

537.312.8

МАГНИТНЫЕ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ЖЕСТКИХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

Р. Г. Мину, А. Л. Разманов

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	499
а) Жесткие сверхпроводники (499). б) Качественная теория скачков потока (502). в) Экспериментальное исследование устойчивости критического состояния (504).	
2. Теория скачков потока в жестких сверхпроводниках	505
а) Устойчивость критического состояния (уравнение состояния Бина) (506). б) Устойчивость критического состояния (уравнение состояния общего вида) (509). в) Критический ток сверхпроводящего провода (514). г) Цилиндрический образец во внешнем магнитном поле (512).	
3. Теория магнитных неустойчивостей в комбинированных сверхпроводниках	514
а) Контакт сверхпроводника с нормальным металлом и устойчивость критического состояния (514). б) Скачки потока в комбинированных сверхпроводниках (516).	
4. Эксперименты по скачкам потока, сравнение теории и эксперимента	520
Цитированная литература	522

1. ВВЕДЕНИЕ

Необычные физические свойства и возможности технического использования вызвали большой интерес к экспериментальному и теоретическому исследованию жестких сверхпроводников. Речь идет о сверхпроводящих материалах, у которых, при незначительных потерях, плотность тока j может достигать величины $j = 10^5 - 10^7$ а/см², а сверхпроводимость сохраняется в магнитных полях вплоть до $H = 10^5 - 10^6$ гс. Получение таких экстремальных параметров и работа различных устройств в этих условиях во многом лимитируется магнитными неустойчивостями, существующими в жестких сверхпроводниках. Изложению теории возникновения этих неустойчивостей и сравнению ее с экспериментом посвящен настоящий обзор.

а) Жесткие сверхпроводники

В сверхпроводники второго рода магнитное поле проникает в виде квантов магнитного потока (величина которых $\Phi_0 = \pi \hbar c / e = 2 \cdot 10^{-7}$ гс·см²) уже во внешнем поле $H_e = H_{c1} \approx 100 - 1000$ гс, которое носит название первого критического. Сам квант потока (вихревую нить Абрикосова¹⁾ можно представить себе состоящим из двух областей — ствола вихря и его периферии. Ствол вихря состоит из практически нормального металла, размер ствола $\xi = 100 - 500$ Å. По периферической части размера $\delta_L = 100 - 5000$ Å циркулируют незатухающие сверхпроводящие токи. Распределение токов и магнитного поля в вихре для материалов с $\delta_L / \xi \gg 1$ показано

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1977 г.

на рис. 1 (для более подробного знакомства со свойствами сверхпроводников второго рода см., например, ²).

В равновесном состоянии вихревые нити в образце образуют решетку (треугольную или квадратную) со средней плотностью $n = B/\Phi_0$, где B — магнитная индукция внутри образца ^{1, 2}. Однако если в сверхпроводнике есть дефекты структуры, то вихри могут закрепляться на них (это явление

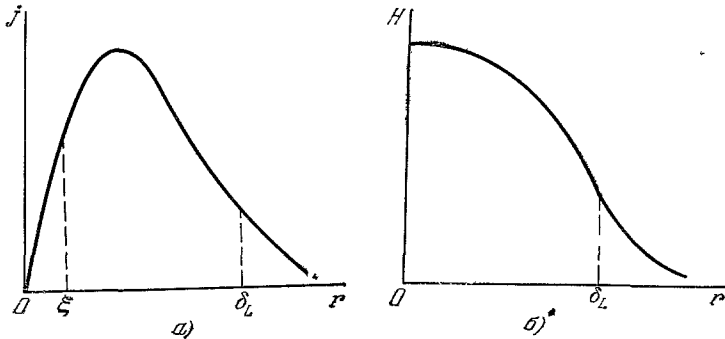


Рис. 1. Распределение тока $j(r)$ (а) и магнитного поля $H(r)$ (б) вблизи ствола вихря.

носит название пиннинга) и образовывать метастабильную конфигурацию магнитного потока (о явлении пиннинга см. более подробно, например, ^{3, 4}).

Сверхпроводники, в которых вихревые нити сильно связаны с решеткой металла, называются жесткими. Поскольку конфигурация и энергия

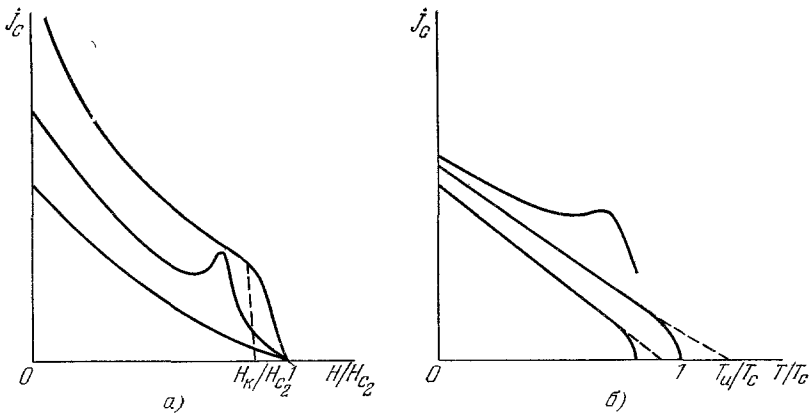


Рис. 2. Характерная зависимость плотности критического тока j_c от магнитного поля (а) и температуры (б).

вихревой нити существенно зависят от температуры, то и сила пиннинга F_p зависит от температуры. Взаимное отталкивание вихрей ^{1, 2} обуславливает зависимость сил пиннинга от плотности вихревых нитей, т. е. от B . Если по сверхпроводнику второго рода пропускать транспортный ток, то взаимодействие с ним приводит к появлению так называемой силы Лоренца, действующей на каждый из вихрей ^{4, 5}:

$$F_L = \frac{1}{c} [j\Phi_0].$$

Под влиянием этой силы магнитный поток приходит в движение, появляется диссипация энергии, сверхпроводник переходит в резистивное

состояние ^{6-8, 22}. Однако если сверхпроводник жесткий, то такой режим возможен лишь при $F_L \geq F_p(T, B)$. Силу F_p удобно записать в виде

$$F_p = \frac{1}{c} [j_c \Phi_0],$$

где $j_c(T, B)$ носит название критической плотности тока. Таким образом, до тех пор, пока $j < j_c$, в жестком сверхпроводнике могут существовать незатухающие токи. Характерные для жестких сверхпроводников зависимости j_c от B и T изображены на рис. 2.

Как мы видели, при $j > j_c(T, B)$ весь магнитный поток приходит в движение. В сверхпроводнике устанавливается режим вязкого течения вихревых нитей (см., например, ^{8, 11-13}): при этом:

$$F_L = F_p + \eta v, \quad (1.1)$$

где ηv — сила вязкого трения, η — вязкость, v — скорость движения вихревой структуры. Из (1.1) следует, что

$$j = j_c + \eta \frac{vc}{\Phi_0}.$$

Связь между v и возникающим при движении потока электрическим полем E легко вывести, воспользовавшись уравнением непрерывности для потока вихревых нитей

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div}(nv)$$

и уравнением Максвелла:

$$\text{rot } E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Из последних двух уравнений следует, что:

$$E = \frac{v}{c} B.$$

Таким образом:

$$j = j_c + \sigma_f E, \quad (1.3)$$

где $\sigma_f = \eta c^2 / B \Phi_0 \approx \sigma_n H_{c2} / B$; здесь σ_n — проводимость образца в нормальном состоянии.

Зависимость $\sigma_f \sim B^{-1}$ хорошо подтверждается в экспериментах (см. например, ¹²) и следует из микроскопической теории ¹³. Для жестких сверхпроводников $\sigma_f \sim (10^{16} H_{c2} / B) \text{ сек}^{-1}$. Эта величина существенно меньше проводимости чистых металлов уже в полях $B \sim H_{c1}$. Типичный вид вольт-амперной характеристики жесткого сверхпроводника изображен на рис. 3 *). При изменении электрического поля выход на линейный участок вольт-амперной характеристики происходит быстро (при $E < E_0$; $dj/dE \gg \sigma_f$), а для всех реальных значений электрического поля E в жестких сверхпроводниках выполняется условие $\sigma_f E \ll j_c$. Таким образом, можно считать, что в ответ на любую приложенную разность потенциалов в жестком сверхпроводнике устанавливается плотность тока, близкая к критической (точнее, несколько ее превышающая). Эта концепция критического состояния была предложена в работах ^{8, 14-16}. Она многократно проверялась экспериментально и хорошо описывает эффекты в жестких сверхпроводниках (см. например, ^{4, 17-19}).

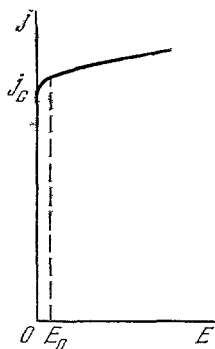


Рис. 3. Типичная вольт-амперная характеристика жесткого сверхпроводника.

*) Нелинейный участок ($E < E_0$) обусловлен целым рядом причин: неоднородностью пиннинга, дефектами структуры вихревой решетки, термической активацией, ... ^{9, 10}, однако размер его (по величине электрического поля) мал.

б) Качественная теория скачков потока

Критическое состояние в жестких сверхпроводниках при определенных условиях может стать неустойчивым. Пусть, например, в результате флуктуации или внешнего воздействия в некотором объеме сверхпроводника возросла температура. Это приводит к падению сил пиннинга и, следовательно, к уменьшению критического тока. Равновесие вихревой решетки нарушается, возникает движение магнитного потока, сопровождающееся выделением тепла за счет уменьшения энергии сверхпроводящих токов. Рост температуры образца может превратиться в лавинообразный процесс, т. е. привести к потере устойчивости. Такой процесс проникновения в образец магнитного потока представляет собой нарастающие связанным образом возмущения температуры и электромагнитного поля и носит название скачка потока. Поэтому в строгой постановке задачи необходимо исследовать на устойчивость совместно уравнение теплопроводности и уравнения Максвелла.

Распространение магнитного потока и потока тепла, как известно, характеризуется соответствующими коэффициентами диффузии: магнитной — $D_m = c^2/4\pi\sigma_f$, связанной с нормальными токами в резистивном режиме сверхпроводника, и термической — $D_t = \kappa/\nu$ (где ν — удельная теплоемкость, а κ — теплопроводность материала). Введем параметр τ , определяющий соотношение между D_t и D_m : $\tau = D_t/D_m$. Как уже упоминалось, в жестком сверхпроводнике величина σ_f относительно мала и, соответственно, $D_t \ll D_m$, а $\tau \ll 1$ (обычно даже в полях $B \sim H_{c1}$). Это означает, что диффузия магнитного потока происходит значительно быстрее, чем перераспределение тепла. Таким образом, в основном приближении по $\tau \ll 1$, нагрев жестких сверхпроводников во время скачка потока происходит адиабатически. Это утверждение получило весьма убедительное экспериментальное подтверждение (см., например, работы ^{20, 21, 23}).

Обратный предельный случай $\tau \gg 1$ может осуществляться в так называемых комбинированных сверхпроводниках (см. раздел 3); а также в жестких сверхпроводниках при весьма низких температурах ($T \lesssim 0,1^\circ\text{K}$). При $\tau \rightarrow \infty$ (т. е. при $D_m \ll D_t$) разогрев сверхпроводника происходит при замороженном магнитном потоке. Для больших τ магнитный поток медленно (в меру $\tau \gg 1$) проникает в образец. Физически это связано с тем, что индуцируемый нормальный ток компенсирует падение сверхпроводящего тока, вызванное повышением температуры, и, очевидно, препятствует входу магнитного потока в образец.

Рассмотрим качественно развитие возмущения в жестком сверхпроводнике с $\tau \ll 1$. Пусть в результате флуктуации (температуры, поля, тока и т. п.) или внешнего воздействия в некоторой области сверхпроводника температура возросла на величину θ_0 . Следовательно, к этому месту было подведено затравочное количество тепла $Q_0 = \nu\theta_0$. В процессе перераспределения токов и поля происходит выделение дополнительного тепла Q_1 , равного

$$Q_1 = \int j_c E dt$$

(здесь мы учли, что $j_c \gg \sigma_f E$). Если скачка потока не происходит, а в сверхпроводнике устанавливается новое положение равновесия с температурой, увеличенной на θ по сравнению с первоначальной, то для определения величины θ можно воспользоваться законом сохранения энергии:

$$Q_1 = \nu\theta = Q_0 + Q_1 = \nu\theta_0 + Q_1. \quad (1.4)$$

В (1.4) учтено; что разогрев происходит адиабатически ($\tau \ll 1$).

Для оценки величины Q_1 воспользуемся уравнением Максвелла *):

$$\Delta E = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j}{\partial t}. \quad (1.5)$$

Для простоты рассмотрим случай, когда $\partial j_c / \partial B = 0$ (модель критического состояния Бина¹⁵⁾). Тогда $\partial j_c / \partial t = (\partial j_c / \partial T) \dot{\theta}$. Величина $|\Delta E| \sim E/b^2$, где b — характерный размер образца. Таким образом,

$$E \sim \frac{4\pi b^2}{c^2} \dot{\theta} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right|,$$

а

$$Q_1 = \int j_c E dt = \frac{1}{\gamma^2} \frac{4\pi b^2 j_c}{c^2} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right| \theta.$$

Здесь γ^2 — число порядка единицы, которое зависит от конкретного распределения токов и электрического поля E в образце. Подставляя выражение для Q_1 в (1.4), мы получим, что

$$\theta = \frac{\theta_0}{1 - (\beta/\gamma^2)}, \quad (1.6)$$

где

$$\beta = \frac{4\pi b^2 j_c}{c^2 v} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right|.$$

Из соотношения (1.6) видно, что при $\beta/\gamma^2 \rightarrow 1$ температура неограниченно растет при любой величине начальной флуктуации, а, следовательно, критическое состояние устойчиво, если

$$\beta < \gamma^2. \quad (1.7)$$

Критерий устойчивости вида (1.7) для плоского полубесконечного образца жесткого сверхпроводника впервые был получен на основании сходных качественных соображений в работе²³. В этом случае роль характерного размера играет глубина экранирования внешнего магнитного поля l_0 **), которая определяется из условия $H(l_0) = H_c - 4\pi j_c l_0 / c = 0$. После подстановки $l_0 = cH_c / 4\pi j_c$ в (1.7) получаем

$$\frac{H_c^2}{4\pi v j_c} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right| < \gamma^2. \quad (1.7')$$

Подставляя в критерии (1.7) и (1.7') параметры, характерные для жестких сверхпроводников, легко получить оценку для поля скачка потока H_j и максимально допустимой толщины образца b_c . Оказывается, что H_j порядка нескольких килोगаусс (1—3 кгс), а b_c порядка нескольких сотен микрон.

Выведем аналогичный критерий для случая $\tau \gg 1$. Как мы уже видели, нагрев здесь происходит при замороженном магнитном потоке, что эквивалентно условию $\partial j / \partial t = 0$, откуда (см. уравнение (1.3))

$$\sigma \dot{E} + \frac{\partial j_c}{\partial T} \dot{\theta} = 0,$$

и, следовательно,

$$E = \frac{\theta}{\sigma} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right|.$$

*) Для дальнейшего представляет интерес лишь $B \gg H_{c1}$, что позволяет положить $B = H_{c1}$.

**) В этой главе для простоты считаем, что замороженного в объеме сверхпроводника магнитного поля нет (см. далее).

Таким образом, в единице объема выделяется мощность

$$\dot{Q} = \frac{j_c \theta}{\sigma} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right|.$$

Критическое состояние, очевидно, будет устойчиво, если величина \dot{Q} не превышает отводимой за счет теплопроводности мощности q :

$$q = \kappa \nabla^2 T > \frac{j_c}{\sigma} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right| \theta,$$

а поскольку $\nabla^2 T \sim \theta/b^2$, то

$$\frac{1}{\gamma_1^2} \frac{b^2 j_c}{\kappa \sigma} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right| < 1. \quad (1.8)$$

Здесь γ_1 — число порядка 1, которое определяется деталями распределения температуры по образцу. Критерий (1.8) удобно переписать в виде

$$\frac{\beta}{\tau} < \gamma_1^2. \quad (1.8')$$

Формула (1.8) выведена в предположении изотермических граничных условий.

Впервые критерий (1.8) был получен Хартом ^{46, 47} из сходных качественных соображений.

В случае $\tau \gg 1$ величины H_j и b_c существенно зависят от конкретных свойств рассматриваемых материалов. В частности, для комбинированных сверхпроводников (см. раздел 3) величины H_j и b_c в несколько раз больше, чем в случае жесткого сверхпроводника ($H_j \sim 10$ кэс, $b_c \sim 0,1$ см).

Из вида (1.8) следует, что рост флуктуаций демпфируется нормальным током. Роль нормального тока состоит, очевидно, в торможении магнитного потока (аналог вязкого трения) и, соответственно, в уменьшении выделения тепла. Устойчивость сильно зависит и от размеров образца — тонкие сверхпроводники оказываются более устойчивыми. Отметим еще,

что для устойчивой работы различных устройств определенную роль может сыграть геометрия распределения токов и магнитного поля, поскольку они, очевидно, определяют величину коэффициента γ в каждом конкретном случае.

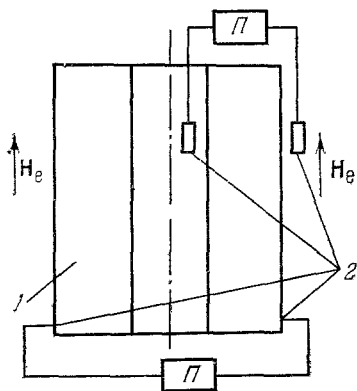


Рис. 4. Принципиальная схема эксперимента по скачкам потока. H_e — внешнее поле, 1 — образец, 2 — датчики, П — регистрирующие приборы.

в) Экспериментальное исследование устойчивости критического состояния

Схематически эксперименты по изучению магнитных неустойчивостей и сопровождающих их явлений проводятся следующим образом. Исследуемый образец помещают во внешнее магнитное поле, величина которого либо нарастает, либо осциллирует с определенной частотой и амплитудой вокруг заданного значения. Начиная с некоторой величины магнитного

поля стационарное распределение токов и поля становится неустойчивым, флуктуация или внешнее воздействие (которым может служить и само изменение магнитного поля) приводят к развитию скачка потока. В сверхпроводнике лавинообразно нарастают электрическое поле и температура. Для регистрации этих величин с соответствующих датчиков снимают разность потенциалов $U(t)$, индуцированную движением вихрей и темпера-

туру $T(t)$ (см. рис. 4). Типичный вид зависимостей $U(t)$ и $T(t)$ показан на рис. 5. На этих графиках процесс скачка потока соответствует области быстрого роста (с характерным временем $t_j \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ сек) температуры

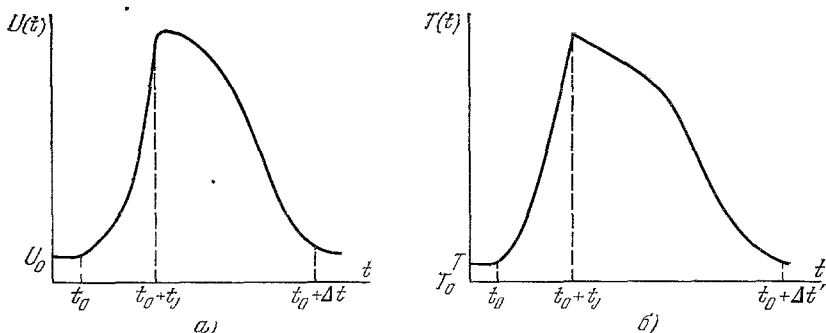


Рис. 5. а) Зависимость от времени напряжения $U(t)$, регистрируемая при скачке потока (U_0 — напряжение, возникающее в образце из-за изменения внешнего магнитного поля, t_0 — время начала скачка, t_j — время развития неустойчивости, Δt — время релаксации напряжения); б) зависимость температуры поверхности образца от времени, (T_0 — температура охладителя (гелия), T — начальная температура образца, $\Delta t'$ — время релаксации температуры).

и напряжения. Дальнейшее развитие сигнала зависит от релаксационных свойств системы и не имеет непосредственного отношения к магнитной неустойчивости. Таким образом, в эксперименте измеряют не только магнитное поле, при котором теряется устойчивость в жестких сверхпроводниках, но и время скачка потока, а также выделяющуюся в виде тепла (потери) энергию (рис. 6) ^{24, 78, 83, 97}.

В серии работ ²⁵⁻³⁰ скачки потока исследовались путем «визуального» наблюдения по эффекту Фарадея с помощью скоростной киносъемки. Этот метод не только подтвердил известные данные, но и позволил получить ряд новых результатов. Например, была определена скорость и форма фронта движущегося по образцу магнитного потока.

В ряде экспериментальных и теоретических работ ^{31, 36, 78, 81, 82, 88} исследуется дальнейшее развитие магнитной неустойчивости в жестком сверхпроводнике. В настоящем обзоре этот вопрос не рассматривается.

2 ТЕОРИЯ СКАЧКОВ ПОТОКА В ЖЕСТКИХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

В этом разделе мы выведем уравнения, описывающие развитие малых возмущений температуры и электромагнитного поля в жестких сверхпроводниках. Для заданного распределения магнитного поля и токов в образце, а также фиксированных тепловых и электродинамических граничных условиях эти уравнения можно решить. Очевидно, что система устойчива, если начальные возмущения затухают со временем. Исходя из этого условия, мы и будем определять критерии устойчивости.

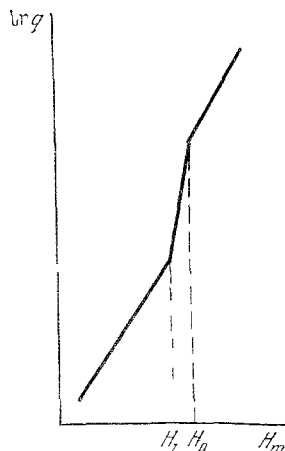


Рис. 6. Качественная зависимость мощности потерь в жестком сверхпроводнике от амплитуды внешнего поля H_m ²⁴. H_j — поле скачка потока, H_p — поле полного проникновения внешнего магнитного поля в образец.

а) Устойчивость критического состояния
(уравнение состояния Бина)

Рассмотрим образец с плоской геометрией (рис. 7); начальная температура образца T , а ее малое отклонение — θ ($\theta \ll T_c - T$). В линейном по θ приближении уравнение теплопроводности имеет вид

$$\nu_s \frac{\partial \theta}{\partial t} = \kappa_s \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + j_c E, \quad (2.1)$$

где $\nu_s = \nu_s(T)$, $\kappa_s = \kappa_s(T)$, $j_c = j_c(T)$ — теплоемкость, теплопроводность и критический ток сверхпроводника соответственно.

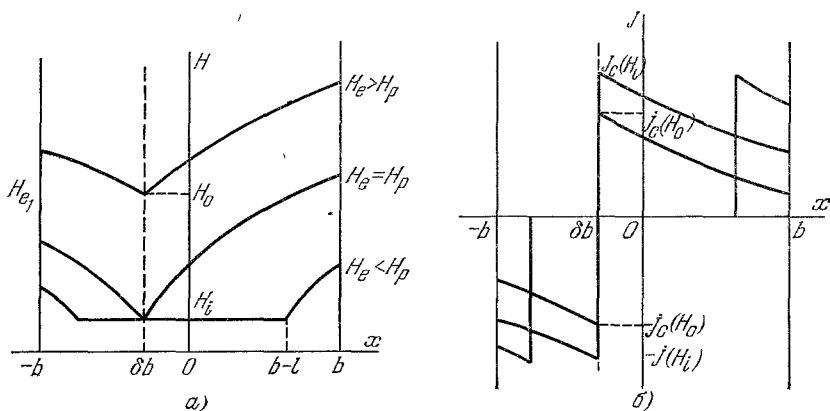


Рис. 7. Плоский образец (геометрия задачи).

а) Распределение магнитного поля; H_i — поле, созданное замороженным внутри сверхпроводника магнитным потоком; б) распределение тока $j(x)$ по сечению образца.

Для определения электрического поля E воспользуемся уравнением Максвелла (1.5). Поскольку $j_c = j_c(T)$, то в линейном по θ приближении для $\partial j / \partial t$ имеем

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial j_c}{\partial T} \dot{\theta} + \sigma_j \dot{E};$$

$\theta(t)$ будем искать в виде

$$\theta(t) = \chi(x/b) \exp\left(\frac{\lambda t \kappa_s}{\nu_s b^2}\right),$$

где λ — подлежащее определению собственное число. Исключая величину E из (2.1) и (1.5), для χ нетрудно найти уравнение^{32, 33}

$$\chi^{IV} - \lambda(1 + \tau) \chi'' - \lambda(\beta - \lambda\tau) \chi = 0. \quad (2.2)$$

Подчеркнем, что в (2.2) учтены как термическая, так и магнитная диффузии.

К уравнению (2.2) следует поставить четыре граничных условия. Внешнее поле при скачке потока мы будем считать постоянным*)

$$\frac{\partial H(\pm b)}{\partial t} = 0 \quad \text{или} \quad \lambda \chi'(\pm 1) - \chi'''(\pm 1) = 0. \quad (2.3)$$

*) Фактически это требование означает, что $\left(\frac{\partial H_e}{\partial t}\right) t_j \ll H_e$. Поскольку $t_j \sim 10^{-4} - 10^{-5}$ сек, то это предположение соответствует обычным условиям эксперимента.

Еще два граничных условия задаются характером охлаждения на поверхности:

$$W_0 \theta (\pm b) \pm \kappa_s \frac{\partial \theta (\pm b)}{\partial x} = 0$$

или

$$W \chi (\pm 1) \pm \chi' (\pm 1) = 0, \quad W = W_0 b / \kappa_s, \quad (2.4)$$

где W_0 — коэффициент теплоотдачи от сверхпроводника в охладитель *).

При $x = \delta b$ (определение величины δ ясно из рис. 7) или $x = b - l$ для $H_e < H_p$ ($H_p = 4\pi b (1 + |\delta|) j_c / c$ — поле полного проникновения внешнего поля в образец) $j(x)$ обращается в нуль. Поэтому естественно потребовать, чтобы

$$E(\delta b) = 0 \quad \text{или} \quad \lambda \chi(\delta) - \chi''(\delta) = 0. \quad (2.5)$$

Кроме того, при $x = \delta b$ температура и поток тепла непрерывны:

$$\begin{aligned} \chi(\delta + 0) &= \chi(\delta - 0), \\ \chi'(\delta + 0) &= \chi'(\delta - 0). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Нетривиальное решение уравнения (2.2) с граничными условиями (2.3) — (2.6) существует лишь для определенных значений $\lambda = \lambda(\beta, \tau)$. Область неустойчивости, очевидно, определяется условием $\lambda > 0$. На рис. 8 изображена качественная зависимость λ от β для первого положительного значения λ при различных τ и W . Видно, что неустойчивость впервые возникает при $\beta = \gamma^2$, а критерий устойчивости имеет вид

$$\beta < \gamma^2(\tau, W, \delta, \dots).$$

Как мы видели во введении, параметр β характеризует тепловыделение в объеме сверхпроводника, а τ — соотношение между коэффициентами

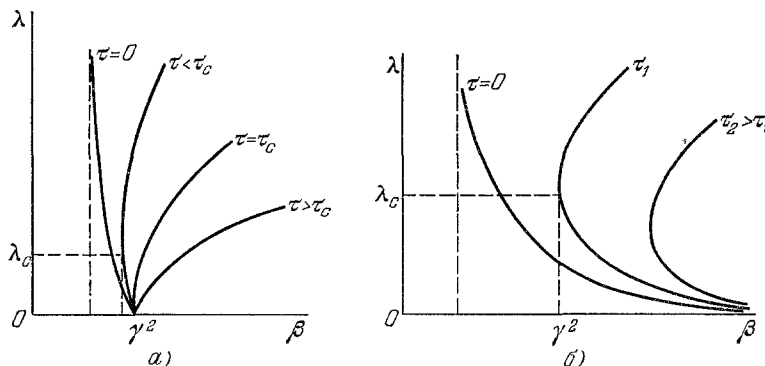


Рис. 8. Качественная зависимость $\lambda(\beta)$ при различных τ .

а) Адиабатические граничные условия ($W=0$), б) конечный теплоотвод ($0 < W < \infty$).

термической и магнитной диффузии. В уравнение (2.2) входит комбинация $\beta - \lambda\tau$, что естественно, так как нормальные токи демпфируют движение магнитного потока и уменьшают тепловыделение. Поскольку в жестких сверхпроводниках $\tau \ll 1$ даже в слабых магнитных полях ($H \simeq H_{c1}$), рассмотрим сначала случай $\tau = 0$. В отсутствие демпфирующих процессов наиболее «опасными» становятся «быстрые» возмущения (возмущения с $\lambda \rightarrow \infty$), так как один из стабилизирующих механизмов — теплопровод-

*) Если охлаждение производится жидким гелием, то в режиме пузырькового кипения при $T \approx 4,2^\circ \text{K}$ можно считать $W_0 \approx 10^7 \text{ эрг/сек} \cdot \text{см}^2 \cdot ^\circ \text{K}$.

ность — не успевает сработать. Действительно, для $\tau = 0$ можно показать, что при любых тепловых граничных условиях ($0 \leq W < \infty$) $\lambda_c \equiv \infty$, а γ не зависит от W ^{32, 34}.

Например, в случае плоского сверхпроводника (см. рис. 7) при $H_e \geq H_p$ и произвольном охлаждении критерий устойчивости имеет вид:

$$\beta = \frac{4\pi b^2 j_c}{c^2 v_s} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right| < \gamma^2 = \frac{\pi^2}{4[1+(I/I_c)]^2}; \quad 0 \leq W < \infty; \quad (2.7)$$

здесь $I = 2|\delta|bj_c$ — транспортный ток, текущий через образец, $I_c = 2bj_c$. Параметр γ максимален при $I = 0$ и падает вдвое при $I \approx I_c$.

При $H_e < H_p$ роль толщины токового слоя b ($1 + |\delta|$) играет глубина экранирования внешнего магнитного поля l_0 ($H(l_0) = 0$). В наших условиях $l_0 = cH_e/4\pi j_c$. Подставляя величину l_0 в (2.7), находим хорошо известный критерий устойчивости^{23, 35, 36}:

$$H_e < H_j = \sqrt{\frac{\pi^3 v_s j_c}{|\partial j_c / \partial T|}}. \quad (2.8)$$

Если в сверхпроводнике заморожен магнитный поток, создающий в объеме постоянное магнитное поле H_i , то критерий (2.8), очевидно, следует заменить на

$$H_e - H_i < H_j. \quad (2.9)$$

Сравнивая критерии (2.7) и (2.8), легко понять, что если при $H_e = H_p$ скачка потока не произошло, то его не будет и при $H_e > H_p$, поскольку левая часть неравенства (2.7) не зависит от H_e . Следовательно неравенство (2.7) определяет критическую толщину образца b_c . При $b < b_c$ скачки потока в образце не возникают. Неравенство (2.7) удобно переписать в виде

$$b^2 < b_c^2 = \frac{\pi c^2 v_s}{4\pi j_c |\partial j_c / \partial T| [1+(I/I_c)]^2}.$$

Влияние $\tau \ll 1$ на устойчивость можно исследовать методом, предложенным в^{33, 34}. Соответствующий расчет приводит к формулам (для простоты рассмотрим $I = 0$):

$$\lambda_c = \frac{\pi^2}{4} \tau^{-1/2}; \quad \gamma^2(\tau) = \frac{\pi^2}{4} (1 + 2\tau^{1/2}) \quad \text{при } W = 0, \quad (2.10)$$

$$\lambda_c = \frac{\pi^{4/3}}{2^{4/2}} \tau^{-1/3}; \quad \gamma^2(\tau) = \frac{\pi^2}{4} (1 + 2,2\tau^{1/3}) \quad \text{при } W = \infty \quad (2.11)$$

Сопоставив между собой критерии (2.10) и (2.11), мы видим, что влияние термодиффузии на стабильность для жестких сверхпроводников весьма мало*), соответственно мала и роль поверхностного охлаждения образца^{20, 23}. Как и следовало ожидать, для малых τ потеря устойчивости связана с появлением быстро нарастающих (адиабатических) возмущений ($\lambda_c \gg 1$). Несмотря на то, что скачок потока происходит адиабатически, связанный характер распространения возмущений температуры и электромагнитного поля приводит к условиям**):

$$t_m \ll t_j \ll t_n,$$

где $t_n = b^2/D_t$ и $t_m = b^2/D_m$ — времена термической и магнитной диффузии соответственно.

Таким образом, термодиффузия, не сказываясь в основном приближении на критерии устойчивости, тормозит движение магнитного потока и тем самым определяет характерное время развития возмущения t_j .

*) Экспериментально влияние термодиффузии можно обнаружить по отклонению H_j для различных условий поверхностного теплообмена, ожидаемая величина $\Delta H_j \sim 5-10\%$.

**) $t_j \sim v_s b^2 / \kappa_s \lambda_c = t_n / \lambda_c \sim t_n \tau^p \sim t_m \tau^{-q}$, $p > 0$, $q > 0$.

То обстоятельство, что к возникновению скачка потока приводят адиабатические возмущения, позволяет существенно упростить задачу об определении критерия устойчивости³⁴⁻³⁶. При выводе основного уравнения можно сразу опустить теплопроводность в соответствующем уравнении:

$$v_s \dot{\theta} = j_c E. \quad (2.12)$$

Добавив к (2.12) уравнение Максвелла (1.5) и, исключая из этой системы температуру θ , получаем для электрического поля E :

$$E'' + \beta E = 0. \quad (2.13)$$

Здесь дифференцирование идет по безразмерной переменной x/b , а $\tau = 0$. К уравнению (2.13) следует поставить лишь электродинамические граничные условия:

$$E'(\pm b) = E(\delta b) = 0.$$

Устойчивость, очевидно, теряется ($\dot{\theta} > 0$), если (см. (2.12)) существует нетривиальное решение уравнения (2.13) с поставленными к нему граничными условиями.

Отметим еще, что (2.13) может быть получено и из (2.2) предельным переходом $\lambda \rightarrow \infty$, $\tau = 0$, $\lambda\tau \rightarrow 0$. Приведенный вывод поясняет характер протекания процессов и позволяет без соответствующего предельного перехода отобрать правильные граничные условия.

Поскольку $E(\delta b) = 0$, то неустойчивость развивается в обеих областях $x < \delta b$ и $x > \delta b$ независимо. Устойчивость всей системы определяется наименее устойчивой областью.

Теплоемкость сверхпроводника v_s и плотность критического тока j_c являются функциями температуры. Поэтому и поле скачка потока H_j зависит от температуры³⁶. Характерная для жесткого сверхпроводника кривая $H_j = H_j(T)$ изображена на рис. 9. В частности, если принять

$$v_s = v_0 (T/T_c)^3, \quad j_c = j_1 [1 - (T/T_u)],$$

где $T_u \sim T_c$ (см. рис. 2, б), то из (2.8) для $H_j(T)$ легко найти

$$H_j = \sqrt{\frac{\pi^3 v_0}{T_c^3}} \sqrt{T^3 (T_u - T)} \quad (2.14)$$

В этом случае величина H_j имеет максимум (см. рис. 9) при $T = 0,75 T_u$. Напомним, что область температур, слишком близких к T_c здесь не рассматривается. С другой стороны, при достаточно низких температурах ($T < 1^\circ \text{K}$) приближение $\tau \ll 1$ обычно не выполняется ($\tau \sim T^{-3}$). Однако и в этом случае можно показать, что H_j падает с уменьшением T и обращается в 0 при $T = 0$.

б) Устойчивость критического состояния (уравнение состояния общего вида)

Как мы уже видели, в случае жестких сверхпроводников быстро растущие (адиабатические) возмущения демпфируются слабо (в меру $\tau \ll 1$) и приводят к максимально возможному разогреву образца. Это утверждение, очевидно, не зависит ни от модели критического состояния, ни от

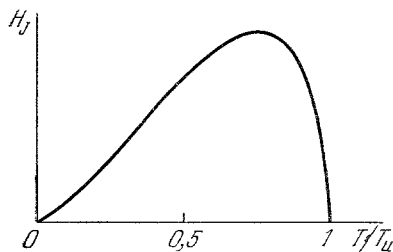


Рис. 9. Функция H_j от T .

геометрии задачи. Таким образом, в основном приближении критерий устойчивости можно найти, положив $\tau = 0$ *).

Пренебрегая плотностью нормальных токов и теплопроводностью, нетрудно получить уравнение для электрического поля E ³⁷:

$$E'' + \alpha(x) E' + \beta(x) E = 0, \quad (2.15)$$

где

$$\alpha(x) = -\frac{4\pi b}{c} \frac{\partial j_c}{\partial H}, \quad \beta(x) = -\frac{4\pi b^2}{c^2} \frac{j_c(x)}{v_s} \frac{\partial j_c(x)}{\partial T}.$$

К уравнению (2.15) следует поставить электродинамические граничные условия: $E'(\pm b) = E(\delta b) = 0$, совпадающие с (2.3) и (2.5).

Прежде чем приступить к решению (2.15), произведем замену переменного

$$y = \frac{H_e - H(x)}{H_e - H_i},$$

после которой (2.15) приобретает стандартный вид

$$E'' + \tilde{\beta} E = 0, \quad (2.16)$$

где

$$\tilde{\beta} = \frac{(H_e - H_i)^2}{4\pi v_s T_1(H)}, \quad T_1(H) = \frac{j_c}{|\partial j_c / \partial T|}.$$

Граничные условия для $E(y)$ записываются теперь так:

$$E(\pm 1) = 0, \quad E'(0) = 0. \quad (2.17)$$

Заметим, что если $j_c(H, T) = j_0(T) \varphi(H)$, то T_1 не зависит от H и, следовательно, от y . Уравнение (2.16) решается точно, и критерий устойчивости имеет вид

$$H_e - H_i \leq H_j, \quad \text{где} \quad H_j^2 = \frac{\pi^2 v_s j_0(T)}{|dj_0/dT|}. \quad (2.18)$$

В общем случае, уравнение (2.16) удастся решить, если выполнено условие $(d/dy)(1/\sqrt{\tilde{\beta}}) < 1$, что эквивалентно:

$$\left. \frac{H_e - H_i}{T_1(H)} \right| \frac{dT_1(H)}{dH} < 1 \quad (2.19)$$

и позволяет применять к (2.16) метод ВКБ. Воспользовавшись стандартным ВКБ решением из граничных условий (2.17), нетрудно получить критерий устойчивости в виде ^{38, 39}

$$\int_0^1 \sqrt{\tilde{\beta}} dy = \frac{1}{\sqrt{4\pi v_s}} \int_{H_i}^{H_e} \frac{dH}{\sqrt{T_1(H)}} = \int_{\delta b}^b \sqrt{\beta(x)} dx < \frac{\pi}{2}. \quad (2.20)$$

Относительная точность, с которой выполняется критерий (2.20), есть

$$\frac{(H_e - H_i)^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{T_1} \frac{dT_1}{dH} \right)^2 \ll 1. \quad (2.21)$$

В слабом магнитном поле ($H_e \ll H_{c2}$) $(1/T_1)(dT_1/dH) \sim 1/H_{c2}$ и условия (2.19), (2.21) выполняются с большим запасом. Если же $H_e \sim H_{c2}$, то хорошую точность при применении (2.20) обеспечивает малый численный множитель в (2.21). Таким образом, критерий (2.20) может быть с успехом применен во всем интервале внешних полей.

*) Строгое доказательство этих утверждений дано в работе ³⁸.

До сих пор мы предполагали, что плотность критического тока является достаточно гладкой функцией магнитного поля. Однако в ряде материалов зависимость $j_c(H)$ имеет резкий излом в области сильных полей (см. рис. 2, излом при $H = H_k$). Такая ситуация рассмотрена в работе ³⁷. Оказывается, при этом возможен случай, когда скачки потока возникают в двух изолированных областях внешних полей $H_e \sim H_p$ и $H_e \sim H_k$. При определенных условиях критическое состояние наименее устойчиво именно при $H_e \sim H_k$.

в) К р и т и ч е с к и й т о к с в е р х п р о в о д я щ е г о п р о в о д а

Рассмотрим теперь устойчивость критического состояния в цилиндрических образцах ^{34, 40}. Интересуясь влиянием геометрии распределения токов и поля, ограничимся моделью Бина и случаем $\tau = 0$.

В этом разделе мы определим максимальный транспортный ток I_m , который сверхпроводящий провод радиуса R способен пропускать без потерь (рис. 10).

Поскольку $\tau = 0$, появление неустойчивости связано с быстрыми возмущениями ($\lambda_c \gg 1$) и теплопроводность не существенна. Аналогично случаю плоской геометрии можно показать, что критерий устойчивости имеет вид $\beta < \gamma^2$, где:

$$\beta = \left(\frac{R}{R_0} \right)^2 = \frac{4\pi R^2 j_c}{c^2 v_s} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right| ;$$

$$\delta = \sqrt{1 - \frac{I}{I_c}}. \quad (2.22)$$

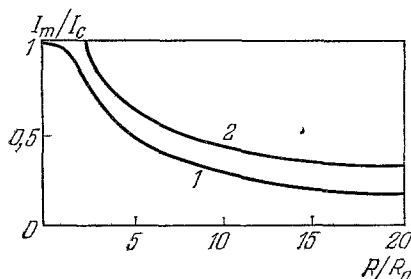


Рис. 11. Зависимость I_m/I_c от R/R_0 для провода.

Кривая 1 — провод без покрытия, 2 — провод, покрытый слоем нормального металла ($d > d'_c$).

из условия $\beta = (R/R_0)^2 = \gamma^2$ (I_m). Отношение I_m/I_c , найденное с помощью соотношения (2.23), изображено на рис. 11 (кривая 1) как функция безразмерного радиуса провода R/R_0 . При $I \ll I_c$ критерий устойчивости для провода естественно совпадает с результатами, полученными для плоского образца ($H_e < H_p$, H_e — собственное поле тока).

Видно, что I_m всегда меньше I_c , т. е. с ростом тока в проводе любого радиуса обязательно произойдет скачок потока. Нетрудно понять, с чем это связано. Если под влиянием флуктуации или внешнего воздействия скачка потока не произошло, то температура образца увеличится на θ и в образце установится равновесное распределение токов и поля при новой температуре (см. введение). Однако такое положение равновесия при определенных условиях может и отсутствовать. Так, если $\delta = 0$ (т. е. $I = I_c$), при изменении (росте) температуры состояние с заданным транспортным током невозможно реализовать. Следовательно, при $\delta = 0$ критическое состояние заведомо неустойчиво — вблизи этих значений δ исчезает

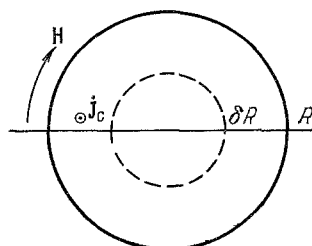


Рис. 10. Сверхпроводящий провод (геометрия задачи).

$I_c = \pi R^2 j_c$, а I — транспортный ток, текущий в проводе. Параметр γ определяется из уравнения

$$N_1(\gamma) J_0(\delta\gamma) - N_0(\delta\gamma) J_1(\gamma) = 0 \quad (2.23)$$

J_0 , J_1 , N_0 , N_1 — функции Бесселя и Неймана нулевого и первого порядка соответственно. Критическое значение транспортного тока I_m определяется

необходимая для устойчивости степень свободы. В качестве иллюстрации оценим величину R_0 для сплава Nb — 25% Zr при $T \approx 4^\circ\text{K}$. Интересующие нас параметры суть: $j_c = 3 \cdot 10^5 \text{ а/см}^2$, $v_s = 1,5 \cdot 10^4 \text{ эрг/см}^3 \text{ }^\circ\text{K}$, $\partial j_c / \partial T \sim -j_c / (T_c - T)$, где $T_c = 10^\circ\text{K}$, откуда $R_0 \approx 3 \cdot 10^{-3} \text{ см}$.

г) Цилиндрический образец во внешнем магнитном поле

В этом разделе мы определим критерий устойчивости относительно скачков потока для трубки, помещенной во внешнее магнитное поле,

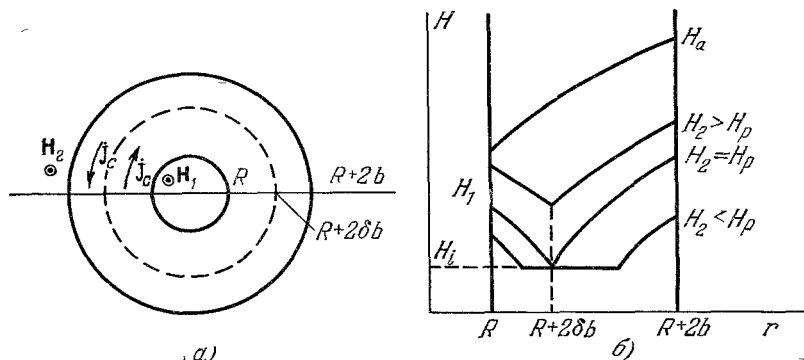


Рис. 12. Цилиндрический образец во внешнем магнитном поле.

а) Геометрия задачи; б) распределение магнитного поля. H_2 — внешнее поле, H_1 — поле в полости образца, при $H_e = H_a$ внешний поток начинает входить в полость трубки.

параллельное ее оси (рис. 12)³⁴. Уравнение для электрического поля E , аналогичное (2.13), имеет вид

$$E'' + \frac{1}{r} E' + \left(\beta - \frac{1}{r^2} \right) E = 0, \quad (2.24)$$

где

$$\beta = \frac{4\pi b^2 j_c}{c^2 v_s} \left| \frac{\partial j_c}{\partial T} \right|,$$

а координата r нормирована на полутолщину стенки трубки b . Радиус внутренней полости трубки R , поле в полости H_1 , внешнее поле H_2 (см. рис. 12). Например, в случае $H_e > H_p$ граничные условия имеют вид

$$E' + E/r = 0 \quad \text{при} \quad r = \frac{R}{b}, \quad 2 + \frac{R}{b},$$

$$E = 0 \quad \text{при} \quad j(r) = 0.$$

Уравнение для определения параметра γ в критерии устойчивости (1.7) легко найти, подставляя решение уравнения (2.24) в граничные условия.

На рис. 13 показана зависимость параметра γ от магнитного поля. Из этого рисунка видно, что перепады полей перед скачком при входе ($H_2 - H_i$ при $H_2 < H_p$; $H_2 - H_1$ при $H_2 \geq H_p$) и выходе ($H_1 - H_i$, $H_1 - H_2$ соответственно) магнитного потока различны. По мере роста внутреннего радиуса трубки R это различие исчезает ($R \gg b$, плоский предел). Отметим также, что, в отличие от случая плоской геометрии, вели-

чина критического перепада магнитного поля H_j зависит от плотности критического тока.

Остановимся еще на одном частном случае. Пусть величина внешнего поля H_2 такова, что δ обращается в нуль — $H_2 = H_a$ — экранирующие

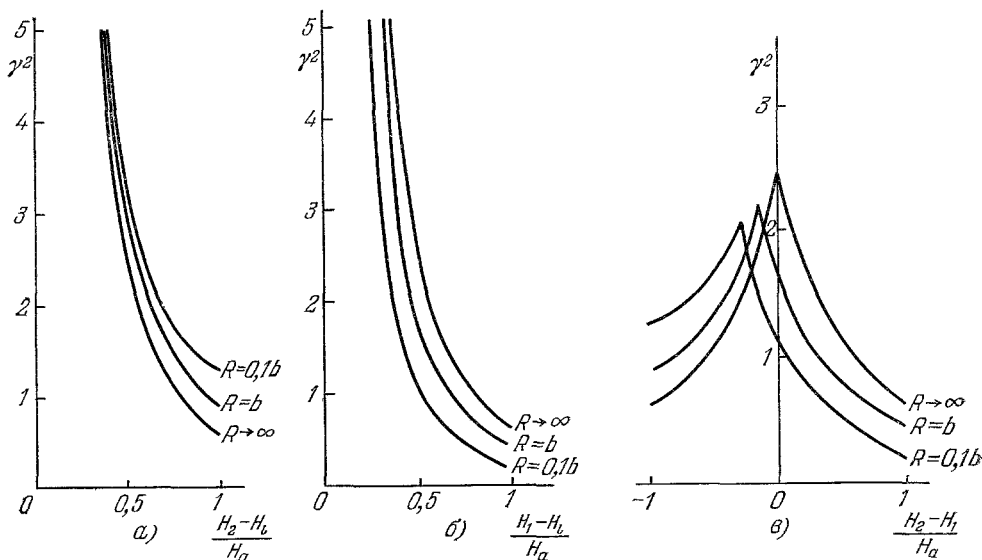


Рис. 13. Зависимость параметра γ от перепада магнитного поля для различных R (трубка во внешнем поле).

а) $H_e < H_p$, вход потока; б) $H_e < H_p$, выход потока; в) $H_e \geq H_p$.

токи текут по всей стенке цилиндра в одном направлении. Легко видеть, что при этом происходит резкое падение устойчивости. Причины этого падения те же, что и для провода при $I \rightarrow I_c$. Ток, текущий в стенке трубки $I_c = 2bj_cL$ (L — длина трубки), определяется разностью полей $H_2 - H_1$. При увеличении температуры j_c падает. Если при этом величина $H_2 - H_1$ мало меняется, то плотность тока в образце превышает j_c , что ведет к еще большему разогреву и, следовательно, к потере устойчивости. Если внутренняя полость трубки небольшая ($R \lesssim b$) при развитии возмущения заметно возрастает и поле H_1 . Следовательно, устойчивость системы остается конечной и при $H_2 = H_a$. Если же трубка имеет большую внутреннюю полость ($R \gg b$), система полностью теряет одну степень свободы, и ее устойчивость падает до нуля.

Для количественного анализа запишем уравнение для электрического поля E во внутренней полости трубки

$$E'' + \frac{1}{r} E' + \left(\frac{\lambda^2 \kappa_s^2}{v_s^2 c^2} - \frac{1}{r^2} \right) E = 0.$$

Величина $\lambda_c \lesssim 10^3 - 10^4$ и первое слагаемое в скобках мало ($\sim 10^{-15}$). Из оставшегося уравнения находим неособое в нуле решение E в виде: $E = Ar$ ($A = \text{const}$). Сшивая его при $r = R/b$ по непрерывности E и E' с решением уравнения (2.24), удовлетворяющем граничному условию $E'(R/b + 2) = 0$, легко найти зависимость параметра γ от R/b (рис. 14).

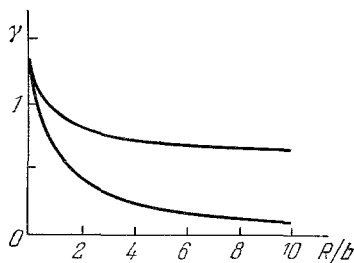


Рис. 14. График функции $\gamma(R/b)$ (трубка во внешнем поле)

Верхняя кривая — $H_2 < H_a$ ($H_2 = H_a = 0$), нижняя кривая — $H_2 > H_a$.

3. ТЕОРИЯ МАГНИТНЫХ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ В КОМБИНИРОВАННЫХ СВЕРХПРОВОДНИКАХ

В этой главе мы рассмотрим устойчивость критического состояния в жестких сверхпроводниках, находящихся в контакте с нормальным металлом. Комбинация нормальных и сверхпроводящих проводников в образце может быть весьма разнообразной, начиная от сверхпроводника, покрытого слоем нормального металла, и, кончая регулярной структурой сверхпроводящих включений (жилок) в матрице нормального металла (комбинированный сверхпроводник).

Наличие нормального металла с хорошей проводимостью приводит к сильному демпфированию в образце быстрых возмущений, а поскольку именно они приводят к скачкам потока в жестких сверхпроводниках, то устойчивость критического состояния должна возрасти. С другой стороны, при выходе из строя по какой-либо причине участка сверхпроводящей цепи, нормальный металл шунтирует повреждение и тем самым препятствует катастрофическому переходу всей системы в нормальное состояние⁴¹. Таким образом, исследование устойчивости критического состояния в сверхпроводниках, находящихся в контакте с нормальным металлом, представляется весьма интересным.

а) Контакт сверхпроводника с нормальным металлом и устойчивость критического состояния

Предложенная в гл. 2 методика позволяет рассмотреть магнитные неустойчивости в жестких сверхпроводниках, покрытых слоем нормального металла произвольной толщины d .

Относительно нормального металла покрытия мы будем предполагать, что его теплопроводность κ_n *) удовлетворяет соотношению $\kappa_n \gg \kappa_s$, а теплоемкость $v_n \sim v_s$. Поскольку $j_c \sim 10^4 - 10^6$ а/см², то $\sigma_n E \ll j_c$, во всяком случае при развитии малого возмущения, и тепловыделение в нормальном металле ($\sigma_n E^2$) значительно меньше, чем в сверхпроводнике ($j_c E$). Из сказанного очевидно, что при $d \ll b$ можно считать, что тепловые условия на границе сверхпроводник — покрытие и покрытие — внешняя среда совпадают. Если же $d \gg b$, то покрытие резко улучшает теплоотвод от сверхпроводника и фактически приводит к изотермическим условиям ($\theta = 0$) на границе сверхпроводник — покрытие. В результате, как при $d \ll b$, так и при $d \gg b$ можно ограничиться рассмотрением внутри нормального металла лишь электродинамических процессов.

Исследуем прежде всего устойчивость критического состояния в образце с плоской геометрией (см. рис. 7). Уравнение Максвелла (1.5) для электрического поля E в покрытии имеет вид

$$E'' + \lambda \tau' E = 0; \quad (3.1)$$

здесь $\tau' = \sigma_n \tau / \sigma_f \gg \tau$. Зависимость поля E от времени t как и в гл. 2, ищется в виде $E(t) \sim \exp(\lambda t \kappa_s / v_s b^2)$. На границе нормальный металл — сверхпроводник, очевидно, непрерывны электрическое поле E и его производная E' . Кроме того, выполняется тепловое граничное условие $\theta' \pm W\theta = 0$. Помимо этого, мы будем предполагать, что на границе нормальный металл — внешняя среда магнитное поле за время скачка не меняется, т. е. $\partial H / \partial t = E' = 0$.

Как известно⁴², в нормальный металл переменное электромагнитное поле проникает лишь на глубину скин-слоя $\delta_{ск}$. Из уравнения (3.1)

*) Индексом n обозначены величины, относящиеся к нормальным, а s — к сверхпроводящим проводникам.

видно, что в наших обозначениях $\delta_{\text{ск}}(\lambda) = b(\lambda\tau')^{-1/2}$. Если $\lambda = \lambda(\beta) \gg 1$, то $\delta_{\text{ск}} \rightarrow 0$ и на границе сверхпроводник — покрытие электрическое поле E обращается в нуль. Из уравнения (2.2) (при $\tau = 0$) для такого граничного условия нетрудно получить, что кривая $\lambda(\beta)$ асимптотически приближается к прямой $\beta = \pi^2$ (рис. 15). Таким образом, наличие нормального металла сильно деформирует и сдвигает кривую $\lambda = \lambda(\beta)$ для $\lambda \gg 1$ независимо от толщины покрытия и тепловых граничных условий.

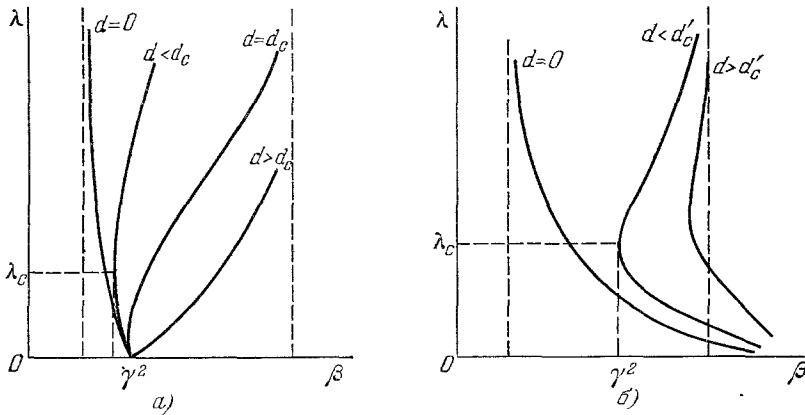


Рис. 15. Кривые $\lambda(\beta)$ для различных d .

а) Адиабатические условия на границе сверхпроводника; б) изотермическое охлаждение.

В области $\lambda \ll 1$ влияние покрытия на спектр возмущений менее заметно (если покрытие не меняет режим теплоотвода из сверхпроводника). В частности, при адиабатических условиях положение точки $\beta = \beta_0$, в которой $\lambda(\beta_0) = 0$, не меняется³², так как при $\lambda = 0$ в нормальном металле не индуцируются экранирующие токи.

Таким образом, при $d \ll b$ и внешней термоизоляции величина γ^2 , за счет покрытия, может увеличиться не более, чем до значения $\gamma^2 = 3$. Рассмотрим, как происходит переход от $\gamma = \pi/2$ ($d = 0$) к $\gamma = \sqrt{3}$. При увеличении толщины покрытия (в области $d \ll b$) кривая $\lambda = \lambda(\beta)$ деформируется и сдвигается вправо от прямой $\beta = 3$, асимптотически приближаясь к прямой $\beta = \pi^2$ (см. рис. 15, а). Начиная с некоторого значения $d = d_c = 2b/105\tau'$, вся ветвь $\lambda(\beta) > 0$ оказывается в области $\beta > 3$ ³².

При изотермических граничных условиях, возмущения с $\lambda \ll 1$ могут появиться лишь в области $\beta \gg 1$ (см. рис. 15, б). Таким образом, с помощью покрытия возможно увеличить γ^2 до значения $\gamma^2 = \pi^2$. При $\pi^2\tau' \gg 1$ (что заведомо выполняется для характерных значений τ') из уравнения (2.2) и граничных условий следует, что $\lambda_c \gg 1$. λ_c и γ зависят от демпфирующих свойств нормального металла, существенное увеличение γ с ростом d происходит при d меньше некоторой критической величины d'_c . Затем λ_c и γ перестают зависеть от d и определяются лишь значениями τ' ⁴⁰:

$$\lambda_c = \pi^4\tau', \quad \gamma^2 = \pi^2 \left(1 - \frac{1}{\pi^2\tau'}\right), \quad d > d'_c. \quad (3.2)$$

Экспериментально этот эффект был обнаружен в работе⁹⁶. Критическая толщина покрытия, очевидно, порядка глубины скин-слоя $\delta_{\text{ск}}$ при $\lambda = \lambda_c$. Определив d'_c как $3\delta_{\text{ск}}$, легко получить оценку ($I = 0$)⁴⁰:

$$d'_c = \frac{3b}{\pi^2\tau'} = \frac{3c^2v_s b}{4\pi^3\kappa_s\sigma_n}. \quad (3.3)$$

Рассмотрим, как развивается неустойчивость при хорошем теплоотводе из объема сверхпроводника. Поскольку при этом $\lambda_c \gg 1$, то резкий рост возмущения магнитного поля и температуры происходит при одновременном обращении в нуль электрического поля E на обеих границах образца и, следовательно, неизменном полном магнитном потоке в сверхпроводнике. Это значит, что в начале магнитный поток быстро (за время порядка t_n/λ_c) перераспределяется внутри сверхпроводника, а затем медленно (за время диффузии магнитного поля через нормальный металл) устанавливается окончательное распределение магнитного поля и токов^{32, 90, 97}. Экспериментально такой эффект наблюдался Ониши⁴³.

Как мы видели, устойчивость критического состояния во многом определяется именно возмущениями с $\lambda_c \gg 1$. Неустойчивость по отношению к ним является абсолютной в том смысле, что величину γ нельзя (в меру $\lambda_c \gg 1$) повысить никакими внешними воздействиями (улучшением теплоотвода, увеличением толщины либо проводимости покрытия и т. п.). Таким образом, максимально достижимые значения γ определяются появлением растущих возмущений с $\lambda \gg 1$.

Влияние геометрии распределения токов и поля, а также роль зависимости $j_c(H)$ могут быть рассмотрены и для образцов, покрытых нормальным металлом.

На рис. 11 (кривая 2) представлена зависимость $I_m(R/R_c)$ для провода (см. рис. 10) с покрытием из нормального металла⁴⁰ ($d > d'_c$). В отличие от случая провода без нормальной оболочки, при $\delta \rightarrow 0$ ($I \rightarrow I_c$) параметр γ в нуль не обращается, так как при этом не исчезает одна из степеней свободы системы — токи, компенсирующие падение j_c , возникают в покрытии. Если радиус провода R меньше, чем $R_c \approx 2,4R_0$, то скачки потока не возникают вплоть до $I = I_c$. В рассмотренном ранее примере Nb — 25% Zr (раздел в) гл. 2) характерное значение $\kappa_s = 4 \cdot 10^3$ эрг/см сек °К. Если провод из этого материала покрыт чистым металлом (Cu или Al), то $\tau' \approx 1$, а для R_c и d'_c имеем следующие оценки: $R_c \simeq 7 \cdot 10^{-3}$ см; $d_c(R_c, I_c) \approx 5 \cdot 10^{-3}$ см.

б) Скачки потока в комбинированных сверхпроводниках

В этом разделе мы рассмотрим вопрос об устойчивости критического состояния комбинированного сверхпроводника (матрица нормального металла с регулярной структурой внедренных в нее сверхпроводящих областей — жилок в критическом состоянии). Число N сверхпроводящих жилок в сечении образца колеблется от 2—3 до нескольких десятков и даже сотен. В качестве матрицы применяются либо металлы с хорошей проводимостью (Cu, Al), либо различные сплавы с меньшей проводимостью^{41, 44, 79, 87, 94}. В таком комбинированном сверхпроводнике неустойчивость может быть связана не только с потерей устойчивости какой-либо из сверхпроводящих областей, но и с появлением коллективных эффектов — нарушения устойчивости всего распределения тока и поля как целое. При этом, естественно, наибольший интерес представляет случай материалов с $N \gg 1$. Ниже мы получим условия, при которых в комбинированном сверхпроводнике из стабилизированных жилок развивается скачок потока.

Для количественного описания коллективных эффектов необходимо вывести уравнение распространения малого возмущения по комбинированному сверхпроводнику, усредненное по областям, размер которых включает достаточно много элементов структуры комбинированного сверхпроводника, но меньше размеров самого образца. Такое уравнение, оче-

видно, справедливо до тех пор, пока его решение меняется на расстояниях, больших характерного размера структуры, а время выравнивания возмущения на размере структуры много меньше соответствующего времени изменения всего решения. После усреднения для θ и E получаем уравнения

$$\bar{v}\dot{\theta} = \bar{\kappa} \Delta \theta + \mathbf{j}_0 E \quad (3.4)$$

и связь плотности тока j с полем E :

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_0 + \sigma E. \quad (3.5)$$

Входящие в (3.4) и (3.5) величины \bar{v} , j_0 , $\bar{\sigma}$, $\bar{\kappa}$ — усредненные, соответственно, теплоемкость, плотность критического тока (здесь предполагается, что внутри области усреднения сверхпроводящие токи текут в одном направлении), удельные электро- и теплопроводность. Обозначим относительную концентрацию сверхпроводящего металла за $-x_s$, а нормально-го $-x_n$ ($x_s + x_n = 1$). Тогда

$$\bar{v} = x_n v_n + x_s v_s, \quad j_0 = x_s j_c, \quad \bar{\sigma} = x_s \sigma_f + x_n \sigma_n.$$

Усредненное значение поперечной, по отношению к структуре комбинированного сверхпроводника, теплопроводности определяется деталями структуры. Хорошей оценкой, как нетрудно убедиться, является $\bar{\kappa} = (1 - \sqrt{x_s}) \kappa_n$.

Для дальнейшего необходимо выбрать модель критического состояния. Здесь мы ограничимся случаем модели Бина. Обобщение на случай произвольной зависимости $j_c(H)$ можно провести методами, изложенными в разделе 6) гл. 2.

Исключая E из уравнений (3.4), (3.5), легко получить уравнение для θ ⁴⁵:

$$\theta^{IV} - \lambda (1 + \bar{\tau}) \theta'' + \lambda (\lambda \bar{\tau} - \bar{\beta}) \theta = 0. \quad (3.6)$$

В уравнении (3.6) пространственные производные берутся по переменной r/b , где b — характерный размер образца, а зависимость $\theta(t)$, $E(t)$ выбрана в виде $\theta, E \sim \exp \{\lambda t \kappa / \sqrt{b^2}\}$. Для определения $\lambda = \lambda(\bar{\beta}, \bar{\tau})$ мы должны поставить к (3.6) обычные тепловые и электродинамические граничные условия.

Для комбинированных сверхпроводников величина $\bar{\tau}$, как правило, больше единицы и может достигать значений вплоть до $10^2 - 10^4$. Если $\bar{\tau} \gg 1$, то перераспределение тепла происходит гораздо быстрее, чем диффузия магнитного потока (см. введение). Следовательно, величина $\lambda_c \ll 1$ и существенную роль играют тепловые граничные условия.

Рассмотрим, например, задачу об устойчивости пластины из комбинированного сверхпроводника, на границе которого осуществляются изотермические условия. Кривые $\lambda = \lambda(\bar{\beta}, \bar{\tau})$ имеют вид, аналогичный изображенному на рис. 8, б. Значение γ^2 , при котором впервые появляется корень $\lambda > 0$, равно ($\bar{\tau} \gg 1$) ⁴⁵

$$\gamma^2 = \frac{\pi^2}{4} \bar{\tau} + 3 \left(\frac{\pi}{2} \right)^{4/3} \bar{\tau}^{2/3}, \quad (3.7)$$

а величина λ_c :

$$\lambda_c = \left(\frac{\pi}{2} \right)^{4/3} \bar{\tau}^{-1/3}. \quad (3.8)$$

Аналогично при $\bar{\tau}^{-1} \ll W \ll 1$ нетрудно получить соответствующее выражение для λ_c :

$$\lambda_c = \left(\frac{W}{2} \right)^{2/3} \bar{\tau}^{-1/3}.$$

Критерий (3.7) в основном приближении по $\bar{\tau} \gg 1$ совпадает с известным выражением^{46, 47}, найденным из качественных соображений.

Выведем теперь критерий применимости уравнения (3.6). Характерный масштаб структуры комбинированного сверхпроводника есть b/\sqrt{N} , а минимальный масштаб изменения решений — глубина скин-слоя $\delta_{\text{ск}}$ в нормальном металле. В интересующей нас области частот $\lambda \sim \lambda_c$ очевидно, что $\delta_{\text{ск}} \sim b/\sqrt{\lambda_c \bar{\tau}}$. Следовательно, должно выполняться условие:

$$N \gg \lambda_c \bar{\tau}. \quad (3.9)$$

При выравнивании температуры медленнее всего происходит термодиффузия в сверхпроводящей жилке, соответствующее время t_s оказывается порядка

$$t_s \sim \frac{v_s x_s b^2}{\kappa_s N},$$

характерное же время скачка потока t_j :

$$t_j \sim \frac{\bar{v} b^2}{\lambda_c \kappa}.$$

Из условия $t_j \gg t_s$ получим второе условие применимости (3.6):

$$N \gg \frac{\lambda_c \bar{\kappa} v_s}{\kappa_s \bar{v}}. \quad (3.10)$$

В частности, при $W \ll 1$ из (3.9) и (3.10) следует

$$N \gg W \bar{\tau}^{2/3}, \quad N \gg W \bar{\tau}^{-1/3} \frac{\bar{\kappa} v_s}{\kappa_s \bar{v}} \quad (\bar{\tau} \gg 1).$$

Условие $\bar{\tau} \gg 1$ позволяет во многих случаях существенно упростить задачу об исследовании устойчивости⁴⁵. Действительно, подставив в уравнение Максвелла (1.5) явную связь тока с полем (3.5), получим

$$\Delta E = \lambda \bar{\tau} \left(E + \frac{\theta}{\sigma} \frac{dj_0}{dT} \right).$$

Если теплоотвод не слишком мал ($W \gg \bar{\tau}^{-1}$), то, как можно легко показать, используя уравнение (3.6) с соответствующими граничными условиями, характерное время скачка потока много меньше времени магнитной диффузии в образце (см. введение). Следовательно, величина $\lambda_c \bar{\tau} \gg 1$ (в частности, при идеальном охлаждении $\lambda_c \bar{\tau} \sim \bar{\tau}^{2/3}$). Поскольку ΔE — конечная величина, то в основном приближении

$$\frac{\partial j}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma E + \theta \frac{dj_0}{dT} \right) = 0,$$

что дает связь между θ и E . Подставив найденное соотношение в уравнение теплопроводности, мы получим уравнение для θ в указанном приближении

$$\Delta \theta + \left(\frac{\bar{\rho}}{\tau} - \lambda \right) \theta = 0. \quad (3.11)$$

Это уравнение из качественных соображений было получено Хартон^{46, 47}.

К уравнению (3.11) следует, очевидно, поставить обычные тепловые граничные условия, после чего соответствующее решение легко может быть найдено для образцов с различной геометрией, распределением тока и магнитного поля; существование решений с $\lambda > 0$ означает потерю

устойчивости. Ясно, что во всех случаях решение существует, если

$$\sqrt{\frac{\bar{\beta}}{\bar{\tau}}} - \lambda = \gamma_1, \quad (3.12)$$

где γ_1 — некоторое, подлежащее определению, собственное число задачи. Из (3.12) следует, что $\lambda = \bar{\beta}/\bar{\tau} - \gamma_1^2$ и, следовательно,

$$\gamma^2 = \gamma_1^2 \bar{\tau}.$$

Использованное нами условие $\partial j / \partial t = 0$ означает, что в основном приближении при $\bar{\tau} \gg 1$ неустойчивость развивается при замороженном магнитном потоке. Уравнение (3.11) может быть получено и непосредственно из (3.6) в пределе $\bar{\tau}, \lambda \bar{\tau} \rightarrow \infty$. Приведенный вывод лишь поясняет характер протекания процесса.

В случае жесткого сверхпроводника устойчивость различных областей образца, отличающихся направлением тока, нарушалась независимо. В рассматриваемом случае $\bar{\tau} \gg 1$ неустойчивость возникает сразу во всем объеме сверхпроводника ($H_e \geq H_p$), поскольку $t_j \gg t_n$, и температура в образце успевает выравниваться. Поэтому в основном по $\bar{\tau} \gg 1$ приближении устойчивость не зависит от величины транспортного тока и определяется лишь размером $2b$ области, по которой течет ток (т. е. величиной тепловыделения)⁴⁵.

С помощью уравнения (3.11) и тепловых граничных условий нетрудно получить величину γ (см. 1.7) для произвольного теплоотода. В случае плоской пластины (см. рис. 7) для определения γ (W) имеем соотношение

$$\operatorname{tg}(\gamma \bar{\tau}^{-1/2}) = \frac{W \bar{\tau}^{1/2}}{\gamma}. \quad (3.13)$$

График зависимости $\gamma^2/\bar{\tau}$ от W изображен на рис. 16. В частности, если $W \ll 1$ (напомним, что $W \gg \bar{\tau}^{-1}$), из (3.13) следует

$$\gamma^2 = W \bar{\tau}. \quad (3.14)$$

При $W \rightarrow \infty$ из (3.13) следует основное приближение формулы (3.7 *).

Рассмотрим теперь, при каких условиях коллективные эффекты возникают в комбинированном сверхпроводнике из стабилизированных элементов ($b' < b'_c$; см. гл. 2, а). Из соотношения (3.14) в этом случае следует, что для

$$N > N_c \approx W \frac{\bar{\tau} \bar{\nu}}{\pi^2 v_{s0} x_s} \left(\frac{b'_c}{b'} \right)^2 \quad (W \ll 1)$$

система как целое становится неустойчивой. Характерное значение $W = 10^{-2}$, и при $\bar{\tau} = 10^3$ N_c оказывается порядка 1; тем самым для предотвращения скачков потока требуется применение специальных мер — скручивания, транспонирования^{41, 44, 80, 86, 90, 93}.

*) Отметим, что обычным условиям охлаждения сверхпроводника с медной или алюминиевой матрицей жидким гелием соответствует $W < 1$. Случай $W \gg 1$ можно реализовать, например, если поместить образец в достаточно массивную медную оболочку.

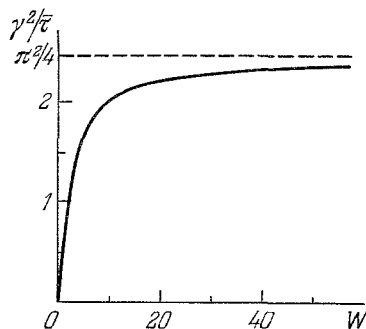


Рис. 16. Зависимость величины $\gamma^2/\bar{\tau}$ от теплоотода W для комбинированного сверхпроводника ($W \gg \bar{\tau}^{-1}$; $\bar{\tau} \gg 1$).

4. ЭКСПЕРИМЕНТЫ ПО СКАЧКАМ ПОТОКА, СРАВНЕНИЕ ТЕОРИИ И ЭКСПЕРИМЕНТА

Экспериментальному исследованию скачков потока посвящено значительное число работ. Однако преобладающее большинство из них с трудом поддается количественному сравнению с теорией и обнаруживает существенный разброс данных от работы к работе. Это обстоятельство не случайно и, в основном, связано с запаздыванием появления неустойчивости. Действительно, для возникновения скачка потока необходимо наличие флуктуации или соответствующего внешнего воздействия, причем это затравочное возмущение должно быть достаточно велико, чтобы перевести значительную часть объема сверхпроводника в режим течения потока.

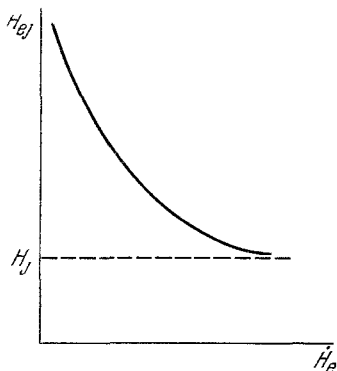


Рис. 17. Типичная зависимость H_{ej} от \dot{H}_e .

Таким образом, для определения истинной границы устойчивости критического состояния H_j необходимо в процессе эксперимента инициировать скачки потока (например, механическим ударом⁴⁸). Это обстоятельство не учитывалось в преобладающем большинстве работ и неустойчивость зачастую инициировалась случайными факторами.

Как уже отмечалось во введении, в экспериментах по исследованию устойчивости критического состояния внешнее магнитное поле меняется по определенному закону. В целом ряде работ^{24, 27, 30, 35, 49–60, 85, 91} изучалось влияние скорости роста магнитного поля \dot{H}_e на величину магнитного поля H_{ej} , при которой наблюдается скачок потока. Характер-

ная зависимость H_{ej} от \dot{H}_e показана на рис. 17. В условиях эксперимента, как легко оценить, заведомо выполняется соотношение $\dot{H}_e t_j \ll H_e$. Таким образом, как следует из теории, истинная граница устойчивости — поле H_j — не зависит от \dot{H}_e . Впервые это утверждение было сформулировано в работе³⁵, к этому же выводу на основе своих экспериментов пришли Харрисон и др.³⁰. Роль переменного внешнего поля сводится лишь к инициированию скачков потока. Легко понять, что такое инициирование будет достаточно эффективно ($H_{ej} \simeq H_j$ при отсутствии других «затравочных» воздействий), если электрическое поле E , вызываемое изменением H_e , в достаточно большой части объема превысит значение E_0 (см. рис. 3; $E > E_0$ соответствует выходу на режим течения потока). Такое объяснение легко позволяет понять и обнаруженный в ряде экспериментов выход зависимости $H_{ej}(\dot{H}_e)$ на постоянное значение *).

Рассмотрим теперь основные результаты экспериментальных исследований магнитных неустойчивостей в жестких сверхпроводниках и сравним их с теоретическими.

Как мы видели, скачки потока возникают, лишь если $\partial j_c / \partial T < 0$. Следовательно, в области пик-эффекта (см., например, ^{3, 4}), где $\partial j_c / \partial T > 0$, критическое состояние является абсолютно устойчивым^{61, 62, 79}. В целом ряде работ^{62–66} надежно установлено, что устойчивость растет

*) Отмеченный в некоторых работах рост величины H_{ej} в области весьма высоких \dot{H}_e , по-видимому, объясняется разогревом образца в процессе ввода в него внешнего потока^{50, 56}.

по мере уменьшения величины $|\partial j_c/\partial T|$ и скачки потока отсутствуют, если $\partial j_c/\partial T > 0$.

Весьма эффективно влияет на устойчивость теплоемкость образца. Соответствующая зависимость подробно исследована в целом ряде экспериментов. В частности, были изучены пористые сверхпроводники⁶⁷. При температуре ниже λ -точки гелий становится сверхтекучим и затекает в поры. Теплоемкость возрастает, соответственно увеличивается и величина H_j (см. работы^{23, 67, 68, 89}). В работе⁷⁷ было показано, что $H_j \sim \sqrt{v_s}$.

Зависимость устойчивости от температуры образца изучалась в работах^{20, 53-57, 69, 84, 95}. На рис. 18 приведены данные, полученные в работах^{54, 55} для синтетических образцов (викор с запрессованным в поры In). При скоростях ввода внешнего поля $\dot{H}_e > 10^2$ гс/сек поле скачка потока перестает зависеть от \dot{H}_e и естественно при этом считать, что $H_{ej} \approx H_j$ (см.^{54, 55}). Построенная с помощью формулы (2.14) кривая $H_j(T)$ обнаруживает хорошее согласие с экспериментом.

В работе²³ было показано, что в области внешних полей $H_e \leq H_p$ устойчивость не зависит от величины j_c (см. критерии (2.8) и (2.8')). При изменении j_c примерно втрое (что соответствовало увеличению магнитного поля H_e от 5 до 30 кс) H_j уменьшилось всего лишь на 5% (что можно, например, объяснить зависимостью $\partial j_c/\partial T$ от H : $\partial j_c/\partial T \sim -j_c/T (1 - H/H_{c2})$). В ряде последующих экспериментов наблюдались периодические скачки потока при увеличении внешнего поля^{20, 68, 95}. Увеличение внешнего поля ΔH_e между последовательными скачками мало зависело от H_e , что подтверждает, очевидно, вывод о независимости H_j от j_c .

Имеющиеся экспериментальные данные не позволяют выяснить влияние геометрии распределения токов и поля на устойчивость (см. гл. 2). Существование зависимости H_j от предыстории связано с ограниченностью образца в двух измерениях. Следовательно, наличие эффекта не зависит от конкретной формы проводника. Качественно это явление просматривается в ряде случаев (см., например,^{70, 71}).

Зависимость устойчивости от величины транспортного тока I ($H_e > H_p$) обнаружена в работе⁵⁷. При $I = 0$ скачки потока отсутствовали, а при $I > 0$ появлялись, что согласуется с предсказаниями теории.

Суттоном⁷² исследовалась устойчивость образца, состоявшего из двух сверхпроводящих пластин с различными по величине плотностями критического тока j_c (рис. 19), где $j_c (x < 0) = a j_c (x > 0)$. Граница устойчивости в этом случае, очевидно, является функцией толщины наружного слоя d (внутренний сверхпроводник можно считать полубесконечным) и параметра a . Экспериментально измерялось отношение (h_j) поля скачка потока двухслойного образца H_j^2 к полю скачка потока одного из образцов H_j^2 в зависимости от величины d/d_j (рис. 20, где $d_j = c H_j^2 / 4 \pi j_c$). Соответствующая задача легко решается с помощью уравнения (2.13). На рис. 20 теоретическая кривая, полученная нами, показана сплошной линией. Величи-

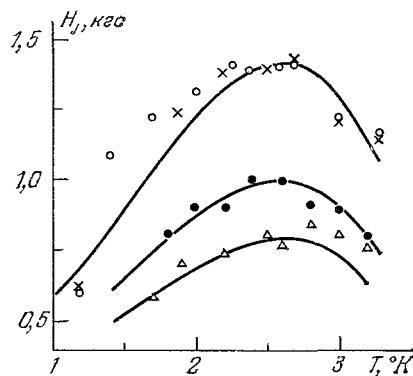


Рис. 18. Изменение величины H_j с температурой (сравнение теории и эксперимента).

Нанесены экспериментальные точки для четырех различных образцов. Теоретические кривые нанесены сплошной линией, неизвестные параметры подобраны методом наименьших квадратов.

на $a = 2,7$ подбиралась методом наименьших квадратов. Как видно, теория удовлетворительно описывает экспериментальную зависимость. Отметим еще, что для двухслойного образца максимальное значение $H_j^2 = 2H_j^1$ ($d \sim d_j$, $a \gg 1$).

Влияние внешних тепловых условий на положение границы устойчивости изучалось в работах ^{24, 28, 92}. В соответствии с теоретическими предсказаниями величина H_j слабо зависит от характера теплосъема.

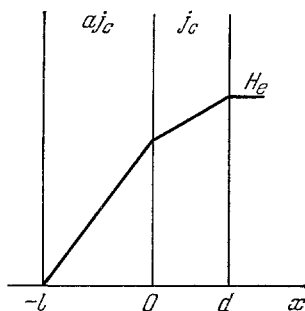


Рис. 19. Геометрия двухслойного образца.

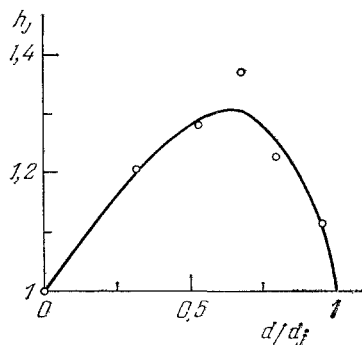


Рис. 20. Зависимость отношения $h_j = H_j^2/H_j^1$ от d/d_j для двухслойного образца.

Теоретическая кривая нанесена сплошной линией; параметр $a = 2,7$.

Время развития неустойчивости измерено в большом числе экспериментов ^{20, 28-30, 53, 73-75}. С той точностью, с которой возможно сравнение экспериментальных и теоретических результатов, согласие между ними является удовлетворительным. Отметим еще, что в работах ^{30, 76} наблюдалось увеличение характерного времени скачка потока с ростом проводимости нормального покрытия.

Институт высоких температур
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А. А. Абрикосов, ЖЭТФ **32**, 1442 (1957).
2. П. Де Жен, Сверхпроводимость металлов и сплавов, М., «Мир», 1968.
3. Д. Сан-Жам, Г. Сарма, Е. Томас, Сверхпроводимость второго рода, М., «Мир», 1970.
4. А. Кемпбелл, Дж. Иветс, Критические токи в сверхпроводниках, М., «Мир», 1975.
5. В. В. Шмидт, Г. С. Мкртчян, УФН **112**, 459 (1974).
6. C. J. Gorter, Phys. Lett. **1**, 69; **2**, 26 (1962).
7. P. W. Anderson, Phys. Rev. Lett. **9**, 309 (1962).
8. Y. B. Kim, C. F. Hempsted, A. R. Strnad, Phys. Rev. **129**, 528; **131**, 2486 (1963).
9. P. W. Anderson, Y. B. Kim, Rev. Mod. Phys. **36**, 39 (1964).
10. Y. B. Kim, C. F. Hempsted, A. R. Strnad, ibid., p. 43.
11. Y. B. Kim, C. F. Hempsted, A. R. Strnad, Phys. Rev. **139**, 1163 (1965).
12. R. P. Huebener, Phys. Rept. **13C**, 145 (1974).
13. Л. П. Горьков, Н. Б. Копнин, УФН **116**, 413 (1975).
14. C. P. Bean, Phys. Rev. Lett. **8**, 250 (1962).
15. C. P. Bean, Rev. Mod. Phys. **36**, 31 (1964).
16. H. London, Phys. Lett. **6**, 162 (1963).
17. T. W. Grasmehr, L. A. Finzi, IEEE Trans. Magnet. Mag-2, 334 (1966).
18. C. P. Bean, R. L. Fleischer, P. S. Swartz, H. R. Hart, J. Appl. Phys. **37**, 2218 (1966).
19. H. T. Coffey, Cryogenics **7**, 73 (1967).

20. Е. С. Боровик, Н. Я. Фогель, Ю. А. Литвиненко, ЖЭТФ 49, 438 (1965).
21. N. H. Zeboouni, A. Van Ratdram, G. N. Rao, C. G. Grenier, J. M. Reynolds, Phys. Rev. Lett. 13, 606 (1964).
22. Y. B. Kim, C. F. Hempsted, A. R. Strnad, Phys. Rev. 131, 2486 (1963).
23. R. Hancox, Phys. Lett. 16, 208 (1965).
24. K. Shiiki, M. Kudo, J. Appl. Phys. 45, 4074 (1974).
25. B. B. Goodman, M. R. Wertheimer, Phys. Lett. 18, 236 (1965).
26. J. R. Keyston, M. R. Wertheimer, Cryogenics 6, 341 (1966).
27. M. R. Wertheimer, J. G. Gilchrist, J. Phys. and Chem. Sol. 28, 2509 (1967).
28. R. B. Harrison, L. S. Wright, M. R. Wertheimer, J. Appl. Phys. 45, 403 (1974).
29. R. B. Harrison, L. S. Wright, M. R. Wertheimer, Phys. Rev. B7, 1864 (1975).
30. R. B. Harrison, J. P. Pendrys, L. S. Wright, J. Low. Temp. Phys. 18, 113 (1975).
31. B. K. Mukherjee, D. C. Barid, ibid. 16, 119 (1974).
32. М. Г. Кремлев, Письма ЖЭТФ 17, 312 (1973).
33. M. G. Kremlev, Cryogenics 14, 132 (1974).
34. R. G. Mints, A. L. Rakhmanov, J. Phys. D8, 1769 (1975).
35. S. L. Wipf, Phys. Rev. 161, 404 (1967).
36. P. S. Swartz, C. P. Bean, J. Appl. Phys. 39, 4991 (1968).
37. M. G. Kremlev, R. G. Mints, A. L. Rakhmanov, J. Phys. D9, 279 (1976).
38. R. G. Mints, A. L. Rakhmanov, IEEE Trans. Magnet Mag-13 (1) (1977).
39. R. G. Mints, A. L. Rakhmanov, J. Phys. D9, 2281 (1976).
40. Р. Г. Минц, А. Л. Рахманов, Письма ЖТФ 2, 502 (1976).
41. В. А. Альтов, В. Б. Зенкевич, М. Г. Кремлев, В. В. Сычев, Стабилизация сверхпроводящих магнитных систем, М., «Энергия», 1975.
42. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
43. T. Onishi, Cryogenics 14, 495 (1974).
44. M. N. Wilson, C. R. Walters, J. D. Lewin, P. F. Smith, A. H. Spurrway, J. Phys. D3, 1517 (1970).
45. М. Г. Кремлев, Р. Г. Минц, А. Л. Рахманов, ДАН 228, 85 (1976).
46. H. R. Hart, J. Appl. Phys. 40, 2085 (1969).
47. H. R. Hart, in: Proc. of 1968 Summer Study on Superconductor Devices (BNL), N.Y., Upton, 1969.
48. J. E. Evets, A. M. Campbell, D. Dew-Huges, Phil. Mag. 10, 339 (1964).
49. F. Rathwarf, R. C. Aulter, K. Golem, Bull. Am. Phys. Soc., ser. II, 7, 189 (1962).
50. F. Rathwarf, D. Ford, G. Articola, G. P. Segal, Y. B. Kim, J. Appl. Phys. 39, 2597 (1968).
51. J. M. Corsan, Phys. Lett. 12, 85 (1964).
52. S. L. Wipf, M. S. Lubell, ibid. 16, 403 (1965).
53. L. J. Neuringer, Y. Shapira, Phys. Rev. 148, 231 (1966).
54. J. H. P. Watson, J. Appl. Phys. 37, 516 (1966).
55. J. H. P. Watson, ibid. 38, 3813 (1967).
56. J. Chikaba, F. Irie, K. Yamafuji, Phys. Lett. A27, 407 (1968).
57. A. D. McIntuff, цит. в ⁴⁷ сборнике.
58. D. A. Grandolfo, L. Dubock, F. Rathwarf, J. Appl. Phys. 40, 2066 (1969).
59. M. S. Lubell, S. L. Wipf, ibid. 37, 1012 (1966).
60. S. V. Subramangam, V. Chopra, J. Low. Temp. Phys. 18, 113 (1975).
61. P. de Gennes, J. Sarma, Sol. State Comm. 4, 449 (1966).
62. J. D. Livingston, Appl. Phys. Lett. 8, 319 (1966).
63. H. R. Hart, J. D. Livingston, General Electric Research and Development Center, Preprint No 68-C-301, New York, 1968.
64. D. M. Kroeger, Sol. State Comm. 7, 843 (1969).
65. R. M. Scanlan, J. D. Livingston, J. Appl. Phys. 43, 639 (1972).
66. T. Onishi, K. Miura, ibid. 44, 455 (1973).
67. H. J. Goldsmid, J. M. Corsan, Phys. Lett. 10, 39 (1964).
68. F. Lange, Cryogenics 5, 143 (1965).
69. R. W. Meyerhoff, B. H. Heise, J. Appl. Phys. 36, 137 (1965).
70. T. Komata, K. Ishihara, M. Tanaka, Mitsubishi Denki Lab. Report (Magn. Eng. Department), April 1966.

71. H. Kobayashi, K. Yasukoshi, T. Ogasawara, Japan J. Appl. Phys. **9**, 889 (1970).
72. J. Sutton, J. Appl. Phys. **44**, 465 (1973).
73. P. S. Swartz, C. H. Rosner, *ibid.* **33**, 2292 (1962).
74. M. S. Lubell, G. T. Malick, B. S. Chandrasekhar, *ibid.* **35**, 956 (1964).
75. S. H. Goedemoed, C. Van Kolmenshate, J. W. Metselaar, D. De Klerk, Physica **31**, 573 (1965).
76. R. B. Harrison, L. S. Wright, Can. J. Phys. **52**, 1107 (1974).
77. P. O. Carden, Austr. J. Phys. **18**, 257 (1965).
78. P. H. Melville, Adv. Phys. **21**, 647 (1972).
79. S. L. Wipf, цит. в ⁴⁷ сборник.
80. P. F. Smith, M. N. Wilson, C. R. Walters, J. D. Lewin, *ibid.*
81. L. Boyer, G. Fournet, A. Mailfert, J. Noel, in: Proc. of LT-13, v. 3, N.Y. Plenum Press, 1974.
82. L. Boyer, G. Fournet, A. Mailfert, J. Noel, Rev. Phys. Appl. **6**, 501 (1971).
83. P. H. Melville, J. Phys. **D5**, 613 (1972).
84. F. Lange, P. Verges, Cryogenics **14**, 135 (1974).
85. N. Morton, Cryogenics **7**, 341 (1967).
86. J. Duchateau, B. Turk, Cryogenics **14**, 481, 545 (1974).
87. K. Kwasnitzer, Cryogenics **13**, 169 (1973).
88. E. W. Urban, Cryogenics **10**, 62 (1970).
89. P. S. Swartz, H. R. Hart, B. L. Freischer, Appl. Phys. Lett. **4**, 71 (1964).
90. A. D. McIntuff, J. Appl. Phys. **40**, 2080 (1969).
91. K. Shiiki, K. Aihara, Japan J. Appl. **13**, 1881 (1974).
92. S. Shimamoto, Cryogenics **14**, 568 (1974).
93. D. L. Coffey, W. F. Gauster, M. S. Lubell, J. Appl. Phys. **42**, 59 (1971).
94. P. H. Morton, in: Proc. of 11th Intern. Conference on Magnet Technology, Oxford, Hadley, 1967.
95. M. A. R. Leblanck, F. L. Vernon, Phys. Lett. **13**, 291 (1964).
96. Б. Г. Лазарев, С. И. Горидов, ДАН СССР **206**, 85 (1972).
97. I. D. McFarlane, D. Dew-Hughes, J. Phys. **D3**, 1423 (1970).