

537.565:546.34

**ПОДВИЖНОСТЬ ЗАРЯДОВ В ЖИДКОМ, ТВЕРДОМ  
И ПЛОТНОМ ГАЗООБРАЗНОМ ГЕЛИИ**

**B. B. Шикин**

СОДЕРЖАНИЕ

Введение . . . . .	457
1. Структура гелиевых ионов . . . . .	458
а) Положительные ионы (катионы) (458). б) Отрицательные ионы (анионы) (460). в) Анионы в газообразном и твердом гелии (462).	
2. Подвижность ионов в кинетическом режиме . . . . .	465
а) Фоновая подвижность (466). 1) Катионы (466); 2) Анионы (467). б) Подвижность ионов в слабых растворах (470). 1) Катионы (470); 2) Анионы (473). в) Ферми-частичная подвижность (475). г) Ротонная подвижность (479).	
3. Другие виды подвижности . . . . .	481
а) Стоксовская подвижность (481). б) Подвижность электронов в плотном газообразном гелии (485). в) Подвижность в твердом гелии (488). 1) Подвижность точечных заряженных дефектов (488). 2) Диффузионная подвижность анионов (490).	
Цитированная литература . . . . .	495

ВВЕДЕНИЕ

Введение заряженных частиц в плотный гелий \*) (твердый, жидкий или газообразный) приводит к образованию в нем различных сложных комплексов, состоящих из собственно заряженной частицы и окружающей области гелия, взаимодействующей с зарядом. Большое число эффектов с участием этих комплексов, получивших название гелиевых ионов, хорошие экспериментальные возможности и сравнительно четкая интерпретация основных наблюдаемых фактов стимулировали появление многочисленных работ, как экспериментальных, так и теоретических, составивших за короткое время (порядка 15—20 последних лет) целое направление в физике гелия.

Первоначально основные усилия исследователей были направлены на расшифровку структуры гелиевых ионов. В настоящее время, благодаря в основном работам Вильямса, Шальникова, Мейера, Райфа, Аткинса, Феррела, Карери, Рейфилда и др.— вопрос о структуре гелиевых ионов в объеме жидкого гелия исследован практически полностью. Изложение результатов этих исследований для зарядов, находящихся в однородном гелии, приведено в первой части обзора.

Другой, гораздо более обширный круг задач возникает при интерпретации экспериментальных данных о подвижности гелиевых ионов

\*) Методы введения ионов в гелий и измерения их подвижности аналогичны классическим методам изучения подвижности ионов в газах (см., например, обзор Смирнова <sup>20</sup>).

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1977 г.

в разных конкретных условиях по температуре, напряженности ведущего поля, концентрации примесных возбуждений и т. д. Следует заметить, что подвижность заряженных частиц является наиболее доступной для измерения характеристикой ионов. Поэтому понимание свойств гелиевых ионов во многом определяется состоянием теории подвижности соответствующих ионов. Кроме того, наблюдая за поведением ионов в гелии и умев объяснить это поведение, можно, как правило, из данных о подвижности извлекать интересную информацию о свойствах самого жидкого гелия. Описание простейших динамических свойств гелиевых ионов, медленно движущихся в однородной среде под действием слабого электрического поля, составляет содержание второй части обзора.

Количественная интерпретация экспериментальных данных о подвижности гелиевых ионов, так же как и исследование тепловых свойств самого жидкого гелия, возможна лишь в определенных температурных интервалах. Речь идет о:

- а) низкотемпературной области с хорошо определенными понятиями тепловых, примесных возбуждений и длиной пробега возбуждений  $l$  больше размеров ионов  $R$ ,  $l > R$ ;
- б) гидродинамической области,  $l < R$ ;
- в) окрестности  $\lambda$ -точки.

Кроме того, заслуживают внимания свойства подвижности зарядов в плотном газообразном и твердом гелии.

Учитывая большой объем информации о подвижности гелиевых ионов, удобно разделить изложение второй части на две главы. В одной из них речь будет идти о подвижности зарядов в кинетическом режиме. В другой собраны сведения об остальных видах подвижности.

## 1. СТРУКТУРА ГЕЛИЕВЫХ ИОНОВ

В однородном гелии наблюдаются по крайней мере три качественно различных ионных комплекса: положительные ионы, отрицательные ионы и заряженные вихревые кольца. Кроме того, в роли независимых ионных образований следует назвать поверхностные заряженные состояния, существующие вблизи границы жидкость — пар жидкого гелия. Разнообразие возможностей приводит к необходимости расчленения общей ионной проблемы на ряд «автономных» областей. Рамки одной из таких областей намечены во введении. Речь идет об изучении подвижности ионов в однородной среде и при малых скоростях. В подобных условиях необходимо определение лишь положительного и отрицательного ионов.

### а) Положительные ионы (катионы)

Положительными ионами, или катионами, в жидком гелии обычно называют заряженные частицы с затравочной массой порядка массы атома гелия. Для описания различных свойств таких частиц в жидком гелии существенным оказывается учет поляризационного взаимодействия заряда с окружающим гелием. Это обстоятельство, впервые отмеченное Аткинсоном<sup>1</sup>, позволило ему предложить простую модель катиона в виде заряда, окруженного сферой затвердевшего гелия. Радиус сферы определяется следующим образом. Электрическое поле точечного заряда  $E = e/r^2$  вызывает в окружающей жидкости избыточное давление  $P_\alpha$  поляризационного происхождения

$$P_\alpha = \frac{\alpha e^2}{2v_4 r^4}, \quad r > a, \quad (1.1)$$

спадающее на расстоянии степенным образом ( $\alpha$  — атомная поляризуемость,  $v_4$  — эффективный объем на 1 атом жидкости,  $r$  — расстояние до центра иона,  $a$  — межатомное расстояние).

Учитывая теперь, что при давлении  $P_s \approx 25$  атм жидкий гелий затвердевает, находим из равенства  $P_\alpha(r) = P_s$  величину радиуса затвердевания  $R_+$

$$R_+^4 = \frac{\alpha e^2}{2v_4 P_s}. \quad (1.2)$$

Макроскопическое определение радиуса  $R_+$  (1.2) имеет смысл при выполнении неравенства  $R_+ \gg a$ . Численные оценки  $R_+$  с использованием значений  $\alpha = 5 \cdot 10^{-25} \text{ см}^3$ ,  $v_4 \approx a^3$  дают для  $R_+$  величину  $R_+ \approx 6-7 \text{ \AA}$  при  $a \approx 3,5 \text{ \AA}$ . Другими словами, неравенство  $R_+ > a$  действительно выполняется, но с малым запасом.

Эффективная масса  $M_+$  кationa в модели Аткинса складывается из массы твердого ядра радиуса  $R_+$ , массы от избыточной плотности жидкости вокруг ядра и присоединенной массы. В результате  $M_+$  имеет масштаб  $M_+ \approx 60-80 m_{\text{He}^4}$ . Специфика жидкого гелия оказывается в описанной модели в том, что благодаря низкому давлению затвердевания даже малой поляризуемости достаточно для образования квазимакроскопической области затвердевшего гелия вокруг положительного заряда, вызывающей резкое возрастание эффективной массы кationa и уменьшение его подвижности.

Простота и физическая наглядность модели Аткинса привели к тому, что в последующих работах все наблюдаемые свойства кationов пытались объяснить в рамках модели твердого шарика. Наиболее полно соответствующая теория изложена в обзоре Архипова<sup>2</sup>. Однако к настоящему времени накопилось достаточное число фактов, не укладывающихся в рамки модели Аткинса и требующих для своего объяснения более последовательного, чем в указанной модели, учета взаимодействия зарядов с жидким гелием. Примеры такого несоответствия будут обсуждаться ниже. Тем не менее, модель Аткинса сохраняет свое значение в качестве исходного приближения, позволяющего оценивать масштаб различных эффектов.

При более последовательном описании свойств кationa в качестве основных его характеристик следует назвать зону избыточного давления  $P_\alpha$  (1.1) и величину эффективной массы  $M_+$ , измеренную экспериментально<sup>3</sup>). Резонансная методика измерения  $M_+$ <sup>4, 5 \*\*)</sup> дает для  $M_+$

\*) Стругий теоретический расчет  $M_+$  пока отсутствует, хотя попытки его осуществления имеются<sup>3</sup>.

\*\*) Гелиевые ионы, находящиеся вблизи поверхности пар — жидкость, отталкиваются от нее электростатической силой изображения

$$F = \left( \frac{e}{2x} \right)^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon(\varepsilon + 1)} ; \quad (*)$$

$x$  — расстояние иона до поверхности,  $\varepsilon$  — диэлектрическая постоянная жидкости (для газа  $\varepsilon \approx 1$ ),  $\varepsilon - 1 = 0,06$ ;  $F > 0$  соответствует отталкиванию. Компенсируя действие силы (\*) внешним полем  $E_\perp$ , прижимающим ион к поверхности, можно фиксировать положение иона на любой заданной глубине  $x_0$  от поверхности

$$x_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{e}{E_\perp}} \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon(\varepsilon + 1)}. \quad (**)$$

Эта возможность оказывается очень удобной для наблюдения ряда эффектов. В частности, вблизи  $x_0$  имеют место малые собственные колебания ионов<sup>4</sup> с характер-

значение

$$M_+ = (45 \pm 2) m_{\text{He}^4}, \quad (1.3)$$

заметно отличающееся от оценки  $M_+$  в модели Аткинса. Что касается радиуса  $R_+$ , то в последовательной теории он не играет универсальной роли и, в принципе, может вообще не использоваться.

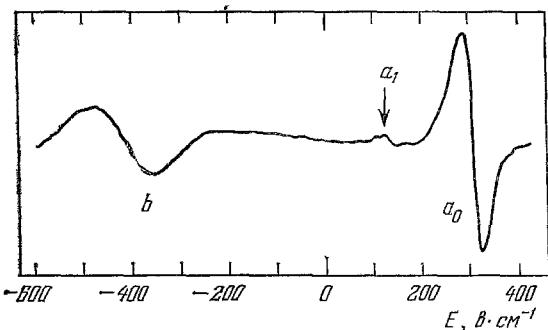


Рис. 1. Резонансные линии для катионов ( $a_0$ ) и анионов ( $b$ ) при частоте  $208 \text{ MHz}$  и  $T = 0,7 \text{ }^\circ\text{K}$ <sup>5</sup>. Для катионов видна также первая гармоника ( $a_1$ ). Внешняя частота в этом эксперименте фиксирована, а собственные частоты ионов меняются с помощью прижимающего электрического поля, напряженность которого отложена по оси абсцисс.

Образование пузырьков становится возможным благодаря стечению ряда обстоятельств. Во-первых, отдельный атом гелия, являясь устойчивой квантовой системой, не присоединяет к себе избыточного электрона на расстояниях порядка боровской орбиты. По этой причине свободный электрон, искусственно введенный в плотный гелий и вынужденный двигаться на межатомных расстояниях вблизи отталкивающих его отдельных атомов, обладает большой энергией нулевых колебаний  $W_e$ . В оптической модели, широко используемой в настоящее время для описания взаимодействия электронов с плотным гелием, эта энергия оценивается следующим выражением:

$$W_e = \frac{2\pi\hbar^2 a_0}{m_e} n, \quad (1.4)$$

где  $n$  — плотность гелия,  $m_e$  — масса электрона,  $a_0$  — эффективная длина рассеяния электрона на атоме гелия. Численное значение  $a_0$  выбирается таким, чтобы величина  $W_e$ , следующая из (1.4) при  $n \approx 2 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ , совпадала с экспериментально измеряемой работой внедрения электрона в жидкий гелий  $W_e \approx 1,0 \text{ эв}$ <sup>8</sup>. Отсюда  $a_0 \approx 0,62 \text{ \AA}$ . Еще одно свойство гелия, способствующее образованию пузырьков — малая величина поверхностного натяжения на границе жидкость — пар жидкого гелия. Вследствие этого полная энергия образования пузырька  $W$ , допускающая простую оценку, оказывается много меньше  $W_e$ , так что электрону действительно выгодно локализоваться, создавая пузырек.

ной частотой  $\omega_0$ :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{2M_\pm} \frac{e^2 (\varepsilon - 1)}{x_0^3 (\varepsilon + 1)}, \quad (***)$$

$M_\pm$  — эффективная масса катиона (аниона). Экспериментальное определение частоты  $\omega_0$  дает прямую информацию об эффективной массе  $M_\pm$ . Соответствующие эксперименты выполнены Путатреном и Вильямсом в работе<sup>5</sup>. Типичная резонансная кривая поглощения ионами ВЧ-поля приведена на рис. 1.

Оценка параметров аниона, выполненная впервые Феррелом<sup>6</sup> и несколько позднее Карери, Фазоли и Гаэтой<sup>7 \*</sup>), элементарна и в то же время достаточно точна ввиду квазимакроскопичности возникающего комплекса (формально ввиду малости параметра  $m_e/m_{\text{He}^4} \ll 1$ ). Речь идет о минимизации полной энергии аниона

$$W = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m_e R^2} + 4\pi\sigma R^2$$

по радиусу  $R$ ; здесь  $m_e$  — масса свободного электрона,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения на свободной поверхности гелия. В результате

$$R_-^4 = \frac{\pi\hbar^2}{8m_e\sigma}, \quad (1.5)$$

после чего энергия  $W$  принимает вид

$$W = 4\pi\hbar \sqrt{\frac{\pi\sigma}{2m_e}}. \quad (1.5a)$$

Численное значение  $R_-$  в жидком  $\text{He}^4$  при  $\sigma = 0,36 \text{ эрг/см}^2$  оказывается порядка  $R_- \approx 18 \text{ \AA}$ . При этом  $W$  из (1.5a)  $\approx 0,1 \text{ эв}$ , т. е.  $W \ll W_e$ , и локализация электрона явно выгодна.

Следует отметить, что в обычных условиях, когда внешнее давление отсутствует, поляризационные силы, играющие основную роль в формировании катионов, практически не «ощущимы» при образовании пузырька благодаря хорошо выраженному неравенству  $R_- \gg R_+$ .

Пренебрегая поляризацией гелия вокруг аниона и учитывая малость массы электрона, легко заключить, что эффективная масса аниона  $M_-$  должна совпадать с его присоединенной гидродинамической массой

$$M_- = \frac{2}{3} \pi R_-^3 \rho \quad (1.6)$$

( $\rho$  — весовая плотность гелия).

Резонансное измерение  $M_-$  дает следующий результат<sup>5</sup>:

$$M_- = (243 \pm 5) m_{\text{He}^4}, \quad (1.6a)$$

что соответствует значению

$$R_- = (1,74 \pm 0,02) \cdot 10^{-7} \text{ см}. \quad (1.7)$$

Согласие между теоретическим (1.5) и экспериментальным (1.7) значениями  $R_-$  следует признать вполне удовлетворительным. Это соответствие можно улучшить, решив задачу о локализации электрона более тщательно. Авторы<sup>10</sup>, осуществившие эту программу, нашли теоретическое значение  $R_-$ , равным 17,0  $\text{\AA}$ .

\* ) Возможность образования легкими частицами (электроном, позитронием и т. д.), введенными в гелий, локализованных состояний внутри пустого пузырька, была впервые отмечена Феррелом<sup>6</sup> в связи с особенностями поведения орто- и пара-позитрония в жидком гелии. Однако исчерпывающее доказательство существования пузырьков стало возможным лишь при введении в гелий легких заряженных частиц (электронов)<sup>7</sup>. В настоящее время возникновение заряженных пузырей наблюдается и в других неполярных жидкостях: неоне и водороде<sup>9a</sup>. Интересно отметить, что введение в плотный газообразный гелий позитронов приводит к возникновению не пузырьков, а кластеров<sup>9b</sup>.

## в) Анионы в газообразном и твердом гелии

1) В газообразном гелии, меняя плотность среды в широких пределах, удается проследить за процессом возникновения электронных связанных состояний. Подобная возможность прекрасно иллюстрируется экспериментами Левина, Сандерса<sup>11</sup>, измерившими подвижность свободных электронов в плотном газообразном  $\text{He}^4$ .

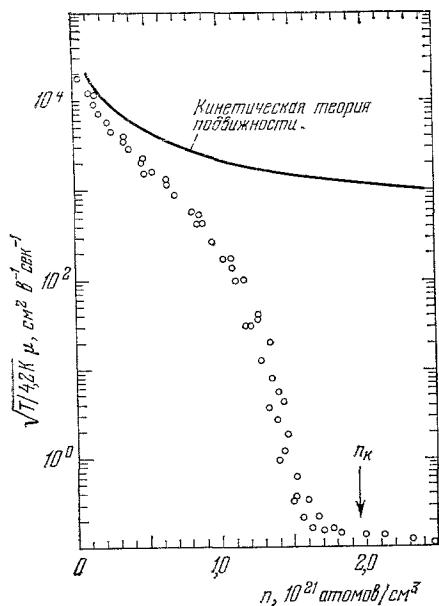


Рис. 2. Подвижность электронов в газообразном гелии при  $T = 4,2 \text{ K}$ <sup>11</sup>. Стрелкой отмечено расчетное значение  $n_k$ .

внешних полей. Это обстоятельство позволяет создавать в переходной области  $n$  довольно разнообразные связанные состояния, качественно отличные от связанных состояний в жидкости.

Уравнения, определяющие самосогласованные связанные состояния электрона в газообразном гелии, могут быть получены, как обычно, путем минимизации свободной энергии системы. Будем считать, что дебройлевская длина волны электрона значительно превосходит среднее расстояние между атомами гелия; при этом электрон находится в усредненном поле, создаваемом атомами гелия, которое определяется их концентрацией  $n(\mathbf{r})$ . Кроме того, для дальнейшего оказывается интересным наличие в задаче постоянного однородного магнитного поля.

Вклад взаимодействия между электроном и газом в плотность свободной энергии может быть записан по аналогии с (1.4) в виде

$$\tilde{F}_{\text{int}} = \frac{2\pi\hbar^2 a_0}{m_e} n(\mathbf{r}) |\varphi(\mathbf{r})|^2, \quad (1.8)$$

где  $a_0$  — длина рассеяния электрона на атоме гелия в приближении псевдопотенциала ( $a_0 = 0,62 \text{ \AA}$ );  $\varphi(\mathbf{r})$  — волновая функция электрона;  $m_e$  — его масса. Таким образом, если пренебречь взаимодействием между атомами гелия и считать газ классическим, то плотность свободной энергии

электронов в плотном газообразном  $\text{He}^4$ . На рис. 2 приведены данные<sup>11</sup> для подвижности электронов в слабом ведущем поле в зависимости от плотности газа. Как видно из рис. 2, критическая плотность газа, разделяющая области существования сильно и слабо локализованных электронных состояний, лежит в окрестности  $n_k \sim 10^{21} \text{ см}^{-3}$ . В этой области, при изменении плотности газа всего в тричетыре раза, подвижность носителей тока падает примерно на пять порядков, начиная от значений, которые хорошо согласуются с расчетами по обычной газокинетической теории для свободных электронов, до величины, почти равной подвижности анионов в жидком гелии. Такое резкое уменьшение подвижности Левин и Сандерс вполне разумно связывают с началом образования анионов в плотном газообразном гелии.

В области своего зарождения локализованные состояния еще достаточно «мелки», и потому весьма чувствительны к влиянию различных

системы во внешнем поле с векторным потенциалом  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  имеет вид

$$\tilde{F} = \frac{1}{2m_e} \left| \left( \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi \right|^2 + \tilde{F}_{\text{int}} + nT \ln(nB), \quad (1.9)$$

где  $B(T)$  — известная функция температуры.

Варьируя свободную энергию  $F = \int_V \tilde{F} dV$  по  $n(\mathbf{r})$  и  $\varphi(\mathbf{r})$  при постоянном объеме системы  $V$  и при условии

$$\int |\varphi(\mathbf{r})|^2 dV = 1,$$

получим в пределе  $V \rightarrow \infty$ ,  $N/V \rightarrow n_0$

$$n(\mathbf{r}) = n_0 \exp \left( -\frac{\psi}{T} \right), \quad (1.10)$$

$$\psi = \frac{2\pi\hbar^2 a_0}{m_e} |\varphi(\mathbf{r})|^2, \quad (1.10a)$$

$$F = \int \left[ \frac{1}{2m_e} \left| \left( \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \varphi \right|^2 + n_0 T (1 - e^{-\psi/T}) \right] dV + n_0 T \ln(n_0 B). \quad (1.11)$$

Второе слагаемое в (1.11) — свободная энергия идеального газа.

Нормированная экстремаль  $\varphi(r)$  функционала (1.11) удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2m_e} \left( \hat{\mathbf{p}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 \varphi + \\ & + \frac{2\pi\hbar^2 a_0}{m_e} n(\mathbf{r}) \varphi = \lambda \varphi. \end{aligned} \quad (1.12)$$

В отсутствие магнитного поля волновая функция локализованного электрона сферически-симметрична. Положим для простоты

$$\varphi(\mathbf{r}) = \pi^{-1/2} k^{3/2} \exp(-kr).$$

При этом изменение свободной энергии  $\delta F_0(k)$ , вызванное локализацией электрона

$$\begin{aligned} \delta F_0(k) = & F_0(k) - n_0 T \ln \times \\ & \times (n_0 B) - \frac{2\pi\hbar^2 a_0 n_0}{m_e} \end{aligned}$$

и записанное в безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} \kappa = & \frac{k}{k_0}, \quad \tilde{n} = \frac{n}{n^*}, \quad \delta F_0 = \frac{\delta F}{\varepsilon_0}, \\ k_0^3 = & \frac{m_e T}{2\hbar^2 a_0}, \quad n^* = \frac{1}{2\pi a_0} \left( \frac{m_e T}{2\hbar^2 a_0} \right)^{2/3}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m_e}, \end{aligned} \quad (1.13)$$

оказывается равным<sup>12</sup>

$$\delta F_0(\kappa) = \kappa^2 + \tilde{n} \left[ \frac{1}{3} \int_0^\infty s^3 e^{-s} \exp(-\kappa^3 e^{-s}) ds - 2 \right]. \quad (1.14)$$

Графики  $\delta F_0(\kappa)$ , построенные с помощью определения (1.14) для разных  $\tilde{n}$ , приведены на рис. 3 (кривые 1—5). Связанные электронные состояния, отвечающие отрицательному минимуму  $\delta F_0(\kappa)$ , появляются

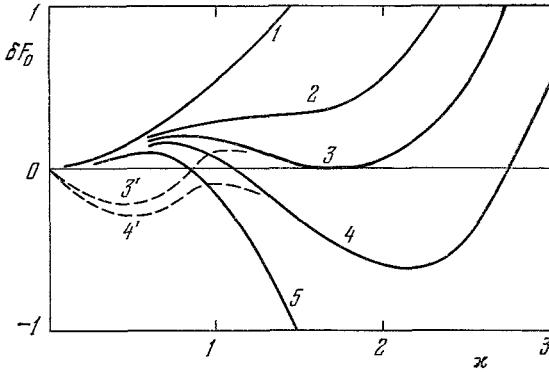


Рис. 3. Зависимость  $\delta F_0$  от  $\kappa$  для разных  $\tilde{n}$ . Кривым 1—5 в порядке возрастания номера соответствуют значения  $\tilde{n} = 4, 6, 7, 8, 10$ . Штриховые графики изображают зависимость  $\delta F_0$  от  $\kappa$  при малых  $\kappa$ . Кривые 3' и 4' — соответственно для  $\tilde{n} = 7$  и 8.

здесь начиная с  $\tilde{n} \geq n_k \approx 7$ . В размерных единицах при  $T \approx 4$  °К величина  $n_k \approx 2,10^{21}$  см<sup>-3</sup> и  $k_{kp}^{-1} \approx 1,6 \cdot 10^{-7}$  см. Для таких значений критических параметров выполняется неравенство

$$\gamma \equiv \frac{\psi(0)}{T} \gg 1, \quad (1.15)$$

т. е. согласно (1.10) в области локализации электрона  $n(r) \ll n_0$ , что может служить оправданием модели пустотного шарика.

Интересно отметить, что согласно (1.13) критическая плотность  $n_k \sim T^{2/3}$ . Определяя условно величину  $n_k$  как окончание переходной области на графике зависимости подвижности электронов в функции от плотности газа \*) и используя экспериментальные данные о подвижности

электронов в газе для разных температур<sup>14</sup>, можно получить сравнительный график экспериментальных и теоретических значений  $n_k(T)$ , представленный на рис. 4\*\*). Эксперимент подтверждает зависимость  $n_k \sim T^{2/3}$ .

В присутствии сильного магнитного поля, направленного вдоль оси  $z$ , инфинитное движение электрона сохраняется лишь вдоль  $z$ . Но в одномерных задачах любое взаимодействие, играющее роль потенциальной ямы для электрона, должно приводить к возникновению связанных электронных состояний (в трехмерных задачах эта яма должна иметь конечную глубину). Именно по этой причине взаимодействие (1.8), стимулирующее деформацию плотности газа в окрестности существования электрона

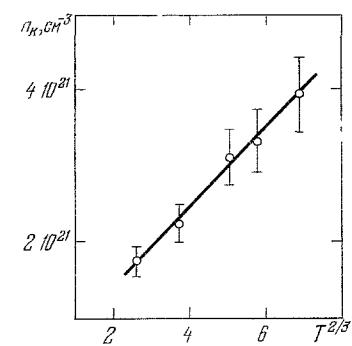


Рис. 4. Зависимость  $n_k$  от температуры по данным<sup>14</sup>.

(деформированная плотность газа играет роль эффективной потенциальной ямы для электрона), при включенном магнитном поле оказывается достаточным для локализации движения электрона и вдоль оси  $z$ . Механизм этой локализации, в отличие от рассмотренной выше, не имеет порога по плотности газа, и потому локализованные состояния магнитного происхождения существуют и в области  $n < n_k$ . Наиболее характерным признаком подобных локализованных состояний, получивших название ионов большого радиуса, является малая деформация плотности газообразного гелия в области локализации электрона, что формально соответствует малости параметра  $\gamma \ll 1$  (в отличие от ионов малого радиуса, для которых, как отмечалось выше,  $\gamma \gg 1$ ). Используя малость  $\gamma$ , так что

$$1 - \exp\left(-\frac{\psi}{T}\right) \approx \frac{\psi}{T} - \frac{\psi^2}{2T^2},$$

и полагая

$$\varphi(r, z) = (2\pi)^{-1/2} r_0^{-1} \exp\left(-\frac{r^2}{4r_0^2}\right) \chi(z), \quad r^2 = x^2 + y^2, \quad r_0^2 = \frac{c\hbar}{eH},$$

удается аналитически решить уравнение Эйлера типа (1.12) для  $\chi(z)$ , возникающего при варьировании функционала (1.11), усредненного по  $r$ <sup>12</sup>,

$$\chi(z) = \pm (2R_z)^{-1/2} \operatorname{ch}^{-1} \frac{z-z_0}{R_z}, \quad (1.16)$$

\*) Результат  $n_k \sim T^{2/3}$  получен также в работе Храпака и Якубова<sup>13</sup>.

\*\*) Аргументация в пользу такого определения  $n_k$  приведена в разделе б) гл. 3.

где  $z_0$  — произвольная постоянная, а  $R_z$  и энергия локального состояния  $\lambda_0$  равны

$$R_z = \frac{2m_e T}{\pi \hbar^2 n_0} \left( \frac{r_0}{a_0} \right)^2, \quad \lambda_0 = -\frac{\hbar^2}{2m_e R_z^2}.$$

Собственная энергия иона большого радиуса, представляющая собой чистый выигрыш в свободной энергии системы, связанный с локализацией, равна  $1/3 |\lambda_0|$ . Приведем численные значения характеристик иона большого радиуса для  $n_0 = 2 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$ ;  $T = 4^\circ\text{K}$  и  $H = 5 \cdot 10^5 \text{ гс}$ :

$$r_0 \approx 3 \cdot 10^{-7} \text{ см}, \quad R_z = 8 \cdot 10^{-7} \text{ см}, \quad |\lambda_0| \approx 20^\circ\text{K}, \quad \gamma = 0,1. \quad (1.16a)$$

Графики зависимости  $\delta F_H(\chi)$  от  $\chi$  при  $\tilde{n} = 7,8$ , как видно из рис. 3, на котором они нанесены штриховой линией, имеют минимумы и при  $n < n_K$ .

2) Экспериментальное изучение подвижности ионов в твердом гелии технически более сложно, чем в жидкости и газе. Тем не менее, первые успешные результаты, полученные Шальниковым с сотрудниками<sup>15</sup>, а также другими авторами<sup>16</sup>, свидетельствуют о реальности экспериментального решения обсуждаемой задачи.

Недостаток экспериментальной информации и отсутствие последовательной теории приводят к неоднозначности описания структуры ионных образований в твердом гелии. Так, рассуждения, аналогичные жидкостным, позволяют говорить о сложных катионных и анионных образованиях в твердом гелии. В частности, радиус пустотного пузырька, возникающего в твердом гелии, находящемся под давлением  $\sim 25-30 \text{ atm}$ , при введении в него свободного электрона, оказывается порядка  $R_- \approx 10-12 \text{ \AA}$ <sup>17</sup> и слабо меняется с ростом давления<sup>18</sup>. Естественно, что подобные комплексы не могут свободно перемещаться по решетке гелия как хорошо определенные квазичастицы с заданным импульсом. Другими словами, природа подвижности массивных гелиевых ионов в твердом гелии качественно отлична от жидкостной. Однако сравнительно небольшие размеры  $R_-$  по отношению к межатомному расстоянию  $a \approx 3,5 \text{ \AA}$  не позволяет считать изложенную точку зрения на структуру ионов в твердом гелии бесспорной.

Альтернативная возможность предложена и детально исследована в работах Андреева, Мейеровича<sup>19</sup>. Авторы<sup>19</sup> считают ионы в твердом гелии простыми точечными дефектами, занимающими объем порядка одной элементарной ячейки кристалла. В результате динамические свойства ионов становятся идентичными свойствам вакансий и незаряженных примесей. Теория подвижности ионов в рамках сделанных предположений существенно опирается на квантовые представления о свойствах точечных дефектов в твердом гелии и оказывается весьма плодотворной. Большим достоинством данного подхода является симметрия выводов теории по отношению к положительным и отрицательным ионам.

## 2. ПОДВИЖНОСТЬ ИОНОВ В КИНЕТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ

При низких температурах величина подвижности гелиевых ионов имеет конечное значение, в основном за счет одиночных столкновений с тепловыми и примесными возбуждениями гелия. Формальной основой для расчета подвижности в подобных условиях является решение соответствующего кинетического уравнения, либо более общие построения, использующие формализм Кубо. Учитывая, что основные экспериментальные факты находят свое объяснение в рамках кинетической теории, мы ограничимся в дальнейшем изложением следствий именно такого рассмотрения.

Классическая теория подвижности ионов в газах, созданная трудами Максвелла, Больцмана, Ланжеvена, Чепмена — Энскога, Кихары и т. д. содержит исчерпывающие рекомендации о методах решения кинетического уравнения (см. по этому поводу, например, обзор Смирнова<sup>20</sup>). Тем не менее, современные авторы обращаются к задаче определения подвижности снова и снова, упрощая ее решение и уточняя границы применимости. В связи с этим имеет смысл записать без вывода общее выражение для подвижности  $\mu$  тяжелой частицы массы  $M$  в газе тепловых возбуждений массы  $m$ , имеющих закон дисперсии  $\epsilon(\mathbf{p})$ , распределение по энергиям  $n(\epsilon)$  и импульс  $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ , сославшись, например, на работу<sup>21</sup>:

$$\frac{e}{\mu} = -\frac{m^2}{3} \left( \frac{m}{2\pi\hbar} \right)^3 \int \frac{\partial n}{\partial \epsilon} \sigma_{tr}(\epsilon) v^3 d\mathbf{v}, \quad (2.1)$$

$$\sigma_{tr} = \int \sigma(v, \theta) (1 - \cos \theta) d\Omega$$

— транспортное сечение рассеяния.

Авторы<sup>21</sup> показали, что определение (2.1) законно не только при выполнении неравенства

$$\sqrt{\frac{m}{M}} \ll 1, \quad (2.3)$$

но и в более сложных случаях (например, в вырожденных растворах  $\text{He}^3 - \text{He}^4$ ), когда малым параметром теории оказывается величина

$$\sqrt{\frac{m\epsilon_F}{MT}} \ll 1, \quad (2.2a)$$

$\epsilon_F$  — энергия Ферми,  $T$  — температура.

Эквивалентное и, по-видимому, наиболее простое определение подвижности в терминах волновых чисел, удобное для вычисления фононной подвижности ионов, содержится в работе Бейма, Барреры, Петтика<sup>22</sup>,

$$\frac{e}{\mu} = -\frac{\hbar^2}{6\pi^2} \int dq q^4 \frac{\partial n}{\partial q} \sigma_{tr}(q). \quad (2.3)$$

Таким образом, задача теории сводится, по существу, к определению транспортного сечения рассеяния возбуждений данного сорта на гелиевых ионах и последующему интегрированию выражений (2.1), либо (2.3).

### a) Фононная подвижность

1) Катионы. Фононная подвижность положительных ионов в области температур  $T \lesssim 0,5 \text{ } ^\circ\text{K}$  определяется в основном столкновениями катиона с длинноволновыми фононами. В самом деле, радиус катиона  $R_+ \approx 6 \text{ \AA}$ , длина волны  $\lambda_{ph}$  теплового фонона в области температур  $T \lesssim 0,5 \text{ } ^\circ\text{K}$  при скорости звука в  $\text{He}^4 c_0 = 237 \text{ м/сек}$  имеет порядок  $\lambda_{ph} \approx \approx 3,10^{-7} \text{ см}$ , т. е.  $R_+ \ll \lambda_{ph}$ . В подобных условиях сечение рассеяния длинноволновых фононов на катионе имеет вид  $\sigma_{tp} \propto q^4$  (рэлеевское рассеяние; см.<sup>23</sup>, с. 366):

$$\sigma_{tr}(q) = \frac{11 + 28^2 - 4\delta}{9(1+\delta)^2} R_+^6 q^4, \quad \delta = \frac{\rho_{jk}}{\rho_t}, \quad (2.4)$$

$\rho_{jk}$ ,  $\rho_t$  — плотности жидкости и твердой сферы.

Фононная подвижность катионов  $\mu_{ph}^+$ , следующая из (2.3), (2.4), оказывается пропорциональной  $T^{-8}$

$$\frac{e}{\mu_{ph}^+} = \frac{2 \cdot 8! \zeta(8)}{27\pi} \frac{(11 - 4\delta + 2\delta^2)}{(2 + \delta)^2} \hbar \left( \frac{T}{\hbar c_0} \right)^8 R_+^6, \quad (2.5)$$

$\zeta(x)$  — римановская дзета-функция. Четыре степени температуры в  $\mu_{ph}^+$  происходят от сечения рассеяния, три — от количества фононов в жидком гелии при низких температурах и одна степень характеризует передачу импульса от фононов иону.

Наиболее четкие экспериментальные сведения о фононной подвижности катионов получены в работе Шварца и Старка<sup>24</sup>. Нужно сказать, что наблюдение фононной подвижности катионов в чистом виде оказывается довольно сложной экспериментальной задачей. Со стороны высоких температур эта подвижность сменяется ротонной, а в области низких температур становится заметным влияние остаточных примесей. Результаты измерений для  $\mu^+$  вместе с предполагаемыми вкладами в  $\mu^+(T)$  ротонов, фононов и примесных возбуждений приведены на рис. 5. Количественная обработка данных рис. 5 позволяет заключить, что

$$\mu_{ph}^+ \sim T^{-\alpha}, \quad \alpha = 7.5 \pm 1, \quad R_+ \approx 5 \text{ \AA}, \quad (2.6)$$

т. е. температурная зависимость  $\mu_{ph}^+$  близка к расчетной, но численное значение  $R_+$  меньше, чем это следует из модели Аткинса. Подобное несоответствие вполне допустимо, так как константа пропорциональности в зависимости  $\sigma_{tr}(q)$  (2.4) весьма условна. Так, например, отказавшись от модели твердого шарика и учитывая лишь существование зоны уплотнения вокруг затравочного заряда, можно получить сечение длинноволновых фононов на катионе в следующем виде<sup>25</sup>:

$$\sigma(\omega) = 4\pi\Lambda^2\omega^4, \quad \Lambda = \int_0^\infty [c_0^{-2} - c^{-2}(r)] r^2 dr,$$

$c_0, c(r)$  — невозмущенная и локальная (зависящая вблизи центра катиона от координат) скорость звука.

Никаких попыток использования численного значения константы из (2.6) для интерпретации структуры катиона на малых расстояниях пока не предпринималось.

2) Анионы. На первый взгляд, фононная подвижность анионов при низких температурах  $T < 1^\circ$  (там, где  $\lambda_{ph} > R_-$ ), должна иметь температурную зависимость, аналогичную катионной, т. е.  $\mu_{ph}^- \sim T^{-8}$ , и речь может идти лишь об изменении численной константы в (2.4) с учетом величины радиуса аниона  $R_- \approx 18 \text{ \AA}$ . Эксперименты Шварца, Старка<sup>26</sup> опровергли это, казалось бы, естественное предположение. Результаты измерений, приведенные на рис. 6, свидетельствуют о наличии сильной немонотонности в температурной зависимости  $\mu_{ph}^-(T)$  в окрестности  $T = 0.3-0.5^\circ\text{K}$ , где произведение  $\mu_{ph}^- T^3$  не зависит от температуры. И только с пониже-

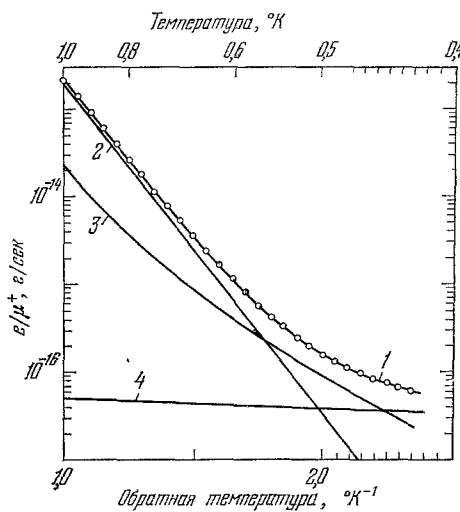


Рис. 5. Температурная зависимость обратной величины подвижности катионов в чистом  $\text{He}^4$ <sup>24</sup>.

1 — экспериментальные точки, 2 — вклад ротонов, 3 — вклад фононов, 4 — предполагаемый вклад остаточных примесей.

нием температуры в область  $T < 0,2$  °К намечается тенденция к появлению зависимости  $\mu_{ph} \sim T^{-8}$ .

Изящное количественное объяснение этой особенности в температурной зависимости  $\mu_{ph}$ , свободное от подгоночных параметров, было дано в работе Бейма и др.<sup>22</sup>. Оказалось, что теория фононной подвижности анионов должна строиться с учетом существования собственных колебаний поверхности пузырька и возможности резонансного рассеяния тепловых фононов на этих собственных колебаниях. Справедливо ради нужно отметить, что вычисление спектра собственных колебаний поверхности аниона было выполнено ранее другими авторами<sup>27</sup>. Однако лишь Бейм и др.<sup>22</sup> обратили внимание на то обстоятельство, что порядок основной частоты собственных колебаний аниона совпадает с частотой тепловых фононов при  $T \sim 0,4$  °К, и, следовательно, должно возникать резонансное рассеяние подобных фононов на анионе.

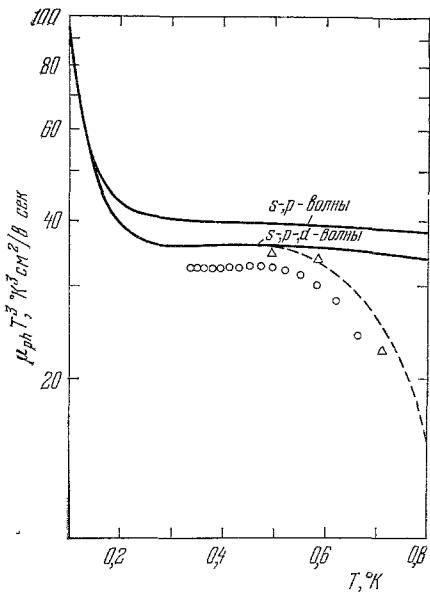


Рис. 6. Температурная зависимость подвижности анионов в чистом Ne<sup>4</sup>. Сплошные линии — теория<sup>22</sup>, кружки — эксперимент<sup>26</sup>, треугольники —<sup>28</sup>.

заряженного пузырька возникает, как и в классической задаче о колебаниях несжимаемой капли, из уравнения баланса всех давлений на поверхности деформированного пузыря. Единственной величиной, нуждающейся в специальном определении, является электронное давление на поверхности аниона

$$\begin{aligned} P_i^{\text{ел}} &= \Pi_{ik} n_k, \\ \Pi_{ik} &= \frac{\hbar^2}{4m_e} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi^*}{\partial x_k} - \psi \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x_i \partial x_k} + \text{к. с.} \right). \end{aligned} \quad (2.7)$$

$\Pi_{ik}$  — тензор потока импульса для электрона, локализованного внутри пузырька,  $n_k$  — нормаль к поверхности аниона. Предполагается, что волновая функция  $\psi$  электрона в пузырьке успевает адабатически подстраиваться к малым деформациям поверхности.

Собирая вместе все добавки к давлению на колеблющейся поверхности: электронную составляющую, добавку за счет сил поверхностного натяжения и гидродинамическую часть давлений, учитывающую нестационарность задачи, находим из условия равенства нулю суммы всех давлений следующий спектр колебаний поверхности аниона:

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{8\sigma}{\rho R_-^3}, \\ \omega_l^2 &= \frac{\sigma}{\rho R_-^3} (l+1) (4\pi S_l + l^2 + l + 2), \quad S_l = \frac{j'_l}{j_l} - \frac{j''_0}{2j'_0} \Big|_{x=\pi}, \quad l \geq 2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

$\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\rho$  — плотность гелия,  $j_l(x)$  — сферические функции Бесселя. Основная частота  $\omega_0$ , соответствующая радиальным колебаниям пузырька, для  $\sigma \approx 0,36$  эрг/см<sup>2</sup> и  $R_- = 18$  Å по порядку величины равна  $\omega_0 \approx 10^{10} - 10^{11}$  с<sup>-1</sup>, т. е. действительно находится в области фононных частот с энергией  $\sim 0,3 - 0,5$  °К.

Сечение рассеяния таких фононов при наличии одной резонансной частоты  $\omega_0$ , имеет хорошо известный вид<sup>28</sup>:

$$\sigma(\omega) = \frac{4\pi R_-^2}{[(\omega_0^2/\omega^2) - 1]^2 + q^2 R_-^2}, \quad (2.9)$$

$q$  — волновое число фонона,  $qR_- \ll 1$ .

В более общем случае нескольких собственных частот в сечении появляются резонансные пики, отвечающие другим резонансам. Количественная зависимость  $\sigma(q)$  для аниона, рассчитанная в<sup>22</sup>, приведена на рис. 7. Соответствующая подвижность аниона, следующая из (2.3) с привлечением численных значений  $\sigma(q)$  (см. рис. 7), изображена на рис. 6 вместе с экспериментальными точками. Учитывая отсутствие в теории подгоночных параметров, нужно признать, что соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями  $\mu_{\text{р}}(T)$  очень хорошее.

Для полноты картины имеет смысл привести результаты исследования влияния внешнего давления на фоновую подвижность анионов, полученные Остермейером<sup>29а</sup>. Внешнее давление уменьшает радиус пузырька и, следовательно, увеличивает значение частот его собственных колебаний.

В результате область резонансного рассеяния фононов анионом смещается в сторону более высоких температур. Количественные изменения, проис-

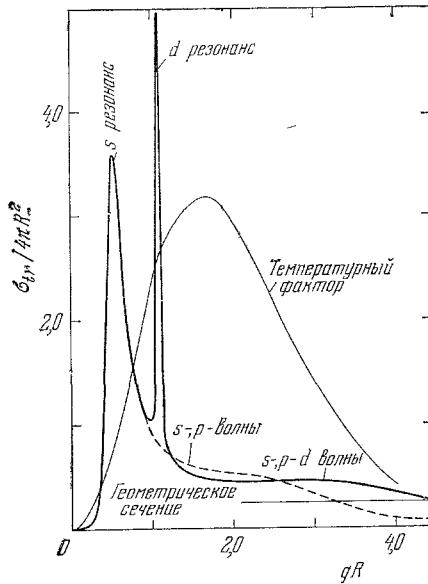


Рис. 7. Транспортное сечение рассеяния фононов на анионе<sup>22</sup>.

Представлены два варианта: сечение, соответствующее рассеянию  $s$ - и  $p$ -волн, и сечение, соответствующее рассеянию  $s$ -,  $p$ - и  $d$ -волн. Кроме того, на графике приведен в произвольных единицах температурный фактор —  $q^4 d\sigma(q)/dq$  для  $T = 0,5$  °К.

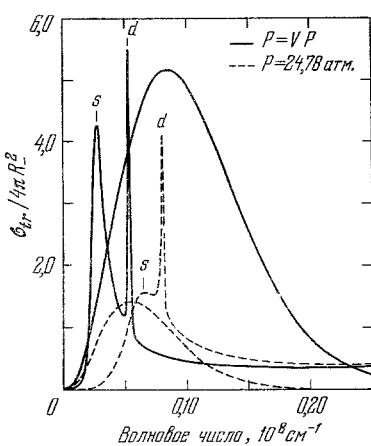


Рис. 8. Транспортное сечение рассеяния фононов на анионе в чистом  $\text{He}^4$  при разных внешних давлениях<sup>29а</sup>. Сплошная линия — нулевое давление, штриховая — 24,78 атм.

ходящие с резонансным сечением рассеяния фононов на анионе при наложении внешнего давления, представлены на рис. 8. Зависимость радиуса

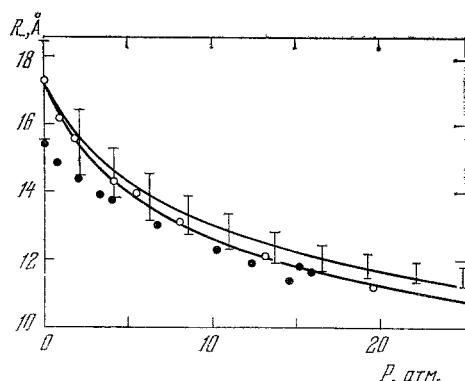


Рис. 9. Зависимость радиуса аниона от внешнего давления.  
Сплошные линии — теоретический расчет<sup>10</sup>. Светлые кружки — Спрингетт<sup>29б</sup>, черные — Зиффел и Сандерс<sup>29в</sup>, «усы» — Остермейер<sup>29а</sup>.

аниона от внешнего давления, следующая из экспериментальных данных по фононной подвижности анионов, приведена на рис. 9. На этом же рисунке приведены результаты других экспериментов по установлению зависимости  $R_-$  от  $P$ , а также результаты теоретического расчета<sup>10</sup>. Совпадение различных экспериментальных данных между собой и соответствие их расчетным значениям  $R_-(P)$  можно считать хорошим.

### б) Подвижность ионов в слабых растворах

Подвижность массивной твердой сферы в больцмановском газе примесных возбуждений должна иметь температурную зависимость  $\mu_3 \propto \infty T^{-1/2}$ \*). Это предсказание, справедливое для гелиевых ионов в рамках

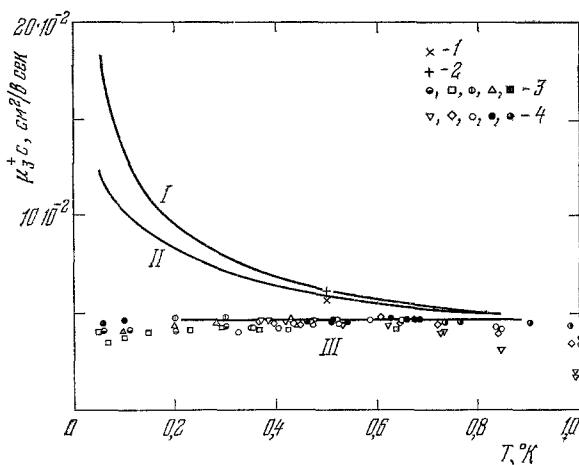


Рис. 10. Температурная зависимость примесной подвижности катионов<sup>30а</sup>. Сплошные линии: I — подвижность в модели Аткинса с сечением рассеяния  $\sigma_{tr} = \pi R^2$  ( $R = 7 \text{ \AA}$ ), II — та же модель, но учитывается квантовое увеличение сечения рассеяния от  $\pi R^2$  до  $4\pi R^2$ , III — подвижность, определенная соотношением (2.13). Экспериментальные точки: 1 —  $1,3 \cdot 10^{-3}\%$ , 2 —  $5,1 \cdot 10^{-8}\%$ <sup>30в</sup>; 3 — от  $1,55 \cdot 10^{-2}\%$  до  $4,46\%$  — <sup>30б</sup>, 4 — от  $0,75\%$  до  $39,9\%$  <sup>30а</sup>.

модели Аткинса, находится в качественном противоречии с наблюдениями. В случае катионов примесная подвижность  $\mu_3^+$  в широком интервале температур не зависит от  $T$ . Этот факт наглядно иллюстрируется графиками температурной зависимости  $\mu_3^+(T)$ , приведенными на рис. 10, 11 (взятыми соответственно из работ Есельсона, Ковдри, Шикина<sup>30а</sup> и Кеттерсона, Кушнира, Рока<sup>31</sup>). Для анионов примесная подвижность  $\mu_3^-$  оказывается немонотонной функцией температуры, (см. рис. 12, на котором приведены данные<sup>31</sup>). В результате, как и при изучении  $\mu_{ph}^\pm$ , возникает необходимость раздельной интерпретации температурной зависимости подвижностей  $\mu_3^+$  и  $\mu_3^-$ .

1) Катионы. Основной причиной непригодности модели твердых шаров для описания взаимодействия катиона с мало энергичными примесными возбуждениями является наличие вокруг положительного иона

\*) Подобная температурная зависимость  $\mu_3$ , как и в случае  $\mu_{ph}^\pm$ , имеет простое объяснение. В данной ситуации концентрация примесей и сечение рассеяния примесных возбуждений на сфере не зависит от температуры. Единственной величиной, меняющейся с  $T$ , является передаваемый импульс  $p_T \propto \sqrt{T}$ . Отсюда и следует зависимость  $\mu_3 \propto T^{-1/2}$ .

зоны повышенного давления, спадающего на расстоянии степенным образом. Набор параметров возникающей задачи рассеяния оказывается таким, что основной вклад в сечение рассеяния тепловых примесных возбуждений на катионе вносят «хвосты» этого избыточного давления на расстояниях, заметно превышающих радиус Аткинса.

Для количественного описания взаимодействия катиона с примесными возбуждениями заметим, что атомы  $\text{He}^4$ ,  $\text{He}^3$ , находясь в окрестности

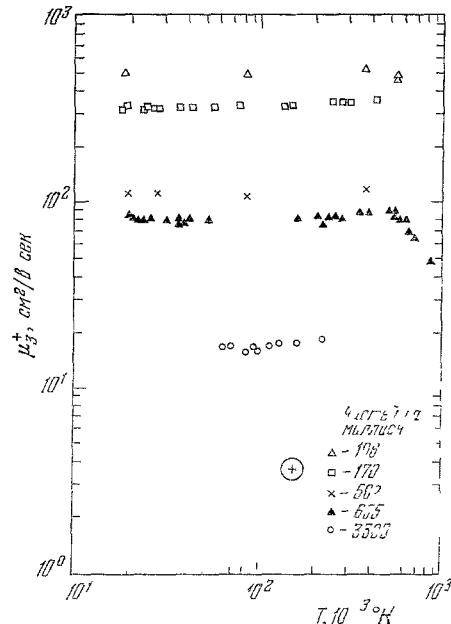


Рис. 11. Зависимость  $\mu_3^+$  от  $T$  по данным <sup>31</sup>.

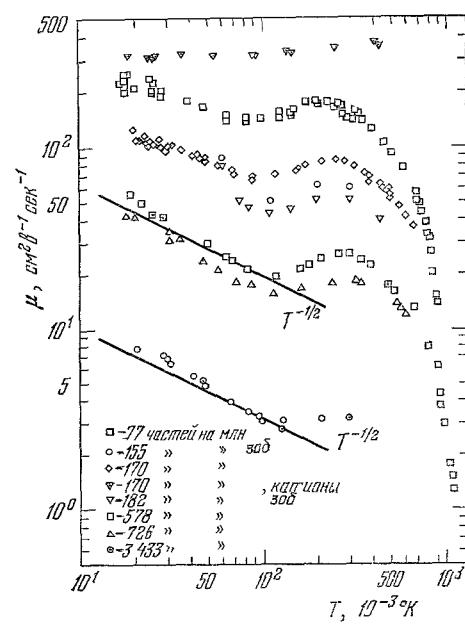


Рис. 12. Зависимость  $\mu_3^-$  от  $T_L$  по данным <sup>31</sup>.

затравочного заряда, испытывают влияние двух сил: поляризационного притяжения к центру катиона и отталкивания за счет избыточного давления вблизи катиона. Для атомов  $\text{He}^4$  эти силы компенсируют друг друга, в результате чего в окрестности исходного заряда возникает стационарная область повышенной плотности растворителя. Что касается атомов  $\text{He}^3$ , имеющих одинаковую с атомами  $\text{He}^4$  поляризуемость, но несколько больший эффективный объем ( $v_3/v_4 \approx 1.27$ <sup>32</sup>), то для них сила отталкивания превосходит силу притяжения. Разность сил, а с ней и взаимодействие между катионом и примесным возбуждением  $V_3^+(r)$ , оказываются отличными от нуля. С учетом определения давления (1.1) в окрестности катиона взаимодействие  $V_3^+(r)$ , носящее характер отталкивания, выглядит так:

$$V_3^+(r) = \frac{\beta^2}{r^4}, \quad \beta^2 = \frac{1}{2} \alpha e^2 \left( \frac{v_3}{v_4} - 1 \right). \quad (2.10)$$

Макроскопический характер определения энергии  $V_3^+$  (использовано понятие давления в жидкости и т. д.) приводит к необходимости ограничения энергии налетающих примесных возбуждений со стороны больших значений. Подходящим критерием для этого является требование

$$r_{\min} > R_+,$$

где  $R_+$  — радиус Аткинса, а  $r_{\min}$  — минимальное расстояние, на которое приближается примесное возбуждение к центру катиона при лобовом

столкновении,

$$V_3^+(r_{\min}) \sim T, \quad r_{\min}^4 \approx \frac{\beta^2}{T}. \quad (2.11)$$

Для температур  $T \sim 1 \text{ } ^\circ\text{K}$  величина  $r_{\min}$ , следующая из приведенного равенства, имеет оценку  $r_{\min} \gtrsim 9 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ , т. е. неравенство  $r_{\min} > R_+$  действительно выполняется. Следовательно, задачу о рассеянии на катионе примесных возбуждений с энергией  $1 \lesssim \text{ } ^\circ\text{K}$  можно решать как задачу о рассеянии на чисто степенным потенциале без учета структуры ядра катиона. Это обстоятельство впервые отмечено в работе Есельсона и др.<sup>30a</sup> и, независимо, Бовли, Лекнером<sup>33</sup>.

Квантовая нерелятивистская теория рассеяния на потенциале  $V(r) \sim \sim r^{-4}$  разработана достаточно полно в связи с классической задачей о подвижности электронов в газе нейтральных атомов, где взаимодействие имеет знак притяжения. Основным моментом теории является сведение волнового уравнения для электрона с потенциалом  $V \sim r^{-4}$  к уравнению Матье с мнимым аргументом, после чего амплитуда рассеяния определяется в терминах известных специальных функций<sup>34</sup>. Подобная возможность сохраняется и для потенциала отталкивания  $V_3^+ = \beta^2 r^{-4}$ . Более того, эта задача не содержит трудностей варианта с притяжением, так как здесь не возникает опасности «падения» частицы на притягивающий центр.

В результате асимптотики транспортного сечения рассеяния примесных возбуждений на катионе выглядят так:

$$\sigma_{\text{tr}}(q) = \begin{cases} \frac{8\pi}{3} f_0 q^{-1}, & qf_0 \gg 1, \\ 4\pi f_0^2 \left(1 - \frac{16}{15} \pi q f_0\right), & qf_0 \ll 1, \end{cases} \quad (2.12)$$

$$f_0^2 = 2m_3 \beta^2 \hbar^{-2};$$

$q$ ,  $m_3$  — волновое число примесного возбуждения и его масса,  $f_0$  — нулевая амплитуда рассеяния. Численное значение квантовой длины  $f_0$  для катиона в гелии оказывается порядка  $f_0 \approx 6 \cdot 10^{-7} \text{ см}$ . Следовательно, квантовый предел рассеяния начинает реализоваться лишь в области очень низких температур. Для всех остальных температур  $(2m_3 T)^{1/2} \hbar^{-1} \gg f_0^{-1}$  рассеяние носит квазиклассический характер. При этом  $\sigma_{\text{tr}} \sim q^{-1}$  — результат, качественно отличный от столкновения типа твердых шаров и достаточный для объяснения независимости подвижности  $\mu_3^+$  от  $T$  в широком интервале температур.

Подставляя квазиклассическую асимптотику<sup>31</sup>  $\sigma_{\text{tr}}(q)$  (2.12) в (2.1), находим<sup>30a, 35</sup>

$$\mu_3^+ = \frac{r}{5,32 n_3 \beta \sqrt{m_3}}, \quad (2.13)$$

где  $n_3$  — концентрация примесных атомов в растворе,  $\beta$  из (2.10). Подвижность (2.13) не зависит от температуры. Этот результат для взаимной диффузии двух газов, взаимодействующих между собой со знаком отталкивания по закону  $V(r) \sim r^{-4}$ , был известен еще Максвеллу<sup>35</sup>. С учетом конкретного значения  $\beta$  подвижность (2.13) хорошо описывает экспериментальные данные не только в смысле правильной температурной зависимости, но и по абсолютной величине без привлечения подгоночных параметров. Сравнение расчетных и экспериментальных значений примесной подвижности  $\mu_3^+$ , выполненное в<sup>30a</sup>, приведено на рис. 10. Аналогичные сопоставления, подтверждающие разумность предложенной интерпретации взаимодействия мало энергичных примесных возбуждений с катионом, содержатся в работе<sup>33</sup>.

2) Анионы. Наиболее подходящей причиной наблюдаемых аномалий в температурной зависимости подвижности анионов в слабых растворах  $\text{He}^3 - \text{He}^4$  может быть адсорбция примесных возбуждений на поверхность аниона. Соответствующее явление на плоской поверхности слабого раствора хорошо известно<sup>38</sup> и проявляется в характерной температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения слабых растворов. Естественно предположить, что поверхность аниона также может адсорбировать на себя примесные возбуждения.

Придерживаясь в интерпретации температурной зависимости  $\mu_3^-$  «адсорбционной» точки зрения, обратимся к наиболее полным данным о температурной зависимости  $\mu_3^-$ , полученным в работе<sup>31</sup> и представленным на рис. 12. Из этих данных следует, что в области очень низких температур подвижность анионов  $\mu_3^- \propto T^{-1/2}$ . При Больцмановском распределении примесных возбуждений по скоростям такая зависимость  $\mu_3^-$  от  $T$ , как отмечалось выше, характерна для движения твердой сферы в газе примесей<sup>39</sup>:

$$\mu_3^- = \frac{3e}{8\pi_3 \tilde{R}_-^2 \sqrt{2\pi m_3 T}}. \quad (2.14)$$

$\tilde{R}_-$  — эффективный радиус твердой сферы. Численные значения  $\tilde{R}_-$ , следующие из экспериментальных данных<sup>31</sup> в области низких температур и определения  $\mu_3^-$  (2.14), собраны в таблице и оказываются равными  $\tilde{R}_- \approx \approx 27 \pm 1 \text{ \AA}$ , т. е. заметно превышают характерное значение  $R_-$  для аниона в чистом  $\text{He}^4$ .

Характеристики аниона в слабых растворах  $\text{He}^3 - \text{He}^4$ , найденные из экспериментальных данных<sup>40</sup>

$c$	$c\mu_3^-$ , произв. ед. ( $T = 0,05 \text{ }^\circ\text{K}$ )	$\tilde{R}_-$ , $\text{\AA}$	$R_-^0$ , $\text{\AA}$	$T_F^s$ , $^\circ\text{K}$	$\varepsilon_L$ , $^\circ\text{K}$
$3,43 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 3,42 = 17,3$	26		$0,45 \pm 0,02$	$0,27 \pm 0,03$
0,726	$24 \cdot 0,726 = 17,4$	27	19	0,40	$0,28 \pm 0,04$
0,578	$30 \cdot 0,578 = 17,3$	27	18	0,09	$0,26 \pm 0,04$
0,170	$90 \cdot 0,170 = 15,3$	28,9	19	0,07	$0,26 \pm 0,05$
0,077	$180 \cdot 0,077 = 14$	31	20	0,06	$0,26 \pm 0,06$

Из таблицы видно, что в области малых концентраций произведение  $c\mu_3^-$  начинает зависеть от  $c$ . По этой причине завышенные значения  $\tilde{R}_-$  и  $R_-^0$ , полученные для последней концентрации  $c = 0,077 \cdot 10^{-3}$ , в расчет не принимались.

При увеличении температуры сечение рассеяния объемных примесных возбуждений в довольно узком температурном интервале резко уменьшается, приводя к возрастанию подвижности аниона в этой температурной области. После этого размеры аниона перестают меняться, приобретая значение  $R_-^0 \approx 20 \text{ \AA}$ , мало отличающееся от  $R_-$  в чистом  $\text{He}^4$ . Естественно связать наблюдаемое изменение сечения рассеяния примесных возбуждений на анионе с «уходом» адсорбированных на поверхности аниона при-

<sup>38</sup>) Для получения выражения (2.14) необходимо подставить в (2.1) коротковолновый предел амплитуды рассеяния  $f$  примесных возбуждений на сфере радиуса  $\tilde{R}_-$ . Величина  $f(0)$  в этом пределе имеет структуру  $f(0) = (\tilde{R}_-/2) + f_1(0)$  (см. <sup>28</sup>, с. 451), где  $f_1(0)$  — так называемый «теневой» пик амплитуды рассеяния, отличный от нуля при малых углах  $\theta$ . Вклад этого пика в транспортное сечение рассеяния оказывается равным нулю. В результате  $\sigma_{tr} = \pi \tilde{R}_-^2$ , и определение (2.1) принимает вид (2.14).

месей в объем жидкого гелия. После того как поверхностные примесные уровни с повышением температуры пустеют, эффективный размер аниона перестает зависеть от температуры.

К сожалению, влияние примесей, адсорбированных на поверхности аниона, на его подвижность в слабых растворах  $\text{He}^3 - \text{He}^4$  не сводится к изменению коэффициента поверхностного натяжения, определяющего радиус аниона. Кроме этого канала, «чувствительного» к наличию поверхностных примесей и допускающего последовательное описание в терминах феноменологического закона дисперсии поверхностных примесей во всем интервале температур, существует прямое взаимодействие между поверхностными и объемными примесными возбуждениями. Отсутствие четкого представления о механизме этого взаимодействия, вносящего заметный вклад в аномальное поведение температурной зависимости  $\mu_s$ , мешает построению последовательной теории подвижности анионов в слабых растворах гелия. К настоящему времени имеются лишь некоторые качественные соображения, позволяющие оценить параметры спектра поверхностных примесных возбуждений на поверхности аниона.

Формальная задача о свойствах  $s$ -примесей на сферической поверхности начинается с определения спектра возбуждений. Как и в плоском случае, этот вопрос имеет простое решение для низколежащих уровней энергии<sup>37</sup>:

$$\varepsilon_l = -\varepsilon_0 + \chi l(l+1), \quad (2.15)$$

$$\chi = \frac{\hbar^2}{2m_s \tilde{R}_-^2}, \quad \chi l(l+1) < \varepsilon_0, \quad l = 0, 1, 2, \dots;$$

$\varepsilon_0 > 0$ ,  $m_s$  — масса  $s$ -примеси, энергия  $\varepsilon_l$  отсчитывается от дна зоны  $v$ -примесей. Условием применимости определения (2.15) является требование  $\tilde{R}_- \gg \lambda$ , где  $\lambda$  — характерная длина затухания волновых функций  $s$ -примесей в глубь жидкости. В нашем случае, когда  $\tilde{R}_- \geq 20 \text{ \AA}$ , а  $\lambda \sim \sim \hbar / (2m_s \varepsilon_0)^{1/2}$  ( $\varepsilon_0 \approx 2 \text{ ^\circ K}$ ,  $m_s \approx 10^{-23} \text{ g}$ , т. е.  $\lambda \approx 2-3 \text{ \AA}$ ), условие  $\tilde{R}_- \gg \lambda$  действительно выполняется. Следует заметить, что в общем случае спектр  $s$ -примесей на сфере, так же как и в плоской поверхности, имеет более сложный вид:  $\varepsilon_{nl} = -\varepsilon_{nl}^0 + \chi l(l+1)$ . Это обстоятельство проиллюстрировано на модельном примере, рассмотренном в работе<sup>37</sup>. Для конкретных значений  $\varepsilon_0$  и  $m_s$ , известных из плоской задачи, вероятность существования уровней с  $n > 0$  меньше или порядка половины.

Располагая спектром возбуждений, легко установить связь между полным числом  $s$ -примесей  $N_s$  и химическим потенциалом данной системы:

$$N_s = \sum_{l=0}^L 2(2l+1) \left[ \exp \left( \frac{\varepsilon_l - \mu_s}{T} \right) + 1 \right]^{-1}; \quad (2.16)$$

здесь  $\varepsilon_l$  — из (2.15), величина  $L = l_{\max}$  определена требованием

$$\varepsilon_0 - \chi L(L+1) \geq 0. \quad (2.16a)$$

Величина же химического потенциала  $\mu_s$ , как это следует из общих термодинамических соображений<sup>38</sup>, должна совпадать со значением химического потенциала  $\mu_v$  примесей, заполняющих объем растворителя

$$\mu_s = \mu_v, \quad \mu_v = -T \ln \left[ \frac{2m_4}{c\rho} \left( \frac{m_3 T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \right]. \quad (2.17)$$

$\rho$  — плотность растворителя;  $c$  — объемная относительная концентрация раствора;  $m_3$ ,  $m_4$  — массы атомов  $\text{He}^3$  и  $\text{He}^4$  в объемных условиях.

Объединяя (2.16) и (2.17), имеем

$$N_s = \sum_{l=0}^L 2(2l+1) \left[ \frac{2m_4}{c\phi} \left( \frac{m_3 T}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{|\varepsilon_l|}{T} \right) + 1 \right]^{-1}. \quad (2.18)$$

Это соотношение связывает  $N_s$  с  $c$ , т. е. решает поставленный вопрос о зависимости  $N_s$  от объемных характеристик раствора.

Как отмечалось выше, в области низких температур подвижность анионов достаточно хорошо определяется соотношением (2.14) с  $\tilde{R}_- \approx \approx 27 \pm 1 \text{ \AA}$ . При повышении температуры  $s$ -примеси начинают покидать  $s$ -уровни. Начало этого процесса отвечает окрестности минимумов на кривых рис. 12. Таким образом, положение минимумов  $\mu_3^- (T)$  качественно характеризует температуру вырождения  $T_F^s$  для  $s$ -примесей на поверхностных уровнях. Используя выражение (2.18) для  $N_s$ , нетрудно определить величину  $T_F^s$

$$\frac{2m_4}{c\phi} \left( \frac{m_3 T_F^s}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{|\varepsilon_L|}{T_F^s} \right) \approx 1. \quad (2.19)$$

Учитывая (2.19) и экспериментальные значения  $c$ ,  $T_F^s$ , определяющие положение минимумов  $\mu_3^- (c, T)$ , можно оценить величину самого мелкого из поверхностных уровней  $\varepsilon_L$ . Соответствующие  $\varepsilon_L$ , вычисленные для разных концентраций  $c$ , собраны в таблице (с. 473). Примерное постоянство  $\varepsilon_L$  при изменении  $c$  в широком интервале свидетельствует о разумности определения  $T_F^s$ .

Наблюдаемое увеличение радиуса аниона  $\Delta R$  при  $T \ll T_F^s$ , однаковое для различных концентраций раствора (см. таблицу), вместе с определением температурно-независящего предела для  $N_s$

$$N_s|_{T \rightarrow 0} \rightarrow \sum_0^L 2(2l+1),$$

наличие которого качественно оправдывает появление  $\Delta R$ , служат несомненным доказательством существования  $s$ -примесей на поверхности аниона. Более того, наблюдаемые значения  $\Delta R$ ,  $\varepsilon_L$ , вместе с качественными рассуждениями<sup>37</sup> о причинах возрастания  $R$  (за счет изменения коэффициента поверхностного натяжения и прямого взаимодействия между  $v$ - и  $s$ -примесями), позволяют оценить параметры спектра примесных возбуждений:  $\varepsilon_0 \ll 2,4-2,5 \text{ }^\circ\text{K}$ ,  $m_s \ll 1,2 \cdot 10^{-23} \text{ g}$ ,  $L \sim 17-18$ .

### в) Ферми-частичная подвижность

Обсуждая различные механизмы низкотемпературной подвижности гелиевых ионов в порядке возрастания сложности их описания, естественно назвать вслед за фононной и примесной ферми-частичную подвижность. Такая подвижность наблюдается в условиях

$$T \ll \varepsilon_F, \quad (2.20)$$

где  $\varepsilon_F$  — энергия Ферми чистого  $\text{He}^3$ , либо составляющей  $\text{He}^3$  в растворе  $\text{He}^3 - \text{He}^4$ .

Первый серьезный вопрос в теории ферми-частичной подвижности ионов возникает в связи с желанием иметь для конкретных расчетов привычное кинетическое уравнение. Анализ этого вопроса, выполненный в наиболее полном виде Мельниковым<sup>39</sup>, показывает, что для заряженных частиц с размерами  $R$ , удовлетворяющими неравенству  $\xi = p_F R \gg 1$  ( $p_F$  — импульс Ферми), кинетическое уравнение существует как в области

высоких, так и при низких температурах. Схематически результаты<sup>39</sup> приведены на рис. 13. Области существования кинетического уравнения заштрихованы. Высокотемпературная асимптотика  $\mu_F^\pm$  не зависит от температуры. Для низких температур  $T \ll \xi^{-2}$   $\mu_F^\pm \sim T^{-2}$ . В промежуточной области температур, где кинетическое уравнение неприменимо, подвижность изменяется в  $\xi^6$  раз.

Существование высокотемпературной асимптотики  $\mu_F^\pm$ , не зависящей от температуры, было впервые установлено Дэвисом и Дагонье<sup>21</sup>. Анализируя область применимости метода Фоккера — Планка, позволяющего

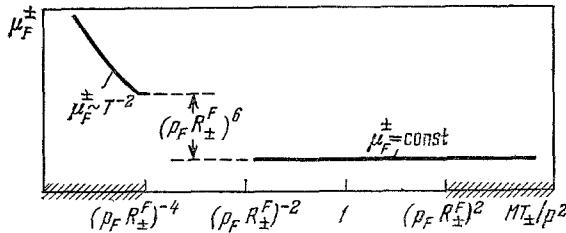


Рис. 13. Схематическое расположение температурных интервалов, в которых подвижность зарядов в жидком  $\text{He}^3$  может вычисляться с помощью кинетического уравнения<sup>39</sup>. Соответствующие области температуры заштрихованы. Приведена зависимость  $\mu_F^\pm(T)$  в этих интервалах.

преобразовать интеграл столкновений к дифференциальной форме, авторы<sup>21</sup> показали, что при наличии неравенства  $T \ll \varepsilon_F$  такая возможность сохраняется, если

$$\frac{m_3}{M_\pm} \ll \frac{T}{\varepsilon_F} \ll 1,$$

где  $m_3$  — эффективная масса примеси. Определение подвижности при этом имеет вид (2.4) и записанное в явном виде, выглядит так:

$$\mu_F^\pm = \frac{3\pi^2 e \hbar^3}{2m_3^2 \sigma_{tr}^\pm(q_F) \varepsilon_F^2}, \quad (2.21)$$

где  $\sigma_{tr}^\pm(q_F)$  — транспортное сечение рассеяния ферми-частиц на гелиевом ионе. При уменьшении температуры в область  $T < \xi^2$  аргументация<sup>21</sup> теряет силу. Однако более общее рассмотрение<sup>39</sup> позволяет заключить, что выражение (2.21) сохраняет смысл вплоть до температур  $T \geq \xi^2$  (см. рис. 13). Нарушение неравенства  $T \ll \varepsilon_F$  в сторону увеличения температуры приводит к появлению ферми-жидкостных добавок к температурной зависимости подвижности ионов. Основная из этих добавок пропорциональна  $T^2 \ln T$ <sup>40</sup>.

В случае низких температур  $T \ll (m_3/M_\pm) \varepsilon_F$  ограничение интегрирования по импульсам иона в интеграле столкновений кинетического уравнения, позволяющее использовать приближение Фоккера — Планка, становится несущественным, так как рассеяние идет только на малые углы. Обозначив через  $f_0^\pm$  амплитуду рассеяния на нулевой угол, линеаризовав исходное кинетическое уравнение по электрическому полю  $E$  и обезразмерив возникающее уравнение, находим для подвижности при низких температурах следующее выражение<sup>39</sup>:

$$\mu_F^\pm = \frac{2\pi^{1/2} e \hbar^3}{2M_\pm^2 T^2 (f_0^\pm)^2} \int_0^\infty \varphi(x) e^{-\alpha^2 x^3} dx, \quad (2.22)$$

где функция  $\varphi(x)$  определяется уравнением

$$-xe^{-x^2} = \left\{ \int_0^x \frac{y^2}{x^2} \left[ \frac{y\varphi(y)}{3} - x\varphi(x) \right] + \int_x^\infty \left[ \frac{x\varphi(y)}{3} - y\varphi(x) \right] \right\} \frac{x^2 - y^2}{e^{x^2} - e^{y^2}} dy.$$

Зависимость  $\mu_F^\pm \sim T^{-2}$  при низких температурах была получена рядом авторов<sup>41</sup>. Интересно отметить, также, что подвижность (2.22) обратно пропорциональна квадрату массы иона,  $\mu_F^\pm \sim M_\pm^{-2}$ . Появление  $M$  в определении  $\mu_F$  характерно для ситуаций, в которых импульс налетающих возбуждений существенно превосходит тепловую импульс иона.

В условиях сильного вырождения  $T \ll \varepsilon_F$  зависимость транспортного сечения рассеяния от волнового числа налетающих возбуждений не влияет на температурное поведение подвижности. По этой причине вопрос о явном виде функции  $\sigma_{tr}^\pm(q_F)$  в теории ферми-частичной подвижности обычно не обсуждается (в отличие от фононной и примесной подвижности). Вместе с тем, такой вопрос имеет реальный смысл, оказываясь существенным при изучении поведения  $\mu_F^\pm$  в функции от энергии Ферми налетающих ферми-частиц. Вводя заряженные частицы в вырожденный раствор Не<sup>3</sup> — Не<sup>4</sup> и варьируя концентрацию Не<sup>3</sup>, мы получаем экспериментальную возможность для изучения подобных зависимостей. Что касается ожидаемых эффектов, то их можно предсказать заранее, во всяком случае для положительных ионов. Учитывая определение транспортного сечения рассеяния примесных возбуждений на катионе (2.12) и область применимости этих определений, нетрудно найти зависимости  $\mu_F^\pm(\varepsilon_F)$  для катиона в слабых вырожденных растворах Не<sup>3</sup> — Не<sup>4</sup><sup>42</sup>:

$$\mu_F^\pm = \frac{3\pi^2 e \hbar^3}{2m_3^2 \varepsilon_F} \times \begin{cases} \frac{1 + (16/15)\pi f_0 q_F}{4\pi f_0^2}, & q_F f_0 \ll 1, \\ \frac{3}{8\pi} q_F f_0^{-1}, & R_+^{-1} \gg q_F \gg f_0^{-1}, \\ f_0^2 = 2m_3 \beta^2 \hbar^{-2}; & \end{cases} \quad (2.23)$$

$\beta^2$  — из (2.10),  $R_+$  — радиус Аткинса.

Перейдем к сравнению результатов теории и наблюдений:

1) Наличие температурно-независящей асимптотики  $\mu_F^\pm$  (2.21) можно поставить в соответствие с экспериментальными данными Андерсона, Кушнира, Уитли<sup>43</sup> (см. рис. 14, 15), подтверждающими существование такого плато. Сопоставление экспериментального и расчетного значений  $\mu_F$  (2.21), в котором  $\sigma_{tr} = \pi (R_F^F)^2$  ( $R_F^F$  — геометрический размер аниона в чистом Не<sup>3</sup>) позволяет оценить величину  $R_F^F$ . Эта оценка  $R_F^F \approx 20 \text{ \AA}$  разумно совпадает с численным значением  $R_F^F$  (1.5) для жидкого Не<sup>3</sup>.

Определение  $R_F^F$ , следующее из экспериментальных данных для  $\mu_F^\pm$ ,  $\mu_F$  в окрестности плато и выражения для подвижности  $\mu_F^\pm$  (2.21), удобно записать в виде

$$\frac{R_F^+}{R_F^-} \approx \sqrt{\frac{1}{5}}. \quad (2.24)$$

Учитывая масштаб величины  $R_F^- \approx 20 \text{ \AA}$ , имеем для  $R_F^+$  оценку  $R_F^+ \approx \approx 9-10 \text{ \AA}$ . Это значение  $R_F^+$  несколько превышает радиус Аткинса  $R_+ \approx \approx 6-7 \text{ \AA}$ . Вопрос о структуре  $R_F^F$  пока не имеет решения.

2) В области низких температур подвижность ионов должна возрастать с температурой степенным образом,  $\mu_F^\pm \sim T^{-2}$ . При этом тенденция к возрастанию подвижности согласно<sup>39</sup> (см. рис. 13) должна проявляться раньше у ионов с меньшим радиусом, т. е. у катионов. Это качественное предсказание соответствует действительности. Как видно

из рис. 14, 15, подвижность  $\mu_F^+$  начинает возрастать в сторону низких температур при более высоких  $T$ , чем  $\mu_F^-$ . Однако асимптотическое поведение  $\mu_F^\pm|_{T \rightarrow 0} \sim T^{-2}$  пока не подтверждено экспериментально.

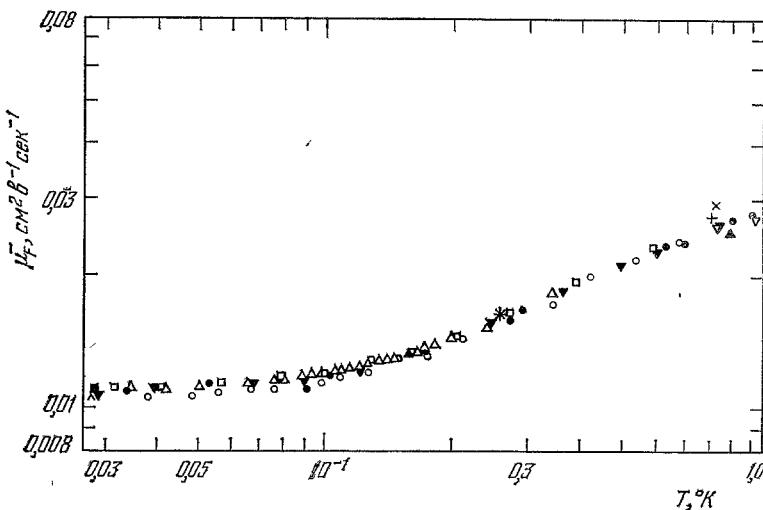


Рис. 14. Зависимость  $\mu_F^-$  от  $T$  при малых внешних давлениях<sup>43</sup>.

Различные серии точек на рис. 14 и 15 отвечают использованию ячеек различной конструкции и варьированию давления в пределах 0—78 см рт. ст.

3) Обращает на себя внимание рост подвижности с увеличением температуры из области  $T/\varepsilon_F \ll 1$  в область  $T/\varepsilon_F \lesssim 1$ . Такое поведение подвижности имеет в основном гидродинамическое происхождение, ибо

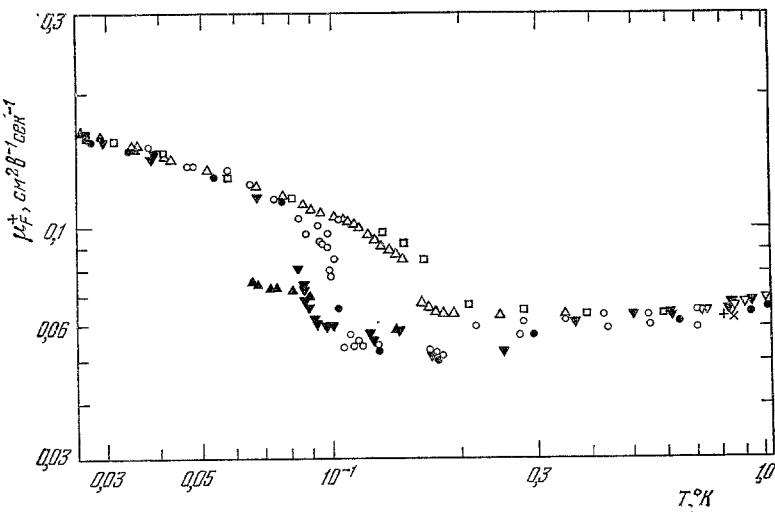


Рис. 15. Зависимость  $\mu_F^+$  от  $T$  при малых внешних давлениях<sup>43</sup>.

в этой области температур начинает выполняться неравенство  $l/R \lesssim 1$  ( $l$  — длина пробега ферми-возбуждений), а вязкость  $\eta$  ферми-жидкости падает с ростом температуры,  $\eta \sim T^{-2}$ <sup>44</sup>. Недостаточная малость параметра  $l/R \lesssim 1$  в начальной стадии роста подвижности приводит к усложнению температурной зависимости  $\mu_F^\pm|_{T \leq \varepsilon_F} \sim T^2 \ln T$ <sup>40</sup>.

## г) Ротонная подвижность

При температурах  $T \geq 0,8$  °К подвижность ионов в чистом  $\text{He}^4$  начинает лимитироваться столкновениями с ротонами. В «кинетическом» режиме  $0,8 \leq T \leq 1,7$  °К основной вклад в подвижность ионов вносят одночастичные столкновения с ротонами. В области же  $T \geq 1,8$  °К, становится существенным взаимодействие ротонов друг с другом, и подвижность ионов принимает стоксовский характер.

Ряд экспериментов<sup>45</sup>, выполненных в кинетическом режиме, привел к заключению, что температурная зависимость ротонной подвижности ионов имеет в основном экспоненциальный вид, но энергии активации  $\Delta^\pm$  различны:

$$\mu_{\text{rot}}^\pm \sim \exp\left(-\frac{\Delta^\pm}{T}\right), \quad (2.25)$$

$\Delta^+ = 8,65 - 8,8$  °К,  $\Delta^- = 7,7 - 8,1$  °К. Для сравнения, величина щели  $\Delta$  в ротонной части спектра чистого  $\text{He}^4$  при нулевом давлении равна  $\Delta = 8,6$  °К<sup>44</sup>.

Попытки интерпретации наблюдаемых отклонений в температурной зависимости  $\mu_{\text{rot}}^\pm$  от закона  $\mu_{\text{rot}}^\pm \sim e^{-\Delta/T}$  наталкиваются на ряд серьезных трудностей.

1) Прежде всего приходится считаться с большой величиной импульса  $p_0$  ротонов. Величина  $p_0$  сравнима со значением теплового импульса  $p_T^i$  ионов при  $T \sim 1$  °К. Ситуация напоминает ферми-частичную, с той лишь разницей, что в задаче о ферми-частичной подвижности имеются определенные температурные интервалы (как в области высоких, так и при низких температурах; см. рис. 13), для которых кинетическое описание движения ионов через ферми-газ оказывается сравнительно простым. Именно в этих областях расчет  $\mu_F^\pm$  доведен до конца. Что касается ротонной задачи, то здесь нет возможности варьировать температуру в широких пределах. Искомое решение должно относиться к заданной узкой области температур  $0,8 \leq T \leq 1,7$  °К, в окрестности которой отношение  $p_0/p_T^i$  имеет порядок единицы. В подобных условиях исследование кинетического уравнения для ионов, движущихся в ротонном газе, весьма затруднительно. Тем не менее, кинетическое уравнение привлекается для расчета ротонной подвижности ионов. Наиболее основательные результаты в этом направлении получены в работах Бовли<sup>46</sup> и Барреры, Бейма<sup>47</sup>. Авторы<sup>46, 47</sup> использовали подход, предложенный ранее Джозефсоном, Лекнером<sup>48</sup> при решении задачи о ферми-частичной подвижности и позволяющий учитывать в ходе решения кинетического уравнения конечность параметра  $\zeta_\pm = p_0^2/(p_T^i)^2 = p_0^2/2TM_\pm$ . Окончательное выражение для  $\mu_{\text{rot}}^\pm$  из<sup>47</sup>, полученное с привлечением вариационного принципа, выглядит так:

$$\frac{e}{\mu_{\text{rot}}^\pm} = \frac{4\pi^{1/2}}{3} \rho_n v_{\text{rot}} [R^2 F(\zeta_\pm) + R_1^2 F_1(\zeta_\pm)], \quad (2.26)$$

$$F(x) = x^{-1} + e^{-x} [x K_0(x) - (1+x) K_1(x)],$$

$$F_1(x) = \frac{1}{10} x^{-2} + \frac{1}{10} e^{-x} \left[ \left( 3x + \frac{1}{2} \right) K_0(x) - (3x - 1 - x^{-1}) K_1(x) \right];$$

$\rho_n$  — плотность ротонов,  $v_{\text{rot}}$  — тепловая скорость ротонов,  $R$ ,  $R_1$  — константы теории,  $K_0$ ,  $K_1$  — функции Бесселя мнимого аргумента. При  $\zeta \rightarrow 0$ ,  $F(\zeta) \rightarrow 0$ ,  $F_1(\zeta) \rightarrow 3/8$ , и выражение (2.26) упрощается:

$$\frac{e}{\mu_{\text{rot}}} \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2}} R_1^2 \rho_n v_{\text{rot}}. \quad (2.27)$$

Этот результат можно получить из элементарных кинетических соображений. В обратном предельном случае  $\zeta \gg 1$  (что формально возможно при  $p_0 \rightarrow \infty$ ) функция  $F(\zeta) \sim \zeta^{-1}$ , и подвижность  $\mu_{\text{rot}}^{\pm} \sim (M_{\pm})^{-1}$ . Другими словами, в этом пределе зависимость  $\mu_{\text{rot}}^{\pm}$  от  $M_{\pm}$  подобна зависимости (2.22)  $\mu_F^{\pm}$  от  $M_{\pm}$ .

Баррера и Бейм<sup>47</sup> показали, что определение  $\mu_{\text{rot}}^{\pm}$  (2.26) при подходящем выборе констант  $R$ ,  $R_1$ ,  $M_+$ ,  $M_-$  — хорошо описывает наблюдаемое различие в поведении  $\mu_{\text{rot}}^{\pm}(T)$  (рис. 16). Основной причиной различия

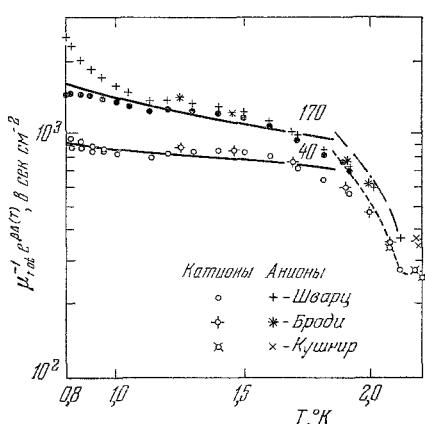


Рис. 16. Температурная зависимость ротонной подвижности  $\mu_{\text{rot}}^{\pm}$ .

Сплошные линии — расчет<sup>47</sup> при следующих значениях параметров: катионы —  $R_1 = 0$ ,  $R = 9,81 \text{ \AA}$ ,  $M = 40m_{\text{He}}^4$ ; анионы —  $R_1 = 0$ ,  $R = 18,65 \text{ \AA}$ ,  $M = 170m_{\text{He}}^4$ . Экспериментальные точки: Шварц<sup>45</sup>, Броди<sup>45</sup>, Кушнир<sup>46</sup>.

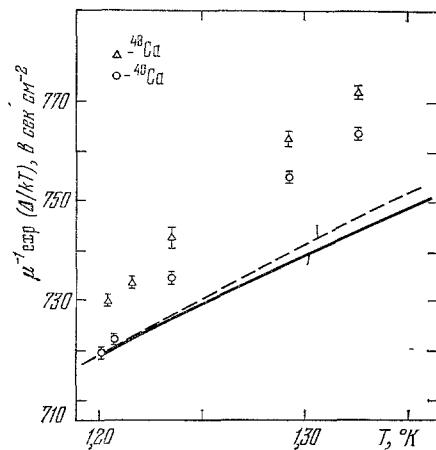


Рис. 17. Ротонная подвижность ионов  $^{48}\text{Ca}$  и  $^{40}\text{Ca}$ , имеющих одинаковые заряды, но различные затравочные массы<sup>49</sup>.

Вариация массы иона не приводит к ожидаемому в соответствии с<sup>46, 47</sup> изменению наклона температурной зависимости подвижности. Сплошная линия — максимально близкая к экспериментальным точкам теоретическая кривая  $\mu_{\text{rot}}(T)$ , полученная на основании (2.26) при  $R_1/R=0$  и  $M=53m_{\text{He}}^4$ . Штриховая кривая — аналогичное максимально возможное приближение к экспериментальным точкам, следующее из<sup>46</sup>.

$\mu_{\text{rot}}^{\pm}(T)$  в данной интерпретации служит разная величина параметра  $\zeta_{\pm}$  для катионов и анионов. Подобное утверждение стимулировало появление интересной экспериментальной работы Глаберсона, Джонсона<sup>49</sup>. Авторы<sup>49</sup>, найдя способ вводить в гелий однократно ионизованные атомы различных элементов, получили возможность варьировать массу гелиевых ионов и, следовательно, экспериментально наблюдать зависимость  $\mu_{\text{rot}}$  от  $M$ . К сожалению, результаты<sup>49</sup> не укладываются в рамки определений (2.26). Иллюстрация этих расхождений приведена на рис. 17.

2) Другая «неприятность» теории ротонной подвижности, о которой, кстати, ничего не говорится в работах<sup>46, 47</sup>, связана с адсорбционными явлениями. В случае катионов речь идет о локализованных ротонных состояниях, возникающих в зоне повышенного давления \*), окружающей затравочный заряд.

Для анионов существование поверхностных ротонных состояний менее очевидно, но их наличие можно допустить, если придерживаться

\*) Ротонная щель в однородном гелии уменьшается с повышением давления. Следовательно, зона повышенного давления вокруг катиона должна играть роль потенциальной ямы для ротонов.

гипотезы о поверхностных ротонах на границе пар — жидкость жидкого гелия, используемой для объяснения наблюдаемой температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения<sup>50</sup>.

Влияние тепловых возбуждений, локализованных в окрестности иона, на температурную зависимость его подвижности уже обсуждалось выше, в связи с особенностями примесной подвижности анионов (см. п. 6) гл. 2). Аналогичные явления, в принципе, могут сопровождать и движение ионов в ротонном газе. Качественные оценки Бондарева<sup>51</sup>, выполненные им для выяснения роли локализованных ротонов в определении эффективного радиуса катиона, подтверждают реальность этого эффекта.

Резюмируя сказанное, можно заключить, что построение самосогласованной теории ротонной подвижности ионов пока не завершено.

### 3. ДРУГИЕ ВИДЫ ПОДВИЖНОСТИ

#### a) СТОКСОВСКАЯ ПОДВИЖНОСТЬ

1) Гидродинамическое определение подвижности гелиевых ионов, справедливое в условиях  $l < R$  ( $l$  — длина пробега,  $R$  — радиус иона) имеет место в широком интервале температур для жидкого  $\text{He}^3$ , в окрестности  $\lambda$ -точки для сверхтекущего гелия, там, где  $\rho_s \ll \rho_n$  и при  $T > T_\lambda$ . Таким образом, для вычисления силы Стокса, действующей на ионы, по существу, нет необходимости использовать уравнения двухжидкостной гидродинамики, и потому исходные рекомендации теории в этом случае весьма просты. Для пузырьков речь должна идти о силе Стокса, вычисленной Рибчинским (см. <sup>23</sup>, с. 91):

$$\mathbf{F}_- = 4\pi R_- \eta \mathbf{V}, \quad (3.1)$$

$\mathbf{V}$  — скорость иона,  $\eta$  — коэффициент 1-й вязкости. В случае положительных ионов

$$\mathbf{F}_+ = 6\pi R_+ \eta \mathbf{V}, \quad (3.2)$$

причем эффективный радиус  $R_+$  должен иметь масштаб радиуса Аткинса.

Наличие степенной зоны уплотнения вокруг катиона приводит к необходимости оценки его роли, а также второй вязкости, в гидродинамическом механизме торможения катионов. Соответствующие расчеты, выполненные Свидзинским, Слюсаревым и Стржемечным<sup>52</sup>, дают следующее выражение для дополнительной силы за счет степенного уплотнения:

$$\delta \mathbf{F}_+ = \mathbf{F}_+ \cdot \frac{2}{3} s \left[ \frac{1}{13} - \frac{s}{259} \left( \frac{\zeta}{\eta} \right) \right], \quad s = \frac{\alpha e^2}{m_4 c_0^2 R_+^4}; \quad (3.3)$$

$F_+$  — сила (3.2),  $\alpha$  — поляризуемость гелия,  $m_4$ ,  $c_0$  — масса атома  $\text{He}^4$  и скорость звука в невозмущенном гелии,  $\zeta$  — вторая вязкость гелия. Величина  $s$  для гелия порядка  $1/3$ . Таким образом, из-за малых численных коэффициентов дополнительной силой (3.3) в расчетах подвижности можно пренебречь.

Измерения подвижности ионов в «стоксовской» области, выполненные разными авторами<sup>53</sup>, приведены на рис. 18. Согласно этим данным отношение подвижностей  $\mu_\eta^+/\mu_\eta^-$  при  $T \approx 2,4^\circ$  равно  $\mu_\eta^+/\mu_\eta^- = 1,7$ . Учитывая определение тормозящих сил  $F_-$  (3.1),  $F_+$  (3.2), нетрудно найти отсюда отношение  $R_-/R_+ = 1,5 \times 1,7 = 2,5$ , что соответствует отношению «привычных» размеров гелиевых ионов:  $R_+ = 6-7 \text{ \AA}$ ,  $R_- = 17-18 \text{ \AA}$ .

Температурная зависимость  $\mu_\eta^\pm$  в области  $T > 2^\circ\text{K}$  определяется температурной зависимостью вязкости  $\eta$ <sup>54a</sup>, а также изменением размеров пузырька с увеличением температуры.

2) Относительная простота описания и экспериментальных условий, отвечающих гидродинамической области определения подвижности, стимулируют различные усложнения эксперимента. Одним из таких усложнений является измерение частотной зависимости подвижности. Анализ уравнения движения

$$M_{\pm} \left( \frac{dV}{dt} + \frac{V}{\tau_{\pm}} \right) = eE_0 e^{i\omega t}$$

показывает, что мнимая часть частотной зависимости подвижности

$$\operatorname{Im} \mu^{\pm}(\omega) = \mu^{\pm}(0) \frac{\omega \tau_{\pm}}{1 + (\omega \tau_{\pm})^2}, \quad \mu^{\pm}(0) = \frac{e \tau_{\pm}}{M_{\pm}} \quad (3.4)$$

должна иметь максимум при  $\omega \tau_{\pm} \sim 1$ . Определяя экспериментальное положение релаксационного максимума, т. е. оценивая величину  $\tau_{\pm}$

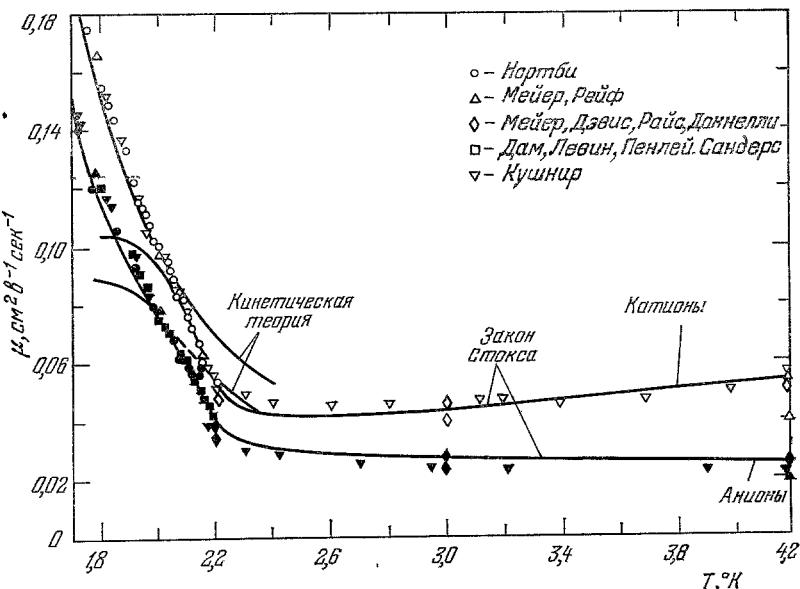


Рис. 18. Экспериментальные данные о подвижности ионов в стоксовской области температур: Кушнир <sup>53б</sup>, Мейер и др. <sup>53в</sup>.

Данные Мейера и Рейфа о ротонной подвижности ионов взяты из <sup>45а</sup>. Остальные ссылки на экспериментальные результаты в ротонной области содержатся в работе Дама и Сандерса <sup>53а</sup>. Сплошные линии отвечают стоксовскому определению подвижности с учетом данных о вязкости <sup>54а</sup> и данных о коэффициенте поверхностного натяжения в этой области температур.

и располагая сведениями о статической подвижности данного иона при  $\omega \rightarrow 0$ , можно вычислить эффективную массу иона с помощью соотношения

$$M_{\pm} = \frac{e \tau_{\pm}}{\mu^{\pm}(0)}.$$

Именно таким образом впервые экспериментально была измерена эффективная масса гелиевых ионов <sup>53а</sup> (рис. 19). Однако точность этого метода уступает резонансной методике <sup>4, 5</sup>, предложенной позднее. Эксперимент указывает на зависимость  $M_{\pm}$  от температуры. Интерпретация этого эффекта пока отсутствует, хотя для анионов речь может идти об изменении  $R_-$  за счет температурной зависимости коэффициента поверхностного натяжения.

3) Изменение стоксовской подвижности ионов с ростом давления изучалось в работе Кепишева, Ковдри, Межова-Деглина, Шальникова<sup>55</sup>. При этом предполагалось обнаружение зависимости  $R_{\pm}$  от давления. В случае положительных ионов речь идет об изменении радиуса Аткинса с ростом давления. Если  $P$ ,  $P_s$  — внешнее давление и давление затвердевания гелия, то зависимость  $R_+$  от  $P$  имеет вид (ср. с (1.2))

$$R_+^* = \frac{\alpha e^2}{2v_4 |P - P_s|} \cdot \quad (3.5)$$

При  $P \rightarrow P_s$   $R_+ \rightarrow \infty$ .

Для анионов наложение внешнего давления должно приводить вначале к уменьшению размеров пузырька и, соответственно, к увеличению подвижности анионов в стоксовской области (следует отличать этот эффект

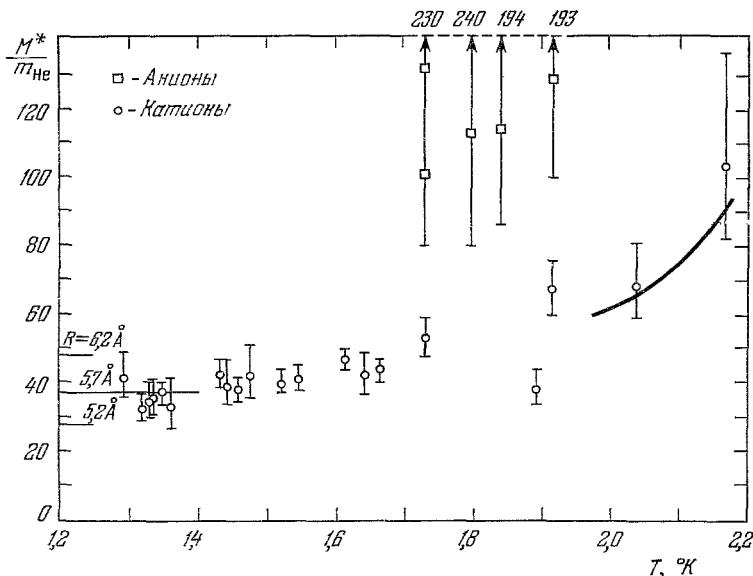


Рис. 19. Эффективная масса гелиевых ионов, найденная в работе<sup>53а</sup> по измерениям частотной зависимости подвижности ионов.

от описанного выше влияния внешнего давления на фоновую подвижность анионов; см. раздел а) гл. 2). Однако затем в игру вступают поляризационные силы, пузырек, грубо говоря, покрывается корочкой твердого гелия, и эффективный радиус аниона с ростом давления начинает расти, как и  $R_+$ . В результате подвижность анионов в функции от приложенного внешнего давления должна сначала увеличиваться, а затем, после достижения некоторого максимума, — уменьшаться. Качественное описание подобной немонотонности в зависимости  $\mu_{\text{q}}$  от  $P$  приведено Архиповым в<sup>2</sup>. Наличие этого эффекта, а также существование изменения  $R_+$  с давлением подтверждено экспериментами<sup>55</sup>. Положение максимума в зависимости  $\mu_{\text{q}}$  от  $P$ , согласно рис. 20, взятому из<sup>55</sup>, приходится на давление  $P \sim 10$  атм. Что касается ожидаемой зависимости  $R_+(P)$  (3.5), то она имеет место лишь для не очень больших давлений; см. рис. 21. В области  $P > 10$  атм экспериментальная зависимость  $R_+(P)$  несколько более полога, чем теоретическая.

4) Специального рассмотрения заслуживает область температур, непосредственно прилегающих к  $T_{\lambda}$ . Теоретически вопрос об ожидаемых особенностях подвижности в этой области температур пока не исследован,

хотя можно думать, что обращение в нуль параметра порядка на поверхности иона (это требование является граничным условием для уравнений Гинзбурга — Питаевского<sup>56</sup>) должно приводить к деформации параметра порядка в окрестности иона и, следовательно, каким-либо наблюдаемым эффектам в подвижности. Экспериментальные результаты, полученные

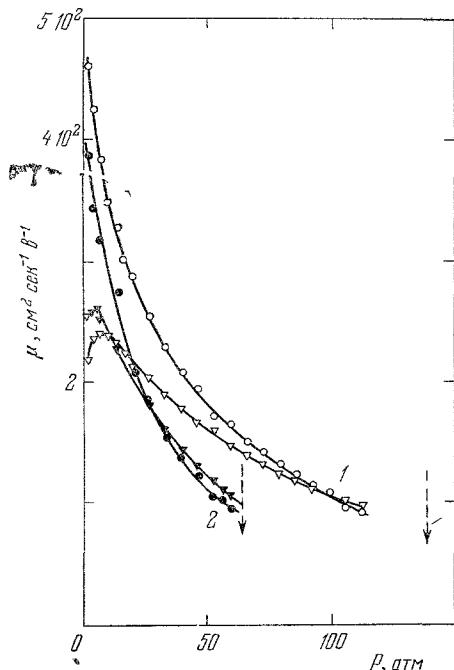


Рис. 20. Зависимость подвижности ионов в жидком гелии от давления<sup>55</sup>. Кружки соответствуют катионам, треугольники — анионам. Кривые 1 и 2 получены при температурах соответственно 4,2 и 2,63 °К. Стрелки указывают давление затвердевания при данной температуре. На кривых, отвечающих подвижности анионов, четко видны максимумы в окрестности  $P=10$  атм.

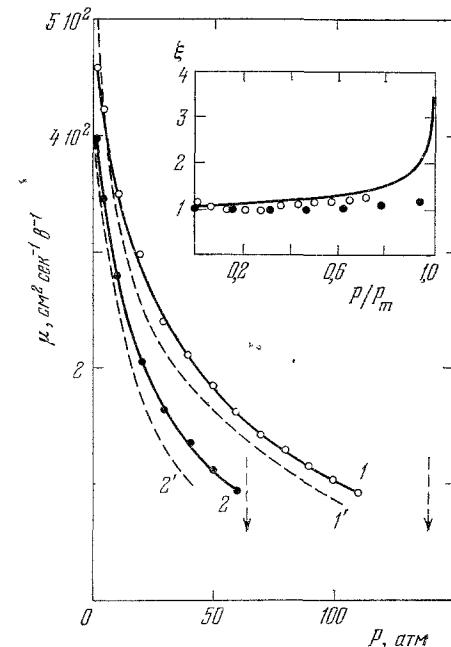


Рис. 21. Сравнение экспериментальных данных о подвижности с рассчитанной стоксовской подвижностью, в которой радиус  $R_+$  имеет вид (3.4), а величина вязкости взята из работы Тьюркстра<sup>54б, 55</sup>.

Сплошные линии — эксперимент: 1 —  $T = 4,2$  °К, 2 —  $T = 2,63$  °К. Штриховые линии — теория. Вверху приведена зависимость безразмерной величины  $\xi = R_+ \sqrt{2v_4 P_s / \alpha e^2}$  от относительного давления.

в работе Алерса и Гамоты<sup>57</sup>, показывают, что радиус гелиевых ионов действительно несколько меняется в окрестности  $\lambda$ -точки (рис. 22). К такому заключению можно прийти, если, кроме данных о подвижности ионов, использовать независимые измерения вязкости  $\eta$  гелия в окрестности  $T_\lambda$  и выразить  $R_\pm$  через  $\mu^\pm$  и  $\eta$  с помощью стоксовских формул

$$R_+ = \frac{e}{6\pi\mu\eta^+}, \quad R_- = \frac{e}{4\pi\eta\mu^-}.$$

Качественно разное поведение  $R_-$  и  $R_+$  в области  $T > T_\lambda$ , следующее из рис. 22, имеет простое объяснение. Радиус пузырька определяется в основном величиной поверхностного напряжения, которое уменьшается с ростом температуры. В результате, величина  $R_-$  монотонно растет с увеличением температуры, и на этом фоне видна небольшая аномалия  $\delta R_-$

в окрестности  $\lambda$ -точки. Что касается размера  $R_+$ , то его вариации вблизи  $T_\lambda$  связаны лишь с близостью к  $\lambda$ -точке. Вдали от  $T_\lambda$  они должны

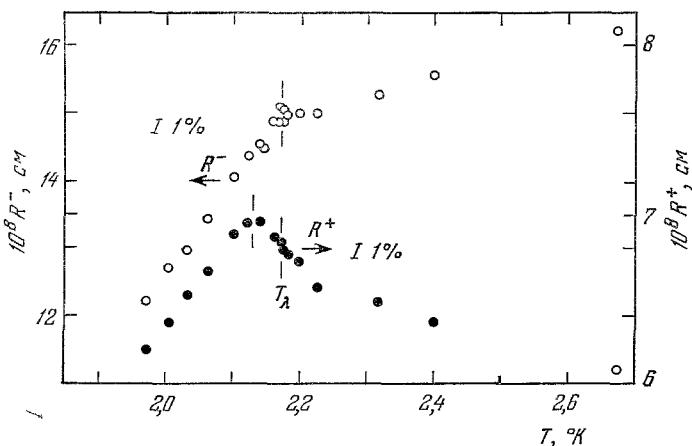


Рис. 22. Поведение  $R^+$  и  $R^-$  в окрестности  $\lambda$ -точки<sup>57</sup>.

исчезать, что и видно на рис. 22. Интересно отметить, что максимум  $R_+$  несколько сдвинут относительно  $\lambda$ -точки в сторону более низких температур. Этот факт не имеет пока объяснения.

### б) Подвижность электронов в плотном газообразном гелии

Построение количественной теории подвижности электронов в окрестности критической концентрации газа  $n_k$ , достаточной для возникновения в гелии электронных пузырьков, является интересной, сложной задачей теории неупорядоченных спектров. Изложение общих результатов, полученных рядом авторов в этой области<sup>58</sup>, довольно затруднительно ввиду их громоздкости. Вместе с тем, не претендуя на описание подвижности, справедливое во всей переходной области концентраций газа и приближающееся к критической области  $n \sim n_k$  со стороны малых, либо больших  $n$ , можно определить взаимодействие медленных электронов с флюктуирующей плотностью газа в терминах, хорошо известных из теории рассеяния света и медленных нейтронов в сплошных средах.

1) Пусть  $n < n_k$ . Если при этом выполняется еще и неравенство

$$\lambda \ll n^{-1/3}, \quad \lambda^2 \approx \frac{\hbar^2}{2m_e T} \quad (3.6)$$

( $\lambda$  — тепловая длина волн элекtronов,  $m_e$  — его свободная масса), то речь идет о подвижности электрона в газообразной среде. Соответствующая подвижность  $\mu_e$  равна<sup>20</sup>

$$\mu_e = \frac{3e}{32\pi f_0^2 \sqrt{2\pi m_e T}}, \quad (3.7)$$

$f_0$  — амплитуда рассеяния электрона на отдельном атоме гелия. Для температур  $T \sim 4$  °К неравенство  $\lambda \ll n^{-1/3}$ , а с ним и определение  $\mu_e$  (3.7), выполняются в области  $n \lesssim 10^{18}$  см<sup>-3</sup>.

С увеличением  $n$  неравенство (3.6) нарушается. В подобных условиях

$$\lambda^{-3} < n < n'_k \quad (3.8)$$

понятие одиночественных столкновений теряет смысл, и возникает вопрос о характере взаимодействия электрона с плотной газообразной средой.

Предлагаемый расчет подвижности основан на следующих соображениях. Запишем взаимодействие электронов с флюктуирующей средой в терминах (1.4) из гл. I:

$$\delta W_e = \frac{2\pi\hbar^2 a_0}{m_e} \delta n, \quad (3.9)$$

где  $\delta n$  — флюктуация плотности. Такое взаимодействие напоминает электрон-фононное взаимодействие в полупроводниках, и можно было бы воспользоваться соответствующим формализмом для расчета электронной подвижности, если в газообразном гелии имеются хорошо определенные фононы нужной длины волны.

Из законов сохранения, возникающих при описании столкновения электрона с фононами, следует, что максимальные волновые числа фононов  $q_{\max}$ , дающие вклад в рассеяние электронов, имеют порядок

$$q_{\max} \approx 2k, \quad (3.10)$$

$k$  — характерное волновое число электрона. В области слабых электрических полей, когда заметное нагревание электронного газа отсутствует, температура электронов совпадает с температурой газовой среды, т. е. для  $T \sim 4-5 \text{ }^{\circ}\text{K}$ , как уже отмечалось,  $k \lesssim 10^6 \text{ см}^{-1}$ . Следовательно, фононы, участвующие в торможении электронов, должны иметь волновые числа  $q_{\max} \lesssim 10^6 \text{ см}^{-1}$ . Область существования таких волн в коротковолновом пределе ограничена длинами порядка длины свободного пробега газовых атомов<sup>35</sup>. Для газообразного гелия характерная длина пробега  $l$  газовых атомов имеет порядок нескольких межатомных расстояний, т. е. при плотности  $n \sim 10^{19} \text{ см}^{-3}$ ,  $l \gtrsim 10^{-6} \text{ см}$ . Следовательно, максимальные волновые числа акустических фононов имеют в интересующих нас условиях масштаб  $q_{\max} \sim 10^6 \text{ см}^{-1}$ , согласующийся по порядку величины с масштабом  $q_{\max}$ , необходимым для выполнения оценки (3.10). Это соответствие делает разумной электрон-фононную интерпретацию взаимодействия (3.9). Закон дисперсии соответствующих газовых фононов выглядит так:

$$\omega = cq, \quad c^2 = \frac{c_p T}{c_v m_4}, \quad (3.11)$$

$c_p/c_v$  — отношение теплоемкостей. Для гелия  $c_p/c_v = 1.66$ .

Сами вычисления электрон-фононной подвижности электронов в газе отличаются от аналогичных расчетов для полупроводников только смыслом констант, фигурирующих в теории. Опуская по этой причине промежуточные выкладки, приведем сразу конечный результат<sup>59</sup>

$$\mu_e = \frac{9}{8\pi} \frac{(c_p/c_v)e}{n a_0^2 \sqrt{m_e T}}. \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) практически не отличается от (3.7). Разница состоит лишь в численных коэффициентах и смысле сечений рассеяния. Если в (3.7) речь идет об одиночественном  $s$ -рассеянии электрона на отдельном атоме  $\text{He}^4$ , то  $a_0$  в (3.12) — некая эффективная длина рассеяния, возникающая в оптической модели взаимодействия малоэнергичного электрона с плотной газообразной средой. Это сходство является основной причиной того, что, как отмечено в работе<sup>11</sup>, соотношение (3.7) достаточно хорошо описывает подвижность электронов в газообразном гелии вплоть до значений  $n \lesssim 5 \cdot 10^{20} \text{ см}^{-3}$ . Ясно, что на самом деле в этой области  $n$  условие задачи  $\lambda \ll n^{-1/3}$  давно нарушено и, фактически, речь идет о совпадении экспериментальных данных с (3.12), а не (3.7).

2) В обратном предельном случае  $n > n_k$  электроны стремятся к локализации, причем «глубина»  $\Delta$  локализованного электронного уровня по отношению к энергии электрона в нелокализованном состоянии начинает заметно превосходить температуру. При этом появляется возможность четкого разделения совокупности электронов, введенных в гелий, на локализованные с концентрацией  $n_i$ , и свободные —  $n_e$ . В термодинамическом равновесии химические потенциалы локализованных и свободных электронов должны совпадать между собой, что является основанием для записи относительной концентрации локализованных электронов

$$\frac{n_e}{n_i} = \left( \frac{m_e}{M_i} \right)^{3/2} \exp \left( - \frac{\delta F_0}{T} \right); \quad (3.13)$$

$M_i$  — эффективная масса аниона в газе, равная присоединенной массе пузырька,  $M_i \approx \frac{2\pi}{3} \rho R_-^3$ ,  $\rho$  — плотность гелия. Величина  $\delta F_0$  берется из численных расчетов, приведенных в гл. 1 (см. формулы (1.13)) либо из решения модельной задачи о локализации электрона в плотном гелии, в которой распределение плотности гелия аппроксимировано прямоугольной, сферически-симметричной ямой<sup>60</sup>.

Располагая определением  $n_e/n_i$  (3.13) и вводя понятие об эффективной подвижности электронов в газообразном гелии

$$\mu^* = \left( 1 - \frac{n_e}{n_i} \right) \mu_i + \frac{n_e}{n_i} \mu_e, \quad \mu_i = \frac{e}{4\pi\eta R_-} \quad (3.14)$$

( $\mu_e$  — из (3.12),  $\eta$  — коэффициент первой вязкости газа) можно сравнить  $\mu^*$  с имеющимися экспериментальными данными о подвижности электронов в плотном газе (см. рис. 2). При этом выясняется одно важное обстоятельство, позволяющее существенно уточнить положение критической плотности  $n_k$  на рис. 2. Дело в том, что наблюдаемое отношение  $\mu_e/\mu_i \sim \sim 10^5$ . В то же время согласно (3.13) отношение  $n_e/n_i$  даже при  $\delta F_0/T \sim 1$  имеет порядок  $n_e/n_i \sim 10^{-7}$  за счет большой разницы в массах  $m_e$  и  $M_i \sim \sim 100 m_{He4}$ .

В результате оказывается, что в области автолокализации электронов эффективная подвижность  $\mu^*$  (3.14) практически совпадает с  $\mu_i$  и, следовательно, относительно слабо зависит от  $n$ . Но это означает, что величина  $n_k$  должна находиться в нижней части переходной области графика  $\mu^*(n)$ , там где зависимость  $\mu^*$  от  $n$  выходит на стоксовскую асимптотику. Эти соображения хорошо коррелируют вычисленным значением  $n_k \approx 2 \cdot 10^{21} \text{ см}^{-3}$ , полученным в п. в) гл. 1.

Следует отметить, что в работах<sup>58</sup> достигнуто согласие между расчетными и наблюдаемыми значениями подвижности  $\mu^*$  во всей переходной области  $n$ . Однако изложение этих результатов требует введения целого ряда специальных определений теории неупорядоченных спектров и теории «протекания» (см., например, обзор<sup>61</sup>), обсуждение которых выходит за рамки данного обзора.

3) Как отмечалось в гл. 1, включение сильного магнитного поля приводит к возникновению в области  $n < n_k$  анионов большого радиуса, имеющих вид эллипсоида вращения, сильно вытянутого вдоль направления магнитного поля и слабо возмущающего исходную плотность газа. Размеры аниона большого радиуса при  $n \ll 10^{21} \text{ см}$  и  $H \ll 10^6 \text{ гс}$  заметно превосходят длину свободного пробега газовых атомов при таких плотностях и температурах ( $r_0 \approx 3,10^{-7} \text{ см}$ ),  $R_z \approx 8,10^{-7} \text{ см}$ ,  $l \approx 10^{-7} \text{ см}$ ). В результате для оценок подвижности аниона большого радиуса вдоль направления магнитного поля можно использовать гидродинамическое приближение.

Движение области переменной плотности вдоль направления магнитного поля со скоростью  $V$  приводит к появлению поля скоростей, следующего из уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -\frac{V}{T} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0, \quad (3.15)$$

$\psi(r, z)$  — из (1.10а) гл. 1.

Зная поле  $\mathbf{v}$ , можно подсчитать диссиацию энергии  $\dot{W}$  в вязкой жидкости по известным гидродинамическим формулам. С другой стороны, работа ведущего электрического поля в единицу времени при движении иона с постоянной скоростью  $V$  есть  $eEV$ . Равенство  $eEV = \dot{W}$  дает определение  $V$ , а значит, и подвижности аниона большого радиуса<sup>12</sup>

$$\mu_H = \frac{e}{6\pi\eta R^*}, \quad R^* \approx 0,5 (\gamma r_0)^2 R_z^{-1}, \quad (3.16)$$

где  $\gamma$  — из (1.15). Величина  $\mu_H$  в условиях (1.16а) на 2—3 порядка меньше подвижности свободных электронов при этой же плотности газа и температуре.

Экспериментально анионы большого радиуса пока не наблюдались.

### в) Подвижность в твердом гелии

Неоднозначность определения структуры гелиевых ионов в твердом гелии, отмеченная в гл. 1, приводит к необходимости обсуждения различных способов перемещения зарядов по решетке гелия. Для зарядов, представляющих собой точечные дефекты, речь может идти о различных модификациях перескокового механизма, в которомом движение заряда по решетке осуществляется последовательными прыжками на межатомное расстояние. Если же ион является макроскопическим образованием (например, пузырьком радиуса  $\sim 10 \text{ \AA}$ ), то его движение по решетке имеет, по-видимому, диффузионно-вязкое, либо пластическое происхождение.

1) Подвижность точечных заряженных дефектов. Экспериментальное изучение диффузии точечных дефектов в твердом гелии (имеется в виду диффузия атомов  $\text{He}^3$  в матрице  $\text{He}^4$  и спиновая диффузия в твердом  $\text{He}^3$ ) позволило установить, что перемещение таких дефектов по решетке гелия происходит в основном с использованием вакансий исходной матрицы. Другими словами, наиболее вероятным процессом, определяющим величину коэффициента диффузии точечной примеси в гелии, является ее перескок на соседний узел в тот момент, когда узел оказывается вакантным. Подробная аргументация в пользу этого механизма диффузии приведена в недавнем обзоре Андреева<sup>62</sup>. Имея в виду содержание этого обзора, дающего полное представление о положении дел в изучении квантовой диффузии незаряженных дефектов в твердом гелии, мы остановимся в данном разделе лишь на некоторых особенностях подвижности заряженных точечных дефектов по сравнению с незаряженными.

Измерения подвижности катионов в твердом гелии, являющихся, безусловно, точечными заряженными дефектами, были осуществлены различными методами, рядом авторов<sup>15, 16, 63, 64</sup>. Результаты последних, наиболее тщательных измерений подвижности катионов в твердом  $\text{He}^4$ , выполненных Кепшишевым и Шальниковым<sup>64</sup>, приведены на рис. 23. Кроме того, на рис. 24 произведено сравнение экспериментальных данных для коэффициента диффузии катионов  $D_+$  и атомов  $\text{He}^3 D_3$  в решетке  $\text{He}^4$  при одинаковых молярных объемах и температурах. (Данные о величине  $D_3$  взяты

из работы<sup>65</sup>.) На основании данных рис. 23, 24 можно сделать следующие выводы: а) в термоактивационной области коэффициенты диффузии  $D_3$  и  $D_+$  практически совпадают между собой, б) с понижением температуры атомы  $\text{He}^3$  теряют локализацию и начинают перемещаться по решетке туннельным образом, в) что касается катионов, то для них тенденции к делокализации не наблюдается.

Различное поведение коэффициентов  $D_3$ ,  $D_+$  в области низких температур нетрудно объяснить, если учесть, что заряженная примесь взаимодействует с решеткой более интенсивно, чем незаряженная. Речь идет

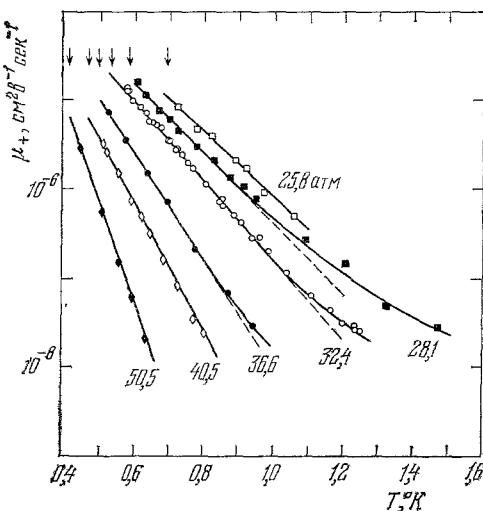


Рис. 23. Температурная зависимость подвижности катионов в г. п. у.  $\text{He}^4$  для различных давлений<sup>64</sup>.

Стрелками отмечены температуры плавления, соответствующие этим давлениям.

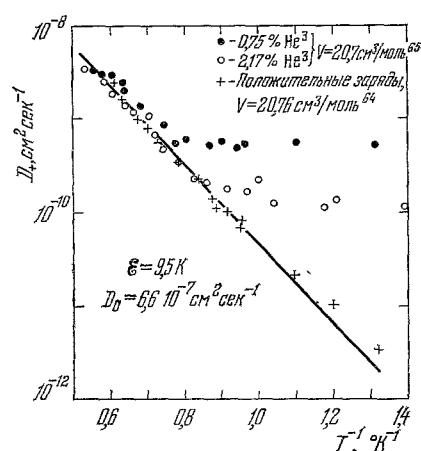


Рис. 24. Температурная зависимость коэффициента диффузии катионов  $D_+$  и атомов  $\text{He}^3$  в г. п. у.  $\text{He}^4$ <sup>64</sup>.

$$D_+ = D_0 \exp(-E/kT).$$

о поляризационном взаимодействии атомов решетки с точечным зарядом, вызывающим локальную деформацию решетки в окрестности локализации заряда. Аналогичное взаимодействие в жидком гелии приводило к возникновению вокруг затравочного положительного заряда сферической области затвердевшего гелия (сферы Аткинса). В данном случае поляризационное взаимодействие резко снижает вероятность туннельного перемещения катиона по решетке твердого гелия, по сравнению со случаем незаряженных точечных примесей, что и наблюдается экспериментально.

Наличие сильного поляризационного взаимодействия между зарядом и атомами решетки, казалось бы, должно приводить к заметному изменению энергии взаимодействия между вакансией и заряженным дефектом, в результате чего отмеченная разница между  $D_+$  и  $D_3$  в области низких температур должна сохраняться и в термоактивационной области. Однако в действительности этого не происходит. Дело в том, что эффективное взаимодействие  $V_v^+$  между зарядом и вакансией определяется суммой двух взаимодействий

$$V_v^+ = V_\alpha(r) + V_\sigma(r), \quad V_\sigma = \omega_{ik}\sigma_{ik}, \quad (3.17)$$

где  $V_\alpha$  — прямое взаимодействие вакансию с зарядом, носящее характер отталкивания (атом гелия притягивается к заряду за счет сил поляризационного происхождения, соответственно вакансия должна отталкиваться

от этого заряда с той же интенсивностью), взаимодействие  $V_\sigma$  возникает в задаче благодаря наличию вокруг заряда дополнительной упругой деформации поляризационного происхождения. В определении  $V_\sigma = \omega_{ik}\sigma_{ik}$  — упругие напряжения, обусловленные действием поляризационных сил,  $\omega_{ik}$  — изменение объема решетки, связанное с наличием в ней вакансии. В частном случае изотропной упругой среды  $\omega_{ik} \rightarrow \omega_v \delta_{ik}$ , и выражение для  $V_\sigma$  принимает вид  $V_\sigma \approx \omega_v \sigma_{ii}$ . Величину  $\omega_v$  в случае вакансии принято считать отрицательной<sup>66</sup>, так что компоненты  $V_\alpha$  и  $V_\sigma$  в полном взаимодействии  $V_v^+$  имеют разные знаки. Учитывая, что оба слагаемых в (3.17) имеют одинаковые координатные зависимости:  $V_\alpha \sim V_\sigma \sim \sim r^{-4}$ , нетрудно убедиться в том, что при разумных значениях  $\omega_v^+ \sim a^3$  ( $a$  — межатомное расстояние) возможна сильная компенсация одного слагаемого другим

$$V_v^+ = \frac{1}{2} \frac{\alpha e^2}{r^4} \left[ 1 - \omega_v n \frac{(3-5\sigma)}{(1-\sigma)} \right], \quad (3.17a)$$

$\alpha$  — атомная поляризуемость гелия,  $n$  — средняя плотность атомов в решетке твердого гелия,  $\sigma$  — коэффициент Пуассона. В условиях

$$\left[ 1 - \omega_v n \frac{(3-5\sigma)}{(1-\sigma)} \right] \rightarrow 0 \quad (3.18)$$

величина  $V_v^+ \rightarrow 0$  и, следовательно, термоактивационный коэффициент диффузии катионов  $D_+$ , имеющий вакационное происхождение, будет слабо отличаться от величины  $D_3$  в этой области.

Следует отметить, что возможность сильной перенормировки взаимодействия  $V_v^+$  катиона с вакансиями аналогична перенормировке взаимодействия  $V_3^+$  примесных возбуждений с катионом в слабых растворах жидкого  $\text{He}^3$  в  $\text{He}^4$  (см. определение  $V_3^+$  (2.10) и комментарии к нему). Разница заключается лишь в том, что в случае подвижности катионов в слабых жидких растворах  $\text{He}^3 - \text{He}^4$  величина компенсации известна из независимых измерений. Поэтому теория подвижности катионов в слабых растворах  $\text{He}^3 - \text{He}^4$  в состоянии давать количественные предсказания о величине  $\mu_3^+$  и ее температурном поведении. Что касается подвижности катионов в твердом гелии, то в этой задаче величина  $\omega_v$ , или более точно, величина  $\omega_{ik}$  пока не известна. Поэтому возможность сильной перенормировки можно только предполагать, определяя с помощью (3.18) масштаб величины  $\omega_v$ .

Таким образом, наблюдаемые особенности в температурном поведении подвижности катионов в твердом гелии (по сравнению с подвижностью незаряженных точечных примесей в аналогичных условиях по температуре и давлению) допускают разумное качественное объяснение.

2) *Диффузионная подвижность анионов.* 2.1) *Стационарная подвижность.* Один из возможных механизмов подвижности макроскопического аниона в твердом гелии имеет диффузионное происхождение<sup>18</sup>. Электрон, находящийся в сферической полости, при включении внешнего электрического поля напряженности  $E$  начинает оказывать несимметричное давление на стенки пузырька. Это давление после некоторого процесса подстройки приводит к возникновению стационарных диффузионных потоков вакансий из участков с повышенным давлением к местам с пониженным давлением. Существование этих потоков и вызывает движение пузырька как целого в направлении ведущего поля  $E$ . Диффузионные задачи подобного типа уже встречались, например, в работе<sup>67</sup> при изучении диффузионно-вязкого течения поликристаллов под действием приложенных извне давлений. Поэтому необходимая система уравнений и ее обоснование могут быть полностью заимствованы из этих работ.

Стационарное объемное поле вакансий  $c(\mathbf{r})$  описывается гармоническим уравнением \*)

$$\Delta c = 0 \quad (3.19)$$

с граничным условием

$$c|_{r=R_-} = \frac{c_s \omega_v}{T} \delta P_n, \quad (3.20)$$

$P_n$  — нормальные давления на поверхности иона радиуса  $R_-$ ,  $c_s$  — равновесная концентрация вакансий на поверхности иона,  $\omega_v$  — объем одной вакансией,  $T$  — температура. Нормальные потоки вакансий на поверхности иона определяют локальную скорость перемещения элемента граничной поверхности аниона  $V_n(\theta)$ :

$$D_v \frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{R_-} = V_n(\theta), \quad (3.21)$$

$D_v$  — коэффициент диффузии вакансий.

Для того чтобы ион двигался как целое без деформации, необходимо выполнение условия  $V_n(\theta) = V_0 \cos \theta$ , где  $V_0$  — скорость движения иона как целого. Таким образом, определяя давление на поверхности иона и решая гармоническую задачу (3.19) — (3.21), удается связать  $V_0$  с напряженностью приложенного электрического поля, т. е. найти подвижность иона  $\mu = V_0/E$ .

Величина электронного давления на поверхности иона  $\delta P_{\text{эл}}$  может быть получена с помощью формул, аналогичных (2.7), в которых  $\psi(r, \theta)$  — решение уравнения Шредингера для электрона в сферической потенциальной яме, задаваемой граничным условием  $\psi(r, \theta)|_{R_-} = 0$ , при наличии возмущающего электрического поля  $E$ .

Возникающее выражение для  $\delta P_{\text{эл}}$  имеет с точностью до множителя порядка единицы следующую структуру:

$$\delta P_{\text{эл}} \approx P_{\text{эл}}^0 \frac{eER_-}{W} \cos \theta, \quad P_{\text{эл}}^0 = \frac{W}{\omega_i}, \quad (3.22)$$

где  $W$  — энергия электрона в основном состоянии,  $P_{\text{эл}}^0$  — сферически-симметричное давление электрона на поверхность пузырька,  $\omega_i$  — объем пузырька.

Используя связь между  $E$  и  $\delta P_{\text{эл}}$  и решая систему (3.19) — (3.21), нетрудно найти выражение для подвижности заряженного пузырька:

$$\mu_s^- = \frac{V_0}{E} = c_s \frac{\omega_v}{\omega_i} \frac{eED_v}{T}. \quad (3.23)$$

Для полного определения подвижности  $\mu_s^-$  (3.23) необходимо выяснить смысл величины  $c_s$ . В общем случае анизотропной упругой среды концентрация вакансий на поверхности сферической заряженной полости в твердом гелии может отличаться от равновесной концентрации  $c_0(T)$  вдали от аниона. Однако в приближении изотропной упругой среды и с учетом соображений, позволивших написать взаимодействие между точечным зарядом и вакансией в виде (3.17а), концентрация вакансий на поверхности пузырька совпадает с объемной  $c_s(T) \approx c_0(T)$ .

2.2) *Подвижность в переменном поле.* Напомним, что в жидком гелии высокочастотная подвижность ионов содержит некие релаксационные пики (3.4), определение положения которых позволяет судить о времени

\*) Мы пренебрегаем поверхностной диффузией по поверхности иона, так как поверхностный слой иона находится под большим сферически-симметричным электронным давлением и, следовательно, поверхностная диффузия не может заметно превышать объемную.

релаксации и эффективной массе гелиевых ионов в жидком гелии. Аналогичные максимумы в частотной зависимости подвижности должны наблюдаться и для ионов в твердом гелии. Только их конкретное положение определяется другими параметрами.

Задача о частотной зависимости подвижности отрицательных ионов в твердом гелии формально отличается от системы (3.19) — (3.21) лишь заменой уравнения (3.19) на диффузионное уравнение

$$i\omega c = D_v \Delta c. \quad (3.24)$$

Решая эту систему, легко находим

$$\operatorname{Im} \mu_s^-(\omega) = \mu_s^-(0) \frac{x}{(1+x)^2 + x^2}, \quad x = \frac{\omega R_-^2}{2D_v}. \quad (3.25)$$

Это соотношение вполне аналогично (3.4) и указывает на существование релаксационного максимума при частоте  $\omega \approx \sqrt{2D_v/R_-^2}$ .

2.3) *Некоторые квантовые особенности подвижности.* Определение величины подвижности ионов в твердом гелии интересно не только само по себе. В данном случае задача вызывает повышенный интерес в связи с перспективой изучения при помощи заряженных частиц различных свойств дефектов решетки твердого гелия. Известны довольно общие соображения Андреева и И. Лифшица<sup>68</sup> о возможности существования в твердом гелии вакансий квантового происхождения, имеющих отличную от нуля концентрацию при  $T \rightarrow 0$ . Кроме того, даже при достаточно высоких температурах гелиевые вакансы должны терять свою локализацию, превращаясь в квазичастицы «вакансии». Все эти особенности в поведении вакансий имеют прямое отношение к подвижности отрицательных ионов.

При понижении температуры в задаче о вычислении подвижности анионов раньше всего, по-видимому, возникает необходимость учета потери вакансиями их локализации. По оценкам Пушкарова<sup>69</sup>, длина пробега вакансий становится заметно больше межатомных расстояний при температурах  $T < T_D/8$ , т. е. уже где-то в области  $T \lesssim 1$  °К. В подобных условиях связь между граничными значениями избыточной концентрации вакансий и давлением на поверхности иона остается еще классической:

$$\delta c(R_-) = \frac{c_s \omega_0 v}{T} \delta P_{\text{вл.}}$$

Однако пространственное распределение вакансий и соответствующие вакансационные потоки должны определяться теперь не с помощью диффузионного уравнения, а из решения кинетического уравнения для функции распределения вакансий.

Опуская детали этого расчета, выполненного в работе<sup>18</sup>, приведем окончное выражение для скорости движения аниона в подобных условиях:

$$V_0 = c_s \frac{eER_-}{T} \frac{\omega_0}{\omega_i} \sqrt{\frac{T}{2\pi m^*}}, \quad \omega_i = \frac{4}{3} \pi R_-^3, \quad (3.26)$$

$m^*$  — эффективная масса вакансиона,  $R_-$  — радиус иона. Результат (3.26) качественно отличается от диффузионного выражения (3.23) и имеет простой физический смысл. В условиях, когда вакансионы свободно, без столкновений, подходят и уходят к поверхности иона, скорость перемещения иона как целого лимитируется только двумя факторами: концентрацией неравновесных вакансий на поверхности иона, имеющей оценку

$$\delta c \approx c_s \frac{eER_-}{T} \frac{\omega_0}{\omega_i},$$

и скоростью ухода (прихода) вакансий от поверхности, т. е. тепловой скоростью вакансий  $v_T \approx (2T/m^*)^{1/2}$ . В результате  $V_0 \approx v_T \delta c$ , что и получено в (3.26).

Очевидно, результат (3.26) справедлив, если  $T \ll \Delta_v$ , где  $\Delta_v$  — ширина вакансационной зоны (предполагаемый масштаб  $\Delta_v$  есть  $\Delta_v \sim \sim 1 \text{ } ^\circ\text{K}$ <sup>62</sup>). Если же температура среды больше, чем  $\Delta_v$ , то характерная скорость вакансиона оценивается выражением  $v \sim a\Delta_v \hbar^{-1}$ . Соответственно, коэффициент диффузии  $D_-$  и подвижность аниона  $\mu_s^-$  принимают вид

$$D_- \sim c_0(T) \Delta_v a^2 \hbar^{-1} \left( \frac{a}{R_-} \right)^2, \quad \mu_s^- = \frac{e D_-}{T}, \quad (3.26a)$$

при условии, что  $c_s(T) \approx c_0(T)$ , где  $c_0(T)$  — равновесная концентрация вакансий,  $c_0(T) = c_0 \exp(-E/T)$ ,  $E$  — энергия активации вакансий. Сравнивая величину  $D_-$  (3.26), (3.26a) с определением  $D_3$ , либо  $D_+$  в термоактивационной области, приведенным в<sup>62</sup>, получаем

$$D_3 \sim D_+ \sim \begin{cases} c_0 \sigma_{in} \hbar^{-1} \Delta_v, & T \gg \Delta_v; \\ c_0 \sigma_{in} \hbar^{-1} \sqrt{\Delta_v T}, & T \ll \Delta_v, \end{cases} \quad (3.27)$$

где  $\sigma_{in}$  — сечение неупругого рассеяния вакансиона на точечном дефекте (неупругим, по определению<sup>62</sup>, называется акт столкновения дефекта с вакансией, сопровождающийся перескоком дефекта на межатомное расстояние; при записи второго предельного случая  $T \ll \Delta_v$  использованы соотношения  $v \sim \sqrt{T/m^*}$ ,  $m^* \sim \hbar^2/a^2 \Delta_v$ ), можно заключить, что отношение  $D_+/D_-$  есть

$$\frac{D_+}{D_-} \sim \frac{\sigma_{in}}{a^2} \left( \frac{R_-}{a} \right)^2. \quad (3.28)$$

2.4) Измерение подвижности анионов в твердом  $\text{He}^4$  в наиболее полном виде выполнено Кешишевым и Шальниковым<sup>64</sup>. Наблюдаемые значения этой подвижности из работы<sup>64</sup> в зависимости от температуры и давления собраны на рис. 25. Кроме того, на рис. 26 приведены значения энергии активации  $E$  для подвижности катионов и анионов в зависимости от молярного объема твердого г. п. у.  $\text{He}^4$ .

Сравнение экспериментальных данных, отложенных на рис. 23, 25, 26, позволяет заключить, что в области давлений  $P \geq 40 \text{ atm}$  подвижности катионов и анионов практически совпадают между собой. Этот факт можно было бы расценивать как доказательство отсутствия пузырьков с  $R_- \gg a$  в твердом гелии, если бы величина  $\sigma_{in}$  в определении  $D_+$  (3.27) имела порядок  $\sigma_{in} \sim a^2$ . В действительности, однако, реальное значение  $\sigma_{in}$ , определяемое с помощью (3.27) из данных рис. 23, оказывается гораздо меньше:  $\sigma_{in} \leq 10^{-1} a^2$ \*). При таком малом значении неупругого

\*) Если  $\Delta_v \leq 1 \text{ } ^\circ\text{K}$  и слабо зависит от давления (согласно расчетам Минеева<sup>70</sup> изменение молярного объема г.п.у.  $\text{He}^4$  в пределах 20,23—18,23  $\text{cm}^3/\text{моль}$  меняет величину  $\Delta_v$  в пределах  $1 \leq \Delta_v \leq 1,5 \text{ } ^\circ\text{K}$ ), то, используя первую из асимптотик (3.27), находим по данным рис. 23, что для набора давлений от 21,8 до 50,5  $\text{atm}$  сечение  $\sigma_{in}$  оказывается растущей функцией давления, принимая значения  $5 \cdot 10^{-3} a^2 \leq \sigma_{in} \leq 5 \cdot 10^{-1} a^2$ ,  $a \approx 3,5 \text{ \AA}$ .

В обратном предельном случае  $\Delta_v > 1 \text{ } ^\circ\text{K}$  (основанием для обсуждения этого предельного случая является численное значение  $\Delta_v \approx 4-5 \text{ } ^\circ\text{K}$ , полученное Кешишевым и Шальниковым<sup>64</sup> при интерпретации экспериментальных данных о нелинейных по электрическому полю эффектах в движении зарядов по решетке твердого гелия) для обработки экспериментальных данных рис. 23 должна быть использована вторая асимптотика (3.27). В результате, для тех же давлений величина  $\sigma_{in}$  оказывается несколько меньше  $10^{-3} a^2 \leq \sigma_{in} \leq 10^{-1} a^2$ . Следует отметить, что при втором способе обработки предэкспонент графиков рис. 23 результаты для  $\sigma_{in}$  практически не зависят от температуры (как и должно быть), тогда как в первом варианте обработки такая зависимость от температуры обнаруживается.

сечения рассеяния вакансии на точечном дефекте наблюдаемое численное совпадение коэффициентов  $D_+$  и  $D_-$  согласно (3.28) эквивалентно неравенству  $(R_-/a)^2 \geq 10$ . Выполнение этого неравенства не противоречит требованию  $R_- \gg a$ , т. е. не может служить аргументом в пользу точечной структуры анионов в твердом гелии.

В области низких давлений  $P < 40$  атм поведение катионов и анионов становится качественно различным. Подвижность катионов согласно

рис. 23 монотонно растет с уменьшением давления. Что касается подвижности анионов (см. рис. 25), то с уменьшением давления она сначала растет, проходит

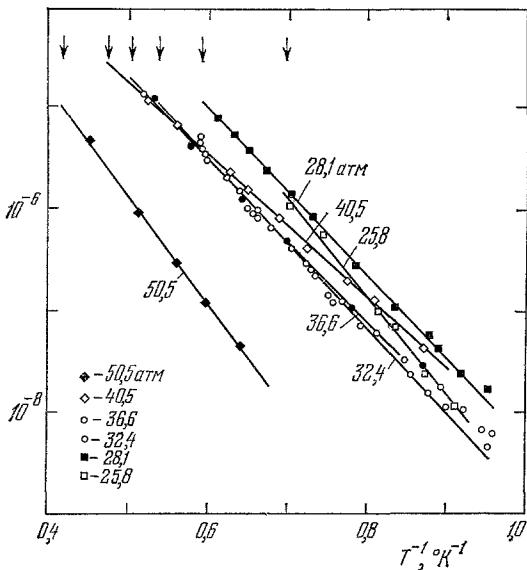


Рис. 25. Температурная зависимость подвижности анионов в г. п. у.  $\text{He}^{64}$  для различных давлений.

Стрелками отмечены температуры плавления, соответствующие этим давлениям.

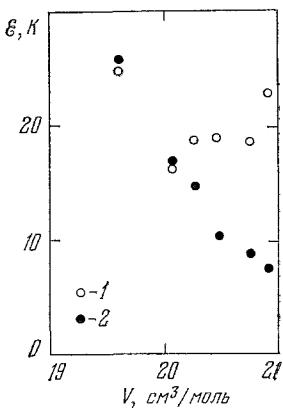


Рис. 26. Зависимость энергии активации подвижности анионов (1) и катионов (2) от молярного объема твердого  $\text{He}^{64}$ .

через максимум, а затем в области  $P \ll 40$  атм начинает снова убывать. Аналогичное различие в зависимости подвижности катионов и анионов от давления наблюдается и в жидкок гелии (см. рис. 20 и комментарии к нему в тексте). Однако в случае твердого гелия интерпретация этого различия гораздо менее определена. Наибольший интерес вызывает аномальное поведение энергии активации подвижности анионов в области малых давлений, представленное на рис. 26. Пузырьковая модель аниона позволяет высказать предположение о возможной природе такого поведения энергии активации подвижности анионов.

Решение задачи о равновесии для упругой среды со сферической полостью радиуса  $R_- \gg a$ , содержащей локализованный электрон, при наличии изотропного сжимающего давления  $P_\infty$  на бесконечности выглядит следующим образом:

$$\sigma_{rr} = P_\infty \left( 1 + \frac{R_-^3}{r^3} \frac{P_l + P_\alpha}{P_\infty} \right),$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi} = P_\infty \left( 1 - \frac{R_-^3}{2r^3} \frac{P_l + P_\alpha}{P_\infty} \right),$$

где  $P_l$  и  $P_\alpha$  — лапласовское и поляризационное давления на поверхности пузырька (поляризационные силы, вообще говоря, распределены по объему упругой среды, однако в задаче об определении эффективного радиуса

пузырька их можно заменять эквивалентным давлением на поверхности пузырька). Величина  $R_-$  определяется из условия  $P_{\text{вл}} = P_\infty + P_l + P_\alpha$ . В результате вокруг сферической заряженной полости возникнет поле упругих напряжений  $\sigma_{ik}(r)$ , зависящее от  $r$  и обладающее свойством  $\sigma_{ii} = 3P_\infty$ . Следовательно, в рамках теории изотропного упругого тела энергия вакансии в окрестности заряженного пузырька  $V_\sigma$ , записанная в виде  $V_\sigma = \omega_\sigma \sigma_{ii}$ , не зависит от координат. Однако если учесть, что реально речь идет не об изотропно упругой среде и не о кубическом кристалле (нас интересует твердый Не<sup>4</sup> с г. п. у. решеткой), то более общее выражение  $V_\sigma = \omega_{ik}\sigma_{ik}$  может оказаться координатно зависящим и, по определению, имеющим минимум при  $r = R_-$ . В этом случае поверхностная концентрация вакансий на границе пузырька будет определяться выражением

$$c_s = c_0(T) \exp \left[ \frac{V_\sigma^*(R_-)}{T} \right], \quad V_\sigma^* = \omega_{ik}(\sigma_{ik} - 3P_\infty \delta_{ik}),$$

т. е. экспоненциально отличаться от равновесной концентрации вакансий  $c_0$ . Наличие повышенной концентрации вакансий на поверхности пузырька, экспоненциально растущей с увеличением давления на бесконечность, естественно поставить в соответствие с наблюдаемым аномальным поведением энергии активации для подвижности анионов.

Автор благодарен А. Ф. Андрееву и Л. П. Межову-Деглину за многочисленные дискуссии по вопросам тематики данного обзора, а также К. О. Кешишеву за предоставление возможности использовать экспериментальные данные о подвижности ионов в твердом гелии, вошедшие в его диссертацию.

Институт физики твердого тела АН СССР,  
Черноголовка (Московская обл.)

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. K. R. Atkins, Phys. Rev. **116**, 1339 (1959).
2. Р. Г. Архипов, УФН **88**, 185 (1966).
3. E. P. Gross, Ann. Phys. (N. Y.) **19**, 234 (1962).
4. В. Б. Шикин, ЖЭТФ **58**, 1748 (1970).
5. J. Poitrenaud, F. J. B. Williams, Phys. Rev. Lett. **29**, 1230 (1972); **32**, 1213 (1974).
6. R. A. Ferrel, Phys. Rev. **108**, 167 (1957).
7. G. Cageli, V. Fasoli, F. Gaeta, Nuovo Cimento **15**, 774 (1960).
8. W. T. Sommer, Phys. Rev. Lett. **12**, 371 (1964).
9. a) В. Налпрегин, R. Gomer, J. Chem. Phys. **43**, 1069, 1965.  
И. А. Гачечиладзе, К. О. Кешишев, А. И. Шальников, Письма ЖЭТФ **12**, 231 (1971);  
б) Н. Лебеденко, Б. У. Родионов, Письма ЖЭТФ **16**, 583 (1972).  
L. Bruschi, G. Mazzoli, M. Sautini, Phys. Rev. Lett. **28**, 1504 (1972).  
R. J. Loveland, P. G. Le Comber, W. E. Spear, Phys. Lett. **A39**, 225 (1972).
- 6) K. F. Canter, J. D. McNutt, L. O. Roelling, Phys. Rev. **A12**, 375 (1975).
10. B. E. Springett, M. H. Cohen, J. Jortner, ibid. **159**, 183 (1967).  
Yi-Min Shih, Chia-Wei Woo, ibid. **A8**, 1437 (1973).
11. J. L. Levin, T. M. Sanders, ibid. **154**, 138 (1967).
12. Л. С. Кукушкин, В. Б. Шикин, ЖЭТФ **63**, 1830 (1972).
13. А. Г. Храпак, И. Т. Якубов, ТВТ **11**, 1115 (1973).
14. H. R. Harrisson, B. E. Springett, Phys. Lett. **A35**, 73 (1971).
15. К. О. Кешишев, Л. П. Межов-Деглин, А. И. Шальников, Письма ЖЭТФ **12**, 234 (1970).
16. G. A. Sai-Halasz, A. J. Dahm, Phys. Rev. Lett. **28**, 1244 (1972).  
D. Martyn, E. J. B. Williams, J. de Phys. **34**, 989 (1973).
17. M. H. Cohen, J. Jortner, Phys. Rev. **180**, 238 (1969).
18. В. Б. Шикин, ЖЭТФ **61**, 2053 (1971).

19. А. Ф. Андреев, А. Э. Мейерович, ЖЭТФ 67, 1559 (1974).
20. Б. М. Смирнов, УФН 92, 75 (1967).
21. Н. Т. Davis, R. Dagonnier, J. Chem. Phys. 44, 4030 (1966).
22. Г. Вейм, Р. Вагера, С. Ретхич, Phys. Rev. Lett. 22, 20 (1969).
23. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1953.
24. К. В. Schwarz, P. W. Stark, Phys. Rev. Lett. 22, 1278 (1969).
25. В. Б. Шикин, Автореферат диссертации, Харьков, 1974.
26. К. В. Schwarz, P. W. Stark, Phys. Rev. Lett. 21, 967 (1968).
27. Е. Р. Gross, Н. Tung-Li, Phys. Rev. 170, 253 (1968).
28. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. 2, М., ИЛ, 1958, стр. 463.
29. а) R. M. Ostermeier, Phys. Rev. A8, 514 (1973).  
б) В. E. Springett, ibid. 155, 139 (1966).  
в) G. Zippel, T. M. Sanders, Jr., in: Proc. of the 11th Intern. Conference on Low Temperature Physics, Ed. J. F. Allen et al., St. Andrews, Scotland, University of St. Andrews Printing Depart., 1969, p. 296.
30. а) Б. Н. Есильсон, Ю. З. Ковдря, В. Б. Шикин, ЖЭТФ 59, 64 (1970).  
б) D. A. Neerup, L. Mayeur, Phys. Rev. 182, 223 (1969).  
в) L. Meuer, F. Reif, Phys. Rev. Lett. 5, 1 (1960).
31. M. Kuchnir, J. B. Ketterson, P. R. Roach, in: Low Temp. Phys. LT-12, Tokyo, Acad. Press of Japan, 1971, p. 105; Phys. Rev. A6, 344 (1972).
32. J. Bardeen, G. Вейм, D. Pines, ibid. 156, 207 (1967).
33. R. M. Bowley, J. Lekner, J. Phys. C3, L127 (1970).
34. T. F. O'Malley, L. Spruch, L. Rosenberg, J. Math. Phys. 2, 491 (1961).
35. Л. Больцман, Лекции по теории газов, М., Гостехиздат, 1953, 244.
36. А. Ф. Андреев, ЖЭТФ 50, 1415 (1966).
37. В. Б. Шикин, ЖЭТФ 64, 1414 (1973).
38. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., «Наука», 1964.
39. В. И. Мельников, ЖЭТФ 63, 696 (1972).
40. H. Gould, Shang-Keng Ma, Phys. Rev. 183, 338 (1969).
41. R. Abe, K. Aizawa, ibid. 123, 10 (1961).  
R. C. Clark, Proc. Phys. Soc. (London) 82, 785 (1963),  
C. T. Schappert, Phys. Rev. 168, 162 (1968).
42. В. Б. Шикин, З. Велиев, ФНТ' 2, 856 (1976).
53. A. C. Anderson, M. Kuchnir, J. C. Wheale, Phys. Rev. 168, 261 (1968).
44. И. М. Халатников, Теория сверхтекучести, М., «Наука», 1971, 238.
45. а) F. Reif, L. Meuer, Phys. Rev. 119, 1164 (1960).  
б) K. W. Schwarz, ibid. A6, 1958 (1972).  
в) B. A. Brody, Ph. D. Thesis, (Univ. of Michigan, Ann Arbor, Michigan, 1970).
46. R. M. Bowley, J. Phys. C4, 1645, 1971.
47. R. G. Barrera, G. Вейм, Phys. Rev. A6, 1558 (1972).
48. B. D. Josephson, J. Lekner, Phys. Rev. Lett. 23, 111 (1969).
49. W. J. Gaberson, W. W. Johnson, J. Low Temp. Phys. 20, 313 (1975).
50. Л. С. Рейт, И. З. Фишер, ЖЭТФ 60, 1814 (1971).
51. В. Н. Бондарев, Письма ЖЭТФ 18, 693 (1973).
52. А. В. Свидзинский, В. А. Слюсарев, М. А. Стрежемечный, Тр. ФТИНТ АН УССР—ФКС 5, 23 (1973).
53. а) A. J. Dahm, T. M. Sanders, J. Low Temp. Phys. 2, 199 (1970).  
б) M. Kuchnir, Ph. D. Thesis (University of Illinois, Urbana, 1966).  
в) L. Meuer, H. T. Davis, S. A. Rice, R. J. Donnelly, Phys. Rev. 126, 1927 (1962).
54. а) J. T. Tough, W. D. McCormick, J. G. Dash, ibid. 132, 2373 (1963).  
б) R. D. Taylor, J. G. Dash, ibid. 126, 1927 (1962).  
в) H. H. Tjerkstra, Physica 18, 853 (1952).
55. К. О. Кешишев, Ю. З. Ковдря, Л. П. Межов-Деглин, А. И. Шальников, ЖЭТФ 56, 94 (1969).
56. В. Л. Гицбург, Л. П. Питаевский, ЖЭТФ 34, 1240 (1958).
57. G. Ahlers, G. Samota, Phys. Lett. A38, 65 (1971).
58. M. H. Coopersmith, H. E. Neustadter, Phys. Rev. 161, 168 (1967);  
Phys. Rev. Lett. 23, 585 (1969).  
T. P. Eggarter, M. H. Cohen, ibid. 25, 807 (1970); 27, 129 (1971).  
R. A. Young, Phys. Rev. A1 983 (1970).  
J. P. Hernandez, ibid. A5, 635 (1972).
59. В. Б. Шикин, Физика конденсированных состояний (Тр. ФТИНТ АН УССР) 25, 80 (1973).

60. В. Б. Шикин, Ю. З. Ковдя, А. С. Рыбакко, *ibid.* 15, 99 (1971).
61. Б. И. Шковский, А. Л. Эфрос, УФН 117, 401 (1975).
62. А. Ф. Андреев, УФН 118, 251 (1976).
63. А. J. Dahn, ФНТ 1, 593 (1975).
64. К. О. Кешишев, А. И. Шальников, *ibid.*, с. 590.  
К. О. Кешишев, Автореферат канд. диссертации, М., ИФП АН СССР, 1976.
65. В. Н. Григорьев, Б. Н. Есильсон, В. А. Михеев, ЖЭТФ 66, 324 (1974).
66. Дж. Эшлби, Континуальная теория дислокаций, М., ИЛ, 1963.  
А. М. Косевич, Основы механики кристаллической решетки, М., «Наука», 1972.
67. И. М. Лифшиц, ЖЭТФ 44, 1949 (1963).
68. А. Ф. Андреев, И. М. Лифшиц, ЖЭТФ 56, 2057 (1969).
69. Д. И. Пушкаров, ЖЭТФ 59, 1755 (1970).
70. В. П. Минеев, ЖЭТФ 63, 1822 (1972).