

538.566.2

ПАРАДОКСЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ЭФФЕКТОВ ВАВИЛОВА — ЧЕРЕНКОВА И ДОППЛЕРА

Д. В. Скобелцын

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	295
2. О тензорах импульс-энергии электромагнитного поля в среде и о кинематике волновых пакетов в движущихся средах	299
3. Об импульсе пуга волн в движущейся среде и об импульсе, сообщаемом среде при испускании пуга волн источником	307
4. О статье В. Л. Гинзбурга и В. А. Угарова	312
5. О квантовой теории доплер-эффекта и заключительные замечания	313
Дополнение	319
Приложение 1	321
Приложение 2	322
Приложение 3	322
Цитированная литература	324

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время авторы многих появлявшихся на страницах научных журналов статей вновь возвращались к обсуждению старой (полувековой давности) проблемы о тензоре импульс-энергии (и.-э.) электромагнитного (э.-м.) поля в электрически- (или магнитно-) поляризуемой среде *).

Эта дискуссия возобновилась после того, как путем очень простых наглядных соображений было показано, что выражение Минковского для плотности импульса поля в среде ведет к противоречию с такими общими положениями классической и релятивистской механики как закон постоянства скорости «центра тяжести» — центра масс системы частиц. А это равносильно противоречию с фундаментальным соотношением Эйнштейна $E = mc^2$.

В настоящее время выяснено, что «истинное» выражение для плотности g импульса поля, или импульса J волнового пакета, есть выражение Абрагама: $g = u/nc$, где u есть плотность энергии, n — показатель преломления и c — скорость света и соответственно $J = \mathcal{E}/nc$ (\mathcal{E} — энергия пуга волн).

Становится общепринятым термин «псевдоимпульс»³ для выражения $J = n \mathcal{E}/c$, вытекающего из тензора Минковского.

В различных статьях и заметках обсуждался вопрос о том, какой физический смысл следует вкладывать в это понятие «псевдоимпульса». Сравнительно мало внимания, однако, было уделено вопросу о том, как основанную на этом понятии концепцию квантов света в среде согласовать с упомянутыми выше общими требованиями классической и релятивистской механики.

*) Более подробные сведения о литературе вопроса см. 1, 2.

Естественно поставить вопрос о ревизии квантовой теории эффектов Черенкова и Допплера, которой посвящено немало работ конца сороковых и начала пятидесятих годов века.

В нижеследующем обсуждаются некоторые аспекты проблемы и постановка вопросов, которые в этой связи возвращают к истокам идей и концепций квантовой теории явлений света. Имея в виду эти вопросы, можно прежде всего напомнить следующее общеизвестное положение: *свободный электрон, движущийся прямолинейно и равномерно в пустом пространстве, не может излучить свет за счет своей кинетической энергии*. Опираясь на основы теории относительности, к такому заключению можно прийти сразу же, если ввести инерциальную систему отсчета, в которой рассматриваемый электрон покоится и в которой, следовательно, энергия, необходимая для излучения фотона при заданных условиях, равна нулю. Однако, как хорошо известно, электрон в состоянии равномерного движения *в среде дает* такое излучение — излучение Вавилова — Черенкова.

Если воспользоваться указанной выше системой отсчета (в которой электрон неподвижен), то возникает вопрос — где же источник энергии черенковского излучения? На этот вопрос естественно ответить предположением, что таким источником является кинетическая энергия движения среды, взаимодействующей с э.-м. полем покоящегося в ней электрического заряда.

Такой ответ не вызывает сомнений при «глобальной» — макроскопической — постановке вопроса. Однако схема трактовки микроскопической — квантовой картины явления приводит к другому ответу на поставленный выше вопрос. В основу квантового описания положены соотношения, вытекающие из тензора Минковского, и следующее парадоксальное их следствие.

В указанной системе отсчета (в которой электрон покоится), внутри «конуса излучения Черенкова» *) энергия фотона отрицательна: фотон, испускаемый в этих условиях, *не уносит*, а наоборот, *отдает* энергию (а также и импульс) излучающему его электрону. Тем самым, как нами уже и отмечено, обнаруживается прямое противоречие с фундаментальным соотношением Эйнштейна $E = mc^2$ **). В дальнейшем мы подробно обсудим возникающую таким образом controверзу.

Если принять выражение Минковского для импульса фотона J в среде, $J = n\mathcal{E}/c = nh\nu/c$ и написать уравнения сохранения импульс-энергии, рассматривая излучение фотона при переходе электрона из состояния движения с импульсом J_1 в состояние с импульсом J_2 , то непосредственно (но приближенно) получается условие излучения Черенкова

$$n\beta \cos \theta = 1$$

и еще другие соотношения, совпадающие с выводами классической теории эффекта (см., например, ⁴).

Волново-механическая картина требует отождествления волнового вектора (с множителем $h/2\pi$) с вектором импульса кванта. Должно соблюдаться основное соотношение де Бройля:

$$J = \frac{h}{\lambda} \quad (1.1)$$

J — импульс, λ — длина волны де Бройля.

*) О конусе излучения Черенкова здесь говорится с точки зрения «собственной системы отсчета» среды.

**) Точнее, с соотношением $J = mv$, где J — импульс, m — масса и v — скорость движения этой массы.

В применении к фотону в вакууме (1.1) эквивалентно соотношению

$$J = \frac{h\nu}{c}. \quad (1.2)$$

Если же рассматривается фотон в среде, то

$$\lambda = \frac{c}{n\nu} \quad (1.3)$$

и из (1.1) следует

$$J = \frac{nh\nu}{c} \quad (1.4)$$

(\mathcal{E} — энергия фотона, J — импульс, ν — частота, n — показатель преломления).

Как упомянуто выше, квантовая теория явлений, о которых здесь идет речь, строилась на основе соотношений, вытекающих из тензора Минковского.

Четырехмерные дивергенции этого тензора равны нулю. Согласно некоторой общей теореме, по компонентам тензора такого рода можно построить четырех-вектор и.-э. сопоставляемый какой-либо трехмерной области поля, ограниченной той или иной замкнутой поверхностью (⁵, с. 93, 130; ⁶, с. 126).

В частности, компоненты определенного таким образом четырех-вектора и.-э. дуга волн совпадают с указанными выше значениями энергии (\mathcal{E}) и импульса (1.4) *квантового фотона*.

Можно ли, однако, представлять себе «цуг волн» как *модель* такого фотона и тогда трактовать «квант света» как объект *прямых* физических наблюдений?

Если принять такую интерпретацию, то неизбежно прийти к противоречию с принципами теории относительности, о чем мы уже говорили и к чему вернемся еще в дальнейшем.

Квадрат величины, или норма, четырех-вектора и.-э., отвечающего соотношению (1.4), равен

$$\frac{n^2 \mathcal{E}^2}{c^2} - \frac{\mathcal{E}^2}{c^2} = \frac{n^2 - 1}{c^2} \mathcal{E}^2 > 0. \quad (1.5)$$

Поскольку норма данного вектора положительна (четыре-вектор *пространственный*), то фотону-частице, которой сопоставляется этот вектор, приходится приписать *мнимую массу* покоя. (Известно, что норма четырех-вектора и.-э. частицы равна $-\mu_0^2 c^2$, где μ_0 — масса покоя частицы.)

Обнаруживается родство частиц-фотонов в среде, и «тахеонов» — частиц, порожденных в последние годы воображением теоретиков, занятых в области физики частиц высокой энергии. В этой связи упомянем еще о предложении Л. де Бройля ⁷ приписывать фотону в среде две «собственные» массы — две массы покоя. Из них одна входит в формулу, определяющую энергию, другая — в выражение импульса частицы. К такому выводу приводит развиваемая им теория «волны-пилота» *).

Концепция фотона в вакууме свободна от указанного выше внутреннего противоречия: четырех-вектор и.-э. в этом случае «нулевой» (норма вектора равна нулю).

Поскольку в настоящее время полувековая дилемма — тензор Минковского или тензор Абрагама, решается, видимо, окончательно в пользу признания этого последнего тензора (или, во всяком случае, исключения

*) При опубликовании заметок автора данного обзора в 1975 г. ¹⁶, указанная в тексте работа ⁷ была, к сожалению, им упущена.

тензора Минковского), возникает поставленный в начале статьи вопрос об основах квантовой теории эффектов Черенкова и Допплера в преломляющей среде.

В 1955 г. венгерские физики⁸ предложили интерпретацию, позволяющую, по-видимости, примирить обе концепции — Минковского и Абрагама. Та же идея была снова высказана в 1972 г. и другим автором⁹. Совсем недавно с обоснованием этой идеи выступили авторы работы², опубликованной в УФН.

Идея, о которой идет речь, сводится к следующему.

Рассматривая излучение *цуга волн* источником света в среде, можно легко видеть, что *самый акт излучения* может сопровождаться передачей среде дополнительно к импульсу J , уносимому излучением, еще и некоторого импульса отдачи ΔJ . Поскольку рассматривается случай *покоящейся* среды и *неподвижного* в ней источника, то при определенных *допущениях* нижеследующий простой расчет показывает, что выполняется соотношение:

$$J^M = J^A + \Delta J \quad (1.6)$$

(J — импульс фотона. Значками М и А здесь и в дальнейшем отмечены величины по Минковскому и Абрагаму соответственно).

Примем направление луча за направление оси x .

Плотность энергии u э.-м. поля в этом случае есть некоторая функция аргумента, равного $v[(t - (xn/c))]$, где n — показатель преломления и v — «несущая» частота,

$$u \propto \varphi\left(vt - \frac{vxn}{c}\right), \quad (1.7)$$

t — время, истекшее после начала излучения цуга.

Плотность f силы Абрагама для поля плоской волны определяется так:

$$f = \frac{n^2 - 1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} |[EH]| = \frac{n^2 - 1}{cn} \frac{\partial u}{\partial t} \quad (1.8)$$

(см., например^{1а} и гл. 3 данной статьи).

Можно полагать, что соотношение (1.8) выполняется и на переднем фронте цуга, где э.-м. поле аппроксимируется синусоидальной волной с затухающей (в пространстве) амплитудой, удовлетворяющей условию:

$$\varphi = \text{const при } t \gg \frac{xn}{c} \quad \text{и} \quad \varphi = 0 \quad \text{при } t \leq \frac{xn}{c}.$$

При указанных предположениях

$$f = -\frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.9)$$

$$P = \int_x^\infty f dx = \frac{n^2 - 1}{n^2} u, \quad (1.10)$$

где $u = \text{const при } \frac{xn}{c} \ll t$ (здесь u — усредненное по многим периодам значение плотности энергии в точке с заданным x). P — давление э.-м. поля на среду на переднем фронте цуга.

Если время испускания (по истечении которого цуг отрывается от источника) обозначим T , то согласно (1.10)

$$\Delta J = PT = \frac{n^2 - 1}{n^2} uT. \quad (1.11)$$

При энергии цуга, равной \mathcal{E} , импульс J^A цуга по Абрагаму равен

$$J^A = \frac{\mathcal{E}}{nc}. \quad (1.12)$$

$\mathcal{E} = u\mathcal{L}$, где \mathcal{L} — длина цуга и площадь поперечного сечения его положена равной единице.

Если источник неподвижен, то $l = (c/n)T$.

Таким образом, $\mathcal{E} = (uc/n)T$, $uT = \mathcal{E}n/c$ и согласно (1.11) и (1.12) *)

$$J^A + \Delta J = \frac{\mathcal{E}}{nc} + \frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{\mathcal{E}n}{c} = \frac{\mathcal{E}n}{c} = JM.$$

Если бы соотношение (1.6) можно было обобщить и на случай движущейся среды и *неподвижного* источника, или источника движущегося и неподвижной среды (обе формулировки по смыслу принципа относительности эквивалентны **)), то было бы доказано, что трактовка рассматриваемых теорий на основе псевдоимпульса Минковского *эквивалентна* теории, основанной на формулах Абрагама с учетом соотношения (1.6).

Авторы работы ² полагают, что такой тезис ими и доказан. В гл. 4 мы вернемся к этому вопросу. При этом нам потребуются различные соотношения, вытекающие как из выражений для тензоров и.-э., так и из релятивистской кинематики волновых пакетов в движущихся средах.

Довольно детальному рассмотрению этих соотношений и посвящен следующий раздел данного обзора. Перегруженность изложения элементарными выводами различных вспомогательных соотношений, может быть, и оправдывается стремлением внести ясность и наглядность в вопрос, оказавшийся запутанным в результате также и допущенных разными авторами ошибок вычислений.

2. О ТЕНЗОРАХ ИМПУЛЬС-ЭНЕРГИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ В СРЕДЕ И О КИНЕМАТИКЕ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ В ДВИЖУЩИХСЯ СРЕДАХ

Дальше речь будет идти о движущихся средах и об источниках света в них (неподвижных или движущихся). Для того чтобы исключить побочные взаимодействия источника и среды при их относительном движении, воспользуемся предложением авторов работы ¹⁰ рассматривать источник света находящимся, например, в плоской щели, вырезаемой в среде плоскостями, расстояние между которыми мало в сравнении с длиной волны.

«Виртуальный» источник излучения можно представить себе в виде поверхности, покрытой слоем осцилляторов. Если колебания осцилляторов синхронны, то налицо излучение пучка лучей, практически параллельных, в направлении нормали к поверхности излучателя. Но можно предположить распределение фаз осцилляторов (по поверхности излучателя) *заданным* так, что пучок лучей испускается косо — под тем или иным углом к поверхности источника.

В работе ^{1a} рассматривался тензор (P_{lm}) упругостных напряжений среды, сопряженных с напряженностями э.-м. поля. Имея в виду предельные условия, были рассмотрены две модели идеализированной среды, удовлетворяющие условию: диэлектрическая постоянная есть константа, не зависящая от параметров, характеризующих состояние среды, и от

*) Если источник движется со скоростью βc (например, в направлении испускания пуга) и при этом значения u и T заданы теми же, что и при источнике неподвижном, то ΔJ не зависит от скорости источника, но

$$T = \frac{\mathcal{E}}{[(1/n) - \beta] cu}, \quad T \neq \frac{\mathcal{E}n}{uc},$$

и уравнение (1.6) не выполняется. В нижеследующем тексте намеченные здесь соображения подробно рассматриваются в общем виде также и при среде, движущейся в данной системе отсчета.

**) В том смысле, что переход от одной ситуации к другой определен преобразованиями Лоренца.

напряженности электрического поля. Тем самым мы предполагаем исключенными силы, зависящие от производной диэлектрической постоянной по плотности среды («стрикционные силы»). Кроме того, предполагается, что дисперсией можно пренебречь.

Опуская подробности и в связи с этим отсылая читателя к статье ^{1a}, здесь мы обобщим двумерную схему «пространство-время», рассмотренную ранее, на случай двух пространственных измерений.

Как и в статье ^{1a}, будем рассматривать поле плоскополяризованной э.-м. волны. Запишем вытекающие из рис. 1 выражения компонент поля:

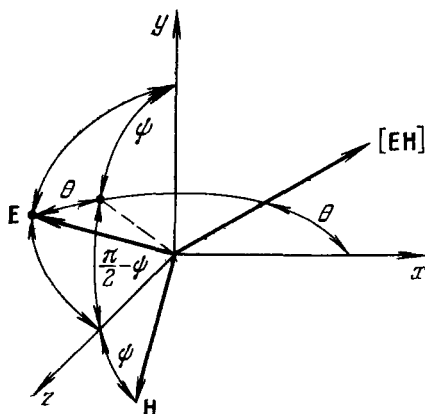


Рис. 1.

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E \sin \theta, & H_x &= 0, \\ E_y &= E \cos \theta \cos \psi, & H_y &= -H \sin \psi, \\ E_z &= E \cos \theta \sin \psi, & H_z &= H \cos \psi \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

и т. д. Только для сокращения письма полагаем теперь азимут ψ равным нулю.

В нижеследующем тексте подробности выкладки опускаем. Тензор P_{lm} (^{1a}, с. 269) запишется теперь так:

$$P_{lm} = -\frac{n^2-1}{n^2} u_0 \times \left(\begin{array}{cc|c} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & 0 \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (2.2)$$

(u_0 — плотность э.-м. энергии волны). P_{lm} — тензор вызванных э.-м. полем механических напряжений среды. Как следует, например, из ^{1a}, приложение 4, компоненты тензора Абрагама S_{lm} дает следующая таблица:

$$S_{lm} = u_0 \times \left(\begin{array}{cc|c} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \frac{i}{n} \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & \frac{i}{n} \sin \theta \\ \hline \frac{i}{n} \cos \theta & \frac{i}{n} \sin \theta & -1 \end{array} \right) \quad (2.3)$$

Далее рассматривается сумма T_{lm} тензоров S и P :

$$T_{lm} = S_{lm}^A + P_{lm}. \quad (2.4)$$

Переходя к системе штрихованных координат, начало которой движется со скоростью β относительно системы x, t (неподвижной среды), преобразуем S_{lm} и P_{lm} по общим правилам, т.е. полагая

$$X'_{lm} = \alpha_{lk} \alpha_{ms} X_{ks},$$

где X_{ks} , X'_{lm} — соответствующие компоненты тензоров, а α_{ks} определены следующей матрицей:

$$\alpha_{ks} = \left(\begin{array}{ccc|c} \gamma & 0 & 0 & i\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline -i\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{array} \right),$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Выполнив вычисления, приходим к следующему результату:

$$\gamma^2 \frac{u_0}{n} \left(\begin{array}{cc|c} \cos \theta (n \cos \theta - \beta) - \beta (\cos \theta - n\beta) & \frac{\sin \theta (n \cos \theta - \beta)}{\gamma} & i [\cos \theta (1 - n\beta \cos \theta) - \beta (n - \beta \cos \theta)] \\ \frac{\sin \theta (n \cos \theta - \beta)}{\gamma} & \frac{n \sin^2 \theta}{\gamma^2} & i \frac{\sin \theta (1 - n\beta \cos \theta)}{\gamma} \\ \hline i [\cos \theta (1 - n\beta \cos \theta) - \beta (n - \beta \cos \theta)] & i \frac{\sin \theta (1 - n\beta \cos \theta)}{\gamma} & -n + 2\beta \cos \theta - n\beta^2 \cos^2 \theta \end{array} \right), \quad (2.5)$$

$$- \frac{n^2 - 1}{n^2} \gamma^2 u_0 \times \begin{array}{cc|c} \cos^2 \theta & \frac{\sin \theta \cos \theta}{\gamma} & -i\beta \cos^2 \theta \\ \frac{\sin \theta \cos \theta}{\gamma} & \frac{\sin^2 \theta}{\gamma^2} & -i\beta \frac{\sin \theta \cos \theta}{\gamma} \\ \hline -i\beta \cos^2 \theta & i\beta \frac{\sin \theta \cos \theta}{\gamma} & -\beta^2 \cos^2 \theta \end{array}. \quad (2.6)$$

Сумму тензоров (2.5) и (2.6) обозначим $T_{lm}^A: T_{lm}^A = S_{lm} + P_{lm}$,

$$\gamma^2 \frac{u_0}{n^2} \times \begin{array}{cc|c} (n\beta - \cos \theta)^2 & \frac{\sin \theta (\cos \theta - n\beta)}{\gamma} & i (n - \beta \cos \theta) (\cos \theta - n\beta) \\ \frac{\sin \theta (\cos \theta - n\beta)}{\gamma} & \frac{\sin^2 \theta}{\gamma^2} & i \frac{(n - \beta \cos \theta) \sin \theta}{\gamma} \\ \hline i (n - \beta \cos \theta) (\cos \theta - n\beta) & i \frac{\sin \theta (n - \beta \cos \theta)}{\gamma} & -(n - \beta \cos \theta)^2 \end{array} \quad (2.7.)$$

Заменив в четвертом столбце таблицы (2.3) компоненты S_{14} и S_{24} $((i/n) \cos \theta$ и $(i/n) \sin \theta)$ выражениями $in \cos \theta$ и $in \sin \theta$ и применив после этой замены те же общие формулы преобразования компонент тензора, получим в результате таблицу тензора Минковского:

$$u_0 \gamma^2 \times \begin{array}{cc|c} \frac{(\cos \theta - n\beta) (n \cos \theta - \beta)}{n} & \frac{\sin \theta (n \cos \theta - \beta)}{n\gamma} & i \frac{(n - \beta \cos \theta) (n \cos \theta - \beta)}{n} \\ \frac{\sin \theta (\cos \theta - n\beta)}{\gamma} & \frac{\sin^2 \theta}{\gamma^2} & i \frac{\sin \theta (n - \beta \cos \theta)}{\gamma} \\ \hline i \frac{(\cos \theta - n\beta) (1 - n\beta \cos \theta)}{n} & i \frac{\sin \theta (1 - n\beta \cos \theta)}{n\gamma} & i \frac{(\beta \cos \theta - n) (1 - n\beta \cos \theta)}{n} \end{array}. \quad (2.8)$$

(Множитель, входящий в каждую из приведенных здесь таблиц и обозначенный символом u_0 , есть значение плотности энергии в системе нештрихованных координат, в которой среда неподвижна.)

Приводим следующие соотношения, которые могут быть получены как следствие из указанных тензоров.

Тензоры T^M и T^A являются тензорами замкнутой системы «поле+среда»:

$$\operatorname{div} T_{lm}^A = \operatorname{div} T_{lm}^M = 0. \quad (2.9)$$

В этом случае плотность потока Φ' энергии выражается произведением

$$\Phi' = u' c^{**}, \quad (2.10)$$

где c^{**} — скорость переноса энергии. Простые соображения приводят к требованию: c^{**} преобразуется как скорость материальной точки.

Если, в соответствии с (2.10), учесть, что

$$c^{**} \cos \theta' = (c/i) S_{41}/u', \quad c^{**} \sin \theta' = (c/i) S_{42}/u',$$

то обе таблицы, (2.7) и (2.8), дают одинаково:

$$c^{**} = \frac{c \sqrt{1 - 2n\beta \cos \theta + n^2\beta^2 - \beta^2 \sin^2 \theta}}{n - \beta \cos \theta}. \quad (2.11)$$

Вместе с тем чисто кинематические соображения приводят к выражению для фазовой скорости c^* .

Это выражение следует из требования инвариантности фазы волны

$$\varphi = \nu' \left(t' - \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c^*} \right) = \nu \left(t - \frac{x \cos \theta + y \sin \theta}{c/n} \right); \quad (2.12)$$

здесь α' и θ — углы, образуемые волновой нормалью с осью x в системах штрихованных и нештрихованных координат соответственно.

Из (2.12) и преобразований Лоренца следует

$$c^* = \frac{c(1 - n\beta \cos \theta)}{\sqrt{n^2 - 2n\beta \cos \theta + \beta^2 - n^2\beta^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2.13)$$

а также и соотношения, определяющие α' и ν' :

$$\sin \alpha' = \frac{n \sin \theta \cdot c^* \sqrt{1 - \beta^2}}{c(1 - n\beta \cos \theta)}, \quad (2.14)$$

$$\cos \alpha' = \frac{c^*(n \cos \theta - \beta)}{c(1 - n\beta \cos \theta)}, \quad (2.15)$$

$$\nu' = \nu \frac{1 - n\beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (2.16)$$

(Подробности вычислений см. ⁶, с. 46.) Рассматривая «дуг волн», можно положить

$$\frac{J'}{\mathcal{E}'} = \frac{g'}{u'}, \quad (2.17)$$

где J' и \mathcal{E}' — импульс и энергия данного цуга волн: $g' = \sqrt{g_x'^2 + g_y'^2}$ — плотность импульса и u' — плотность энергии.

Из таблиц (2.7) (2.8) соответственно получим

$$\frac{J'^A}{\mathcal{E}'^A} = \frac{\sqrt{1 - 2n\beta \cos \theta + n^2\beta^2 - \beta^2 \sin^2 \theta}}{c(n - \beta \cos \theta)} \quad (2.18)$$

и

$$\frac{J'^M}{\mathcal{E}'^M} = \frac{\sqrt{n^2 - 2n\beta \cos \theta + \beta^2 - n^2\beta^2 \sin^2 \theta}}{c(1 - n\beta \cos \theta)}. \quad (2.19)$$

Следствия из двух рассматриваемых тензоров приводят к контрверзе, о которой была уже речь выше и которая в обобщенном виде вытекает из следующего сопоставления.

Как следствие (2.7), согласно (2.18), (2.14), (2.13) и (2.16) имеем

$$J'^A = \frac{\mathcal{E}'^A}{c^2} c^{**} \text{ — соотношение Эйнштейна,}$$

$$J'^A \neq \frac{\mathcal{E}'^A}{c^*} \neq \frac{h}{\lambda'} \text{ — нарушение соотношения де Бройля,}$$

$$\mathcal{E}'^A \neq h\nu';$$

здесь

$$\lambda' = \frac{c^*}{\nu'}, \quad \nu' = \frac{\nu(1 - n\beta \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (2.20)$$

ν' — доплеровская частота, регистрируемая наблюдателем, относительно которого источник, вместе со средой, движется со скоростью $-\beta c$.

Как следствие (2.19), (2.8), (2.13), (2.11) и (2.16), получим

$$J^{\prime M} = \frac{\mathcal{E}^{\prime M}}{c^*} = \frac{h\nu'}{c^*} = \frac{h}{\lambda'} - \text{соотношение де-Бройля,}$$

$$J^{\prime M} \neq \frac{\mathcal{E}^{\prime M}}{c^2} c^{**} - \text{нарушение соотношения Эйнштейна.}$$

Обобщение результатов, отмеченных выше (1.6), потребует вывода некоторых соотношений, которые вытекают из геометрии, или, точнее, кинематики волновых пакетов.

Для вывода этих соотношений рассмотрим картину волнового пакета (цуга), заданного определенными контурами в системе нештрихованных координат и неподвижной в ней среды.

Для упрощения будем иметь в виду, что волновые поверхности (или, как мы их обозначаем в дальнейшем, — эквифазные плоскости) ограничены поверхностью цилиндра достаточно большого радиуса, который все же мал в сравнении с длиной цуга.

Кроме того, упрощая геометрию, предполагаем также, что сечения эквифазными плоскостями цилиндрического объема Ω , заполненного цугом, круговые и что эти плоскости перпендикулярны к оси цилиндра *). Поперечные сечения A и B цилиндра Ω , изображенные на рис. 2, рассматриваем как условные границы волнового пакета. Центры A и B этих сечений находятся на оси цилиндра, направленной под углом θ к оси x . Пусть в момент времени $t = t' = 0$ начала обеих систем отсчета (x, t) и (x', t') находятся в точке A . В системе координат x, t точки B и A движутся со скоростью, составляющая которой по оси x равна $c \cos \theta/n$.

Принимая во внимание рис. 2 и применив преобразования Лоренца к координатам точки B , получаем следующие уравнения:

$$\left. \begin{aligned} x_B &= l_0 \cos \theta + t_B \frac{c \cos \theta}{n}, \\ t_B &= \frac{t' + \beta x'_B}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ x_B &= \frac{x'_B + \beta t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.21)$$

Исключая из этих трех уравнений x_B и t_B , после простых выкладок приходим к следующим уравнениям:

$$x'_B = c \frac{\cos \theta - n\beta}{n - \beta \cos \theta} t' + \frac{nl_0 \cos \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{n - \beta \cos \theta}, \quad (2.22)$$

$$x'_A = c \frac{\cos \theta - n\beta}{n - \beta \cos \theta} t'. \quad (2.23)$$

(Второе уравнение получается из первого, если в нем положить $l_0 = 0$.)

В результате применения аналогичной процедуры легко прийти к выражению для $y'_B = y_B$:

$$y'_B = c \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{n - \beta \cos \theta} t' + \frac{n \sin \theta l_0}{n - \beta \cos \theta} \quad (2.24)$$

и, соответственно,

$$y'_A = c \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{n - \beta \cos \theta} t'. \quad (2.25)$$

*) Эти упрощающие предположения могут быть сняты. Направление «оси трубки» волнового пакета может и не совпадать с направлением нормали к эквифазным поверхностям, что имеет место и при неподвижной (в данной системе отсчета) среде в случае источника, движущегося относительно среды.

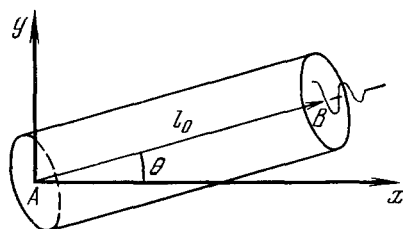


Рис. 2.

Из формул (2.22), (2.24) получаем выражения для скорости c^{**} и ее составляющих по осям x' и y' :

$$c^{**} \cos \theta' = \frac{dx'_B}{dt'} = \frac{dx'_A}{dt'} = c \frac{\cos \theta - n\beta}{n - \beta \cos \theta}, \quad (2.26)$$

$$c^{**} \sin \theta' = \frac{dy'_B}{dt'} = c \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{n - \beta \cos \theta}, \quad (2.27)$$

$$c^{**} = c \sqrt{\left(\frac{dx'_B}{dt'}\right)^2 + \left(\frac{dy'_B}{dt'}\right)^2} = c \frac{\sqrt{1 - 2n\beta \cos \theta + n^2\beta^2 - \beta^2 \sin^2 \theta}}{n - \beta \cos \theta}. \quad (2.28)$$

Таким образом, убеждаемся в том, что кинематика *) приводит к выражению (2.28) для c^{**} , совпадающему с выведенным выше (2.11) из тензоров (2.7) и (2.8).

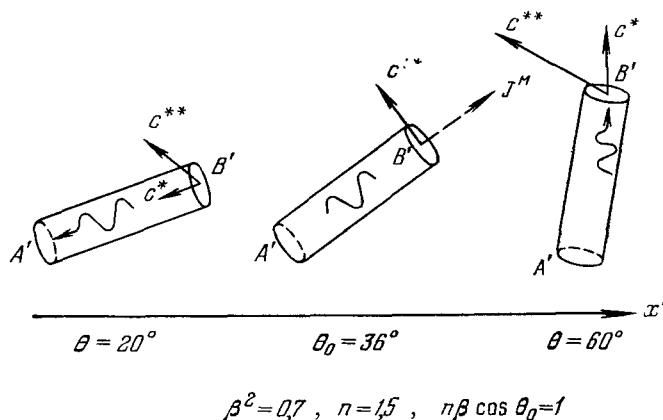


Рис. 3.

Пользуясь (2.26) — (2.28), определяем угол θ' :

$$\cos \theta' = \frac{c (\cos \theta - n\beta)}{c^{**} (n - \beta \cos \theta)} = \frac{\cos \theta - n\beta}{\sqrt{1 - 2n\beta \cos \theta + n^2\beta^2 - \beta^2 \sin^2 \theta}}, \quad (2.29)$$

$$\sin \theta' = \frac{c \sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{c^{**} (n - \beta \cos \theta)} = \frac{\sin \theta \sqrt{1 - \beta^2}}{\sqrt{1 - 2n\beta \cos \theta + n^2\beta^2 - \beta^2 \sin^2 \theta}}. \quad (2.30)$$

Скорость c^{**} есть скорость движения пакета.

Эквифазные плоскости можно представлять себе движущимися вместе с пакетом, а фазовую скорость c^* как составляющую скорости c^{**} по нормали к этим плоскостям. Угол χ между направлениями скоростей c^{**} и c^* определен, следовательно, соотношением:

$$\cos \chi = \frac{c^*}{c^{**}}; \quad (2.31)$$

$\cos \chi$ можно определить, пользуясь и полученными выше выражениями (2.29), (2.30) и (2.14), (2.15). В согласии с (2.31) вычисление этим путем дает:

$$\cos \chi = \cos \theta' \cos \alpha' + \sin \theta' \sin \alpha' = \frac{c^*}{c^{**}}. \quad (2.32)$$

Отметим следующее следствие полученного соотношения.

Согласно (2.13) при $\cos \theta_0 = 1/n\beta$, т. е. для направлений на поверхности конуса излучения Черенкова ($\theta = \theta_0$), $c^* = 0$. Как следует из (2.32), в данном «сингулярном» случае $\cos \chi = 0$: направление c^{**} параллельно эквифазным плоскостям. Энергия переносится параллельно плоскости волны.

Следует пояснить, что, говоря о конусе излучения Черенкова (здесь и в дальнейшем), мы имеем в виду источник излучения, движущийся в неподвижной среде со ско-

*) Другой чисто кинематический вывод, основанный на применении преобразований Лоренца к построению поверхности волны согласно принципу Гюйгенса, приведен в ⁶, с. 47.

ростью β , равной заданной скорости начала системы штрихованных координат (относительно среды). Рис. 3 показывает схематически ориентацию пакета волн ($A'B'$), рассматриваемого в системе x', t' , а также направления векторов c^{**} и c^* в трех случаях: $\theta < \theta_0$; $\theta = \theta_0$; $\theta > \theta_0$.

В связи с тем, что будет изложено дальше, обратим внимание на следующую особенность излучения, рассматриваемого в системе координат x', t' .

При «сверхсветовой» скорости β (т. е. при $\beta > 1/n$) и источнике света, *неподвижном* относительно x', t' , возможны направления луча только внутри определенного конуса, раскрытого в сторону отрицательных значений x . В этом можно убедиться, например, так. Воспользовавшись соотношением (2.29), определяющим $\cos \theta'$, получить (решив соответствующее квадратное уравнение) формулу для обратной зависимости — зависимости $\cos \theta$ от $\cos \theta'$. Речь идет о следующей формуле:

$$\cos \theta = \frac{n\beta(1 - \cos^2 \theta') \pm \cos \theta' \sqrt{(1 - \beta^2)(n^2 \beta^2 \cos^2 \theta' - \beta^2 \cos^2 \theta' - n^2 \beta^2 + 1)}}{1 - \beta^2 \cos^2 \theta'}. \quad (2.33)$$

При

$$\cos \theta'_0 = -\sqrt{\frac{n^2 \beta^2 - 1}{\beta^2 (n^2 - 1)}} \quad (2.34)$$

подкоренное выражение обращается в нуль. При $|\cos \theta'| < |\cos \theta'_0|$ ($|\theta'| < |\theta'_0|$) $\cos \theta$ оказывается мнимым.

Из формулы (2.33) следует далее, что при значении $\cos \theta'_0$, определенном (2.34), $\cos \theta_0 = 1/n\beta$, т. е. направления на поверхности конуса с углом θ'_0 соответствуют условию излучения Черенкова. Зависимость θ' от θ немонотонна. Каждому значению θ' внутри разрешенного конуса соответствуют два значения θ — два направления: одно внутри «конуса Черенкова» и другое вне этого конуса — в системе отсчета x, t .

В следующем разделе подробно рассматривается соотношение (1.6): $J'^M = J'^A + \Delta J'$. Для вычисления $\Delta J'$ потребуется выражение *площади* S' сечений «трубки пуга» эквивалентными плоскостями. Это выражение получим, применив также простые кинематические соотношения, которые приводим, сокращая изложение. Для получения искомого результата следует ввести в рассмотрение, кроме указанных выше, еще и третью систему отсчета, в которой направление c^{**} совпадает с осью y' .

Три фигурирующие в нижеследующем выводе системы отсчета обозначим цифрами I, II, III, снабжая обозначения скорости β такими же индексами I, II, III.

Система III — это система, о которой только что упомянуто.

Система II — введенная выше «система штрихованных координат» и система I — «нештрихованная система», в которой среда неподвижна. В ниже приведенные формулы войдут скорости β_I и β_{II} . Пользуясь этими обозначениями, мы подразумеваем скорость *третьей* системы *относительно* I и II соответственно.

Как показывает формула (2.29),

$$\beta_I = \frac{\cos \theta}{n}. \quad (2.35)$$

Правило сложения скоростей дает

$$\beta_{II} = \frac{\beta - \beta_I}{1 - \beta \beta_I} \quad (2.36)$$

напомним, что β есть скорость «штрихованной системы», определяемая наблюдателем системы I),

$$\sqrt{1 - \beta_{II}^2} = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sqrt{1 - \beta_I^2}}{1 - \beta \beta_I}. \quad (2.37)$$

Рис. 4 поясняет другие используемые дальше обозначения.¹ (Буквой σ обозначены соответствующие площади *проекций* площадей S на плоскость x, z).

Нетрудно убедиться в том, что выполняются следующие соотношения:

$$\sigma_{III} \sqrt{1 - \beta_I^2} = \sigma_I = \sigma_0, \quad (2.38)$$

$$\sigma_{III} \sqrt{1 - \beta_{II}^2} = \sigma_{II} = \sigma^z. \quad (2.39)$$

Отсюда, в результате простых выкладок, учитывая (2.38), (2.39), (2.37), (2.35) и (2.14), приходим к следующему результату:

$$S' = S_0 \frac{\sin \theta}{\sin \alpha'} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{n-\beta \cos \theta} = S_0 \frac{c |1-n\beta \cos \theta|}{c^* (n-\beta \cos \theta)}. \quad (2.40)$$

При $n\beta \cos \theta \neq 1$ *).

Более прямой и подробный вывод см. в приложении I.

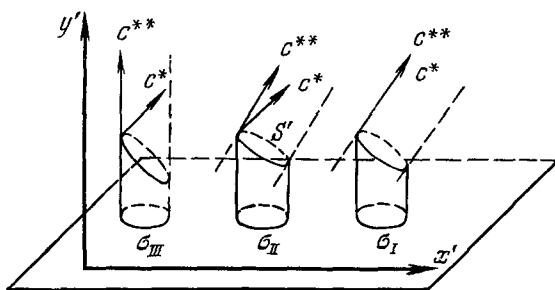


Рис. 4.

Здесь же, учтя (2.15), запишем еще и следующую формулу, которая потребуется в дальнейшем:

$$S' |\cos \alpha'| = S_0 \frac{c |1-n\beta \cos \theta|}{c^* (n-\beta \cos \theta)} \frac{c^* (n \cos \theta - \beta)}{c |1-n\beta \cos \theta|} = S_0 \frac{n \cos \theta - \beta}{n - \beta \cos \theta}. \quad (2.41)$$

Для последующих выводов потребуется также выражение объема Ω' :

$$\Omega' = S' l'; \quad (2.42)$$

здесь l' — расстояние в штрихованной системе между плоскостями сечений S'_B и S'_A . Требуется определить длину l' при заданной длине l_0 (между теми же сечениями A и B) в системе нештрихованных координат. К этому соотношению можно прийти кратчайшим путем, приняв во внимание инвариантность фазы, откуда следует

$$\frac{l'}{\lambda'} = \frac{l_0}{\lambda_0} \quad (2.43)$$

(λ — длина волны).

Далее

$$\frac{\lambda'}{\lambda_0} = \frac{nv_0 c^*}{v' c} = \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-n\beta \cos \theta} \frac{nc^*}{c}.$$

(Здесь принято во внимание соотношение (2.16) Допплера.) Итак,

$$l^0 = l_0 \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-n\beta \cos \theta} \frac{nc^*}{c}. \quad (2.44)$$

* В формуле (2.40) размеры источника учтены неявно — заданием S_0 . При $n\beta \cos \theta = 1$ (и $S_0 = \infty$) эти размеры пришлось бы ввести в рассмотрение в явном виде. Тем самым выявляется уже «неадекватность» макроскопической модели в применении к проблемам, трактуемым в данной статье.

Формулы (2.42), (2.40) и (2.44) дают *)

$$\Omega' = S'l' = \Omega_0 \frac{n\sqrt{1-\beta^2}}{n-\beta\cos\theta} \quad (2.45)$$

(где $\Omega_0 = S_0 l_0$).

3. ОБ ИМПУЛЬСЕ ЦУГА ВОЛН В ДВИЖУЩЕЙСЯ СРЕДЕ И ОБ ИМПУЛЬСЕ, СООБЩАЕМОМ СРЕДЕ ПРИ ИСПУСКАНИИ ЦУГА ВОЛН ИСТОЧНИКОМ

Во введении мы упомянули о том, что рядом авторов было обращено внимание на соотношение (1.6), которое, как они полагали, дает возможность согласовать обе концепции — Минковского и Абрагама.

Излучение цуга волн источником, неподвижным в *неподвижной среде*, рассматривается классически. Если воспользоваться упрощенной моделью, то простой расчет показывает, что сумма импульса J , уносимого излученным фотоном (согласно формуле Абрагама) и дополнительного импульса ΔJ , сообщаемого силами Абрагама среде в самом процессе излучения, оказывается равной импульсу «фотона Минковского» (см. введение).

Далее та же ситуация (излучатель неподвижен относительно среды) будет нами рассмотрена в более общем виде, а именно в предположении, что оба объекта (излучатель и среда) движутся *относительно наблюдателя* с одинаковой, произвольной скоростью — βc .

Указанный результат получается, если вычислить импульс ΔJ сил Абрагама, действующих на среду за время эмиссии в объеме излучаемого цуга волн. (Эффективным, впрочем, оказывается не весь объем цуга, а лишь некоторая граничная зона вблизи переднего его фронта. «Отдача», испытываемая источником, — реакция излучения предполагается равной сумме $J + \Delta J$. Более подробно вопрос о подразумеваемых при этом *предположениях* и об условиях баланса потока импульса обсуждается в приложении 2.

Из общих соображений следует уже инвариантность, или ковариантность, уравнения (1.6). Это будет подтверждено и прямым вычислением. Однако речь идет о ковариантности при изменении точки зрения наблюдателя (в одном случае неподвижного, в другом движущегося относительно среды), но при неизменности условий указанной выше физически определенной ситуации — источник *неподвижен относительно среды*.

*) Вычисляя произведения $\Omega'g'$ и $\Omega'u'$, где g' и u' даны таблицами (2.7) и (2.8), получим соответственно J' и \mathcal{E}' , где J' и \mathcal{E}' — импульс и энергия данного цуга волн. Подстановка выражения g_x из таблицы (2.7) дает, например,

$$\left. \begin{aligned} J'_x &= \Omega_0 u_0 \frac{\cos\theta - n\beta}{cn\sqrt{1-\beta^2}} = \mathcal{E}_0 \frac{\cos\theta - n\beta}{cn\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \mathcal{E}' &= \mathcal{E}_0 \frac{n - \beta\cos\theta}{n\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.46)$$

по Абрагаму

Таблица (2.8) дает

$$\left. \begin{aligned} J'_x &= \frac{\mathcal{E}_0}{c} \frac{n\cos\theta - \beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \\ \mathcal{E}' &= \mathcal{E}_0 \frac{1 - n\beta\cos\theta}{\sqrt{1-\beta^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.47)$$

по Минковскому

Эти соотношения отвечают формулам преобразования четырех-вектора и.-э., а также (если учесть опущенные здесь выражения J_y), и формулам (2.18) и (2.19) приведенного выше текста.

Соображения, связанные с вопросом о ковариантности уравнения (1.6), рассмотрены в приложении 3.

В нашей системе штрихованных координат источник (и среда) движется со скоростью $-\beta$. Вычисляя импульс $\Delta J'$, время испускания, определяемое наблюдателем штрихованной системы отсчета, мы положим равным τ' . Если, как мы условимся, в момент *начала* испускания «стрелка часов» излучателя стояла на нуле, то в *конце* испускания она показывает «собственное время» $\tau = \tau' \sqrt{1 - \beta^2}$. За это время «голова» цуга, перемещаясь со скоростью c/n (в системе x, t), уходит на расстояние (от неподвижного в этой системе отсчета источника), равное

$$l_0 = \tau \frac{c}{n} = \tau' c \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{n} \quad (3.1)$$

(Собственное время излучателя τ совпадает с временем t системы нештрихованных координат, в которой излучатель неподвижен.) Условимся площадь сечения S_0 эквифазной плоскостью положить равной единице, тогда

$$\Omega_0 = l_0 \quad (3.2)$$

и формулы (2.45) и (3.1) дают

$$\Omega' = l_0 \frac{n \sqrt{1 - \beta^2}}{n - \beta \cos \theta} = \frac{\tau' c (1 - \beta^2)}{n - \beta \cos \theta}, \quad (3.3)$$

$$J' = g' \Omega'. \quad (3.4)$$

Выражение (3.3) величины Ω' выведено в предположении, что источник *неподвижен относительно среды* (при рассмотрении в системе x', t' так же, как и x, t).

Запишем здесь же и другое выражение объема цуга волн, которое обозначим Ω'^* и которое потребуется в дальнейшем. Речь здесь идет о цуге, испускаемом источником, *неподвижным в системе x', t'* . Относительно этого источника *среда движется*. Величина Ω'^* определяется путем следующих соображений.

В заданных условиях длина цуга по нормали к эквифазным плоскостям в системе x', t' равна

$$l' = c^* \tau'.$$

В нештрихованной (лабораторной) системе длине цуга l' соответствует длина l_0 , определенная формулой (2.44). Следовательно,

$$l_0 = l' \frac{c (1 - n\beta \cos \theta)}{\sqrt{1 - \beta^2} n c^*} = \tau' \frac{c |1 - n\beta \cos \theta|}{\sqrt{1 - \beta^2} n}. \quad (3.5)$$

Как условлено, $S_0 = 1$ и отсюда $\Omega_0 = l_0$.

Согласно (2.45) и (3.5)

$$\Omega'^* = \tau' c \frac{|1 - n\beta \cos \theta|}{n - \beta \cos \theta}. \quad (3.6)$$

Отметим, что

$$\Omega' \neq \Omega'^*. \quad (3.7)$$

Составляющая по оси x' импульса $\Delta J'$, сообщаемого за время dt' , может быть выражена следующим интегралом:

$$dt' \int_{x'}^{\infty} f'_x S' \cos \alpha' dx'; \quad (3.8)$$

здесь f'_x обозначает составляющую плотности силы, $S' \cos \alpha' dx'$ — элемент объема лучевой трубки; см. рис. 5 *). Речь идет о плотности силы Абрагама, которая может быть определена дивергенциями тензоров (2.5) и (2.6). Рассматривая интеграл (3.8), можем убедиться в том, что *усредненные* значения этого интеграла от времени не зависят. (Имеется в виду усреднение за малое время dt , которое все же велико в сравнении с периодом колебаний поля.) Поэтому из формулы (3.8) следует

$$\Delta J' = \tau' \int_{x'}^{\infty} f'_x S' \cos \alpha' dx'; \quad (3.9)$$

τ' — время испускания импульса света.

Приведенные ниже формулы покажут, что усредненная таким образом плотность силы пропорциональна частной производной по координате x (или x') среднего значения плотности энергии u (или u'), которое представляется функцией аргумента

$$\varphi = v' \left(t' - \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c^*} \right). \quad (3.10)$$

Речь идет о среднем значении u для точек («изохронных») определенной эквифазной плоскости. Искомый интеграл не зависит от вида этой функции, если, как мы и предположим, выполняются следующие условия:

$$\text{при } t' \gg \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c^*} \quad u' \text{ не зависит от } x', y', \quad (3.11)$$

$$\text{при } t' < \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c^*}, \quad u' = 0. \quad (3.12)$$

Мы предполагаем, что испускание света начинается при $t' = 0$. Из этих условий следует, что вклад в интеграл (3.9) (в заданный момент времени t') вносят переменные x' в пределах некоторого конечного интервала $\Delta\varphi$ (и соответственно $\Delta x'$ и $\Delta y'$), т. е. при условии:

$$0 < v' \left(t' - \frac{(x' - \Delta x') \cos \alpha' + (y' - \Delta y') \sin \alpha'}{c^*} \right) < \Delta\varphi \quad (3.13)$$

при

$$t' - \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c^*} = 0.$$

При вычислении дивергенций тензора войдут частные производные плотности по трем переменным (x, y, t и x', y', t'). Как уже сказано, поскольку речь идет о функции аргумента φ , производные по y и по t могут быть выражены определенными функциями, в аргумент которых входит одна лишь производная $\partial/\partial x$ или $\partial/\partial x'$. Это станет ясно, если написать следующий ряд дифференциальных соотношений:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{du}{d\varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

*) При $\beta < 1/n$ следует различать два случая $\cos \theta > n\beta$ и $\cos \theta < n\beta$. Изображенное на рис. 5 предполагает первый из этих случаев. Искомый интеграл в обоих случаях один и тот же.

При $\beta > 1/n$ и $n\beta \cos \theta > 1$ в случае источника, неподвижного в системе (x', t') , $\Delta J'$ выражается интегралом (3.9) со знаком минус.

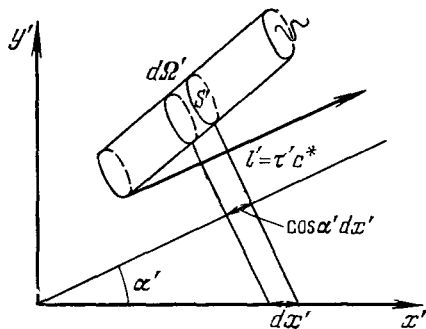


Рис. 5.

Затем:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{n \cos \theta}, \quad (3.14)$$

и далее, если учесть формулы преобразований Лоренца,

$$\left. \begin{aligned} x &= (x' + \beta t') \gamma, \\ t &= (t' + \beta x') \gamma, \\ y &= y' \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

(здесь мы положили $c = 1$),

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \right)_{t'} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dx}{dx'} \right)_{t'} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dt}{dx'} \right)_{t'}, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t'} \right)_{x'} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{dx}{dt'} \right)_{x'} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{dt}{dt'} \right)_{x'}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отсюда:

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial x} \gamma + \frac{\partial}{\partial t} \beta \gamma = \frac{\partial}{\partial x} \gamma \frac{n \cos \theta - \beta}{n \cos \theta}, \quad (3.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x'} \frac{n \sin \theta}{\gamma (n \cos \theta - \beta)}, \quad (3.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t'} = \frac{c (n \beta \cos \theta - 1)}{n \cos \theta - \beta} \frac{\partial}{\partial x'}. \quad (3.19)$$

В выражении интеграла (3.9) полагаем

$$f'_x = -\operatorname{div} S'_{lm} = \operatorname{div} P'_{lm}, \quad (3.20)$$

где P_{lm} — тензор, определенный таблицей (2.6). (Напомним, что $T_{lm} = S_{lm} + P_{lm}$ и что $\operatorname{div} T_{lm} = 0$, откуда и следует (3.20).)

Пользуясь приведенными выше соотношениями (3.17) — (3.19) и таблицей (2.6), приходим к следующему выражению для f'_x :

$$\begin{aligned} f'_x &= \operatorname{div} P'_{lm} = \\ &= -\frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{\partial u_0}{\partial x'} \left[\frac{\cos^2 \theta}{1 - \beta^2} + \frac{n \sin^2 \theta \cos \theta}{n \cos \theta - \beta} - \frac{\beta \cos^2 \theta (n \beta \cos \theta - 1)}{(n \cos \theta - \beta)(1 - \beta^2)} \right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

и затем, после простых выкладок

$$f'_x = -\frac{n^2 - 1}{n} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x'} \right)_{t'} \frac{\cos \theta}{n \cos \theta - \beta}. \quad (3.22)$$

Положим время испускания цуга $\tau' = 1$. Подставляя в (3.8) полученное здесь выражение (3.22) и выражение (2.41) для $S' \cos \alpha'$ и полагая затем $S_0 = 1$, получим

$$\Delta J_x^A = - \int_{x'}^{\infty} \frac{n^2 - 1}{n} \frac{\cos \theta}{n \cos \theta - \beta} \frac{n \cos \theta - \beta}{n - \beta \cos \theta} \frac{\partial u_0}{\partial x'} dx' = \frac{n^2 - 1}{n} \frac{\cos \theta u_0}{n - \beta \cos \theta}. \quad (3.23)$$

Согласно (3.3) и (3.4) при $\tau' = 1$

$$J_x^A = \frac{(1 - \beta^2) c}{n - \beta \cos \theta} g_x^A.$$

Таблица (2.5) дает

$$J_x^A = \frac{u_0}{n (n - \beta \cos \theta)} (\cos \theta - n \beta \cos^2 \theta - n \beta + \beta^2 \cos \theta). \quad (3.24)$$

Складывая (3.23) и (3.24), после некоторых преобразований получим

$$J_x^A + \Delta J_x^A = u_0 \frac{n \cos \theta - \beta}{n}. \quad (3.25)$$

Вычисляя J_x^M согласно таблице (2.8) и полагая $g_x' = S_{14}/ic$, получим

$$J_x^M = \Omega' g_x^M = u_0 \frac{(n \cos \theta - \beta)}{n}. \quad (3.26)$$

Сопоставляя (3.25) и (3.26), убеждаемся в том, что

$$J_x^A + \Delta J_x^A = J_x^M, \quad (3.27)$$

т. е., что соотношение (1.6) выполняется и в системе штрихованных координат. Напомним, что в этой системе среда, а вместе с ней и источник, движутся со скоростью $-\beta$ относительно наблюдателя. Прделав аналогичные выкладки, нетрудно убедиться в том, что и составляющие по оси y' удовлетворяют уравнению (3.27). В правой и левой частях уравнения (3.27) стоят пространственные составляющие некоторого четырех-вектора. Временные компоненты этого вектора удовлетворяют аналогичному уравнению, что и может быть проверено путем подобных же вычислений,

$$\mathcal{E}^A + \Delta \mathcal{E}' = \mathcal{E}^M; \quad (3.28)$$

здесь \mathcal{E}^A и \mathcal{E}^M — выражения энергии определенного пуга волн (по Абрагаму и Минковскому соответственно). Что касается $\Delta \mathcal{E}'$, то этот член дает энергию, сообщаемую движущейся среде при «инъекции» в нее импульса $\Delta J'$. $\Delta \mathcal{E}'$ определяется взятой с множителем i/c четырехмерной дивергенцией четвертой строки тензора S'_{im} с обратным знаком.

В рассмотренных условиях величина $\Delta \mathcal{E}'$ отрицательна: энергия э.-м. поля при инъекции положительного импульса *возрастает* *) за счет кинетической энергии среды (работа сил поля отрицательна).

Нами были выполнены вычисления, основанные на выражениях компонент тензора и.-э. Гораздо проще к тому же результату можно прийти, исходя из *общих релятивистских* соотношений для компонент силы и плотности силы.

Известно общее положение релятивистской механики: продольная (в направлении скорости β) составляющая силы, действующей на элемент объема $d\omega$ тела при преобразовании Лоренца остается неизменной; «поперечная» же составляющая преобразуется умножением на $\sqrt{1 - \beta^2}$ (см. 6, с. 59).

Для плотностей силы f_x' и f_y' отсюда следует

$$f_x' = f_x \gamma, \quad f_y' = f_y. \quad (3.29)$$

Согласно Абрагаму

$$f_x = -\frac{n^2 - 1}{n^2} \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (3.30)$$

Приняв во внимание (3.17), сразу же получаем

$$f_x' = -\frac{n^2 - 1}{n} \frac{\partial u_0}{\partial x'} \frac{\cos \theta}{n \cos \theta - \beta}, \quad (3.31)$$

что совпадает с формулой (3.22).

Мы убедились в том, что уравнение (1.6) при переходе к движущейся системе координат (x', t') остается в силе, если речь идет об источнике излучения, *неподвижном относительно среды*. Из этого результата, как следствие, вытекает, что если источник *неподвижен относительно системы штрихованных координат* и, следовательно, движется *относительно среды*, то уравнение (1.6) не выполняется.

В самом деле, как видно из вывода, при заданных значениях плотности (u_0 или u') и при заданном времени t' (которое мы положили равным

*) В системе нештрихованных координат $\Delta \mathcal{E} = 0$.

единице) *) величина $\Delta J'$ не зависит от того, движется ли (в данной системе отсчета) источник, испускающий свет, или он неподвижен, так как речь идет об импульсе силы, действующей на фронте волны. Вместе с тем объем цуга волн Ω' , как мы убедились, *зависит* от состояния движения источника этих волн. Если источник *движется* в системе x' , t' (вместе со средой) со скоростью $-\beta$, то, как было показано, имеет место равенство:

$$\Omega' g_x'^A + \Delta J'_x = J_x^M. \quad (3.32)$$

Поскольку согласно (3.7) при источнике *неподвижном* $\Omega'^* \neq \Omega'$, а $\Delta J'$ то же, что и в (3.32) (источник движется), из этого уже следует, что уравнение (1.6) не выполняется, если источник неподвижен в системе (x', t') , т. е. если источник движется относительно среды,

$$g_x'^A \Omega'^* + \Delta J'_x \neq J_x^M.$$

То же относится и к другим компонентам (по y и t), если рассматривать обобщенную — четырехмерную форму уравнения (1.6). В частности, в штрихованной системе отсчета уравнение (3.28) для неподвижного источника и движущейся среды также не выполняется.

Здесь можно еще отметить, что, имея выражение для $\Delta J'$ (которое, как было показано, можно вывести и не выписывая таблицы тензора), сразу же определяем и $\Delta \mathcal{E}$, поскольку должно иметь место соотношение $\Delta \mathcal{E} = -\beta c \Delta J'_x$ ($-\beta c$ — скорость среды).

4. О СТАТЬЕ В. Л. ГИНЗБУРГА И В. А. УГАРОВА ²

В этой статье авторы стремятся показать, что обе трактовки — Минковского и Абрагама — в применении к уравнениям сохранения и.-э. эквивалентны. Они полагают, что ими доказана справедливость уравнений (3.27) и (3.28) и в случае источника, *движущегося относительно среды*. Более того, как утверждают авторы, такое обобщение соотношения (1.6) следует «из общих соображений».

Как же проводится доказательство сформулированного выше тезиса? В формуле для плотности силы Абрагама f^A отбрасываются определенные члены, выраженные *пространственными* дивергенциями функций переменных поля. Декларируя в общем виде, что при записи рассматриваемых соотношений в интегральной форме эти члены, содержащие пространственные дивергенции, выпадают, авторы утверждают, что решая рассматриваемую ими (и нами) задачу, можно исходить из следующего выражения для плотности пондеромоторной силы:

$$f'^\Gamma = \frac{\partial}{\partial t'} (g^M - g^A)$$

(работа ², формула (46) **)). В применении к полю плоской волны и в принятых нами обозначениях

$$f_x'^\Gamma = \frac{\partial}{\partial t'} (g_x^M - g_x^A) = \frac{\partial}{\partial t'} \frac{u_0(x', t') (n^2 - 1) \cos \theta}{cn(1 - \beta^2)} \neq f_x'^A. \quad (4.1)$$

$f_x'^A$ определено формулой (3.22).

Если вместо (3.22) в интеграл (3.9) подставить «ампутированное», как указано выше, выражение (4.1) и провести все вычисления так, как они выполнены в гл. 3, то действительно окажется, что при источнике неподвижном и среде движущейся (в системе x' , t') соотношение (1.6)

*) Значения обеих этих величин вполне произвольны. Значение угла θ также предполагается заданным.

**) Здесь f'^Γ — то, что в ² в формуле (46) обозначено $f_x'^A$.

выполняется. Это авторы и хотят доказать. Однако при источнике, *движущемся* (в системе x', t'), но *неподвижном* относительно среды, результат будет иным. Как уже следует из общих соображений, приведенных в гл. 3, вычисление по формуле (3.9) покажет в этом случае, что при выборе выражения (4.1) для плотности силы уравнение (1.6) не выполняется в условиях, при которых согласно требованиям релятивистской ковариантности оно должно выполняться *).

А это означает, что полученный авторами ² удовлетворяющий их результат достигается за счет нарушения тех общих принципов релятивистской механики, которым подчинен выбор выражения силы (или плотности силы) в движущейся среде **).

5. О КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ДОППЛЕР-ЭФФЕКТА И ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Здесь мы рассмотрим вывод формул квантовой теории доплер-эффекта и черенков-эффекта, приведенных в работе ¹⁰ (см. также ¹¹). Имея в виду наглядность выводов, целесообразно выбрать систему отсчета, в которой светящийся атом (источник) неподвижен, а среда движется. При таком выборе системы координат формулы упрощаются. Если же получено выражение для энергии \mathcal{E}'_ϕ фотона в данной системе отсчета (а эта задача и решается), то переход к лабораторной системе осуществляется просто умножением на определенный множитель. Поскольку речь идет о применении законов сохранения на основе теории Минковского, то этот множитель определен общими правилами преобразования компонент четырех-векторов следующей формулой:

$$\mathcal{E}_\phi = \mathcal{E}'_\phi \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta \cos \theta}. \quad (5.1)$$

Предполагаем такие заданные условия: в начальном состоянии, в данной системе отсчета, светящийся атом неподвижен. *Массу покоя* его обозначим μ_1 . В результате излучения фотона, энергия которого \mathcal{E}'_ϕ , масса покоя атома изменяется. Значение «собственной массы» атома в конечном состоянии обозначим μ_2 .

Сразу же примем во внимание упрощающее допущение: в данной системе отсчета можно пренебречь энергией отдачи фотона в сравнении с энергией возбуждения.

В указанном, для атома практически всегда допустимом, приближении уравнение баланса энергии запишется так:

$$\mu_1 c^2 = \mu_2 c^2 + \mathcal{E}'_\phi \quad (5.2)$$

или

$$(\mu_1 - \mu_2) c^2 = \mathcal{E}'_\phi. \quad (5.3)$$

*) Подробнее об условиях ковариантности см. приложение 3.

**) Авторы ² подчеркивают, что при интегрировании по времени учитывается «...и период времени, когда дуг уже «оторвался» от излучателя» (2, с. 186). Это пояснение вызывает недоумение, так как после «отрыва» дуга от источника передает дополнительный импульс среде прекращается: дуг, двигаясь в среде, *переносит* импульс, равный произведению плотности импульса (по Абрагаму) на объем дуга. Импульс же среды остается неизменным.

При вычислении ΔJ необходимо принимать во внимание также силы упругости. Пренебрежение этими силами приводит к ошибкам, которые видимо, и оказали влияние на результаты, полученные авторами ². (Подробнее см. ниже, дополнение.) Что же касается расчетов, приведенных в гл. 3 данной статьи, то существенное значение в этой связи имеют оговорки, сформулированные в приложении 2. Авторы ² цитируют пример «газа из тяжелых пылинок», рассмотренный в ^{1а}, как подтверждающий их результаты. На самом деле приведенная в работе ^{1а} таблица (5.30) прямо противоречит этим результатам.

Будем иметь в виду случай «сверхсветового» движения, предполагая, что в лабораторной системе выбранное нами направление фотона лежит внутри конуса излучения Черенкова. Поскольку согласно Минковскому в этом случае энергия фотона \mathcal{E}'_f отрицательна, из уравнения (5.3) непосредственно следует: $\mu_2 c^2 > \mu_1 c^2$. Энергия $\mu_2 c^2$ атома после излучения, следовательно, больше энергии до излучения: в результате «высвечивания» атом возбуждается — с нижнего уровня энергии переходит на высший. Наблюдатель в лабораторной системе сделает такой вывод: испускание света сопровождается частичной конверсией кинетической энергии излучающего атома в энергию его возбуждения. Один из авторов работы ² многократно подчеркивал (также и в последнее время ⁴) эту своеобразную особенность высвечивания при «сверхсветовой» скорости.

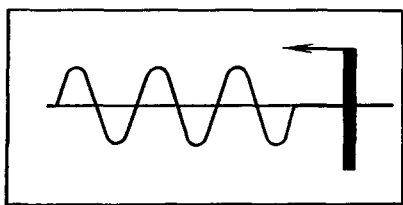


Рис. 6.

Отсюда возможна даже рекомендация для использования подобного эффекта. А именно, пропуская со сверхсветовой скоростью нейтральные, невозбужденные атомы через «сито» (систему тончайших каналов в преломляющей среде), на выходе можно было бы в принципе получить возбужденные атомы.

Однако в предпосылках изложенной теории заложено прямое противоречие

общим положениям механики и электродинамики.

Что такое прямое противоречие имеет место, видно уже из того, что, по предположению, «в игру вводится» отрицательная энергия э.-м. поля. К тому же внутри конуса излучения Черенкова, как показывают формулы (2.26), (2.27), направление импульса «фотона Минковского» не совпадает с направлением скорости c^{**} переноса энергии.

В этом легко убедиться, сопоставив указанные формулы с таблицей (2.8).

В частности, для направлений луча на поверхности конуса (при $n\beta \cos \theta_0 = 1$) направление вектора J'^M и волнового вектора перпендикулярно к скорости c^{**} , что мы уже и отмечали (см. (2.31), (2.32)) и что показывает также рис. 3. Внутри конуса проекция импульса на ось x' и проекция скорости c^{**} на ту же ось имеют противоположные знаки. Наконец, если рассматривать предельный случай $\theta_0 = 0$ и $\beta = 1/n$, то энергия фотона равна нулю при импульсе, не равном нулю. Подобные ситуации противоречат фундаментальному соотношению Эйнштейна $E = mc^2$.

Проиллюстрируем сказанное следующим примером, для упрощения рассматривая поглощение света и предположив, что $\beta = 1/n$.

Обстановка, которую мы имеем в виду, такова. В среде имеется поглощающая прослойка. В лабораторной системе отсчета пуг представляется движущимся по направлению к поглотителю. Во введенной нами выше системе отсчета пуг неподвижен. Черная прослойка движется навстречу ему и поглощает его (рис. 6). В результате поглощения импульс фотона передается среде, замедляя ее движение. Среду можно представить себе как твердое тело, центр которого совпадает с центром тяжести (или центром масс), поскольку энергия и масса фотона равны нулю. Вызванное поглощением фотона замедление скорости среды означает, следовательно, изменение скорости — замедление движения, центра масс всей системы в целом. Как нетрудно убедиться, такое же нарушение закона движения центра масс (самоторможение) имеет место и с точки зрения наблюдателя в лабораторной системе отсчета.

То же нарушение условий баланса скоростей (центра тяжести) имеет место и при *излучении* (фотонов Минковского). Можно также заметить, что если подобные нарушения предполагаются в *элементарных* актах излучения, то они должны также обнаруживаться и в макроскопической обстановке свечения ансамблей атомов.

Из уравнения (5.3), умножением \mathcal{E}'_ϕ на множитель (5.1), получаем формулу доплер-эффекта:

$$\mathcal{E}_\phi \approx \frac{(\mu_1 - \mu_2) c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}{1 - n\beta \cos \theta} = \frac{h\nu \sqrt{1 - \beta^2}}{n\beta \cos \theta - 1} \quad (5.4)$$

при источнике движущемся, а наблюдателе покоящемся относительно среды.

Если отказаться от принятого выше приближения и не пренебрегать энергией отдачи, то уравнение баланса энергии в строгом виде запишется так:

$$\mu_1 c^2 = \mu_2 c^2 \sqrt{1 + \left(\frac{\mathcal{E}'_\phi}{\mu_2 c^*} \right)^2} + \mathcal{E}'_\phi. \quad (5.5)$$

Здесь принято во внимание соотношение де Бройля $J'_\phi = \mathcal{E}'_\phi / c^*$, где \mathcal{E}'_ϕ и J'_ϕ — энергия и импульс фотона в выбранной нами системе штрихованных координат.

Отсюда для вычисления \mathcal{E}'_ϕ получаем квадратное уравнение в следующем виде:

$$\mathcal{E}'_\phi^2 \left(\frac{c^2}{c^{*2}} - 1 \right) + 2\mu_1 c^2 \mathcal{E}'_\phi + (\mu_2^2 - \mu_1^2) c^4 = 0. \quad (5.6)$$

Приняв во внимание (2.13), нетрудно получить формулу

$$\frac{c^2}{c^{*2}} - 1 = \frac{(n^2 - 1)(1 - \beta^2)}{(1 - n\beta \cos \theta)^2}. \quad (5.7)$$

Решив уравнение (5.6) и перейдя затем к лабораторной системе отсчета умножением \mathcal{E}'_ϕ на множитель (5.1), придем к результату, совпадающему с полученным в работе ¹⁰ (у нас для случая одного уровня возбуждения атома).

Если иметь в виду излучение «сверхсветового» *электрона* и в соответствии с этим положить

$$\mu_2 = \mu_1 = m,$$

где m — масса электрона, то уравнение (5.6) прямо приводит к формуле

$$\mathcal{E}_\phi = h\nu = \frac{2mc^2 (n\beta \cos \theta - 1)}{(n^2 - 1) \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (5.8)$$

Формулу (5.8) можно читать по-разному.

Читая «слева направо», приходят к выводу, что поскольку $h\nu$ порядка электрон-вольт (или еще меньшего порядка), а mc^2 порядка 500 *кэв*, то должно быть соблюдено условие

$$n\beta \cos \theta = 1$$

— условие излучения Черенкова.

Однако, читая иначе («справа налево») и считая теорию строгой, можно прийти к выводу, что именно при точном соблюдении условия $n\beta \cos \theta = 1$, частота ν равна нулю и, следовательно, излучение не имеет места.

В монографии ¹² со ссылкой на авторов, акцентирующих аналогию с комптон-эффектом, формула (5.8) приведена в следующем виде:

$$\cos \theta = \frac{1}{n\beta} + \frac{\lambda_0}{\lambda} \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{2\beta} \frac{n^2-1}{n^2}; \quad (5.9)$$

здесь $\lambda_0 = h/mc$ — комптоновская длина волны.

Для сравнения можно было бы записать формулу Комптона для смещения спектральной линии при рассеянии света свободными электронами. Разумеется, в реальной обстановке эксперимента условия для наблюдения такого рассеяния не осуществимы,

$$\frac{\lambda_\theta}{\lambda} = 1 + \frac{\lambda_0}{\lambda} (1 - \cos \theta); \quad (5.10)$$

здесь θ — угол рассеяния и λ_0 — длина волны света, рассеянного под этим углом; λ — длина волны первичного луча. В обеих формулах (5.9) и (5.10) поправочный член одного порядка величины. Эти квантовые поправки очень малы. На законный вопрос о том, *точные* ли они, отвечать в двух этих случаях приходится по-разному.

Теория, из которой вытекает квантовая формула эффекта Комптона, обладает престижем, основанным на таком множестве экспериментальных подтверждений, которое в настоящее время едва ли обозримо. Что же касается квантовой теории черенков-эффекта, то в активе этой теории вообще нет каких-либо экспериментальных подтверждений, а в пассиве ее — противоречия кардинальным требованиям релятивистской механики.

В основу квантовой модели черенков-эффекта положено представление о переходе электрона из одного состояния прямолинейного движения в другое его состояние, с сопутствующим этому переходу излучением. Невозможно представить себе конкретную обстановку эксперимента, в которой можно было бы, хотя бы в принципе, обнаружить такого рода переходы. Образам, использованным в квантовой модели черенков-эффекта, нельзя приписать *прямой* физический смысл. С другой стороны, в результате многолетних экспериментов можно уверенно утверждать, что *корпускулярные* образы являются адекватной формой интерпретации эффекта Комптона. Имеется обоснованная уверенность в том, что в этом случае *любые следствия* корпускулярной модели, в принципе, могут быть *прямо* подтверждены экспериментом.

Подводя итоговую черту, можно констатировать, что попытки квантовой трактовки рассмотренных выше эффектов на основе простых квазиклассических моделей не приводят к удовлетворительным результатам.

В сущности, это и следовало ожидать заранее.

Во-первых, модель о которой шла речь (в гл. 3 и 4 статьи), представляется сверхупрощенной и, во-вторых, едва ли вообще, оставаясь в рамках *классических* представлений, можно описать *квантовый* механизм излучения.

Однако интерпретацию «псевдоимпульса»^{15,16} фотона (или квантового фотона), как результирующего двух импульсов — импульса фотона и «импульса отдачи», воспринимаемой при испускании кванта средой, — можно ввести как постулат. В результате получается такая схема соотношений, которая находится в соответствии с квантовыми уравнениями, выведенными, исходя из выражения «псевдоимпульса» Минковского. Если иметь в виду ковариантные выражения, то существенным звеном в этой схеме оказывается механизм конверсии кинетической энергии среды $\Delta \mathcal{E}$ в энергию э.-м. поля на фронте волны в движущейся среде. Избегая модельных представлений и в связи с дальнейшим, лучше говорить о конверсии

кинетической энергии $\Delta \mathcal{E}$ в энергию э.-м. поля при «инжекции» в среду механического импульса.

Предположим, не предлагая доказательства, что имеет место равенство

$$\mathcal{E}'^A + \Delta \mathcal{E}' = \mathcal{E}'^M. \quad (5.11)$$

Из таблиц тензоров (2.7) и (2.8) получим

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}'^M}{\mathcal{E}'^A} &= \frac{u'^M}{u'^A} = \frac{(1 - n\beta \cos \theta) n}{n - \beta \cos \theta}, \\ \mathcal{E}'^M &= \mathcal{E}'^A \frac{(1 - n\beta \cos \theta) n}{n - \beta \cos \theta}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Уравнение (5.11) дает тогда

$$\Delta \mathcal{E}' = -\mathcal{E}'^A \frac{(n^2 - 1) \beta \cos \theta}{n - \beta \cos \theta} = -\mathcal{E}'^M \frac{(n^2 - 1) \beta \cos \theta}{n(1 - n\beta \cos \theta)}. \quad (5.13)$$

Принимая во внимание, что скорость среды равна $-\beta c$, определяем теперь по аналогии с классическими моделями компоненту $\Delta J'_x$ инжектированного импульса так:

$$\Delta J'_x = \frac{\Delta \mathcal{E}'}{-\beta c} = \frac{\mathcal{E}'^A (n^2 - 1) \cos \theta}{c(n - \beta \cos \theta)} = \frac{\mathcal{E}'^M (n^2 - 1) \cos \theta}{cn(1 - n\beta \cos \theta)}. \quad (5.14)$$

Воспользуемся соотношением (Эйнштейна)

$$J'^A = \frac{\mathcal{E}'^A}{c^2} c^{**}. \quad (5.15)$$

Далее, пользуясь формулами (2.26), (5.12) и (5.15), запишем

$$\overline{J'_x} = J'^A \cos \theta' = \mathcal{E}'^A \frac{\cos \theta - n\beta}{c(n - \beta \cos \theta)} = \mathcal{E}'^M \frac{\cos \theta - n\beta}{c(1 - n\beta \cos \theta) n}. \quad (5.16)$$

Отсюда, складывая выражения (5.14) и (5.16), получаем

$$J'^A \cos \theta' + \Delta J'_x = \mathcal{E}'^M \frac{n \cos \theta - \beta}{c(1 - n\beta \cos \theta)}. \quad (5.17)$$

Сумму $J'^A + \Delta J'$ назовем здесь «эффе́ктивным импульсом». Принимая во внимание соотношение де Бройля

$$\frac{\mathcal{E}'^M}{c^*} = J'^M, \quad (5.18)$$

получим

$$J'^A \cos \theta' + \Delta J'_x = J'^M \frac{c^* (n \cos \theta - \beta)}{c(1 - n\beta \cos \theta)} = J'^M \cos \alpha'. \quad (5.19)$$

(Последнее уравнение этой строки мы написали, учтя формулу (2.15).) «Эффе́ктивный импульс», следовательно, совпадает с псевдоимпульсом Минковского *).

В первой части уравнения (5.11) стоит \mathcal{E}'^M — величина, которая для луча внутри конуса излучения Черенкова оказывается отрицательной. По Минковскому, \mathcal{E}'^M есть энергия поля (пакета волн поля). Согласно (5.11) энергия фотона (пакета волн) есть \mathcal{E}'^A — величина *положительная*. Отрицательной же в левой части уравнения (5.11) является величина $\Delta \mathcal{E}'$, что согласуется с классической картиной явления.

Механизм обмена импульсом между излучающим источником и средой нельзя, однако, описать, пользуясь рассмотренной выше примитивной

*) Нетрудно убедиться в справедливости уравнения (5.19) и для других пространственных компонент J' и $\Delta J'$.

моделью, вероятно, так же, как и какой-либо другой моделью на основе чисто классических представлений *).

Как видно из формул (5.13), $\Delta\mathcal{E}'$, а следовательно (при заданном β) и $\Delta J'$, однозначно определены, если задана энергия фотона (\mathcal{E}_A или \mathcal{E}_M) и не зависят от того, движется ли источник (в данной системе отсчета), или он неподвижен. В этом существенное отличие полученных теперь соотношений от схемы, вытекавшей из рассмотренной выше модели испускания фотона как цуга волн. Из указанной модели вытекало, что величины $\Delta J'$ и $\Delta\mathcal{E}'$ определены, если даны плотность излучения (u' или u_0) и время испускания. Но при заданных значениях плотности излучения и времени эмиссии, энергия фотона зависит еще от «объема цуга волн» и, следовательно, от того, движется ли излучающий источник или он неподвижен (ср. формулы (3.3) и (3.6) для Ω' и Ω'^*). Зависимость $\Delta J'$ и $\Delta\mathcal{E}'$ от \mathcal{E}' не была однозначной.

Если исключить множитель $-\beta$, то (5.13) совпадает с формулой (П.3.9) приложения 3, т. е. совпадает с выводами гл. 3 статьи при источнике, неподвижном относительно среды. Однако теперь согласно (5.13) — (5.17) зависимость $\Delta J'$ от энергии \mathcal{E}' предполагается остающейся в силе и при источнике, движущемся относительно среды и неподвижном относительно введенной выше системы отсчета x' , t' . В связи с этим отпадает и отмечавшаяся выше «неувязка» при проверке на ковариантность. Поскольку теперь уравнения баланса импульс-энергии подогнаны к схеме Минковского, гипотетический механизм взаимодействия источника излучения со средой удовлетворяет требованиям ковариантности. Тем самым снимаются противоречия с релятивизмом, которые выше нами подчеркивались **. Так, например, отпадает парадокс отрицательной энергии э.-м. поля. Если принять уравнение (5.11), то в соответствующей системе отсчета должно иметь место и уравнение (5.3) ***), которое приводит к следствию: «высвечивание» атома внутри конуса излучения Черенкова представляется не как отдача энергии, а скорее как ее поглощение. Однако этот парадоксальный эффект в новой интерпретации описывается как конверсия кинетической энергии среды в энергию э.-м. поля (излученного фотона) плюс энергия возбуждения атома. (При рассмотрении в «системе отсчета покоящейся среды» высвечивание внутри конуса Черенкова также оказывается сопряженным с возбуждением атома, то и другое за счет собственной кинетической энергии атома.)

*) В работе ¹³ автор приводит совпадающую с (5.13) формулу для работы A сил поля при излучении энергии \mathcal{E} источником, неподвижным в системе x' , t' , как якобы вытекающую из классической модели:

$$A = -\frac{\beta(n^2-1)\mathcal{E}_0 \cos \theta}{n\sqrt{1-\beta^2}} = -\frac{\beta(n^2-1)\mathcal{E}'^A \cos \theta}{n-\beta \cos \theta}.$$

Последовательно, в соответствии с (3.22), выполненное вычисление работы A сил Абрагама на фронте волны дает, однако, другой (причем при $n\beta \cos \theta > 1$ противоположный по знаку) результат:

$$A = -\frac{(n^2-1)\mathcal{E}_0\beta \cos \theta \sqrt{1-\beta^2}}{(n-\beta \cos \theta)(1-n\beta \cos \theta)}. \quad (5.20)$$

**) Пр процитируем также резюме труда в трех частях двух авторов ¹⁴, на который обычно ссылаются в связи с вопросом о ковариантности рассматриваемых нами квантовых соотношений: «... Это обобщение было получено, подвергнув процессу квантования классические максвелловы уравнения поля. Делая это, уже невозможно сохранить принцип относительности, так как весовая материя вводит автоматически привилегированную систему координат, а именно систему покоящейся среды...» (¹⁴, с. 126). С подчеркнутым нами и с изложенной затем аргументацией согласиться нельзя.

***) Где в этом случае $\mathcal{E}'_\phi = \mathcal{E}'^M_\phi$.

Таким образом, в результате введения некоторой произвольной гипотезы удается установить подобие схемы описания рассматриваемых эффектов картине, вытекающей из квантовой теории этих явлений. Квантовым языком, использующим концепцию «псевдоимпульса» фотона, оказывается возможным пользоваться для приближенного описания известных закономерностей черенков-эффекта. Корпускулярные представления приводят к формуле (приближенной) доплер-эффекта, которая соответствует требованиям кинематики.

Вместе с тем согласование представлений о квантовом фотоне с теорией относительности оплачивается ценой отказа от некоторых фундаментальных квантовых соотношений. Уравнение Планка — Эйнштейна $\mathcal{E}' = h\nu'$ в движущихся средах не выполняется (см. (2.20)) (здесь \mathcal{E}' — энергия *цуга волн*, заданная уравнением $\mathcal{E}_0 = h\nu_0$, где \mathcal{E}_0 и ν_0 — значения энергии и частоты данного цуга в среде неподвижной).

Что же касается обоснованности предсказаний специфически квантовых эффектов таких, как самовозбуждение атома, высвечивающегося при излучении света внутри конуса Черенкова, то не следует упускать из виду, что в основу нового варианта теории положены произвольные допущения. Можно усмотреть и определенное противоречие этих допущений исходным посылкам теории.

Квантовая теория заимствует готовый аппарат квантования поля в вакууме и применяет его к среде, пренебрегая силами Абрагама и исходя из того, «что взаимодействие со средой учитывается тем, что положено $\varepsilon \neq 1$ » (⁴⁶, с. 591).

Такая трактовка была правомерна в рамках концепций Минковского. Однако в настоящее время возникла необходимость такой переформулировки теории, в которой существенная роль должна быть отведена процессам передачи среде импульса излучения (при среде неподвижной), а также и энергии — среде движущейся.

Постулаты, приводящие к соотношениям (5.11) — (5.19), вытекают, в сущности, из наложения квантовых условий.

В связи с этим сама постановка задачи квантования должна быть, видимо, пересмотрена. Среда должна, по-видимому, рассматриваться как составная часть квантуемой системы. На данном же этапе квантовой теории эффектов Вавилова — Черенкова и Допплера можно приписывать лишь эвристическое значение.

ДОПОЛНЕНИЕ

В подстрочном примечании к с. 313 статьи, в связи с обсуждением работы ², было высказано предположение, что игнорирование авторами работы ² сил упругости могло повлечь за собой существенные ошибки в их выводах. Уже после того как рукопись была закончена, оказалось целесообразным дополнить и более подробно изложить содержание этой ремарки.

Авторы работы ² поясняют, что при вычислении интеграла

$$\int f dt dv \quad (Д.1)$$

интегрирование по времени выполняется ими вплоть до момента, когда цуг уже достаточно «оторвался» от излучателя» (², с. 186) *).

Рассмотрим, к каким следствиям приводит такой способ решения задачи в случае среды неподвижной (в введенной выше системе нештрихованных координат). Заметим, что в этом случае

$$f^\Gamma = f^A$$

(f — плотность силы; обозначения с. 312 данной статьи).

*) Работа ², уравнение (44).

Согласно ² (с. 46)

$$f^{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial t} (g^M - g^A). \quad (Д.2)$$

Если интегрирование по времени выполнить так, как указано выше, то в момент времени t_1 , в верхнем пределе интеграла, пуг заполняет какой-то определенный объем поля (Ω) так, что вне этого объема плотность импульса (g^M и g^A) равна нулю. Поэтому везде вне этого объема (Ω) интегрирование по времени согласно (Д.1), (Д.2) дает нуль. Внутри же объема (Ω) интеграл по времени (Д.1) равен: $(g^M - g^A) \Omega = G^M - G^A$. (Здесь \bar{g} — среднее значение плотности импульса внутри объема Ω .)

Следовательно,

$$J + \Delta J = G^A + (G^M - G^A) = G^M.$$

Если, коль скоро пуг уже «оторвался» от источника, интегрирование выполнить вплоть до момента $t_2 > t_1$, результат (интегрирования) будет очевидно тот же. А это значит, что пуг, перемещаясь в среде со скоростью c/n , переносит с собой импульс, равный G^M . Следовательно, величина импульса Минковского, равная $G^M = g^A \Omega$ (*), и есть величина истинного импульса пуга. В этом случае не было бы необходимости вводить понятие «псевдоимпульса» (авторы ² предпочитают термин «квазиимпульс»; с. 187), но противоречия, отмеченные в данной статье и в ряде статей других авторов, остались бы неразрешенными.

Все дело в том, что в выводе авторов ² игнорируется действие на данный элемент объема dV сил, отличных от сил Абрагама, таких, как силы упругости. Учесть в общем виде эти силы воздействия окружающей среды на данный элемент объема dV не представляется возможным. Однако без учета этих сил вывод в том виде, в каком он приведен в ², лишен физического смысла, на которой этот вывод (да еще в общем виде и при движущейся среде), по мнению авторов ², может претендовать.

Рассматривая некоторые предельные условия в применении в «идеальной» диэлектрической среде (n которой не зависит от напряженности поля), можно получить результат, свободный от указанного выше недостатка.

В работе ¹ подробно рассмотрены два противоположных, предельных случая — идеально твердого тела и «пылевидной» среды, в которой силы упругости исключены. (В статье ² на с. 187 сделана ссылка на эту последнюю модель диэлектрической среды.)

В первом из только что указанных случаев силы Абрагама в любой момент времени компенсированы (уравновешены) силами упругости и результат интегрирования (Д.1) с учетом этих сил равен нулю не только вне объема пуга, но и в пределах этого объема. В результате импульс, переносимый пугом в среде, выражается формулой Абрагама.

Что касается другого предельного случая, то здесь (как подробно выяснено в ¹) имеет место следующая особенность: плотность массы покоя среды оказывается зависящей от напряженности поля, или (в случае плоской волны) от плотности э.-м. энергии u_0 (¹, с. 272, формула (5.20)).

В связи с этой особенностью тензор системы «поле плюс среда» не совпадает с тензором Минковского.

В случае покоящейся среды полная плотность импульса (системы поле плюс среда) внутри объема Ω равна g^M (на что и сделана ссылка в ², с. 187), но при переходе к системе штрихованных координат (движущейся среды) плотность импульса g^T системы (поле плюс среда) уже не совпадает с плотностью импульсов Минковского, как должно было бы быть, если бы вывод авторов ² был верен.

При условиях, рассмотренных в ¹ (направление оси x совпадает с направлением луча), указанная плотность импульса выражается так:

$$\tilde{g}_T^T = \frac{u_0}{c(1-\beta^2)} (n-\beta)(1-n\beta) \quad (Д.3)$$

(¹, с. 274, таблица (5.30)).

Вместе с тем плотность импульса Минковского определена следующей формулой:

$$g^M = \frac{u_0}{cn(1-\beta^2)} (n-\beta)^2 \quad (Д.4)$$

(¹, с. 268, таблица (4.23), а также таблица (2.8) данной статьи при $\theta = 0$).

Только при $\beta = 0$ оба выражения (Д.3) и (Д.4) совпадают.

*) Импульс ΔJ в этом случае был бы локализован в объеме пуга. Вообще же говоря, он не только не локализован, как только что указано, но даже и вообще может оказаться нелокализованным: если средой является жестко закрепленное твердое тело, то этот импульс ΔJ передается Земле.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Приводим более подробный вывод формулы (2.40) для площади сечения S' трубки пуга эквивалентной плоскостью.

На рис. 7 прямая AB — прямая пересечения эквифазной плоскости с плоскостью, содержащей две прямые — ось x и направление луча (волновой нормали), при среде неподвижной (нештрихованные координаты). AC — пересечение эквифазной плоскости с плоскостью x, y . Сферические треугольники рисунка, служащие для определения углов, лежат на поверхности единичной сферы ($R = 1$). В последующих формулах — при определении координат x_B, y_B следует представлять себе сферу с произвольным радиусом ($R \neq 1$) кругового сечения трубки лучей эквифазной плоскостью.

В формулах, которые выписываются ниже η , есть угол между направлением радиуса-вектора AB и осью x . Из сферического треугольника OBX (рис. 7) получаем

$$\cos \eta = -\sin \theta \cos \alpha; \quad (\text{II.1.1})$$

здесь α — двугранный угол, образуемый плоскостями больших кругов OB и OC .

Также в соответствии с рис. 7 получим

$$\cos \chi = \cos \theta \cos \alpha. \quad (\text{II.1.2})$$

Первое из уравнений (2.21) запишется теперь так:

$$x_B = l_0 \cos \theta + R \cos \eta =$$

$$= l_0 \cos \theta - R \sin \theta \cos \alpha + t_B \frac{\cos \theta}{n}.$$

Формула, определяющая y_B , имеет следующий вид:

$$y_B = l_0 \sin \theta + R \cos \theta \cos \alpha + t_B \frac{\sin \theta}{n}. \quad (\text{II.1.3})$$

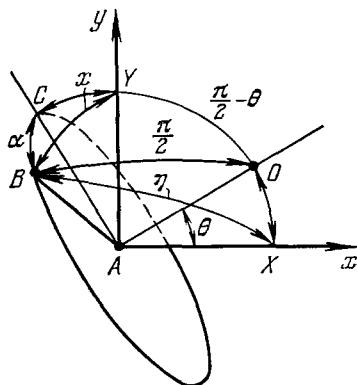


Рис. 7.

Применив формулы преобразования Лоренца и выполнив выкладки по схеме, уже использованной для вывода (2.22) — (2.25), можно получить следующий результат:

$$x'_B - x'_A = -\frac{nR \sin \theta \cos \alpha \sqrt{1 - \beta^2}}{n - \beta \cos \theta}, \quad (\text{II.1.4})$$

$$y'_B - y'_A = \frac{R \cos \alpha (n \cos \theta - \beta)}{n - \beta \cos \theta} \quad (\text{II.4.5})$$

(начало системы отсчета x', y' движется со скоростью β относительно лабораторной системы отсчета x, t). Введем координаты x^*, y^* точек эквифазной плоскости, приняв за ось x прямую пересечения этой плоскости с плоскостью $x'y'$, а за ось y^* ось z' :

$$x^* = \sqrt{(x_B - x_A')^2 + (y_B' - y_A')^2}, \quad (\text{II.1.6})$$

$$y^* = z'.$$

Рассматриваются значения x^* , y^* в заданный момент времени t' . Пользуясь формулами (П.1.4), (П.1.5) и (П.1.6), можно получить

$$x^* = R \cos \alpha \frac{\sqrt{n^2 - 2n\beta \cos \theta - n^2\beta^2 \sin^2 \theta + \beta^2}}{n - \beta \cos \theta}$$

или согласно (2.13)

$$x^* = R \cos \alpha \frac{(1 - n\beta \cos \theta) c}{(n - \beta \cos \theta) c^*}, \quad (\text{II.1.7})$$

$$y^* = z' = z = R \sin \alpha. \quad (\text{II.1.8})$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{x^*}{R \frac{(1 - n\beta \cos \theta) c}{(n - \beta \cos \theta) c^*}}, \quad (\Pi.1.9)$$

$$\sin \alpha = \frac{y^*}{R}. \quad (\text{II.1.10})$$

Положим теперь $R = 1$. Формулы (П.1.9) и (П.1.10) дают

$$\frac{x^{*2}}{(1 - n\beta \cos \theta)^2 c^2} + y^{*2} = 1. \quad (\text{П.1.11})$$

Мы получили уравнение эллипса (полуоси a, b), площадь которого

$$S' = \pi ab = \pi \frac{(1 - n\beta \cos \theta) c}{(n - \beta \cos \theta) c^*} \quad (\text{П.1.12})$$

или

$$S' = S_0 \frac{(1 - n\beta \cos \theta) c}{(n - \beta \cos \theta) c^*}, \quad (\text{П.1.13})$$

где $S_0 = \pi$ — площадь сечения в лабораторной системе отсчета. (П.1.13) совпадает с (2.40).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Уточняя предположения, подразумеваемые при выводе соотношения (1.6) (для случая неподвижной среды и неподвижного источника в ней), можем для конкретности иметь в виду виртуальный источник гл. 2.

Время τ испускания этим источником цуга волн предполагается достаточно длинным и цуг волн достаточно длинным для того, чтобы можно было процесс излучения рассматривать как «квазистационарный», пренебрегая переходными эффектами при формировании цуга и при «отрыве» его от источника.

На переднем фронте волны — в переходной зоне, усредненная по времени плотность силы f отлична от нуля и дает результирующую, действующую на среду силу $F = [(n^2 - 1)/n^2] u$ (на единицу площади поперечного сечения цуга); u — плотность энергии. В синусоидальной зоне волнового поля усредненная по времени плотность силы равна нулю.

Вблизи поверхности источника усредненная плотность силы (действующей на среду) предполагается также равной нулю. При таких предположениях реакция излучения — сила, действующая на единицу поверхности источника за единицу времени, должна быть равна уносимому результирующему импульсу, который, по Абрагаму, выражается так:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2} u + \frac{u}{n^2} = u. \quad (\text{П.2.1})$$

Второе слагаемое равенства (П.2.1) $u/n^2 = (u/cn) c/n$ есть произведение плотности э.-м. импульса на скорость (c/n) переноса этого импульса. Первый член (П.2.1) можно интерпретировать как давление света на среду. Предполагается, что среду можно рассматривать как идеально твердое тело. Сумма (П.2.1) дает полный поток импульса, передаваемый источником среде и полю (на единицу площади поперечного сечения и за единицу времени) в течение времени эмиссии цуга.

Согласно Минковскому, определяя полный импульс, «снимаемый» с единицы поверхности источника за единицу времени, приходится учитывать только поток э.-м. импульса, вычисляемый как произведение плотности импульса на скорость его переноса. (Давление света на среду равно нулю.) Плотность этого потока, по Минковскому, равна $(nu/c) \frac{c}{n} = u$, что приводит к значению, совпадающему с (П.2.1). О совпадении

величин вычисляемого импульса в двух рассмотренных случаях можно заключить также и сравнивая компоненты S_{lm} и T_{lm} (при $l, m = 1, 2$) тензора потока импульса, определенные таблицей (2.5) и таблицей (2.8) при $\beta = 0$, т. е. в случае покоящейся среды. Указанные компоненты в случае среды неподвижной совпадают.

В случае среды движущейся уже нельзя исходить из столь же простых соображений об условиях баланса потоков импульса; такие имелись в виду в том, что выше изложено в данном приложении.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Приведем здесь еще один (третий) вариант вывода соотношения

$$J'A + \Delta J' = J'M \quad (\text{П.3.1})$$

для источника, движущегося вместе со средой.

Будем представлять себе среду как очень массивное, свободное (незакрепленное) тело. Массу этого тела M можно считать сколь угодно большой. Рассматривая далее x -компоненты, индекс x обозначений J_x и ΔJ_x опускаем.

Как это следует из вычислений, приведенных в гл. 3 статьи (формула 3.23), при $\beta = 0$ имеем

$$\Delta J = \frac{n^2 - 1}{n^2} u_0 \tau \cos \theta. \quad (\text{П.3.2})$$

Пусть J_1 — импульс среды до инжекции импульса ΔJ ; $J_2 = J_1 + \Delta J$, u_0 — плотность энергии; τ — время испускания цуга.

Условия будем предполагать такими же, какими они имелись в виду в гл. 3 статьи. Время излучения τ' с точки зрения наблюдателя системы отсчета x' , t' , как и прежде, положим равным единице. Если $\tau' = 1$ (источник движется вместе со средой), то $\tau = \sqrt{1 - \beta^2}$ (в лабораторной системе отсчета)

$$\Delta J = \frac{n^2 - 1}{n^2} u_0 \cos \theta \sqrt{1 - \beta^2}. \quad (\text{П.3.3})$$

Если l_0 — длина цуга по нормали к эквифазным плоскостям и (по предположению) $S_0 = 1$ и если источник неподвижен относительно среды, то: $l_0 = \tau c / n = \sqrt{1 - \beta^2} c / n$,

$$u_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{l_0} = \mathcal{E}_0 \frac{n}{c \sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{П.3.4})$$

$$\Delta J = \frac{n^2 - 1}{nc} \mathcal{E}_0 \cos \theta. \quad (\text{П.3.5})$$

Переходя к системе штрихованных координат, J (импульс среды) преобразуем согласно общим формулам релятивистской механики, *игнорируя* при этом э.-м. поле фотона и связанные с ним механические компоненты импульса,

$$J'_1 = \frac{-M\beta c}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{П.3.6})$$

где M — масса тела (среды).

Для вычисления J'_2 воспользуемся общей формулой преобразования компоненты импульса p_x :

$$p'_x = \frac{p_x - \beta (E/c)}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (\text{П.3.7})$$

где E — энергия тела (среды), которую можно положить равной Mc^2 (пренебрегая кинетической энергией, сообщаемой при инжекции импульса ΔJ в неподвижную среду).

Согласно (П.3.7) и (П.3.5)

$$J'_2 = \frac{[(n^2 - 1)/cn] \mathcal{E}_0 \cos \theta - \beta Mc}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (\text{П.3.8})$$

$$\Delta J' = J'_2 - J'_1 = \frac{n^2 - 1}{n} \frac{\mathcal{E}_0 \cos \theta}{c \sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{n^2 - 1}{n^2} \cos \theta u_0. \quad (\text{П.3.9})$$

Что касается импульса фотона J'_ϕ (его составляющей по оси x), то согласно формуле преобразования компонент четырех-вектора, эта величина определена так:

$$J'_\phi = \mathcal{E}_0 \frac{\cos \theta - n\beta}{cn \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (\text{П.3.10})$$

(П.3.10) получается, если в (П.3.7) положить $p_x = \mathcal{E}_0 \cos \theta / cn$ и вместо E написать \mathcal{E}_0 . Далее получаем

$$J'_\phi + \Delta J' = \mathcal{E}_0 \frac{\cos \theta - n\beta + (n^2 - 1) \cos \theta}{cn \sqrt{1 - \beta^2}} = \mathcal{E}_0 \frac{n \cos \theta - \beta}{c \sqrt{1 - \beta^2}} = J'^M. \quad (\text{П.3.11})$$

В результате изложенного здесь простого вывода мы пришли к выражению величины $\Delta J'$ (П.3.9), которое не совпадает с формулой (3.23). Однако сумма $J' + \Delta J'$ (П.3.11) по-прежнему равна J'^M .

Вычисляя сумму (3.27), мы комбинировали $\Delta J'$ формулы (3.23) с выражением J' , которое вытекает из таблицы (2.5) тензора Абрагама. Здесь же выражение (П.3.9) для $\Delta J'$ комбинируется с величиной импульса, определенной таблицей (2.7) тензора Абрагама, *дополненного механическими* компонентами.

Действительно, J' , вычисленное по формуле (П.3.10) совпадает со значением этой величины, определенным по формуле (2.46) согласно таблице (2.7).

Оба способа вычисления приводят к одному и тому же результату, причем в формуле (П.3.11) сумма $J' + \Delta J'$ выражена как сумма компонент четырех-векторов, тогда как в формуле (3.27) сумма (равная J'^M и, следовательно, являющаяся компонентой четырех-вектора) представлена как сумма двух слагаемых, каждое из которых не является компонентой четырех-вектора.

Два различных приема вычисления соответствуют двум различным вариантам в трактовке смешанных «электромеханических» компонент тензора рассматриваемой системы. Механические компоненты тензора замкнутой системы (поле плюс среда), зависящие от параметров э.-м. поля, могут быть, более или менее произвольно, отнесены либо к полю (тензор и.-э. которого определен таблицей (2.7)), либо к среде.

В выводе, приведенном в данном приложении, выбран первый (казалось бы, более естественный) вариант.

Если бы мы выбрали второй вариант «размежевания» смешанных компонент, то, применяя формулы преобразования механического импульса, мы не могли бы *игнорировать* (как это было сделано выше) э.-м. поле фотона.

Смешанные компоненты, о которых идет речь, определены таблицей (2.6). Компоненту P_{14} этого тензора (с множителем $1/c$) можно трактовать как составляющую плотности механического импульса.

В таком случае x — компонента полного механического импульса, сообщаемого среде при излучении фотона, может быть выражена следующей суммой:

$$\Delta J^* = \Delta J' + \frac{P_{14}}{ic} \Omega, \quad (\text{П.3.12})$$

где $\Delta J'$ — вычисленный в данном приложении дополнительный импульс, а Ω — объем пуга и (как условлено) $S_0 = 1$.

Вычисляя ΔJ^* , $\Delta J'$ выразим теперь через u_0 и τ . Согласно (П.3.9)

$$\Delta J' = \frac{n^2 - 1}{n^2} u_0 \cos \theta.$$

Подставляя в (П.3.12) P_{14} из таблицы (2.6) и Ω' по формуле (3.3), получим

$$\Delta J^* = \frac{n^2 - 1}{n^2} u_0 \cos \theta + \frac{n^2 - 1}{n^2} u_0 \frac{\beta \cos^2 \theta (1 - \beta^2)}{(1 - \beta^2)(n - \beta \cos \theta)} = \frac{n^2 - 1}{n} u_0 \frac{\cos \theta}{n - \beta \cos \theta}. \quad (\text{П.3.13})$$

(П.3.13) совпадает с (3.23).

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР, июль 1976 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Д. В. Скобелъцын, а) УФН 110, 253 (1973); б) C.R. Ac. Sci. 280, 251, 287 (1975); Препринт ФИАН СССР, № 51, Москва, 1975; в кн.: Вопросы математической физики. Л., «Наука», ЛО, 1976.
2. В. Л. Гинзбург, В. А. Угаров, УФН 118, 175 (1976).
3. J. Gordon, Phys. Rev. 8, 14 (1973).
R. Peierls, Proc. Roy. Soc. A347, 475 (1976).
4. В. Л. Гинзбург, а) УФН 110, 309 (1973); б) ЖЭТФ 10, 1589 (1940).
5. В. Паули, Теория относительности, М., Гостехиздат, 1947.
6. К. Меллер, Теория относительности, М., Атомиздат, 1975.
7. L. de Broglie, Ann. Inst. Poincaré, 18, 89 (1973).
8. G. Marx, G. Gygörgi, Ann. d. Phys. 16, 241 (1955).
9. O. Costa de Beauregard, C.R. Ac. Sci. B274, 1119 (1972).
10. В. Л. Гинзбург, И. М. Франк, ДАН СССР 56, 583 (1947).
11. И. М. Франк, Сообщения ОИЯИ, Дубна, 1976.
12. J. Jelliey, in: Cerenkov Radiation and Its Applications, Lnd., Pergamon Press, 1958, p. 28.
13. G. Gygörgi, Mag. Fiz. Folyer 3, 369 (1955).
14. K. Watson, J. Jauch, Phys. Rev. 75, 1249 (1948).