . Для расчета T_F необходимо знать средние значения производных поля $\langle \dot{F}^2 \rangle_F$ при данном *F*. Такие расчеты были выполнены Чандрасскаром и фон Нейманом ³². Нас будут интересовать значения составляющих производных $\langle \dot{\mathbf{F}}_{l}^{2} \rangle_{F}$ и $\langle \dot{\mathbf{F}}_{\perp}^{2} \rangle_{F}$, соответственно параллельных (\dot{F}_{11}) и перпендикулярных (\dot{F}_{\perp}) вектору поля F:

$$\langle \dot{\mathbf{F}}_{||}^2 \rangle_F = -\frac{45}{8} (\omega_F F_0)^2 \times \begin{cases} 1/3, & \beta \ll 1, \\ 16\beta^3/45, & \beta \gg 1, \end{cases}$$
(4.3)

$$\langle \dot{\mathbf{F}}_{\perp}^2 \rangle_F = \frac{45}{8} (\omega_F F_0)^2 \times \begin{cases} 2/3, & \beta \ll 1, \\ 8\beta^3/45, & \beta \gg 1, \end{cases}$$
 (4.4)

где $\omega_F = \lambda^{1/2} v_0 N^{1/3}$ ($\lambda \approx 2,603$) — характерный масштаб частоты изменения поля, $\beta = F/F_0$. Производные (4.3), (4.4) при любых β отличаются друг от друга лишь численными множителями порядка единицы. Поэтому несущественно, какую из них использовать при определении T_F . С учетом (4.3), (4.4) получаем

$$T_{F} \sim F \langle |\dot{F}|^{2} \rangle_{F}^{-1/2} \sim (N^{1/3} v_{0})^{-1} \begin{cases} \beta, & \beta \ll 1, \\ \beta^{-1/2}, & \beta \gg 1, \end{cases}$$
(4.5)

т. е. максимальное время жизни оказывается у средних полей ($\beta \sim 1$), тогда как слабые ($\beta \ll 1$) и сильные ($\beta \gg 1$) поля живут малое время.

С помощью (4.2), (4.5) можно сформулировать критерий статичности. Действительно, поле F можно считать статическим, если атом теряет когерентность быстрее, чем успевает измениться ионное поле, т. е.

$$T_{\phi} \ll T_F$$
, или $\frac{C}{e} F T_F |_{CF/e==\Delta\omega} \gg 1.$ (4.6)

Рассмотрим, к чему сводится критерий (4.6) при больших и малых значениях $\Delta \omega$ (*CF/e*). С учетом (4.5) из (4.6) получаем

$$\Delta\omega \gg \left\{ \begin{array}{c} \frac{v^2}{C} \equiv \Omega, \quad \Delta\omega \gg \Delta\omega_0, \end{array} \right. \tag{4.7a}$$

$$\left(\sqrt{CNv}, \quad \Delta\omega \ll \Delta\omega_{0}. \right)$$
 (4.76)

При анализе условий (4.7) надо иметь в виду значение параметра $g_i = N (C/v_i)^3$. При $g_i \ll 1$ (бинарная область) статическое приближение справедливо лишь в далеком крыле линии $\Delta \omega \gg \Omega \gg \Delta \omega_0$. При $g \gg 1$ (множественный случай) статическая теория справедлива всюду, за исключением центральной части контура $\Delta \omega_0 \gg \Delta \omega \gg \sqrt{CNv_i}$. Таким образом, приближение Хольцмарка выполняется тем лучше, чем больше параметр g и чем дальше в крыле линии производится наблюдение.

Перейдем к количественному расчету поправок на тепловое движение к статическому контуру линии. Выше все рассмотрение основывалось на предположении о том, что ионное поле $\mathbf{F}(t)$ меняется только по величине (модулю). Такое изменение связано, очевидно, с производными $\dot{\mathbf{F}}_{\text{II}}$, параллельными полю. В действительности, реальное понное поле $\mathbf{F}(t)$ меняется также и по направлению. Это изменение, обусловленное производными $\dot{\mathbf{F}}_{\text{I}}$, приводит к двум важным эффектам. Если поворот вектора $\mathbf{F}(t)$ происходит достаточно медленно, то дипольный момент атома d успевает адиабатически следовать за ним, все время сохраняя постоянной свою проекцию на направления \mathbf{F} . При такой переориентации атома изменяется проекцию на направления распространения световой волны \mathbf{k} , а поскольку квадратом этой проекции определяется интенсивность излучаемого атома света, то должна возникнуть некоторая *амплитудная* модуляция излучения.

Кроме амплитудной модуляции поворот оси квантования сопровождается эффектами неадиабатичности, связанными с отставанием атома от поля $\mathbf{F}(t)$ (инерционностью атома). Действительно, если направить ось вращающейся системы координат вдоль поля \mathbf{F} , то в этой системе появится дополнительное взаимодействие орбитального момента атома \mathbf{L} с «магнитным» полем. Это взаимодействие приводит к изменению волновой функции и энергии излучающего атома, что, очевидно, сказывается на величине соответствующих матричных элементов дипольного момента и величине фазы излучаемой волны.

Пусть ось Ox вращающейся системы координат направлена вдоль вектора $\mathbf{F}(t)$. Преобразуем волновую функцию ψ в эту вращающуюся систему:

$$\psi' = e^{iL_z \phi(t)/\hbar} \psi, \qquad (4.8)$$

где ψ' — волновая функция во вращающейся системе, L — орбитальный момент атома, $\varphi(t)$ — угол поворота поля F за время $t(\varphi(0) = 0)$. Подставляя (4.18) в уравнение Шрёдингера, получим уравнение для функции ψ':

$$i\hbar \frac{\partial \psi'}{\partial t} = \left[\hat{\mathscr{H}}_0 - d_x F(t) + L_z \dot{\varphi}(t) \right] \psi', \qquad (4.9)$$

где $\hat{\mathscr{H}}_0$ — невозмущенный гамильтониан атома. Видно, что во вращающейся системе, помимо электростатического $d_x F$, появилось также и «магнитное» возмущение ($L_z \phi$), связанное с мгновенной угловой скоростью поворота поля ф. Появление этого возмущения есть, очевидно, следствие теоремы Лармора 46. Нашей задачей является развить теорию возмущений по скорости изменения поля F. При этом произвольная модуля поля F связана с величиной F_{ll}, тогда как угловая скорость ф (0), очевидно, равна

$$\left|\dot{\boldsymbol{\varphi}}\left(0\right)\right| = \left|\frac{\mathbf{F}\left(0\right)\mathbf{F}\left(0\right)}{\mathbf{F}^{2}}\right| = \left|\frac{\mathbf{F}_{\perp}}{F}\right|.$$
(4.10)

Решение уравнения (4.9) по теории возмущений позволяет выразить поправки на тепловое движение ионов через средние квадраты производных поля (4.3), (4.4). При этом для центра линии (малые значения Δω и $F \rightarrow 0$) эти поправки резко возрастают вследствие эффектов неадиабатичности. Действительно, как видно из (4.9), неадиабатические поправки к волновой функции ф, обусловленные вращением, определяются отношением $\dot{\phi}/d_r F$, или, согласно (4.10), величиной | \dot{F}_1 |/ F^2 , быстро возрастающей при $\vec{F} \rightarrow 0$.

Профиль водородной линии I (ω) при учете теплового движения ионов можно представить в виде двух слагаемых: нулевого $I^{(0)}$ (хольцмарков-ского) и поправочного $I^{(1)}$ профиля, описывающего эффекты теплового движения:

$$I(\omega) = I^{(\omega)}(\omega) + I^{(1)}(\omega) = \frac{1}{\Delta\omega_0} \left[\mathscr{B}\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\right) + g^{-2/3}\Pi\left(\frac{\Delta\omega}{\Delta\omega_0}\right) \right], \quad (4.11)$$

$$\Pi(x) \approx \begin{cases} a_1 x^{-7/2}, & x \gg 1, \\ a_2 x^{-2}, & x \ll 1, \end{cases}$$
(4.12)

где a_1, a_2 — численные константы, зависящие от рассматриваемой линии.

Поправка на тепловое движение $I^{(1)}$ пропорциональна температуре T ионов (входящей в множитель $g^{-2/3} \propto v_0^2 \propto T$) и содержит функцию $\Pi(x)$, описывающую эффекты модуляции как фазовый и амплитудной, так и неадиабатической.

На крыле линии ($x \gg 1$) «тепловая» поправка П (x) $\infty x^{-7/2}$, т. е. убывает быстрее функции Хольцмарка, причем вклады всех трех эффектов в поправку оказываются одного порядка. В центре линии ($x \ll 1$) тепловые поправки резко возрастают (П (x) $\sim x^{-2}$). Этот эффект целиком обусловлен неадиабатичностью вращения, тогда как эффекты фазовой и амплитудной модуляции стремятся здесь к постоянной и, следовательно, относительно малы. Эти закономерности справедливы для любых водородных линий.

Условием применимости статической теории Хольцмарка является. очевидно, требование малости второго слагаемого в (4.11) по сравнению с первым. Можно убедиться, что оно эквивалентно полученным выше критериям (4.6), (4.7). Теперь, однако, ясно, что, в отличие от самого хольцмар-

7 УФН, т. 122, вып. 3 ковского приближения, отклонения от него обусловлены эффектами неадиабатичности, связанными с выходом за рамки адиабатической модели осциллятора. В терминах критерия (4.6) можно сказать, что основной причиной потери когерентности атомом является не фазовая модуляция, а неадиабатические переходы между штарковскими компонентами, вызванные вращением ионного поля.

Резюмируя сказанное, можно отметить, что теория Хольцмарка имеет вполне определенную область применимости. Действительно, эффекты ион-ионных корреляций ограничивают применимость этой теории со стороны низких температур (условие (3.14)), тогда как эффекты теплового движения — со стороны высоких температур (условие $g = N (C/v)^3 \gg 1$.) Сравнивая эти условия, убеждаемся, что ширина области применимости теории Хольцмарка определяется неравенством

$$\frac{n^2}{4\pi} \frac{M}{m} \frac{n^2 - a_0}{N^{-1/3}} \gg 1, \qquad (4.13)$$

где n — главное квантовое число уширяемого уровня; M, m — массы иона и электрона, a_0 — боровский радиус. Параметр $n^2 a_0 / N^{-1/3} \ll 1$ определяет, очевидно, степень неоднородности ионного поля в пределах размера атома (подробнее см. гл. 10). Неравенство (4.13) для начальных водородных линий, отвечающих уровням n = 3, 4, 5, эквивалентно условию $N \gg 10^{14}$ см⁻³.

5. УДАРНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ. ПРОФИЛЬ ВОДОРОДНОЙ ЛИНИИ ПРИ ФИКСИРОВАННОМ ИОННОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь ударное приближение, справедливое для ушире ния быстрыми частицами (обычно электронами). Для таких частиц параметр $g_e = N (C/v_e)^3 \ll 1$, и основная часть контура линии лежит в ударной области. Лишь в далеких крыльях $\Delta \omega \ge \Omega_e$ возможен переход от ударного механизма уширения к статическому.

Построение теории ударного уширения для водородных уровней должно с самого начала учитывать неадиабатические переходы между вырожденными состояниями, относящимися к одному уровню с фиксированным главным квантовым числом n. Следует отметить, однако, что в плазме вырождение водородных уровней снимается воздействием статического ионного поля F_i . Поэтому все расчеты ударного электронного уширения следует приводить в параболических координатах с осью $Oz | F_i$, в которых взаимодействие атома с ионным полем диагонально.

Современная ударная теория уширения была развита в работах Собельмана²⁶, Грима, Колба, Шена⁴⁷, Баранжера²⁷, Вайнштейна и Собельмана⁴⁸. Ниже при изложении мы следуем работам^{49, 50}, а также⁵¹.

Волновая функция ψ (t) обоих уровней удовлетворяет уравнению Шрёдингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left[\mathscr{\hat{H}}_{0}\left(F_{i}\right) + \hat{V}_{e}\left(t\right) \right] \psi, \qquad (5.1)$$

где нулевой гамильтониан $\hat{\mathscr{H}}_0$ включает взаимодействие с ионным полем F_i , $\hat{V}_e(t) = -\mathbf{d} \mathbf{F}_e(t)$ — взаимодействие дипольного момента d атома с электронным полем $\mathbf{F}_e(t)$, см. (1.4).

Удобно ввести оператор эволюции U (t, 0) в представлении взаимодействия

$$\psi(t) = e^{-i\mathcal{H}_0(F_i)t/\hbar} \hat{U}(t, 0) \,\psi(0).$$
(5.2)

466

Оператор \hat{U} удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}}{\partial t} = e^{i\hat{\mathscr{H}}_{0}t}\hat{V}_{e}(t) e^{-i\hat{\mathscr{H}}_{0}t}\hat{U} = \hat{\widetilde{V}}_{e}(t)\hat{U}, \qquad (5.3)$$

формальное решение которого имеет вид

$$\hat{U}(t,0) = \hat{T} \exp\left[-\frac{\iota}{\hbar} \int_{0}^{t} \hat{V}_{e}(\tau) d\tau\right]$$
(5.4)

 $(\hat{T} - \text{оператор хронологического упорядочения}).$

Профиль линии (1.1), (1.2) $I_{ab}(\omega)$ легко записать с помощью операторов эволюции \hat{U}_a и \hat{U}_b для обоих уровней,

$$I_{ab}(\omega) = \operatorname{Re} \sum_{\substack{\alpha, \alpha', \sigma \\ \beta, \beta'}} \int_{0}^{\infty} dt e^{i(\omega - \omega_{\alpha\beta})t} \langle \beta | d_{\sigma} | \alpha \rangle \times \langle \alpha' | d_{\sigma} | \beta' \rangle \{ \langle \alpha | \hat{U}_{a}(t, 0) | \alpha' \rangle \langle \beta | \hat{U}_{b}^{*}(t, 0) | \beta' \rangle \}, \quad (5.5)$$

где d_{σ} — компонента дипольного момента; символ {...} обозначает усреднение по координатам и скоростям возмущающих электронов. В дальнейшем для краткости удобно ввести обозначение

$$\langle \alpha | U_a | \alpha' \rangle \langle \beta | U_b^* | \beta' \rangle = \langle \langle \alpha \beta | U_a U_b^* | \alpha' \beta' \rangle \rangle.$$

Попытаемся упростить выражение (5.4) для операторов U_a и U_b (а тем самым и для спектра I_{ab} (ω)), воспользовавшись приближениями ударной теории. Это возможно сделать, если интересоваться промежутками времени Δt , большими по сравнению с длительностью столкновения электрона ρ/v . В то же время интервал Δt должен быть мал по сравнению со временем между столкновениями $\gamma^{-1}(\gamma - ударная$ ширина, обусловленная столкновениями), чтобы приращение оператора U на интервале Δt было все еще малым. Таким образом,

$$\rho/v \ll \Delta t \ll \gamma^{-1}$$
.

Полагая γ ~ Nvπρ², видим, что условием существования такой области является условие парности (бинарности) столкновений Nρ³ ≪ 1. Рассмотрим изменение произвеления операторов U₋U[†] за время Δt.

$$\Delta U_a(t, 0) U_b^*(t, 0) = U_a(t + \Delta t, 0) U_b^*(t + \Delta t, 0) - U_a(t, 0) U_b^*(t, 0) =$$

$$= [U_a(t + \Delta t, t) U_b^*(t + \Delta t, t) - 1] U_a(t, 0) U_b^*(t, 0).$$
(5.6)

Усредним теперь (5.6) по нараметрам столкновения. Поскольку $\Delta t \gg \rho/v$, приращение операторов $U_a U_b^*$ на интервале $(t, t + \Delta t)$ не зависит от величины $U_a(t, 0) U_b^*(t, 0)$, и усреднение обоих сомножителей в правой части (5.6) можно провести раздельно. Тогда для усредненного произведения $\{U_a U_b^*\}$ получаем уравнение

$$\frac{\Delta \{U_a(t, 0) U_b^*(t, 0)\}}{\Delta t} = e^{i(\hat{\mathscr{H}}_{0a} - \hat{\mathscr{H}}_{0b})t} \hat{\Phi}_{ab} e^{-i(\hat{\mathscr{H}}_{0a} - \hat{\mathscr{H}}_{0b})t} \{U_a(t, 0) U_b^*(t, 0)\}, \quad (5.7)$$

где не зависящий от времени оператор Φ_{ab} называется оператором ударного электронного уширения:

$$\hat{\Phi}_{ab} = \frac{1}{\Delta t} \{ \hat{U}_a(t, t + \Delta t) \, \hat{U}_b^*(t, t + \Delta t) - 1 \}.$$
(5.8)

Решение дифференциального уравнения (5.7) записывается в виде

$$\{U_{a}U_{b}^{*}\} = e^{i(\mathcal{H}_{0b} - \mathcal{H}_{0b})t/\hbar} e^{\{-i[(\mathcal{H}_{0a} - \mathcal{H}_{0b})/\hbar] + \hat{\Phi}_{ab}\}t}.$$
(5.9)

7*

467

Подставляя (5.9) в выражение для спектра (5.5), получим контур линии в ударном приближении:

$$I_{ab}(\omega) = -\operatorname{Re}\sum_{\alpha, \alpha'; \beta, \beta', \sigma} \langle \beta | d_{\sigma} | \alpha \rangle \langle \alpha' | d_{\sigma} | \beta' \rangle \times \langle \langle \alpha \beta | \left[i\omega - \frac{i}{\hbar} \left(\hat{\mathscr{B}}_{0a} - \hat{\mathscr{H}}_{0b} \right) + \hat{\Phi}_{ab} \right]^{-1} | \alpha' \beta' \rangle \rangle.$$
(5.10)

Таким образом, задача о точном расчете оператора эволюции $\hat{U}(t, 0)$ и контура линии $I_{ab}(\omega)$ сводится в ударном приближении к вычислению более простого оператора ударного электронного уширения $\hat{\Phi}_{ab}$.

В силу условия $\Delta t \gg \rho/v$ в выражений (5.8) можно заменить операторы зволюции на интервале $(t, t + \Delta t)$ матрицами рассеяния S_a и S_b . Тогда выражение для Φ_{ab} принимает вид

$$\Phi_{ab} = N \int_{0}^{\infty} dvvf(v) \int_{0}^{\infty} 2\pi\rho \, d\rho \, \{S_a S_b^* - 1\}, \qquad (5.11)$$

где символ $\{...\}$ означает усреднение по углам векторов ρ и v, f(v) — максвелловская функция распределения электронов по скоростям.

Вычисление оператора Φ_{ab} связано с нахождением матрицы рассеяния S, что представляет собой все еще весьма сложную задачу. Ее можно, однако, упростить, воспользовавшись тем обстоятельством, что при расчете S-матрицы оказывается справедливой теория возмущений по величине $\tilde{V}(t)$; см. (5.3). Это связано с дальнодействующим характером кулоновского поля. Действительно, структура формулы (5.11) полностью аналогична структуре формулы (2.14) в адиабатической теории уширения,

причем аналогом S-матрицы является величина $\cos \int_{-\infty}^{\infty} \varkappa(t) dt = \cos (\pi C / \rho v).$

При анализе формулы (2.14) мы уже видели, что основной вклад в уширения вносят далекие (слабые) пролеты с $\rho > \rho_B$, для которых можно воспользоваться теорией возмущений.

В точности такие же соображения позволяют заменить точную S-матрипу в (5.11) ее разложением в ряд теории возмущений до второго порядка.

Следует иметь в виду, что расчет S-матрицы по теории возмущений имеет только логарифмическую точность, которая обычно не лучше 20-30%. Для улучшения точности к логарифмическому слага́емому добавляется слагаемое, учитывающее вклад сильных столкновений с $\rho < \rho_B$. Эти последние учитываются на основе приближения формул (например, по адиабатической модели), которые тем не менее дают результаты, близкие друг к другу ⁵².

Рассмотрим вначале уширение одного уровня *a*, для которого S-матрица во втором порядке теории возмущений имеет вид

$$\{S_a-1\} = \left\{ -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \widetilde{V}_a(t) dt + \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \widetilde{V}_a(t_1) \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \widetilde{V}_a(t_2) \right\}.$$
 (5.12)

Дальнейший расчет состоит в подстановке в (5.12) явного вида возмущения $\tilde{V}_a(t) = e^{-i\mathscr{H}_0 t}$ ега F(t) $e^{i\mathscr{H}_0 t}$ и выполнения углового усреднения по направлениям векторов р и v, входящих в F(t). При этом первый член в правой части (5.12) обращается в нуль, а второй после ряда преобразований и подстановки в (5.11) дает 47, 49-51

$$\Phi_a = \frac{16}{3} N \frac{e^4}{\hbar^2} \langle v \rangle^{-1} \mathbf{r}_a \mathbf{r}_a \Lambda, \quad \Lambda \equiv \ln \frac{\rho_m}{\rho_B \langle v_0 \rangle} + 0.215, \tag{5.13}$$

где численный коэффициент при логарифме учитывает вклад сильных столкновений, $v_0 = \sqrt{2kT/m}$.

Формула (5.13) является обобщением адиабатического результата (2.13), (2.14). В частности, квадрат штарковской постоянной в (2.14) заменен в (5.13) оператором $(e^4/\hbar^2) r_a r_a$. Верхний параметр обрезания ρ_m согласно гл. 2 следует положить равным минимальному из двух значений ρ_D и $\rho_{\omega} = v/\Delta\omega$; см. (2.23). Отметим, что расщепление уровней в ионном поле $CF/e \sim CN^{2/3}$ не вошло в окончательный результат для оператора Φ_a . Это объясняется тем, что величина такого расщепления $CN^{2/3}$ мала по сравнению с обратным временем столкновения электрона с атомом $\tau^{-1} \sim v_e/\rho_{eB} \sim v_e^2/C \sim \Omega_e$.

Обобщение формулы (5.13) на случай уширения обоих уровней *a* и *b* не представляет труда. При этом в операторе Φ_{ab} помимо членов, связанных со вторым порядком теории возмущений $r_a r_a$ и $r_a^* r_b^*$, появится перекрестный член от произведения членов первых порядков $(2r_a r_b^*)$:

$$\Phi_{ab} = -\frac{16}{3} N \frac{e^4}{\hbar^2} \langle v \rangle^{-1} \left(\mathbf{r}_a \mathbf{r}_a + \mathbf{r}_a^* \mathbf{r}_b^* - 2\mathbf{r}_a \mathbf{r}_b^* \right) \Lambda.$$
(5.14)

Отсюда видно, в частности, что вклад верхнего и нижнего уровней в ударное уширения не аддитивен.

Вычисление матричных элементов операторов Φ_{ab} следует проводить, как указывалось, в параболической системе координат с осью Oz вдоль ионного поля. Для матричных элементов операторов **г**·**г** такие вычисления приводят к результату⁵¹:

$$\langle n_1 n_2 m \mid \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} \mid n_1 n_2 m \rangle = a_0^2 \frac{9}{4} n^2 [n^2 + (n_1 - n_2)^2 - m^2 - 1],$$
 (5.15)

$$\langle n_{1}-1, n_{2}+1, m | \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} | n_{1}n_{2}m \rangle = = a_{0}^{2} \frac{9}{4} n^{2} \sqrt{n_{1}(n-n_{1})(n_{2}+1)(n-n_{2}-1)}, \langle n_{1}+1, n_{2}-1, m | \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} | n_{1}n_{2}m \rangle = = a_{0}^{2} \frac{9}{4} n^{2} \sqrt{n_{2}(n-n_{2})(n_{1}+1)(n-n_{1}-1)}.$$
(5.16)

Оператор Φ_{ab} надо подставить в общую формулу (5.10) для профиля линии $I_{ab}(\omega)$. Расчеты $I_{ab}(\omega)$ требуют трудоемкой численной процедуры, связанной с диагонализацией оператора резольвенты $[i\omega - i(\hat{\mathscr{B}}_{0a} \rightarrow \hat{\mathscr{B}}_{0b})/\hbar + \hat{\Phi}_{ab}]^{-1}$, которая оказывается тем сложнее, чем больше компонент у линии. Для приближенного определения ударной ширины линии γ можно отбросить недиагональные матричные элементы Φ_{ab} , а диагональные элементы — просуммировать с весом, равным интенсивностям компонент *):

$$\gamma = \sum_{\alpha, \beta} |d_{\alpha\beta}|^2 \frac{\langle \langle \alpha \alpha \mid \Phi_{\alpha\beta} \mid \beta\beta \rangle \rangle}{\sum_{\alpha, \beta} |d_{\alpha\beta}|^2}.$$
 (5.17)

Для грубых оценок можно использовать формулу

$$\gamma = \frac{16}{3} N \frac{e^4}{\hbar^2} \sqrt{\frac{\pi m}{8kT}} \left(n_a^4 + n_b^4 \right) \left(\ln \frac{\rho_{\text{max}}}{\rho_B \left(v_0 \right)} + 0,215 \right).$$
(5.18)

Отметим, что формула применима лишь к низшим линиям. Для переходов с квантовыми числами $n_a \gg 1$, $n_b \gg 1$, $|n_a - n_b| \ll n_a$ перекрестный член в (5.14) приводит к сильной компенсации ширин отдельных уровней, что может давать более слабую зависимость от n: $\gamma \propto n^{2-53}$.

^{*)} Отметим, что для крыла линии формула (5.17) является точной.

Результирующую картину электронного ударного уширения в ионном поле схематически можно представить следующим образом. Ионное поле расщепляет водородную линию на отдельные штарковские компоненты, которые уширяются ударным воздействием электронов. Ударные ширины этих компонент определяются диагональными матричными элементами (5.14) оператора Φ_{ab} .

Контур линии, уширенной электронами при фиксированном ионном поле, имеет весьма сложную структуру. Для ее исследования надо, как указывалось, диагонализовать оператор резольвенты в (5.10). Это можно проделать аналитически лишь для простейших линий Ly – a, Ly – β, что впервые сделано в работах Стрекалова и Бурштейна 54, а также Пфеннига ⁵⁵. Ниже мы следуем работе ⁵¹. Рассмотрим собственные значения E_{α} и функции $|\psi_{\alpha}\rangle$ гамильтониана $\hat{\mathscr{H}}_{0}(F)/\hbar - i\hat{\Phi}_{\alpha}$, включающего взаимодействие с ионным полем F и ударное электронное уширение $\hat{\Phi}_a$. Собственные функции | ϕ_{β} гамильтониана $\mathscr{B}_0(F)$ нам известны. Тогда можно найти матрицу $\dot{C}_{\beta\alpha}$, определяющую переход от базиса $| \phi_{\beta} \rangle$ к базису $| \psi_{\alpha} \rangle$. Оператор $H_0 - i\Phi$ неэрмитов и потому систему кет-векторов ψα > надо дополнить ортогональной ей системой бра-векторов (χα |. Эта система получается из (фр с помощью матрицы Сав. Поскольку оператор $\mathscr{H}_0 - i\Phi$ неэрмитов, матрица \hat{C} не является унитарной: $C^{-1} \neq C^+$. Найдя функции | ψ_α ν (χ_α |, мы диагонализуем, очевидно, оператор резольвенты и вычислим контур линии. Задача сводится, таким образом, к нахождению матрицы C. Рассмотрим простейшую водородную линию Ly — а. Для нее оператор Φ_a имеет лишь один недиагональный матричный элемент, связывающий симметричные боковые компоненты. Собственные значения энергии равны

$$E_{i,2} = \omega \pm \Omega - iw, \quad \Omega \equiv \sqrt{\left(\frac{\Lambda}{2}\right)^2 - \beta^2};$$
 (5.19)

здесь w и β — соответственно диагональный и недиагональный матричные элементы Φ_a , Δ — расщепление уровней в ионном поле. Из (5.19) видно, что наличие неэрмитового недиагонального элемента приводит к своеобразному эффекту: уровни энергии E_1 и E_2 не расталкиваются из-за наличия β , а, наоборот, эффективно притягиваются. В частности, при $\beta = \Delta/2$ имеется точка $E_1 = E_2$, вырождения или слияния (коллапса) обоих состояний. Характер спектра в этой точке существенно меняется, поскольку величина Ω при $\Delta/2 < \beta$ становится чисто мнимой. Вклад боковых компонент в интенсивность линии вне области слияния имеет вид ⁵⁴

$$I(\omega) = \frac{|d_{10}|^2}{\pi} \left[\frac{w + (\beta/\Omega) (\Delta \omega + \Omega)}{(\Delta \omega + \Omega)^2 + w^2} + \frac{w - (\beta/\Omega) (\Delta \omega - \Omega)}{(\Delta \omega - \Omega)^2 + w^2} \right].$$
 (5.20)

Вклад недиагонального матричного элемента β существен вблизи центра линии $\Delta \omega = 0$, тогда как на крыле линии его роль мала. Внутри области слияния $\Delta/2 < \beta$ характер спектра меняется. Здесь величина Ω входит аддитивно с диагональным матричным элементом w. Эффект слияния приводит к некоторому суже́нию линии. При этом следует помнить, что эффект слияния проявляется лишь для слабых ионных полей F, расщемление Δ в которых сравнимо с ударной полушириной линии $w \sim \beta$ и статистический вес которых мал. Тем не менее слияние может оказаться существенным для формы линии в ее центральной части.

Для линий, содержащих большое число компонент (например, для серии Бальмера), аналитическая диагонализация резольвенты весьма затруднительна. Поэтому роль эффекта слияния здесь оценить трудно. Обычно процедура обращения матриц в спектре (5.10) выполняется численно на ЭВМ (см. гл. 10).

штарковское уширение линий водорода

6. ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ УШИРЕНИИ В БИНАРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Специфика, связанная с дополнительным вырождением в кулоновском иоле, позволяет получить точное решение задачи об уширении линий водорода при парных столкновениях с заряженными частицами (обычно электронами). Построение такого решения связано с возможностью найти точные волновые функции возбужденного водородного уровня в поле пролетающего заряда. Не лишена интереса история этого вопроса. Впервые такое решение было получено Спитцером 56 еще в 1940 г. для частного случая линии Ly — а. Этот результат на протяжении более 30 лет не получил должного отклика в теории уширения. Точные волновые функции для уровня с n = 2 были затем независимо построены Чибисовым ⁵⁷, использовавшим их для задач рассеяния *). Лишь в последнее время результаты Спитцера были возрождены Пфеннигом ⁵⁹ для исслев последнее дования перехода между статическим и ударным пределами теории уширения. Одновременно Лисицей и Шолиным 60 был предложен метод нахождения точных волновых функций для любого уровня водорода, находящегося в электрическом поле пролетающего заряда. Метод основан на сведении задачи о столкновении к задаче об уровнях энергии и волновых функциях атома водорода в скрещенных электрическом и магнитном полях. Решение же этой последней задачи, поставленной еще в 20-х годах 61, было дано (для случая статических полей) Демковым, Монозоном и Островским 62, использовавшими дополнительную (четырехмерную) симметрию атома водорода, что позволило избежать трудоемкого решения секулярных уравнений, фигурирующих в традиционном подходе. В дальнейшем эти методы использовались при решении ряда задач теории рассеяния 63, 64.

Для выяснения сути метода начнем с рассмотрения модельного примера **) — спектра излучения атома водорода во вращающемся электрическом поле ^{65, 66}.

Рассмотрим возбужденный атом водорода, находящийся в постоянном по величине электрическом поле F, вращающемся вокруг оси Ozв плоскости x, y с угловой скоростью Ω^{***}). Введем вращающуюся систему координат x', y', z' (z' = z), ось Ox' которой в любой момент времени направлена вдоль поля F. Волновые функции $\psi(t)$ во вращающейся системе связан с функциями в неподвижной системе соотношением

$$\psi'(t) = e^{iL_z\Omega t/\hbar}\psi(t) \tag{6.1}$$

(L — оператор орбитального момента).

Подставляя (6.1) в уравнение Шрёдингера, имеем

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = (\hat{\mathscr{H}}_0 + d_x F + \hbar L_z \Omega) \,\psi' \equiv (\hat{\mathscr{H}}_0 + \hat{V}) \,\psi, \tag{6.2}$$

откуда видно, что во вращающейся системе имеются как электростатическое (dxF), так и «магнитное» $(L_z\Omega)$ взаимодействия, причем последнее целиком обусловлено вращением.

Таким образом, задача свелась к нахождению уровней энергии и волновых функций атома во взаимно перпендикулярных; электрическом и магнитном полях. Решение этой задачи основано на использовании дополнительного интеграла движения в кулоновском поле — вектора

^{*)} Взаимодействие заряженных частиц с возбужденным водородным уровнем n = 2 применительно к задачам рассеяния рассматривал также Ситон ⁵⁸.

^{**)} Этот пример не является, впрочем, только модельным. Он может быть практически реализован, например, при излучении возбужденного атома водорода в поле циркулярно поляризованной лазерной волны.

^{***)} Предполагается, что частота Ω далека от собственных частот переходов в атоме.

Рунге — Ленца (¹⁵, § 6).

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2m} \left[\left([\mathbf{pL}] - [\mathbf{Lp}] \right) - \frac{e^2 \mathbf{r}}{r} \right]$$
(6.3)

(где p — импульс электрона). Матричные элементы A для состояний с фиксированным главным квантовым числом и совпадают с матричными элементами координаты: $\mathbf{r} = (-3/2) (na_0/\hbar) A$.

Введем новые «операторы момента» J_1, J_2 и частоты ω_1, ω_2 , равные

$$\mathbf{J}_{1,2} = \frac{\mathbf{L} \pm \mathbf{A}}{2}; \quad \boldsymbol{\omega}_{1,2} = \boldsymbol{\Omega} \pm \frac{B}{e} \mathbf{F}, \quad (6.4)$$

где $B = 3ne^2 a_0/2\hbar$. Операторы J_1 , J_2 подчиняются обычным правилам коммутации для момента.

Подставляя (6.4) в (6.2), получим

$$V = \hbar \left(\mathbf{J}_1 \boldsymbol{\omega}_1 + \mathbf{J}_2 \boldsymbol{\omega}_2 \right). \tag{6.5}$$

Волновые функции $u_{nn'n''}$, диагонализующие возмущение (6.5),



Рис. 4. Спектр линии Ly — а во вращающемся электрическом поле.

изующие возмущение (0.5), должны отвечать, очевидно, определенной проекции J_1 на ω_1 (обозначаемой квантовым числом n') и проекции J_2 на ω_2 (обозначаемой n''). Эти функции можно получить из обычных параболических волновых функций $u_{ni_1i_2}$ (i_1, i_2 квантовые числа проекций J_1 и J_2 на вектор \mathbf{F} — ось Ox) посредством простых поворотов на углы β_1 и β_2 , составляемые векторами ω_1 и ω_2 с вектором \mathbf{F}^{62} .

Углы β_1 , β_2 опдеделяются отношением угловой скорости Ω к штарковскому расщеплению

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\Omega}{(B/e) F} \equiv x. \ (6.6)$$

Волновые функции и_{пп'п}" диагонализуют гамильтониан

(6.5) и определяют изменение ΔE собственных значений энергии:

$$\Delta E = (n' + n'') \hbar |\omega_{1,2}| = (n' + n'') \sqrt{1 + x^2} \hbar \frac{B}{e} F_{\bullet}$$
(6.7)

Таким образом, волновая функция ψ' во вращающейся системе имеет вид

$$\psi'(t) = u_{nn'n''} \exp\left[-i(n'+n'')\sqrt{1+x^2} \frac{B}{e}Ft\right].$$
 (6.8)

С помощью (6.8) и (6.1) нетрудно найти спектр излучения $I_{ab}(\omega)$ водорода во вращающемся поле, образованный при спонтанном переходе с уровня *a* на уровень *b*.

Такой спектр состоит из ряда компонент (δ -функций), причем его амплитуды и фазы, зависят, согласно (6.8), от параметра *x*; см. (6.6). Отметим, что число компонент превышает число n^2 состояний, относящихся к данному уровню. Это вызвано появлением дополнительных «комбинационных» сдвигов $\pm \Omega$, вызванных вращением атомного диполя. На рис. 4.

472

ШТАРКОВСКОЕ УШИРЕНИЕ ЛИНИЙ ВОДОРОДА

взятом из работы Ишимуры 65, приведен спектр Ly — а при различных значениях скорости врашения (параметра x). Вилно, что каждая из боковых компонент линии Ly — а расщепляется на две, а центральная на три компоненты, одна из которых остается невозмущенной. По мере удаления крайних компонент от центра их интенсивность уменьшается.

Столь подробное рассмотрение модельного примера связано с тем. что реальная задача об уширении оказывается в идейном отношении весьма близкой к этому примеру.

Рассмотрим столкновение заряженной (классической) частицы с возбужденным атомом водорода. Это столкновение происходит в плоскости, определяемой двумя векторами: скоростью у и прицельным параметром 0. С течением времени вектор F возмущающего электрического поля, создаваемого частицей, изменяется по величине и, кроме того, поворачивается на 180° в плоскости столкновения. Если, как и выше, ввести вращающуюся систему координат с осью Ox вдоль поля F (t), то в ней появится «магнит-

ное» взаимодействие $L_z \dot{\phi}(t) \equiv \mu_0 H_{\partial \phi \phi}(t)$ (μ_0 — магнетон Бора), связанное с вращением; см. (4.9).

Таким образом, во вращающейся системе атом находится во взаимно перпендикулярных (и притом переменных) электрическом F и магнитном $\mathbf{H}_{a\phi\phi} = \hbar \varphi / \mu_0$ полях.

Используем теперь свойства симметрии водорода. Для этого введем прежние «операторы момента» J₁ и J₂ (6.4). Вводя затем аналогичным образом частоты $\hat{\omega}_{1,2}(t)$, равные

$$\boldsymbol{\omega}_{1,2}(t) = \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) \mp \frac{B}{e} \mathbf{F}(t), \qquad (6.9)$$

перепищем гамильтониан возмущения (4.9) в виде (6.5):

$$\hat{V}(t) = d_{x}F(t) + L_{z}\phi(t) = \hbar [\mathbf{J}_{1}\omega_{1}(t) + \mathbf{J}_{2}\omega_{2}(t)].$$
(6.10)

Задача будет решена, если удастся найти волновые функции $u_{nn'n''}$, диагонализующие это возмущение. Эти функции отвечают, как и в случае вращающегося поля, определенным проекциям моментов — J_1 на ω_1 и J_2 на ω_2 . Трудность состоит в том, что векторы $\omega_1(t)$ и $\omega_2(t)$ теперь зависят от времени. Однако, как легко убедиться, направление векторов ω₁ и ω₂ в процессе столкновения не изменяется. Действительно, для поля $F(t) = e^2/(\rho^2 + v^2t^2)$ непосредственное рассмотрение геометрии пролета в плоскости столкновения дает для тангенса угла наклона вектора ω_{2} к оси $Ox \parallel \mathbf{F}$:

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{\rho v}{B} = \frac{\rho}{\rho_B} \,. \tag{6.11}$$

Таким образом, в процессе столкновения у атома водорода имеются выделенные направления квантования. Соотношение (6.11) показывает. что пролетам внутри радиуса Вайскопфа ρ_B отвечает квантование по электрическому полю F, а пролетам вне ρ_B — квантование по эффективному магнитному полю $\mathbf{H}_{\partial \phi \phi} \parallel \varphi$.

«Правильные» волновые функции и_{пп'п"} могут быть получены, таким образом, из параболических функций $u_{ni_1i_2}$, отвечающих оси квантования $Ox \parallel F$, путем простых вращений на постоянные углы β_1 и β_2 , составляемые векторами ω_1 и ω_2 с осью Ox.

Поскольку $u_{nn'n''}$ отвечает определенным проекциям J_1 , J_2 на ω_1 , ω_2 , для изменения энергии во вращающейся системе из (6.9), (6.10) получим

$$\Delta E = \hbar \left(n' + n'' \right) \sigma \frac{\rho v}{e} F(t), \quad \sigma \equiv \sqrt{1 + (B/\rho v)^2}. \tag{6.12}$$

Таким образом, волновая функция ψ' (t) во. вращающейся системе координат имеет вид (ср. (6.8))

$$\psi'(t) = u_{nn'n''} \exp\left[-i\left(n'+n''\right)\sigma \frac{\rho v}{e} \int_{\cdot}^{t} F(\tau) d\tau\right].$$
(6.13)

Отсюда следует, что эволюция волновой функции связана (как и в адиабатической модели!) только с *модулем* электрического поля F(t). Тем самым, задача оказывается аналогичной адиабатической теории со своеобразно определенными «компонентами». Эффекты же неадиабатичности сводятся к зависимости амплитуд этих компонент от параметров пролета, а также к некоторому усложнению фазового множителя. Отметим, что описанная выше процедура диагонализаций применима ко всем водородным линиям.

Указанная аналогия с адиабатической моделью позволяет, очевидно, использовать прежние результаты синтеза ударного и статического подходов (гл. 2) и в рассматриваемом общем случае. Расчет профиля линии $Ly - \alpha$, проведенный на основе формул (6.13), дает

$$I(\omega) = \frac{9N}{\pi} \frac{(\hbar/m)^2}{v} \left[\gamma \left(\frac{3\Delta\omega\hbar}{mv^2} \right) + \gamma \left(-\frac{3\Delta\omega\hbar}{mv^2} \right) \right] (\Delta\omega^2)^{-1}; \qquad (6.14)$$

здесь у (x) — универсальная функция, определяющая «переменную» ширину линии. Она может быть выражена, как и (2.20), через функцию Уиттекера ⁶⁰:

$$\gamma(x) = \frac{\pi^3}{2} \int_0^\infty \frac{dt}{t(1+t^2)} \left[k_{\sqrt{1+t^2}-1}^2(xt) + k_{\sqrt{1+t^2}+1}^2(xt) + 2t^2k_1^2(xt)\right]. \quad (6.15)$$

Предельные значения $\gamma(x)$ имеют вид

$$\gamma(x) \approx \begin{cases} -4\pi \ln x \equiv \gamma_{y_{\pi}}, & x \ll 1, \\ 2\pi^2 / \sqrt{x} \equiv \gamma_{c_{\pi}}, & x \gg 1. \end{cases}$$
(6.16)

Подстановка $\gamma(x)$ из (6.16) в (6.14) позволяет получить результаты ударной и статической теорий для областей $\Delta \omega \ll \Omega$ и $\Delta \omega \gg \Omega$ соответственно. В промежуточной области $\Delta \omega \sim \Omega$ ($x \sim 1$) функция $\gamma(x)$ рассчитана численно (см. таблицу).

x	0,01	0,03	0,05	0,1	0,2	0,3	0,5	1,0	1,5	2	3	5
$\frac{2\gamma(x)}{\pi^3}$	5,71	4,99	4,72 [.]	3,83	3,03	2,56	1,97	1,33	1,08	0,92	0,72	0,53

Таким образом, функция $\gamma(x)$ осуществляет плавный переход между ударным и статическим пределами, причем эффекты фазовой и амплитудной модуляции и эффекта неадиабатичности учитываются точно. Интересно сравнить результаты точной теории с адиабатической моделью для линии $Ly - \alpha$. Такое сравнение показывает, что различие обеих функций $\gamma(x)$ в промежуточной области не превышает 20%. Отсюда ясно, что адиабатическая модель может использоваться для приближенного описания контуров водородных линий не только в крыле линии, но и в промежуточной области частот.

474

5

штарковское уширение линий водорода

7. СОВМЕСТНОЕ УШИРЕНИЕ ИОНАМИ И ЭЛЕКТРОНАМИ

В реальной плазме водородный атом испытывает одновременное уширение ионами и электронами. Простейшая картина уширения в этом случае сводится к следующему: водородные уровни в электрическом поле F_i , создаваемом «медленными» ионами, расщепляются на отдельные штарковские компоненты, которые испытывают ударное уширение «быстрыми» электронами. Результирующий контур линии получаетя усреднением этой картины по статическому распределению ионного поля $W(F_i)$ и суммированием по всем штарковским компонентам.

Простейшую форму контура штарковской компоненты можно получить на основе адиабатической модели (§ 2) путем простой свертки статического (хольцмарковского) контура от ионов и ударного (лоренцевского) контура от электронов:

$$I(\Delta\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} dFW(F) \frac{\gamma}{[\Delta\omega - (C/e) F]^2 + \gamma^2}.$$
 (7.1)

Для центральных компонент линий $Ly - \alpha$, H_{α} , H_{γ} , ..., не испытывающих штарковского расщепления, константа Штарка C равна нулю и, как видно из (7.1), их уширение целиком обусловлено ударным воздействием электронов.

Для боковых компонент линий ($C \neq 0$), переходя в (7.1) к безразмерным переменным $x = \Delta \omega e/CF_0$ и $y = \gamma e/CF_0$, имеем ³⁵

$$I(\Delta \omega) = \frac{e}{CF_0} T_{\mathcal{H}}(x, y), \qquad (7.2)$$

где

$$T_{\mathcal{H}}(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\infty} d\beta \,\mathcal{H}(\beta) \,\frac{y}{(x - \beta/2 + y^2)}.$$
(7.3)

Формулы (7.2), (7.3) могут быть использованы и для приближенного описания полного контура линии, если под параметрами C и γ понимать эффективные значения штарковской постоянной и ширины для линии в целом. Выбор C и γ был указан выше; см. (3.10), (5.18). Для функции $T_{\rm H}(x, y)$ имеются таблицы ^{10, 35}.

Удобство адиабатической модели связано с тем, что ее результаты универсальны, т. е. одинаковы для всех водородных линий. Для более точных расчетов необходимо использовать, во-первых, более точную функцию распределения $W_D(F_i)$ (см. гл. 3) и, во-вторых, общее выражение (5.10) для ударного электронного уширения в ионном поле. В результате выражение для свертки электронного и ионного уширений приобретает такой вид:

$$I_{ab}(\omega) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \int_{0}^{\omega} dF W_{D}(F) \sum_{\substack{\alpha, \alpha', \sigma \\ \beta, \beta'}} \langle \alpha | d_{\sigma} | \beta \rangle \langle \beta' | d_{\sigma} | \alpha' \rangle \times \\ \times \left\| \langle \alpha \alpha' \right| \left\{ i \omega - \frac{i}{\hbar} \left[\widehat{\mathscr{H}}_{0a}(F) - \widehat{\mathscr{H}}_{0b}(F) \right] - \widehat{\Phi}_{ab} \right\}^{-1} \left| \beta \beta' \right\rangle.$$
(7.4)

Контур (7.4) не выражается, в отличие от (7.2), через универсальные функции, зависящие от небольшого числа параметров. Его расчет выполняется для каждой конкретной линии численно на ЭВМ. Результаты таких расчетов будут приведены в гл. 10.

Контур (7.4) хорошо описывает распределение интенсивности в линии на большей ее части. В то же время использованная простая свертка

В. С. ЛИСИЦА

ионного статического и электронного ударного контуров не учитывает двух обстоятельств: 1) в далеком крыле линии электроны уширяют не ударно; 2) в центре линии ионы уширяют не статично. С первым из них связана некорректность свертки (7.1) — (7.3) (а также и более точной свертки (7.4)) при $\Delta \omega \rightarrow \infty$. Действительно, при больших $\Delta \omega$ основной вклад в интеграл (7.3) вносят области $\beta \sim 1$ (максимум $\mathcal{H}(\beta)$) и $\beta \sim x$, что дает

$$T_{\rm H}(x, y) \sim \frac{1}{x^{5/2}} + \frac{y}{x^2}.$$

Видно, что определяющим в асимптотике является второй член. Легко убедиться, однако, что он сравнивается с первым членом при $x \sim y^{-2}$, или $\Delta \omega \sim \Omega_e \sim v_e^2/C$, т. е. при таких $\Delta \omega$, когда уширение электронами уже нельзя считать ударным. Поэтому в свертке (7.3) необходимо учесть переход электронного ударного уширения в статическое в крыле линии. Это нетрудно сделать, используя вместо (постоянной) ударной ширины γ «переменную» ширину $\gamma(x)$, определенную в (2.20). Тогда для крыла линии получим правильную асимптотику, учитывающую переход от ударного уширения к статическому для электронов:

$$T_{\rm H}(x, y) \sim \frac{1}{x^{5/2}} \left[1 + \frac{y(x)x^{1/2}}{2\pi^2} \right].$$
 (7.5)

Из (7.5) следует, что по мере увеличения x (т. е. $\Delta \omega$) все большее количество частиц уширяет статически. Это обстоятельство удобно выразить, введя эффективное число $R(\Delta \omega)$ статически уширяющих частиц:

$$R(\Delta\omega) = 1 + \frac{\gamma(\Delta\omega/\Omega_e)}{\gamma_{cr}(\Delta\omega/\Omega_e)} , \quad \gamma_{cr}(z) = \frac{2\pi^2}{\sqrt{z}}.$$
(7.6)

В ударной области $\Delta \omega \ll \Omega_e$ величина $R(\Delta \omega) \approx 1$, т. е. статичны частицы только одного сорта — ионы. В статической же области $\Delta \omega \gg \Omega_e$ величина $R(\Delta \omega) \approx 2$, т. е. статичны оба сорта частиц — ионы и электроны. Функция $R(\Delta \omega)$ в адиабатической модели имеет универсальную структуру для всех водородных линий. Ее значение легко находятся с помощью таблицы значений функции $\gamma(x)$ (см. гл. 2).

В неадиабатической теории определение $R(\Delta \omega)$ требует расчетов для каждой линии в отдельности. Результат такого расчета для линии $Ly - \alpha$ приведен в гл. 6. Для других линий также имеются расчеты, учитывающие статичность уширения электронами в крыле линии (см. гл. 10).

Перейдем к обсуждению формы контура линии в центральной части 67. Здесь необходимо учесть нестатичность ионного поля. Такой учет представляет весьма сложную задачу, что связано в первую очередь с небинарностью воздействия ионов на атом. Однако основные качественные закономерности эффектов теплового движения ионов нетрудно понять на основе результатов гл. 4. Как мы видели, главными эффектами, связанными с тепловым движением, являются эффекты неадиабатичности, вызванные вращением ионного поля. Именно эти эффекты приводят к нарушению статического приближения вблизи центра линии, причем соответствующие тепловые поправки согласно (4.12) здесь растут как $\Delta \omega^{-2}$ при $\Delta \omega \to 0$. Расчеты гл. 4 не учитывают, однако, ударного электронного уширения у, роль которого при $\Delta \omega o 0$ сводится, грубо говоря, к замене расходящейся величины $\Delta \omega^{-1}$ конечной величиной ($\Delta \omega + i\gamma$)⁻¹. Физически это означает, что учет у приводит к конечному времени жизни у-1 атомного электрона на штарковском подуровне, и, если в течение этого времени ионное поле не меняется, то его можно считать статическим. Впервые такое условие статичности для ионов было введено из интуитивных соображений Гримом

476

ШТАРКОВСКОЕ УШИРЕНИЕ ЛИНИЙ ВОДОРОДА

и др. ⁴⁷ и Кудриным и Шолиным ⁶⁸. Однако место этого критерия в ряду других критериев статичности (4.7) оставалось не ясным. Обсуждение соотношения между ними содержится в работах ^{45, 69, 70}. Ниже мы проследим, следуя ⁶⁷, роль затухания у с помощью простого модельного расчета.

Из сказанного легко оценить зависимость эффектов теплового движения от параметров плазмы в центре линии ($\Delta \omega = 0$). Для этого достаточно подставить в формулы (4.11), (4.12), определяющие при $x = \Delta \omega / \Delta \omega_0 \ll 1$ тепловые поправки в центре линии, вместо $\Delta \omega$ величину $\gamma \sim N (C^2/v_e) \times$ $\times \ln (\rho_m / \rho_B)$, ср. (5.18). Тогда для поправки на тепловое движение $I^{(1)}$ (0) получается выражение:

$$I^{(4)}(0) \sim \frac{1}{\Delta \omega_0} g_1^{-2/3} g_e^{-2/3} \Lambda^{-2}, \tag{7.7}$$

где мы ввели параметр $g_e = N (C/v_e)^3$ для электронного уширения и учли, что $\gamma/\Delta\omega_0 \propto g_e^{1/3} \ln (\rho_m/\rho_B) \equiv g_e^{1/3} \Lambda$. Зависимость $I^{(1)}(0)$ от приведенной массы μ пары ион — атом определяется множителем $g_i = N (C/v_i)^3$, где $v_i = \sqrt{2T_i/\mu}$ — относительная скорость иона и атома. Отметим, что более строгий расчет ⁷¹ позволяет определить и спектральный ход тепловой поправки $I^{(1)}(\Delta\omega)$ при $\Delta\omega \leqslant \Delta\omega_0$.

Для сравнения с экспериментом нам понадобится относительная величина тепловой поправки δ . Для линий без центральных компонент (H_{β} , H_{δ}), обладающих минимумом интенсивности в центре, величина δ определяется как отношение разности интенсивностей в максимуме (I_{max}) и центральном минимуме (I_{min}) к I_{max} :

$$\delta = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max}}.$$
 (7.8)

Учитывая, что $I = I^{(0)} + I^{(1)}$, удобно использовать разность значений $\delta_R = \delta_1 - \delta_2$ для двух значений скорости v_i (т. е. и g_i), содержащую тепловые поправки $I^{(1)}$ в «чистом виде»:

$$\delta_{R} = \delta(g_{i1}) - \delta(g_{i2}) = \frac{I_{\min}^{(1)}(g_{i1}) - I_{\min}^{(1)}(g_{i2})}{I_{\max}^{(0)}} \infty$$

$$\approx g_{e}^{-2/3} (g_{i1}^{-2/3} - g_{i2}^{-2/3}) \propto T_{i} T_{e} N^{-4/3} \frac{\mu_{2} - \mu_{1}}{\mu_{1} \mu_{2}}.$$
(7.9)

В (7.9) учтено, что $I_{\min}^{(1)} \gg I_{\max}^{(1)}$, т. е. что тепловые поправки вносят основной вклад в центре линии. Кроме того, при выводе (7.9) учтено, что согласно (3.8) $I_{\max} \sim e/CF_0$, а также соотношение $v_i^2 = 2T_i/\mu$. Выражения (7.7), (7.9) определяют зависимость тепловых поправок

Выражения (7.7), (7.9) определяют зависимость тепловых поправок от концентрации плазмы N и приведенной массы μ . Отметим также, что величина δ_R непосредственно связана с температурой ионов T_i .

Анализ выражения (4.11) показывает, что при учете ударного электронного уширения статическая (хольцмарковская) теория для ионов может быть применима и в центральной части линии. Для этого необходимо, чтобы второе слагаемое в (4.11), равное (7.7) в центре линии, было мало́ по сравнению с первым, что выполняется при условии

$$g_{i}^{2/3}g_{\rho}\Lambda^{3} \gg 1$$
, или $\frac{\rho_{9}\phi\phi\gamma}{v} \gg 1$. (7.10)

Условие статичности (7.10) имеет наглядный смысл малости «времени жизни» γ^{-1} атома на штарковском подуровне по сравнению с характерным временем изменения ионного поля $\rho_{\partial\phi\phi}/v$. Значение $\rho_{\partial\phi\phi}$ практически близко к среднему межчастичному расстоянию $N^{-1/3}$. Таким образом, критерий статичности (7.10) дополняет критерий (4.7) в центральной части линии $\Delta \omega \ll \Delta \omega_0$.

8. УШИРЕНИЕ ЛИНИЙ ВОДОРОДОПОДОБНЫХ ИОНОВ

Особенности уширения линий водородоподобных ионов связаны с отталкиванием или притяжением между излучающим ионом и возмущающей заряженной частицей плазмы (ионом или электроном).

Для расчета статического контура линии, обусловленного ионами плазмы, необходимо знать, как следует из (3.3), функцию распределения W_i (F) статического ионного поля плазмы вблизи излучающего заряда. Расчеты этой функции распределения должны, очевидно, учитывать отталкивание ионов от излучающего центра.

Рассмотрим, к чему приводит эффект отталкивания для случая взаимодействия излучающего иона с одним (ближайшим) возмущающим ионом. В отсутствие кулоновского отталкивания между ионами функция распределения совпадала бы с бинарным пределом функции Хольцмарка (3.7): \mathcal{B} (β) \approx 1,496 $\beta^{-5/2}$. При этом основной вклад в функцию распределения вносят такие расстояния $r_{\Delta \Theta}$, для которых выполнено условие (3.1):

$$\Delta \omega = \frac{C}{e} F_{\Delta \omega} = \frac{C}{r_{\Delta \omega}^2}, \quad r_{\Delta \omega} = \sqrt{\frac{C}{\Delta \omega}}. \quad (8.1)$$

При учете отталкивания функция распределения $\mathscr{H}(\beta)$ умножается на больцмановский фактор $\exp[-V(r)/kT] = \exp(-e^2/rkT)$, учитывающий потенциал отталкивания. Полагая здесь $r = r_{\Delta\omega} = \sqrt{C/\Delta\omega}$, видим, что искажение функции распределения определяется параметром $e^2/r_{\Delta\omega}kT \sim \sim (r_0/\rho_D)^2\beta^{1/2}$, где мы ввели характерные параметры: $r_0 \sim N^{-1/3}$ — среднее межчастичное расстояние, $\beta = \Delta\omega/CN^{2/3}$ — безразмерный сдвиг частоты. Расчеты Льюиса — Маргенау ⁷², проведенные по такой схеме, дают следующее выражение для бинарной функции распределения:

$$\mathscr{H}_{\iota}(\beta) = \frac{1,496}{\beta^{5/2}} \exp\left[-0,334 \left(\frac{r_0}{\rho_D}\right)^2 \beta^{1/2}\right],\tag{8.2}$$

где r_0 определено из условия: $(4/15) (2\pi)^{3/2} N r_0^3 = 1$.

Более детальные расчеты W_i (F) были проведены Мозером — Баранже³⁸, и в последнее время — Хупером³⁶. На рис. 5, взятом из работы³⁶,



Рис. 5 Распределение *P* (є) электрического поля ионов плазмы вблизи излучающего заряженного центра.

приведен график W, (F) при различных значениях параметра α, определяемого формулой (3.13). Видно, что учет отталкивания **уменьшает** вероятности сильных полей и тем самым — интенсивность излучения в крыле линии. Особенностью распределения W_{i} (F) является более сложная по сравнению с хольцмарковской зависиконцентрации мость OT плазмы N. Поэтому статические спектры ионов менее удобны для определения концентрации плазмы, чем спектры нейтрального

водорода. Отметим также, что спектры ионов значительно уже спектра водорода вследствие уменьшения дипольного момента иона в z раз.

Статическое уширение линий водородоподобных ионов реализуется не только в низкотемпературной плазме. Интересным примером является

плазма лазерного факела, где, несмотря на высокую температуру $T \sim -10 \ \kappa_{3\theta}$, концентрация ионов столь высока ($N \sim 10^{22} - 10^{24} \ cm^{-3}$), что параметр $g_i = N \ (C/v_i)^3 \gg 1$ даже для водородоподобных ионов с большим $z \gg 1$. Характер уширения линий в такой плазме рассмотрен Виноградовым, Собельманом и Юковым ⁷³. Ширина статического (хольцмарковского) спектра в указанных условиях дается формулой (ср. (3.11))

$$\Delta\omega_0 = 21.6 \frac{n^2 R y}{z} \left(N a_0^3 \right)^{2/3}, \tag{8.1'}$$

где z — заряд излучающего иона, a_0 — боровский радиус, n — главное квантовое число рассматриваемого уровня. В работе ⁷³ найдена та область параметров N и z, в которой формула (8.1') может быть использована для диагностики плазмы.

Для расчета уширения линий ионов электронами необходимо учесть их притяжение к излучающему центру, в поле которого электрон движется уже не по прямой линии (как в поле нейтрального атома), а по гиперболе. Это заметно усложняет расчеты, однако, как легко понять, и в этом случае возможно использование свойств четырехмерной симметрии водородоподобного иона. Действительно, поскольку электрон движется в центральном кулоновском поле иона, его угловой момент l сохраняется и равен $\hbar l = mr^2 \phi$. откуда

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\hbar l}{mr^2(t)}.$$
(8.3)

Из (8.3) сразу видно, что мгновенная угловая скорость поворота $\varphi(t)$ имеет ту же зависимость от r(t), что и электрическое поле F(t), создаваемое электроном, т. е.

$$F(t) = er^{-2}(t) = \frac{me}{\hbar l} \dot{\varphi}(t).$$
(8.4)

Это означает, что при переходе во вращающуюся систему координат с осью $Ox \parallel \mathbf{F}(t)$, в ней возникают, как и в случае нейтрального водорода (см. гл. 6), взаимно перпендикулярные электрическое ($\mathbf{F}(t)$) и магнитное ($\mathbf{H}_{a\phi\phi}(t) \backsim \phi(t)$) поля, меняющиеся синхронно ($H_{a\phi\phi}(t)/F(t) = \text{const}$). Тем самым, у водородоподобного иона также имеются выделенные, направления квантования $\omega_{1,2}(t)$, определяемые, как и выше (см. (6.4), (6.11)), векторной суммой (разностью) электрического и магнитного полей.

Указанное обстоятельство позволило Грину, Куперу и Смиту ^{74, 75} развить теорию упирения линий водородоподобных ионов, не прибегая к приближениям ударной или статической теорий. Временная эволюция волновой функции иона определяется, как и для водородного атома (6.13),

фазовым множителем типа $\exp [i \frac{C}{e} \int_{0}^{t} F(\tau) d\tau]$, или, согласно (8.4), $e^{i\varphi(t)}$,

где

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \rho v_{\infty} \int_0^t \frac{d\tau}{r^2(\tau)}$$
(8.5)

— угол поворота поля F за время t (φ_0 — начальный угол, v_{∞} — скорость электрона на бесконечности, ρ — прицельный параметр пролета).

Для движения по гиперболе, в отличие от прямолинейного, величина угла φ на бесконечности ограничена значением $\varphi(\infty) = \arccos(1/\varepsilon)$, где $\varepsilon = (1 + m^2 \rho^2 v_{\infty}^4/(z - 1)^2 e^4)^{1/2}$ — эксцентриситет гиперболы. Отсюда видно, что с увеличением скорости (т. е. температуры плазмы) движение все более приближается к нрямолинейному.

в. с лисица

Из физических соображений ясно, что притяжение электрона к излучающему иону должно приводить к увеличению интенсивности в статическом крыле линии, отвечающем близким пролетам. Ясен и параметр, определяющий эффект. Действительно, новой характерной длиной задачи, связанной со взаимодействием электрона с ионом, является, очевидно, кулоновская длина $\rho_{\rm h} \sim e^2/mv^2 \sim e^2/kT$. С другой стороны, характерные расстояния г_{аю}, определяющие вклад в статическое уширение, согласно (8.1), равны $r_{\Delta\omega} = \sqrt{C_i/\Delta\omega}$, где $C_i = e z_i/\hbar$ — штарковская постоянная водородоподобного уровня иона $(e z_i - дипольный момент иона вдоль$ электрического поля электрона). Таким образом, параметром, определяющим изменение интенсивности в статическом крыле, будет отношение двух указанных длин: $\rho_k/r_{\Delta\omega}$. При $\rho_k/r_{\Delta\omega} \ll 1$ искривлением траектории можно пренебречь, тогда как при $\rho_k/r_{\Delta \varpi} \gg 1$ оно существенно меняет характер спектра. Отсюда ясно, что распределение интенсивности в крыле линии для иона отличается от известного распределения (2.18) для атома поправочным множителем $\chi(\rho_k/r_{\Delta\omega})$, зависящим от параметра $\rho_k/r_{\Delta\omega}$. Расчеты функции χ , выполненные в ^{74, 75} методом, вполне аналогичным оцисанному в гл. 2 (см. (2.10) - (2.12)), дают для контура $I(\omega)$ выражение:

$$I(\omega) = 2\pi^2 N \left| \frac{e^2 z_i}{\hbar} \right|^{3/2} \Delta \omega^{-5/2} \chi \left[\left(\frac{e^2}{kT} \right)^{1/2} \left(\left| \frac{\hbar \Delta \omega}{z_i e} \right| \right)^{1/4} \right], \qquad (8.6)$$

$$\chi(x) = e^{x^2} \operatorname{erfc}(x) + \frac{2}{\sqrt{\pi}} x \approx \begin{cases} 1, & x \ll 1, \\ \frac{2}{\sqrt{\pi}} x, & x \gg 1. \end{cases}$$
(8.7)

При $x \ll 1$ из (8.6), (8.7) получается известное распределение в крыле линии: $I(\omega) \propto \Delta \omega^{-5/2}$ (см. (2.18)). При $x \gg 1$ из (8.6), (8.7) следует: $I(\omega) \propto \Delta \omega^{-9/4}$. Таким образом, как и следовало ожидать, притяжение между возмущающим электроном и излучающим ионом приводит к более медленному спаду интенсивности в крыле линии по сравнению со случаем нейтрального водорода. Следует указать, однако, что практически область электронного статического уширения для водородоподобных ионов достижима при расстройках частоты $\hbar \Delta \omega$, сравнимых с kT. В работе ⁷⁵ проведен конкретный расчет контура линии $L_{y-\alpha}$ для иона He II.

Что касается ударного электронного уширения ионных линий, то оно, как показали Грим и Шен^{8, 76}, остается в основном таким же, как и для нейтрального атома. В частности, для оператора ударного электронного уширения Φ_{ab} справедливо выражение (5.14), где, однако, под знаком логарифма Λ стоит теперь отношение ρ_{max} к кулоновской длине $\rho_k = \rho_{min} = ze^2/mv^2$ (следует также учесть уменьшение в Z раз матричных элементов координаты в формулах (5.15) — (5.16)).

В заключение коснемся упирения линий нейтрального водорода в высокотемпературной водородной плазме, содержащей многозарядные ионы примесей. Такая ситуация характерна для плазмы термоядерных установок типа «Токамак», параметры которой равны $T_e \sim 1 \ \kappa se$, $N_e \sim 10^{13} - 10^{14} \ cm^{-3}$. В этих условиях уширение является ударным как для электронов, так и для ионов, включая многозарядные ионы примесей, т. е. параметр $g_i = N_i (C/v_{iH})^3 \ll 1 (v_{iH}$ — относительная скорость водорода и многозарядного иона с зарядом Z_i). Особенности уширения линий водорода в такой плазме рассматривались в работе ⁷⁷. Поскольку ударная ширина линии $\gamma \propto 1/v$ (см. (5.14)), основной вклад в уширение вносят более медленные ионы плазмы. При этом даже небольшой процент многозарядных ионов примеси может играть роль, сравнимую (и даже бо́льшую) с ролью протонов. Это вполне ясно, если учесть, что ион с зарядом z_i вызывает штарковское расщепление в z_i раз бо́льшее, чем протон, т. е. происходит эффективное увеличение штарковской постоянной C в z_i раз. Поскольку $\gamma \sim C^2 \sim z_i^2$, то при $z_i \sim 10$ даже один процент примеси даст уширение того же порядка, что и протоны. Полная ударная ширина уровня, получаемая сложением ширин от каждого сорта ионов, равна

$$\gamma = \frac{16}{3} \dot{N}_{\bullet} \left(\frac{\hbar}{m}\right)^2 \frac{n^4}{v_p} \Lambda \sum_{\iota} \frac{z_{\iota}^2 N_{\iota}}{N_e} \,. \tag{8.8}$$

где $v_p \approx v_{\iota H}$ — скорость протона, N_{ι} — концентрация ионов сорта *i*, $\Lambda = \ln (\rho_D / \rho_B)$.

Сумма по сортам ионов, входящая в (8.8), определяет эффективный ионный заряд плазмы $z_{\partial\phi\phi} = N_e^{-1} \sum_i N_i z_i^2$. Величина $z_{\partial\phi\phi}$ определяется обычно по измерениям проводимости плазмы. Соотношение (8.8) открывает интересную возможность определения $z_{\partial\phi\phi}$ по наблюдениям штарковского уширения линий нейтрального водорода. Основной трудностью здесь является большая величина допплеровского уширения, требующая специальных мер для ее исключения ⁷⁷.

9. КВАНТОВЫЙ ПОДХОД К ПРОБЛЕМЕ УШИРЕНИЯ

Суть классической постановки, использованной выше, состоит в том, что движение уширяющей частицы (для определенности иона) считается заданным и рассматривается изменение волновой функции излучающего атома. Квантовая постановка является, в известной мере, обратной, и именно рассматривается движение уширяющего иона в поле излучающего атома. При этом сдвиг частоты излучения $\Delta \omega$ связан с изменением энергии $\hbar^2 q^2/2M$ иона:

$$\frac{\hbar^2}{2M_{\rm br}^2}(q_a^2-q_b^2)=\hbar\Delta\omega; \qquad (9.1)$$

здесь q_a и q_b — импульсы иона с массой M, взаимодействующей с атомом в верхнем (a) и нижнем (b) состояниях, между которыми наблюдается излучательный переход ($\omega_{ab} \equiv \omega_0$). Для простоты будем пренебрегать взаимодействием иона с атомом в нижнем состоянии b. Таким образом, изменение частоты излучения атома связано в квантовой постановке с передачей энергии на внешние степени свободы.

Квантовая постановка была впервые использована, как отмечалось, в работах Яблонского²⁸, применившего при расчете статического спектра квазиклассические волновые функции уширяющей частицы. В дальнейшем этот метод развивался Жуди²⁹ и Жуди — Бейлисом³⁰.

Квантовый подход использовался также для описания ударного уширения электронами, что позволило связать ударные ширину и сдвиг с сечениями рассеяния электрона на атоме. Это было сделано Собельманом²⁶ и Баранжером²⁷.

Тем не менее до последнего времени в литературе отсутствовали детальные расчеты контуров линий на основе квантового подхода, в частности, в переходной области между ударным и статическим пределами. Это объясняется тем, что квантовое решение требует знания точных волновых функций возмущающей частицы, определение которых возможно, как правило, только численным решением уравнения Шрёдингера. Подчеркнем, что для задачи уширения необходимо, в отличие от задач рассеяния, знание волновой функции при любых расстояниях r, а не только в асимптотической области $r \to \infty$.

8 уФН, т. 122, вып. 3

В самое последнее время квантовомеханические расчеты контура водородной линии $Ly - \alpha$ были предприняты в серии работ Ван Режемортера с сотрудниками ⁷⁸⁻⁸⁰. Ниже мы используем для расчета водородных линий другой подход ⁸¹, основанный на свойствах симметрии водородного атома, а также подробно рассмотрим вопрос о связи квантового решения с точным классическим решением гл. 6.

Получим вначале квантовое выражение для контура $I_{ab}(\omega)$ атомной линии, образованной при переходе атома с уровня *a* на уровень *b*. Уровни считаются невырожденными по *l* и взаимодействие атома с ионом в состоянии *a* и *b* определяются сферически-симметричными потенциалами $U_a(r)$ и $U_b(r)$.

Будем считать, что квант $\hbar \omega$ излучается единой системой, состоящей из атома и уширяющего иона. Волновая функция этой системы в начальном и конечном состояниях определяется произведением волновых функций атома φ_a , φ_b на волновые функции иона $\psi_{qa,b}^{\pm}$, описывающие рассеяние частицы с импульсом q на потенциалах U_a и U_b (знаки \pm отвечают функции, совпадающей на бесконечности со сходящейся или расходящейся сферической волной).

Запишем известное выражение для вероятности перехода системы из состояния *a* в состояние *b* с излучением кванта частоты ω и импульсом *k*:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle a | V | b \rangle|^2 \,\delta\left(\varepsilon_b - \varepsilon_a\right) \frac{dq_b}{(2\pi)^3} \frac{dk}{(2\pi)^3} \,; \tag{9.2}$$

здесь V — оператор взаимодействия атома с полем излучения; волновые функции $\langle a \mid, \mid b \rangle$ и разность энергий $\varepsilon_a - \varepsilon_b$ системы «атом + ион» имеют вид

$$\varepsilon_a - \varepsilon_b = \frac{\hbar^2}{2M} \left(q_b^2 - q_a^2 \right) - \hbar \Delta \omega, \quad |a\rangle = \varphi_a \sqrt{\frac{M}{\hbar q_a}} \psi_{q_a}^+, \quad |b\rangle = \varphi_b \psi_{qb}^-. \tag{9.3}$$

Волновая функция $|a\rangle$ выбрана нормированной на единичный поток уширяющих частиц (ионов). Поэтому формула (9.2) после усреднения по начальным и суммирования по конечным состояниям дает дифференциальное сечение $d\sigma/d\omega$ излучения фотона с частотой ω в интервале частот $d\omega$. Сечение $d\sigma/d\omega$ полностью аналогично сечению тормозного излучения. Есть, однако, одно существенное отличие: во взаимодействие Vс электромагнитным полем для тормозного излучения входит дипольный момент рассеивающейся частицы, тогда как для уширения — дипольный момент атома. Поэтому полная интенсивность излучения в случае уширения не зависит от того, рассеивается ли на атоме ион или электрон.

Из сказанного ясно, что для расчета сечения $d\sigma/d\omega$ излучения атомом фотона частоты ω можно воспользоваться формулами для сечения тормозного излучения (см., например, ¹⁰, § 34, п. 3), подставив в них вместо дипольного момента электрона *ег* дипольный момент атома и волновые функции (9.3) составной системы «атом -- ион». В результате, получим

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = \frac{4\omega^3 |\mathbf{d}_{ab}|^2}{3c^3} \frac{\pi^2}{v_a E_a q_b} \sum_l (2l+1) |A_l|^2; \tag{9.4}$$

здесь $E_a = \hbar^2 q_a^2 / 2M$, v_a — энергия и скорость электрона в состоянии a; матричный элемент дипольного момента атома d по волновым функциям системы «атом + ион» распался на произведение матричного элемента dмежду состояниями a, b атома и интеграла перекрытия A_1 волновых. функций иона с моментом l:

$$A_{l} = \int_{0}^{\infty} dr \, r^{2} R_{q_{a}l}^{(a)}(r) \, R_{q_{b}l}^{(b)}(r), \qquad (9.5)$$

где $R_{q_l}^{(i)}$ — решения радиального уравнения Шрёдингера с моментом l в потенциалах $U_a(r)$, $U_b(r)$.

Выражение для мощности излучения из единицы объема $Q(\omega) d\omega$ через сечение $d\sigma/d\omega$, как и в случае тормозного излучения, имеет вид

$$Q(\omega) = N_A N_i \hbar \omega \int v_a f(v_a) \frac{d\sigma}{d\omega} dv_a, \qquad (9.6)$$

где N_A , N_i — концентрации атомом и ионов; $f(v_a)$ — функция распределения по начальным относительным скоростям, в дальнейшем, как и выше, мы не будем проводить усреднения по v_a , т. е. положим $f(v_a) \sim \infty \delta(v_a - v_0)$ (при необходимости такое усреднение можно выполнить на последнем этапе). Разделив (9.6) на полную интенсивность излучения атомов $N_A \cdot 4\omega^4 | \mathbf{d}_{ab} |^2/3c^3$, получим выражение для контура $I(\omega)$ линии излучения отдельного атома:

$$I(\omega) = N_i \frac{\pi^2 \hbar}{E_a q_b} \sum_l (2l+1) |A_l|^2.$$
(9.7)

Таким образом, расчет контура линии в квантовой постановке сводится к расчетам интеграла перекрытия A_l , зависимость которого от сдвига частоты $\Delta \omega$ определяется формулой (9.1).

Особенность упирения водородных линий связана, как неоднократно отмечалось, с вырождением по l уровней a и b. Поэтому сложность решения задачи состоит в учете взаимодействия всех вырожденных состояний атома при рассеянии на них упиряющего иона. Найдем волновую функцию иона ψ (r_i), взаимодействующего с состояниями возбужденного водородного уровня. Гамильтониан рассматриваемой системы имеет вид

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{0A} + \mathcal{H}_{0i} + V_{Ai}, \quad V_{Ai} = -\frac{\mathbf{r}_i \mathbf{r}_A}{r_i^3}, \qquad (9.8)$$

где \mathcal{H}_{0A} , \mathcal{H}_{0i} — гамильтонианы свободных атома и иона, V_{Ai} — оператор их дипольного взаимодействия.

Отметим, что потенциал V_{Ai} нецентрален и потому (в отличие от рассмотренного выше случая) орбитальный момент иона l_i не сохраняется. Сохраняющейся величиной является лишь полный момент $\mathbf{L} = \mathbf{l}_i + \mathbf{l}_A$, где \mathbf{l}_A — орбитальный момент атома.

Если представить волновую функцию $\Psi(\mathbf{r}_A, \mathbf{r}_i)$ системы «ион + + атом» в виде разложения по произведениям невозмущенных волновых функций уровня *n* атома $\psi^{(n)}(\mathbf{r}_A)$ и волновых функций иона $\psi(\mathbf{r}_i)$, то после подстановки в уравнение Шрёдингера с гамильтонианом (9.8) получится система связанных уравнений для функций $\psi(\mathbf{r}_i)$. Эта система аналогична системе уравнений сильной связи в теории рассеяния ⁸² гл. 13, решение которой представляет собой достаточно сложную задачу. В данном случае, однако, можно избежать прямого решения такой задачи, воспользовавшись тем, что для дипольного потенциала (9.8) имеется дополнительный интеграл движения ⁸³, ⁶⁴:

$$\Lambda = \mathbf{l}_{i}^{2} - 2Mr_{A} \left(\mathbf{n}_{i} \mathbf{n}_{A} \right), \quad \Lambda \psi = \lambda \psi, \tag{9.9}$$

где $\mathbf{x} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор вдоль **г** (ниже используются атомные единицы $e = \hbar = m = 1$).

8*

483

в с лисица

Использование волновых функций с определенным собственным значением λ удобно тем, что для них сразу известно решения $R_{\lambda L}(r)$ уравнения, описывающего радиальное движение иона. Действительно, дипольный потенциал V_{Ai} спадает по закону r_i^{-2} , т. е. так же, как и центробежный потенциал $V_{\mu,-6} = -l_i^2 r_i^{-2}$. При этом сумма обоих потенциалов в качестве коэффициента при r_i^{-2} содержит как раз интеграл движения Λ (9.9). С учетом сказанного радиальное уравнение для иона имеет вид (индекс *i* в дальнейшем опускаем)

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(q^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right) R = 0.$$
(9.10)

Решение (9.10) выражается, как известно ¹⁵, через функции Бесселя:

$$R^{\lambda L}(r) = \sqrt{\frac{q}{r}} J_{\sqrt{\lambda + (1/4)}}(qr).$$
(9.11)

Таким образом, решение имеет тот же вид, что и для свободного движения иона, однако вместо орбитального момента $l_i + (1/2)$ в индекс функции Бесселя теперь входит величина λ , содержащая информацию о дипольном взаимодействии иона с атомом.

Несмотря на простой вид решения (9.11), надо помнить, что для его использования надо найти значение λ и волновые функции $\psi_{\lambda LM}$, т. е. решить секулярное уравнение (9.9). Функции $\psi_{\lambda LM}$, отвечающие определенным значениям полного момента L, его проекции M и интеграла λ , удобно искать в виде разложения:

$$\psi_{\lambda LM} = R^{\lambda L} (qr) \sum_{A,l_i} a_{l_A l_i}^{\lambda L} |LMl_A l_i\rangle, \qquad (9.12)$$

где функции $|LMl_Al_i\rangle$ обычным образом (с помощью коэффициентов Клебша — Гордона ¹⁵) выражаются через сферические функции Y_{lm} атома и иона.

Подстановка (9.12) в (9.9) приводит к системе алгебраических уравнений для коэффициентов $a_{l_A l_i}^{\lambda L}$, определитель которой позволяет найти значение λ . Задача об определении λ и коэффициентов $a_{l_A l_i}^{\lambda L}$, для уровня n = 2 (линия $Ly - \alpha$) применительно к задачам рассеяния была рассмотрена Ситоном ⁵³. Мы не будем приводить соответствующих довольно громоздких формул, а будем считать в дальнейшем коэффициенты $a_{l_A l_i}^{\lambda L}$ и значения λ известными.

Чтобы использовать, как и выше, при расчете контура линии известные формулы для сечения $d\sigma/d\omega$ тормозного излучения, надо связать функции $\psi_{\lambda LM}$ с функциями $\psi_{ql_{0}m_{0}}^{\pm}$, содержащими на бесконечности плоскую падающую и расходящуюся (и сходящуюся) сферические волны:

$$\psi_{ql_{0}m_{0}}^{\pm} \sim \phi_{l_{0}m_{0}} e^{iqz} + \frac{f_{\pm}}{r} e^{\pm iqr}, \qquad (9.13)$$

где $\varphi_{l_0m_0}$ — волновая функция атома в состоянии l_0m_0 . Такая связь устанавливается путем разложения

$$\psi_{ql_0m_0}^{\pm} = \sum_{\lambda LM} d_{\lambda LM}^{(\pm)l_0m_0} \psi_{\lambda LM}, \qquad (9.14)$$

где коэффициенты $d_{\lambda LM}^{(\pm)l_0 m_0}$ определяются из равенств функций (9.13) и (9.14) при $r \to \infty$.

Подставляя, как и при выводе (9.4) — (9.7), функции $\psi_{ql_0m_0}^{\pm}$ в общие формулы для сечения $d\sigma/d\omega$ излучения фотона частоты ω , получаем фор-

мулу для контура линии I (ω) при переходе с уровня n на невырожденный нижний уровень:

$$I(\omega) = \frac{\pi^{2\hbar N_{i}}}{3E_{a}q_{b}} \sum_{\lambda, L} (2L+1) \left[(a_{1L-1}^{\lambda L} A_{\lambda L}^{L-1})^{2} + (a_{1L+1}^{\lambda L} A_{\lambda L}^{L+1})^{2} \right].$$
(9.15)

Сравнивая (9.15) с формулой двухуровневого приближения (9.7), видим, что вклад в контур вносят переходы с изменением момента иона l_i на ±1, причем их вес определяется коэффициентами $a_{l_A l_i}^{\lambda L}$; см. (9.12). Кроме того, вклад в контур вносят все каналы рассеяния, отвечающие различным значениям интеграла движения λ .

Дальнейшее исследование формулы (9.15) состоит в анализе радиальных интегралов перекрытия $A_{\nu\nu'}$, имеющих, согласно (9.11), следующий вид:

$$A_{\nu_{a}\nu_{b}'} = \sqrt{q_{a}q_{b}} \int_{0}^{\infty} dr \, r J_{\nu_{a}}(q_{a}r) \, J_{\nu_{b}}(q_{b}, r), \qquad (9.16)$$

где индексы v_a, v_b простым образом связаны с λ (9.11).

Интеграл перекрытия (9.16) может быть выражен через полную гипергеометрическую функцию

$$F\left[\frac{v_a+v_b}{2}, \frac{v_a-v_b}{l^2}, v_a+1, \left(\frac{q_a}{q_b}\right)^2\right],$$

где согласно (9.1) зависимость от расстройки частоты $\Delta \omega$ определяется соотношением

$$\left(\frac{q_a}{q_b}\right)^2 = \left(1 + \frac{2M\Delta\omega}{q_a^2}\right)^{-1}.$$
(9.17)

Таким образом, контур (9.15) допускает прямой аналитический расчет. Возникает вопрос о связи квантовомеханического решения с точным классическим решением гл. 6. Оказывается, что такая связь может быть установлена прямым предельным переходом в формуле (9.15), (9.16) к большим моментам L:

$$L \gg \sqrt{\frac{3}{2}n(n-1)M}$$
. (9.18)

При этом с учетом связи $L = Mv\rho$ для линии $Ly - \alpha$ обнаруживается точное совпадение квантового (9.15) и классического (6.15) результатов. Анализ такого предельного перехода позволяет установить критерии применимости классического приближения. В ударной области ($\Delta \omega C/v^2 \ll \ll 1$) эффективный прицельный параметр $\rho_{эф\phi}$ (а следовательно, и $L_{э\phi\phi} = Mv\rho_{э\phi\phi}$) определяется радиусом Вайскопфа $\rho_B \sim C/v$ (см. гл. 2), так что условие (9.18) дает

$$\sqrt{CM} \gg 1. \tag{9.19}$$

В статической области ($\Delta \omega C/v^2 \gg 1$) значение $\rho_{\partial \phi \phi} \sim r_{\Delta \omega} = \sqrt{C/\Delta \omega}$ (см. (8.1)), так что критерий (9.18) сводится к

$$\Delta \omega \ll M v^2. \tag{9.20}$$

Условие (9.20) имеет очевидный смысл: изменение энергии частицы $\hbar\Delta\omega$ при взаимодействии с атомом мало́ по сравнению с се первоначальной энергией.

Из условий (9.19), (9.20) следует, что классический подход применим для достаточно высоких линий (большие значения штарковской постоянной C), тяжелых частиц ($M \gg 1$) и не для слишком удаленного крыла линии ($\Delta \omega \ll M v^2$). Отметим, что для крыла линии квантовые эффекты



Рис. 6. Относительный вклад угловых моментов L_i^T в электронный профиль $I(\Delta \lambda)$ линии $Ly - \alpha$ при различных расстояниях $\Delta \lambda$ от ее центра

могут быть существенны одновременно для электронов и ионов, поскольку в плазме обычно $Mv_4^2 \sim mv_e^2 \sim kT$.

Для далеких крыльев линий становится неприменимым дипольное приближение. При этом учет квадрупольных поправок обычно недостаточен и необходимо работать с точным потенциалом.

Для случая электронного уширения детальные численные расчеты контура линии $Ly - \alpha$ были выполнены Фотриром, Тран Минем, Ван Режемортером⁸¹. На рис. 6 показан относительный вклад угловых моментов L в электронный профиль линии $Ly - \alpha$ при различных расстояниях $\Delta\lambda$ от ее цент-

ра. Видно, что дипольное приближение при $L \sim 5-6$ отличается от точного на 10—15%. Вклад малых моментов L < 3, не учитываемых в дипольном приближении, особенно заметен в крыле линии (так, при $\Delta \lambda = 20$ Å этот вклад составляет 30%, а при $\Delta \lambda = 60$ Å — примерно 50%). При $\Delta \lambda \ge 60$ Å становится существенным также учет эффектов электронного обмена.

10. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ. СРАВНЕНИЕ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Вычисление контуров линий по общим формулам (7.4) требует трудоемких численных расчетов. Такие расчеты были выполнены в последние годы Кеплем, Гримом⁸⁴ и Видалем, Купером, Смитом⁸⁵ для начальных линий серий Лаймана и Бальмера. В этих расчетах использовалось распределение микрополя $W_D(F)$, учитывающее корреляцию ионов (гл. 3), функция распределения электронов по скоростям считалась максвелловской. Расчеты Видаля и др.⁸⁵ основаны на так называемой обобщенной теории уширения, учитывающей переход электронного ударного уширения в статическое в крылья линии.

Следует отметить, что между результатами обоих указанных расчетов имеются расхождения, особенно значительные ($\sim 30-40\%$) в центральной части линий с несмещенными компонентами (H_{α} , H_{γ}). Эти расхождения связаны в основном с выбором параметров логарифмического обрезания ударной ширины (5.13), а также с характером учета недиагональных матричных элементов оператора Φ_{ab} ; см. (5.16). В области порядка полущирины и на крыльях линий это расхождение значительно меньше. Для линий без центральных компонент (H_{β} , H_{δ}) расхождение также невелико ($\sim 5-10\%$).

На рис. 7—10 приведены результаты экспериментов Визе с сотрудниками ⁸⁶ и численных расчетов для контуров четырех водородных линий серии Бальмера. Видно, что наблюдаемые и расчетные контуры близки всюду, за исключением центральной части линии. Здесь расхождение особенно заметно для линий с центральными компонентами (H_a, H_v), причем оно относится, как уже отмечалось, также и к результатам различных численных расчетов. Для линий без центральных компонент









Обозначения те же, что и на рис. 7, 8.



интенсивность всегда превышает расчетную. Этот эффект связан, повидимому, с тепловым движением ионов, не учитываемым в расчетах (см. ниже).

Роль электронов в уширении особенно заметна для линий, имеющих несмещенную штарковскую компоненту (H_α, H_γ). Структура таких линий состоит из интенсивной центральной компоненты, уширение которой целиком обусловлено ударным воздействием электронов, и менее интенсивных боковых компонент, уширенных статическим воздействием ионов.

Для линий без центральных компонент ($Ly - \beta$, H_{β} , H_{δ}) влияние электронов на центральную часть контура несколько меньше (см. рис. 8, 10). Однако и в этом случае учет электронного уширения существен.

линий наблюдаемая

Hß = 8,3.10 16 OM Действительно, при отсутствии ударного уширения электронами, статический контур линии, обусловленный ионным уширением, должен иметь нулевую интенсивность в центре линии $\Delta \omega = 0$ (см., например, (7.1)). При -учете же электронного уширения провал в центре таких линий оказывает ся существенно меньше (см. рис. 8, 10).

Важно отметить, что влияние электронов сказывается не только в центральной части линий, но и в далеких крыльях, не показанных на рис. 7—



Рис. 11. Контур линии Ly — а в далеком крыле.

1 — эксперимент Болдта — Купера ⁸⁷, 2 расчеты ⁹¹, 3 — расчеты ⁹², 4 — адиабатическая модель ¹⁷. 10. Эти крылья соответствуют статическому уширению как ионами, так и электронами. Статическое уширение электронами должно проявляться, согласно общим результатам теории уширения (гл. 2, 7), при $\Delta \omega \sim$ ${ \backsim v_e^2/C = \Omega_e}.$ Наблюдение́ этой области возможно либо в далеких крыльях линий (для начальных линий серий Лаймана и Бальмера) либо для высоковозбужденных уровней, у которых константа Штарка $C \propto n^2$ достаточно велика (Ω_е мало́). Обе эти возможости были реализованы эксперимен-Далекие тально. крылья линии Ly — а наблюдались Болдтом, Купером ⁸⁷ и Элтоном, Гримом ⁸⁸. Высоковозбужденные линии серии Бальмера

 $(H_8 - H_{15})$ наблюдались Шлюттером и Авилой^{89, 90}. Результаты экспериментов обоих типов удобно выразить через относительное число статически уширяющих частиц R; см. (7.6). На рис. 11 представлены результаты экспериментов⁸⁷ в крыле линии $Ly - \alpha$ вместе с результатами теоретических расчетов^{17, 91, 92}. Видно, что по мере удаления в крыло линии



Рис. 12. Показатель степени *m*, определяющий закон спада интенсивности в крыле линии, для высших членов серии Бальмера (данные Шлюттера ⁹⁰).



Рис. 13. Относительное число *R* статически уширяющих частиц для крыльев высоковсзбужденных линий серии Бальмера (данные Шлюттера ⁹⁰).

все большая доля электронов начинает уширять статически. При $\Delta\lambda \sim 50$ Å влияние почти всех частиц описываются статической теорией. ($R \approx 2$).

В экспериментах Шлюттера ⁹⁰ граница перехода к статическому уширению для электронов Δλ_L хорошо описывалось формулой

$$\Delta \lambda_L = \frac{0.62 \cdot 10^{12} v_d^2 \lambda^2}{\ln(n-1)} \,. \tag{10.1}$$

Согласно статической теории распределение интенсивности в крыле линии должно иметь вид

$$I(\Delta\lambda) \propto R(\Delta\lambda)^{-m}, \qquad (10.2)$$

где $R \approx 2$ — относительное число статически уширяющих частиц, показатель степени m = 5/2.

На рис. 12, 13 приведены наблюдаемые значения R и m в зависимости от главного квантового числа n верхнего уровня. Эти значения близки к предсказаниям теории. На рис. 14 показан наблюдаемый контур линии H_{15} с нанесенным на нем значением $\Delta\lambda_L$. Из (10.1) видно, что в случае высоковозбужденных линий электроны начинают уширять статически уже на полуширине линии. Рис. 15 демонстрирует зависимость числа $R (\Delta\lambda/\Delta\lambda_L)$ для линии H_{15} , измеренного экспериментально и рассчитанного теоретически. Согласие обоих значений вполне удовлетворительное.

Обсудим теперь поведение контуров водородных линий вблизи их дентра. Эксперименты на линии *Н*_в, не имеющей центральной компо-

ненты, обнаруживают, как уже отмечалось, систематическое превышение интенсивности в центре над ее расчетным значением. В недавних опытах Визе с сотрудниками ⁹³⁻⁹⁴ было показано, что это превышение зависит от приведенной массы µ пары «излучающий атом — возмущающий ион»:



H15

2,0

Δ**λ**,Å

1,5

1,0

0,5



 Рис. 15. Характеристика R (Δλ) для линии H₁₅.
 1 — данные Шлюттера ²⁰, 2 — расчет по адиабатической модели ¹⁷.

Наблюд мый «эффект приведенной массы» показан на рис. 16 для упирения атомов водорода (Н) и дейтерия (D) ионами H⁺, D⁺ и Ar⁺ (значения приведенных масс $\mu_{\rm HH} = 0,5$, $\mu_{\rm HAr} = 1$, $\mu_{\rm DAr} = 1,9$). Видно, что с увеличением μ провал в центре H_{β} увеличивается. Этот эффект обусловлен, очевидно, уменьшением теплового движения ионов с ростом μ . Расчеты закономерностей, наблюдаемых на эксперименте, были предприняты в ряде работ ⁹⁵⁻⁹⁸, однако исчерпывающее объяснение эффекта до сих поротсутствует. Ниже мы постараемся дать качественную картину эффекта теплового движения на основе результатов гл. 7; см. формулу (7.7). На рис. 17 представлены зависимости глубины провала в центре линии H_{β} от приведенной массы μ возмущающих ионов ^{67, 71}. Хотя согласие экспериментального хода кривых с теоретическим достаточно хорошее, опытные данные не позволяют различить зависимость $1/\mu$ от зависимости $1/\sqrt{\mu}$.

Рис. 16. «Эффект приведенной массы» для линии H_{β} (эксперименты Визе и др. ⁹³, ⁹⁴). 1 — пара H — H+ (μ = 0,5), 2 — пара H — 4 — теория N_e = 8·10¹⁶ см⁻³.

 $H_{iz} = \frac{1}{2}$ $H_{iz} = \frac{1}{2}$

Рис. 18. «Эффект приведенной массы» для линии \hat{H}_{α} (эксперименты Визе и др. ⁹⁴).

$$\begin{array}{cccc} 1 - \text{napa} & \text{D} - \text{Ar}^+ & (\mu = 1,9), & 2 - \text{napa} \\ H - \text{Ar}^+ & (\mu = 1,0), & 3 - \text{pacters} & {}^{84}, \\ & 4 - \text{pacters} & {}^{85}. \end{array}$$

Для линий H_{lpha} и H_{γ} , обладающих центральными компонентами, также

наблюдается «эффект приведенной массы» ⁹⁴. На рис. 18 показан контур H_{α} при двух значениях μ . Видно, что увеличение скорости



Рис. 17. Зависимость глубины провала δ_R в центре линии от приведенной массы µ пары «атом — ион». 1 — эксперимент ⁷Визе и др. ^{93,94}, 2 — расчет ⁶⁹.

линии в максимуме и к некоторому увеличению ее полуширины. Качественно это понятно, поскольку любое дополнительное возмущение атома (в том числе и ионное движение) должно приводить к дополнительному упирению линии и, следовательно, в силу нормированности и контура — к уменьшению интенсивности в центре линии. Однако для количественного объяснения эффекта требуются дополнительные расчеты.

Надо отметить, что с точки зрения общих принципов «эффект приведенной массы» подводит нас к необходимости обобщения теории уширения на тот случай, когда воздействие ионов на атом уже нельзя считать статическим и, в то же время, это воздействие является небинарным. Такой случай отвечает значениям параметра $g_i \sim 1$ и представляет наибольшую расчетную трудность.

Последний эффект, которого мы здесь коснемся, связан с асимметрией водородных линий, наблюдаемых в плотной плазме (см. рис. 8, 10, «синее»

и «красное» крыло линии). Расчеты асимметрии, приведенные Кудриным

теплового движения (уменьшение ц) приводит к уменьшению интенсивности

и Шолиным ⁶⁸, Шолиным ⁹⁹, Мюллером ¹⁰⁰ и в последнее время — Демурой и Шолиным ¹⁰¹, показывают, что основную роль здесь играют эффекты, связанные с неоднородностью ионного поля. Действительно, все приведенные выше расчеты основывались на учете только дипольного взаимодействия атома с ионным полем F_i . Члены более высокого порядка мультипольности соответствуют взаимодействию квадрупольного момента Q_{ml} с градиентом поля ∇F_i :-

$$\hat{V} = -\frac{1}{6} Q_{ml} \frac{\partial (F_l)_m}{\partial x_l}.$$
(10.3)

Учет взаимодействия (10.3) приводит к изменению волновых функций и энергий состояний атома при фиксированном ионном поле. Контур штарковской компоненты линии, включающий поправки на эффекты неоднородности ионного поля, имеет вид ¹⁰¹

$$I(\Delta\omega) = \int_{0}^{\infty} d\beta \frac{\gamma}{(\Delta\omega - CF_0\beta/e)^2 + \gamma^2} \left\{ \mathscr{H}(\beta) + \frac{n^2 a_0}{2R_0} \left[a_1 \Lambda(\beta) + a_2 \chi(\beta) \right] \right\}, \quad (10.4)$$

здесь C — штарковская постоянная, γ — ударная ширина компоненты, $R_0 = (3/4\pi)^{1/3} N^{-1/3}$ — среднее межчастичное расстояние, $n^2 a_0$ — размер атома; функции Λ (β) и χ (β) описывают влияние неоднородности соответственно на амплитуду и энергию штарковских состояний:

$$\Lambda (\beta) \sim \begin{cases} \beta^{-2}, & \beta \gg 1, \\ \beta^3 & \beta \ll 1, \end{cases}$$
(10.5)

$$\chi \left(\beta \right) \sim \begin{cases} \beta^{-2}, & \beta \gg 1, \\ -\beta^{3}, & \beta \leq 1 \end{cases}$$
(10.6)

(а1 и а2 — численные константы, зависящие от выбранной линии).

Из (10.4) видно, что поправка на неоднородность ионного поля определяется параметром n^2a_0/R_0 . Влияние неоднородности тем значительнее, чем больше величина ионного поля $\beta = F/F_0$, т. е. чем меньше расстояние между возмущающим ионом и излучающим атомом. Это следует из анализа поведения функций Λ (β) и χ (β) с помощью формул (10.5), (10.6), а именно, при $\beta \ll 1$ поправки уменьшаются быстрее ($\infty \beta^3$) «нулевого» (хольцмарковского) профиля ($\infty \beta^2$), тогда как при $\beta \gg 1$ эти поправки спадают медленнее ($\infty \beta^{-2}$ по сравнению с $\mathcal{H}(\beta) \propto \beta^{-5/2}$). Поэтому результат (10.4), ограниченный применимостью теории возмущений, справедлив лишь при не слишком больших значениях β , точнее, при

$$\beta \ll \left(\frac{R_0}{3n^2 a_0}\right)^2 . \tag{10.7}$$

Для оценки укажем, что при $N \sim 10^{17}$ см⁻³ и n = 4 хольцмарковский контур справедлив вплоть до $\beta \approx 30$. Для боковой компоненты линии $Ly - \alpha$ критерий (10.7) выполняется вплоть до расстояний от центра линии $\Delta \lambda \sim 50$ Å.

Условие (10.7) наряду с условиями (47) и (3.14) является еще одним ограничением применимости теории Хольцмарка (см. обсуждение этого вопроса выше — (4.13)).

В заключение укажем на существование еще одной причины асимметрии линий, связанной с ионизацией (выгоранием) штарковских компонент в сильном электрическом поле, создаваемом ионами в плотной плазме. Как было показано в работе ¹⁰², этот эффект можно учесть, умножив интенсивность компоненты линии на коэффициент $A/[A + j(F)]_{*}$ где A — вероятность спонтанного распада, а j(F) — вероятность ионизации компоненты. Как известно ¹⁰³, компоненты, смещенные в область больших длин волн («красные» компоненты), «выгорают» быстрее, чем «синие» компоненты. Поэтому статический контур линии будет иметь более интенсивное «синее» крыло. Эффект выгорания становится заметным для высоко возбужденных линий (H_{γ}, H_{δ}) при плотностях плазмы $N \ge 10^{18}$ см⁻³.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение попытаемся сформулировать простые практические рецепты для оценки уширения водородных спектральных линий в плазме. -Прежде всего необходимо оценить плотность N и характерные скорости v; и Ve ионов и электронов плазмы, а также величину штарковской постоянной С рассматриваемой линии; см. (3.10). Для выявления характера уширения ионами и электронами надо затем оценить значения параметров g_i и ge; см. (2.7). Если g 🔍 1, то уширение преимущественно ударное, если же $g \gg 1$ — оно преимущественно статическое. Если $g_i \ll 1$ и $g_e \ll 1$, то ширина линии вычисляется по формулам ударной теории (5.18), причем. она в основном определяется, очевидно, более тяжелыми частицами ионами. При $g_i \gg 1$ и $g_e \gg 1$ уширение частицами обоих сортов статично, и ширину линии можно оценить по формуле (3.11), подставив в нее значение $N_{s\phi\phi} = N_i + N_e = 2N$. Обычно уширение ионами статично $(g_i \gg \gg 1)$, а электронами — ударно $(g_e \ll 1)$. В этом случае для боковых ком- $\gamma_e \gamma_i$, а электронами — ударно ($g_e \ll 1$). В этом случае для ооковых ком-понент линий ($C \neq 0$) ионная ширина $\Delta \omega_{0i} \sim \lambda C N^{2/3}$ больше электронной ширины $\gamma_e \sim NC^2 \ln (\rho_D / \rho_B) / v_e$, поскольку, по порядку величины, отно-шение $\gamma_e / \Delta \omega_{0i} \sim g_e^{1/3} \ll 1$. Для центральных компонент (линии $Ly - \alpha$, H_{α} , H_{γ}) ширина определяется одним лишь электронным (ударным) уширением. Эти соображения и исчерпывают в основном интегральные (по спектру) оценки механизмов уширения и ширины линий.

При спектральных оценках формы линии в различных областях $\Delta \omega$ следует иметь в виду два обстоятельства: 1) даже при $g \ll 1$ ударное уширение в крыле линии сменяется статическим при $\Delta \omega \geqslant \Omega \sim v^2/c$; 2) даже при $g \gg 1$ статическое приближение нарушается в центральной части линии, отвечающей значениям $\Delta \omega \ll \sqrt{CNv}$; см. (4.7). Напомним, что сами критерии статичности (4.7) имеют различный вид при $g \ll 1$ и $g \gg 1$. Отметим, что при совместном уширении электронами и ионами статическое приближение может оказаться применимым к ионам также и в центре линии, если выполнен критерий (7.10). Наиболее сложным является случай $g \sim 1$, когда ударный и статический механизмы дают для ширины линии одинаковый порядок величины. Здесь характер поведения контура ясен лишь в области, отвечающей его статическому крылу. Укажем, наконец, что все приведенные оценки отвечают приближениям идеальной плазмы (3.14) и однородного микрополя (10.7).

Точность имеющихся результатов для контуров линий сильно зависит от конкретных параметров плазмы, а также от рассматриваемой линии. Ниже имеется в виду практически наиболее интересный случай статических ионов ($g_i \gg 1$) и ударных электронов ($g_e \ll 1$).

ских ионов $(g_i \gg 1)$ и ударных электронов $(g_e \ll 1)$. Простейшая форма контура (7.1) - (7.3) со средними для линии штарковской постоянной C (3.10) и ударной шириной γ (5.15) — (5.16) дает разумную точность (~30%) результатов вблизи полуширины контура $\Delta \omega \sim \Delta \omega_0$; см. (3.11). В то же время, полученный контур может сильно отличаться от истинного в центральной части $\Delta \omega \ll \Delta \omega_0$ и на крыльях $\Delta \omega \gg \Delta \omega_0$. Для правильного описания крыла линии в формуле (7.1) следует использовать вместо постоянной — «переменную» электронную ширину $\gamma(\omega)$. В качестве последней можно использовать универсальную (для всех линий) функцию $\gamma(x)$ (2.20), рассчитанную по адиабатической модели. Это дает неплохие результаты для контуров лаймановской линии $Ly - \alpha$ и высоковозбужденных бальмеровских линий H_{δ} , $H_8 - H_{15}$; см. рис. 11, 15. Для линии $Ly - \alpha$ имеются и более точные результаты (6.15) (см. также ^{92, 81}, учитывающие эффекты неадиабатичности). Отметим, что в крыле контур линии хорошо описывается формулами (7.5), (7.6).

Наибольшие расчетные трудности связаны с описанием центральной части линий $\Delta \omega \ll \Delta \omega_0$, особенно линий бальмеровской серии. Здесь, как и для более точного описания всего контура, необходимы детальные численные расчеты, проведенные недавно в ^{84, 85}. В работе ⁸⁵ приведены результаты численных расчетов четырех первых лаймановских ($Ly - \alpha$, $Ly - \beta$, $Ly - \gamma$ и $Ly - \delta$) и четырех бальмеровских (H_{α} , H_{β} , H_{γ} и H_{δ}) линий для широкого диапазола концентраций и температур плазмы: N_e от $10^{11} - 10^{12}$ см⁻³ до $10^{16} - 10^{18}$ см⁻³; $T_e = T_i = 2500$ °K, 5000 °K, 10 000 °K и 20 000 °K и для широкой области длин волн вплоть до перекрытия линий.

Точность расчетов, по оценкам авторов ⁸⁵, составляет 10-15%. На точность, близкую к указанной, можно рассчитывать, по-видимому, для лаймановских линий. Что касается бальмеровской серии, то для нее точность расчетов заметно меньше. Выше уже отмечалось довольно значи-тельное расхождение данных ⁸⁴ и ⁸⁵ вблизи центра линий H_{α} и H_{γ} . По-видимому, для линий H_{β} , H_{δ} точность расчетов в центре также не лучше 20%. Следует указать, однако, что эта точность возрастает до 5-10% вблизи максимума и на не слишком далеких крыльях линий (см. рис. 7-10). Физическими причинами, ограничивающими точность проведенных расчетов, являются неучет, во-первых, эффектов теплового движения ионов (см. гл. 4) и, во-вторых, эффектов неоднородности плазменного поля (гл. 10). Первая группа эффектов приводит к отклонениям истинного контура от расчетного вблизи центра линии, причем эти отклонения тем значительнее, чем меньше величина параметра g_i. Эффекты второй группы сказываются и в далеких крыльях линий и особенно существенны, согласно (10.7), для высоковозбужденных линий в достаточно плотной плазме. Заметим, что в далеких крыльях линий (особенно Ly — а) могут проявляться квантовые эффекты для электронов ⁷⁸⁻⁸¹.

В заключение можно констатировать, что современные эксперименты в целом подтвердили основные положения теории штарковского уширения водородных линий. В то же время полученные экспериментальные результаты выдвигают новые задачи перед теорией в отношении точности расчетов контуров как в рамках сложившихся представлений, так и разработки новых подходов, которые позволили бы продвинуться в новую область параметров плазмы. В последнем случае речь идет в первую очередь о построении теории, справедливой при $g \sim 1$ для всего контура линии.

Укажем наконец на су цествование подробной библиографии по уширению линий ¹⁰⁴.

Автор глубоко признателен И. И. Собельману, стимулировавшему написание данного обзора, В. И. Когану, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний, А. В. Демуре и Г. В. Шолину, с которыми обсуждались многие из рассмотренных выше вопросов.

Институт атомной энергииим. И. В. Курчатова

в. с. лисица

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- J. Holtsmark, Ann. d. Phys. 58, 577 (1919).
 D. Voslamber, Zs. Naturforsch. 24a, 1458 (1969).
 E. W. Smith, C. F. Hooper, Phys. Rev. 157, 126 (1967).
 E. W. Smith, ibid. 166, 102 (1968).
 B. B. Якимец, ЖЭТФ 51, 1469 (1966).
 C. R. Vidal, J. Cooper, E. W. Smith, J. Quantit. Spectr. and Rad. Transform 10, 4044 (4070). fer 10, 1011 (1970).
- R. Breene, The Shift and Shape of Spectral Lines, N. Y., Pergamon Perss, 1961.
 Г. Грим, Спектроскопия плазмы, М., Атомиздат, 1969.
 В. Визе, вкн. Диагностика плазмы, под ред. Р. Хаулстоун и С. Ленарда, М.,
- «Мир», 1967, гл. 6. 10. И. И. Собельман, Введение в теорию атомных спектров, М., Физматгиз,
- 1963.
- 11. М. Баранже, в кн. Атомные и молекулярные процессы, под ред. Д. Бейтса, М., «Мир», 1964, гл. 13. 12. А. Травинг, в кн. Методы исследования плазмы, под ред. В. Лохте-Хольт-
- гревена, М., «Мир», 1971, гл. 2. 13. V. Weisskopf, Zs. Phys. 25, 287 (1932).

- (1972).
- 18. Й. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М., Физматгиз, 1963.

- изведений, М., Физматгиз, 1963. 19. в. С. Лисица, ДАН СССР 16, 1059 (1952). 20. М. Lewis, Phys. Rev. 121, 501, 1961. 21. В. И. Коган, в кн. Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, под ред. М. А. Леонтовича, т. 4, М., Изд-во АН СССР, 1958, с. 258. 22. В. И. Коган, ДАН СССР 135, 1374 (1960). 23. С. Д. Творогов, В. В. Фомин, Опт. и спектр. 30, 413 (1971). 24. А. V. Demura, V. S. Lisitsa, J. Quantit. Spectr. and Rad. Transfer. 14, 273: (1974)

- (1974).,
- 25. Н. Магдепац, В. Е. Меуегоtt, Astrophys. J. 121, 194 (1955). 26. И. И. Собельман, Опт. и спектр. 1, 617 (1956). 27. М. Вагапдег, Phys. Rev. 111, 481, 494; 112, 855 (1958).

- 28. A. Jabloncki, Phys. Rev, 68, 78 (1945).

- 29. J. Szudy, Acta Phys. Polon. A40, 361 (1971). 30. J. Szudy, W. E. Bailis, J. Quantit. Spectr. and Rad. Transfer 15, 641 (1975). 31. Л. А. Вайнштейн, Л. В. Пресняков, И. И. Собельман, ЖЭТФ 43, 518 (1962). 32. С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, М.,
- ИЛ, 1947.
- 33. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, М., «Наука», 1966.
- 33. С. М. Рытов, Введение в статистическую радиофизику, М., «н 34. А. В. Underhill, J. Waddell, NBS Circ. No. 603 (1959).
 35. H. Griem, Astrophys. J. 132, 883 (1960).
 36. С. F. Hooper, Jr., Phys. Rev. 165, 215 (1968).
 37. G. Ecker, Zs. Phys. 148, 593 (1957).
 38. В. Моzer, М. Baranger, Phys. Rev. 118, 626 (1960).
 39. В. Н. Алямовский, ЖЭТФ 42, 1536 (1962).
 40. Ц. К. или и состатистические и М. Атомизист.

- 40. Л. П. Кудрин, Статистическая физика плазмы, М., Атомиздат, (1973). 41. V. I. Kogan, A. D. Selidovkin, Plasma Phys. 9, 199 (1969).

- 41. V. I. Кодап, А. D. Selidovkin, Plasma Phys. 9, 199 (1969).
 42. В. Паули, Труды по квантовой теории, М., «Наука», 1975, с. 99.
 43. Т. Ноlstein, Phys. Rev. 79, 744 (1950).
 44. Н. К. Wimmel, J. Quantit. Spectr. and Rad. Transfer 1, 1 (1961).
 45. Г. В. Шолин, В. С. Лисица, В. И. Коган, ЖӘТФ 59, 1390 (1970).
 46. Л. Д. Ландау, Е. И. Лифшин, Теория поля, М., Физматгиз, 1962.
 47. Н. R. Griem, А. С. Коlb, К. Ү. Shen, Phys. Rev. 116, 4 (1959).
 48. Л. А. Вайнштейн, И. И. Собельман, Опт. и спектр. 15, 37 (1959).
 49. Н. R. Griem, М. Baranger, А. С. Коlb, G. Oertel, Phys. Rev. 125, 177 (1962).
- 50. C. Deutch, L. Herman, H. W. Drawin, ibid. 178, 261 (1968)

- 50. С. В. Шолин, А. В. Демура, В. С. Лисица, ЖЭТФ 64, 2097 (1973). 52. Н. Рfennig, Phys. Lett. A34, 292 (1971). 53. L. A. Minaeva, I. I. Sobelman, J. Quantit. Spectr. and Rad. Transfer 8, 783 (1968).

- 54. М. Л. Стрекалов, А. И. Бурштейн, ЖЭТФ 61, 101 (1971). 55. Н. Р fennig, Zs. Naturforsch. 26a, 1071 (1971). 56. L. Spitzer, Phys. Rev. 58, 348 (1940). 57. М. И. Чибисов, Опт. и спектр. 27, 9 (1969). 58. М. J. Seaton, Proc. Phys. Soc. 77, 174 (1961). 59. Н. Р fennig, J. Quantit. Spectr. and Rad. Transfer 12, 821 (1972). 60. В. С. Писина, Г. В. Шории, ЖЭТФ 64, 9 (4974).

- 60. В. С. Лисица, Г. В. Шолин, ЖЭТФ 61, 9 (1971).
- 61. М. Борн, Лекции по атомной механике, М., ОНТИ, 1934. 62. Ю. Н. Демков, Б. С. Моновон, В. Н. Островский, ЖЭТФ 57, 1431
- (1969).63. Ю. Н. Демков, В. Н. Островский, Е. А. Соловьев, ЖЭТФ 66, 125
- (1974).

- 64. В. Н. Островский, Е. А. Соловьев, ЖЭТФ 66, 1590 (1974).
 65. Т. Ізһішига, Ј. Phys. Soc. Japan 23, 422 (1967).
 66. В. С. Лисица, Опт. и спектр. 31, 468 (1971).
 67. А. V. Demura, V. S. Lisitsa, G. V. Sholin, in: Proc. of the 12th Intern. Conference Phenomena of Ionized Gases, Eindhoven, Netherland, 1975. 68. Л. П. Кудрин, Г. В. Шолин, ДАН СССР 197, 342 (1962). 69. V. I. Kogan, V. S. Lisitsa, A. D. Selidovkin, in: Proc. of the 8th In-

- tern. Conference on Phenomena on Ionized Gases, IAEA, Vienna, 1967. 70. V. I. Kogan, V. S. Lisitsa, in: Proc. of the 9th Intern. Conference on Phe-nomena of Ionized Gases, IAEA, Bucharest, 1969.
- 71. А. В. Демура, В. С. Лисица, Г. В. Шолин, ЖЭТФ 73 (1) (1977).
- 72. Н. Магдепац, М. Lewis, Rev. Mod. Phys. 31, 569 (1959). 73. А. В. Виноградов, И. И. Собельман, Е. А. Юков, Квант. электроника 1, 268 (1974).
- 74. R. L. Green, J. Cooper, E. W. Smith, J. Quantit. Spectr. Rad. Transfer. 15, 1025 (1975). 75. R. L. Green, J. Cooper, ibid., p. 1037.

- 76. Н. В. Griem, К. Ү. Shen, Phys. Rev. 122, 1490 (1961).
 77. В. А. Абрамов, В. С. Лисица, Физ. плавмы 3 (3) (1977).
 78. N. Тап Міпh, Н. Van Regemorter, J. Phys. B5, 903 (1972).
 79. N. Tran Minh, N. Feautrier, H. Van Regemorter, ibid. B8, 1810⁴
- (1975), B9, 1871 (1976).
 80. N., Tran Minh, N. Feautrier, H. Van Regemorter, J. Quantit. Spectr. and Rad. Transfer 16, 849 (1976).
- 81. Ф. Ф. Барышников, В. С. Лисица, ЖЭТФ 72, 1797 (1977).
- 82. Н. Мотт, Г. Месси, Теория атомных столкновений, М., «Мир», 1969. 83. А. Нацtot, J. Math. Phys. 14, 1320 (1973).

- 84. P. Keple, H. R. Griem, Phys. Rev. 123, 317 (1968).
 85. C. R. Vidal, J. Cooper, E. W. Smith, Astrophys. J., Suppl. 25, 37 (1973).
 86. W. L. Wiese, D. E. Kelleher, D. R. Paquette, Phys. Rev. 6, 1132
- (1972).
- 87. G. Boldt, W. B. Gooper, Zs. Naturforsch, 19a, 968 (1964).

- 87. G. B´oldt, W. B. Gooper, Zs. Naturforsch, 19a, 968 (1964).
 88. R. C. Elton, H. R. Griem, Phys. Rev. A135, 1550 (1964).
 89. H. Schlütter, C. Avila, Astrophys. J. 144, 785 (1966).
 90. H. Schlütter, J. Quantit. Spectr. and Rad. Transfer 185, 140 (1969).
 91. E. W. Smith, J. Cooper, C. R. Vidal, 185, 140 (1969).
 92. B. C. Лисица, Г. B. Шолин, 12, 985 (1972).
 93. D. E. Kelleher, W. L. Wiese, Phys. Rev. Lett. 31, 1431 (1973).
 94. W. L. Wiese, D. E. Kelleher, V. Helbig, Phys. Rev. A11, 1854 (1975).
 95. J. D. Hey, H. R. Griem, ibid. 12, 169.
 96. R. W. Lee, J. Phys. B6, 1060 (1973).
 97. J. Cooper, E. Smith, C. Vidal, ibid, B7, 101 (1974).
 98. E. Segre, D. Voslamber, Phys. Lett, A46, 397 (1974).

- 98. Е. Segre, D. Voslamber, Phys. Lett, A46, 397 (1974). 99. Г. В. Шолин, Опт. и спектр. 26, 289 (1969).

- 100. К. С. М й I ler, Quantit. Spectr. and Rad. Transfer 5, 403 (1965).
 101. А. V. Demura, G. V. Sholin, ibid. 15, 881 (1975).
 102. А. Ц. Гурович, Л. К. Меренкова, В С. Энгельшт, ДАН СССР 221, 315 (1975).
- Г. Бете, Э. Солиитер, Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами, М., Физматгиз, 1960.
 104. NBS Special Publication 336, 1972 (Suppl. I 1973, Suppl. II 1975).