

# УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

539.12.01

## РЕЛЯТИВИСТСКИЕ СТРУНЫ И ДУАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

*М. С. Маринов*

### СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение. Струна — модель для дуальной теории сильных взаимодействий	377
а) Современная картина строения адронов (377). б) Общие принципы и адронная феноменология (379). в) Дуальные теории: достоинства и недостатки (380). г) Микроскопическая картина: партоны и кварки (381). д) Релятивистская струна как модель адрона (383). е) Содержание обзора (386).	
2. Основные свойства дуальных моделей	387
а) Построение дуальных амплитуд (387). б) Спектр одночастичных состояний (388). в) Высшие порядки и различные модификации дуальной теории (389)	
3. Релятивистская струна. Классическая теория	392
а) Кинематика и вариационный принцип (392). б) Уравнения движения и законы сохранения (394). в) Гамильтонов формализм (396). г) Замкнутая струна (399).	
4. Релятивистская струна. Квантовая теория	400
а) Каноническое квантование (400). б) Нековариантное квантование и «попечечные» физические состояния (402).	
5. Струна со спином	404
а) Классическая динамика частицы со спином (405). б) Классическая теория спиновой струны (407). в) Квантование (410).	
6. Взаимодействие	411
а) Струна во внешнем поле (411). б) Взаимодействие струн (412).	
7. Заключение	415
Приложение	
А. Интегральные представления дуальных амплитуд (415). 1. Амплитуда Венециано (415). 2. Представление Куба — Нильсена (416). 3. Амплитуды Шاپиро — Вирасоро (417). Б. Континуальный интеграл в дуальной теории (418). В. Двумерная конформная группа и супергруппа (419). Г. Комментарий к списку литературы (420).	
Цитированная литература	421
Дополнительная литература	423

### 1. ВВЕДЕНИЕ. СТРУНА — МОДЕЛЬ ДЛЯ ДУАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СИЛЬНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

#### а) Современная картина строения адронов

За последние несколько лет теоретические представления о структуре сильно взаимодействующих частиц (адронов) существенно обогатились. То, что адроны не являются ни «элементарными», ни «точечными», было ясно уже давно, но теперь картина их внутреннего строения стала более наглядной и конкретной. Адроны представляются как протяженные объекты, по-видимому, состоящие из материи двух видов: небольшого

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1977 г.

числа «фундаментальных частиц» — кварков, несущих такие квантовые числа, как заряд и странность, и связывающих их векторных «глюонных» (от английского «glue» — клей) полей. Такая картина отчасти напоминает систему положительных и отрицательных частиц (например, электронов и позитронов), связанных электромагнитным полем. Однако ни свободные кварки, ни сильно взаимодействующие «фотоны» (глюоны) экспериментально не обнаружены. Причину этого можно искать в необычных свойствах глюонного поля: в отличие от фотонов, глюоны сильно взаимодействуют друг с другом. В теории нет полной ясности, однако можно полагать, что из-за самодействия глюонное поле не рассеивается в пространстве, как электрическое поле (довольно медленно, по степенному закону спадающее при удалении от зарядов), а концентрируется в узких трубках, соединяющих источники поля — кварки. В этом случае, например, энергия двухчастичной системы типа атома водорода (или позитрония) могла бы не убывать, а неограниченно расти с увеличением расстояния между частицами. Тогда никакое внешнее воздействие не сможет вырвать из системы отдельный кварк. Так же как кварки, глюоны являются «заряженными», и естественно ожидать, что по той же причине невозможно излучение в пространство и свободного глюона.

Приведенные соображения имеют три главных источника. Во-первых, классификация адронов, основанная на высших симметриях, породившая представление о кварках. Во-вторых, новая единая теория слабых и электромагнитных взаимодействий, в которой основную роль играют заряженные векторные поля. В-третьих, дуальные модели, одно из наиболее интенсивно разрабатываемых направлений теории сильных взаимодействий. Дуальные теории и их физическая интерпретация и являются предметом настоящего обзора.

Принцип, на котором основаны дуальные модели (далее — ДМ), — *реджеонно-резонансная дуальность* — состоит в соединении двух наиболее плодотворных подходов к физике сильных взаимодействий. Первый подход использует представление о том, что взаимодействие частиц осуществляется путем обмена квантами некоторого поля. Так, наиболее существенная часть взаимодействия нуклонов в ядре связана с обменом  $\pi$ -мезонами. В рассеянии, при немалых, но еще не релятивистских энергиях, когда нуклоны подходят ближе друг к другу, проявляются обмены более тяжелыми, чем  $\pi$ -мезон,  $\rho$ - и  $\omega$ -мезонами. При высоких энергиях основную роль играют обмены более сложными «частицеподобными» системами — реджеонами. Второй подход связан с представлением о том, что при столкновении адронов могут возникать метастабильные *промежуточные состояния* — резонансы (аналогичные компаунд-ядрам, образующимся в ядерных реакциях), которые оказывают преобладающее влияние на рассеяние адронов при не очень высоких энергиях. Принцип дуальности состоит в том, что эти два подхода, вообще говоря, независимые, не являются «дополнительными», а имеют общую динамическую природу.

Как выяснилось в последнее время, эта идея, возникшая как изящная математическая конструкция, может быть связана с удивительно наглядной физической картиной. Все частицы, стабильные и короткоживущие, представляются как стационарные состояния *одномерной материальной системы*, которую обычно называют *релятивистской струной*. Было доказано, что квантовая теория взаимодействующих струн приводит к тем же предсказаниям о характере процессов, происходящих при столкновениях адронов, которые из формальных соображений были получены в дуальной теории. ДМ во многом привлекательны, однако они обладают некоторыми весьма серьезными недостатками, которые не позволяют принять их в качестве реалистической теории адронов. Интерпретация на языке

струн позволила существенно упростить формализм и лучше понять причину трудностей, возникающих в этом подходе. Многие теоретики, работающие в этой области, надеются на то, что еще удастся так модифицировать дуальную схему, чтобы она смогла претендовать на роль теории сильных взаимодействий. С этой точки зрения теория струны обладает несомненной эвристической ценностью.

## б) Общие принципы и адронная феноменология

Более четверти века теория взаимодействия электронов и фотонов, квантовая электродинамика, является образцом последовательной теории элементарных частиц. Она представляет собой единственный пример локальной релятивистской квантовой теории поля, допускающей в принципе сколь угодно точное вычисление вероятности любого физического процесса, обусловленного электромагнитным взаимодействием. Квантовая электродинамика основана на принципе наименьшего действия с функцией Лагранжа для взаимодействующих полей, которая построена по аналогии с классической теорией. Методом вычисления является теория возмущений — разложение по степеням заряда электрона. Несмотря на неимоверные усилия, построить по этому образцу теорию сильных взаимодействий не удалось. И причина этого не только в том, что «заряд», определяющий силу адронного взаимодействия (константа связи), должен быть большим, что делает теорию возмущений неприменимой, и даже не в тех сомнениях, которые вызывает метод перенормировок и суммирование рядов теории возмущений при немалых константах связи. Главное — не удалось установить основу теории, найти фундаментальные поля и лагранжиан их взаимодействия. В электродинамике «вещество» состоит из бесструктурных «атомов» — точечных электронов, а безмассовое фотонное «поле» — дальнодействующее и потому хорошо изучено макроскопическими методами. Эти обстоятельства, позволившие построить классическую и квантовую теорию электромагнетизма, отсутствуют в физике адронов, поэтому едва ли можно надеяться найти локальный лагранжев формализм и в этом случае.

Обычно считают, что каждый процесс взаимодействия частиц характеризуется своей амплитудой вероятности. Амплитуды связаны с матричными элементами  $S$ -матрицы, унитарного оператора в пространстве состояний, характеризующих набором свободных частиц с определенными импульсами. Каждая амплитуда является функцией кинематических переменных процесса, импульсов и спинов сталкивающихся частиц и частиц, родившихся в результате их соударения. И если нельзя построить замкнутую теорию, которая позволяла бы вычислять амплитуды, то можно попытаться хотя бы найти некоторые их общие свойства как элементов единой  $S$ -матрицы. « $S$ -матричный подход» к теории адронов состоит в формулировке общих законов построения амплитуд и анализе их конкретных применений.

Общепринятыми принципами теорий являются следующие:

I. *Однородность и изотропность четырехмерного пространства-времени.* Отсюда следует, что амплитуда отлична от нуля только при условии, что сохраняются полная энергия и импульс. Релятивистская инвариантность приводит к тому, что амплитуды являются функциями кинематических инвариантов — масс и скалярных произведений импульсов. Учет спиновых переменных состоит в том, что амплитуды являются матрицами, определенным образом преобразующимися при переходе из одной системы отсчета в другую.

II. *Сохранение вероятности.* Сумма вероятностей всех возможных результатов для любого конкретного физического процесса равна единице. Для выполнения этого требования достаточно, чтобы  $S$ -матрица была унитарным оператором. Унитарность приводит к системе квадратичных интегральных уравнений для (комплексных) амплитуд взаимодействия.

III. *Причинность.* Сигнал не может распространяться в пространстве (пустом или заполненном материей) быстрее, чем свет в пустоте. При переходе от пространственно-временной формулировки к энергиям и импульсам частиц это естественное

требование приводит к тому, что амплитуды, рассматриваемые как функции комплексных переменных, должны обладать определенными аналитическими свойствами. В частности, амплитуда не может иметь особенностей по энергии, не связанных с промежуточными состояниями, возможными для данного процесса. При этом характер особенностей определяется условием унитарности.

IV. *Перекрестная симметрия («кроссинг»)*. Нетрудно убедиться в том, что если частица описывается полем, локальным в пространстве-времени, то это же поле описывает и античастицу. Пусть  $A(p)$  — амплитуда некоторого процесса, в котором поглощается частица  $a$  с 4-импульсом  $p$ . Тогда  $A(-p)$  в силу локальности описывает процесс, в котором испускается античастица  $\bar{a}$ . С другой стороны, в силу принципа III (аналитичности) функции  $A(p)$  и  $A(-p)$  могут быть связаны аналитическим продолжением. Таким образом, например, амплитуды таких процессов, как  $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ ,  $\pi^-p \rightarrow \pi^-p$  и  $p\bar{p} \rightarrow \pi^+\pi^-$ , описываются единой аналитической функцией, взятой в разных областях по своим переменным.

Принципы I—IV выполняются в локальной лагранжевой теории поля в любом порядке разложения по константе связи. Однако естественно, при этом квадратичные по амплитудам уравнения, к которым приводит условие унитарности, выполняются не тождественно, а лишь с точностью до членов высших порядков.

До сих пор не построен конкретный пример для амплитуд взаимодействия, удовлетворяющих общим принципам, выходящий за рамки теории возмущений. ДМ представляют собой интересный пример такого рода, хотя условие унитарности выполняется лишь приближенно, в пренебрежении всеми промежуточными состояниями, кроме одночастичных. В пользу разумности такого приближения свидетельствуют представления о характере сильных взаимодействий, основанные на интерпретации обширных экспериментальных данных.

Среди наиболее важных качественных особенностей сильных взаимодействий можно выделить следующие два обстоятельства. Во-первых, при столкновении адронов с большой вероятностью возбуждается целый спектр короткоживущих составных систем, «резонансных частиц». При низких и средних энергиях рассеяние частиц определяется в основном резонансными промежуточными состояниями. Опыты показали, что существуют резонансы с довольно большими массами, превышающими массу нуклона в 2—3 раза, и что они имеют сравнительно большие времена жизни (малые «ширины»). Во-вторых, многие особенности процессов взаимодействия при высоких энергиях неплохо описываются с помощью реджеонов, которые являются в некотором смысле «аналитическим продолжением» резонансов в перекрестном канале. Таким образом, полюсные особенности играют в амплитудах взаимодействия основную роль: при низких энергиях — полюсы, описывающие резонансы, при высоких энергиях — полюсы в комплексной плоскости углового момента, реджеоны.

## в) Дуальные теории: достоинства и недостатки

Стремление построить теорию, которая хорошо описывала бы как высокие, так и низкие энергии, привело к представлению о *реджеонно-резонансной дуальности*. Гипотеза дуальности состоит в предположении, что амплитуды взаимодействия имеют лишь полюсные особенности и удовлетворяют принципам I—IV. Естественно, что при этом необходимо бесконечное число полюсов; иными словами, модель требует неограниченного спектра резонансов. Теория строится так, что при высоких энергиях суперпозиция большого числа резонансов эффективно приводит к реджеонным обменам, а при низких энергиях суммирование многих реджеонных полюсов дает резонансное поведение по энергии. Явный пример амплитуды такого рода для простейшего процесса, взаимодействия  $\pi$ -мезонов, был дан впервые Венециано в 1968 г. (дуальную теорию взаимодействия скалярных частиц обычно называют моделью Венециано). Ампли-

туда Венециано выражается через  $\Gamma$ -функции Эйлера (см. гл. 2, а также приложение А). Оказалось, что гипотеза дуальности равносильна принятию очень сильных ограничений на вид амплитуд, так что вся теория строится практически однозначно. Модель предсказывает весь спектр резонансных частиц. Качественные предсказания модели, как правило, не противоречат опыту.

Однако модель слишком примитивна и обладает унитарностью и аналитичностью лишь в предельно грубой, «одночастичной», форме. В условии унитарности учитывается лишь вклад одночастичных промежуточных состояний и единственными особенностями амплитуд являются последовательности полюсов в комплексных плоскостях инвариантных переменных. Разрезы, связанные с многочастичными промежуточными состояниями, отсутствуют. Ширины резонансных состояний считаются бесконечно малыми, их спектр — эквидистантный и сильно вырожденный. К тому же нет возможности с самого начала включить в теорию реджеон с квантовыми числами вакуума (полюс Померанчука), играющий основную роль в упругом рассеянии при высокой энергии. Возможно, однако, что простейшие дуальные амплитуды следует рассматривать как первое приближение, «борновские члены», итерация которых приведет в конце концов к последовательной теории. И хотя эта процедура весьма не проста, надежда энтузиастов такого подхода состоит в том, что нетривиальный характер первого приближения, богатство его свойств, обеспечит быструю сходимость метода. А некоторые качественные свойства сильных взаимодействий, например, «интегральные» свойства многочастичных процессов, правильно передаются уже первым приближением. Следует, однако, отметить, что даже с такой точки зрения дуальную теорию нельзя считать принципиально законченной. Теория непротиворечива (не содержит отрицательных вероятностей) лишь в пространстве с нефизическим числом измерений (26 или 10 вместо 4). К тому же низшие по массе состояния весьма не похожи на наблюдаемые частицы. Некоторые варианты теории содержат частицы с мнимой массой — «таххионы».

Литература по ДМ, даже обзорная, весьма обширна \*). В статье Венециано<sup>1</sup> четко сформулированы основные принципы построения ДМ и дана их физическая мотивировка. Введение в физику ДМ дано также в статье Кайдалова<sup>2</sup>. Обзор применений ДМ к конкретным физическим процессам и сравнение предсказания теории с экспериментом является предметом статей Левина<sup>3а</sup>, Ейковского и Шелеста<sup>3б</sup>. Анализ свойств амплитуд взаимодействия в различных ДМ, а также их возможные модификации, содержится в обзоре Сиверса и Йеллина<sup>4</sup>. Математический формализм подробно рассмотрен в статьях Алессандрини и др.<sup>5</sup> (операторный метод) и Шварца<sup>6</sup> (дальнейшее развитие операторного метода, алгебра Вирасоро, модели Невё — Шварца, Шапиро — Вирасоро и др.). Применение методов функционального интегрирования к различным ДМ изложено в работе Жервэ и Сакиты<sup>7</sup>. Обзор подхода к ДМ, основанного на картине релятивистской струны, дан в статье Ребби<sup>8</sup>. Изложения ДМ, содержащие и теорию струны, опубликованы также Мандельштамом<sup>9</sup> и Шерком<sup>10</sup>. Феноменологический подход к ДМ можно найти в работе Филлипса и Роя<sup>11</sup>. Краткий и ясный обзор предмета был сделан Олайвом в докладе<sup>12</sup> на Лондонской конференции 1974 г.

#### г) М и к р о с к о п и ч е с к а я   к а р т и н а :   п а р т о н ы и   к в а р к и

После того как были написаны простые и красивые формулы для дуальных амплитуд, начались попытки осмыслить ДМ с точки зрения локальной квантовой теории поля и дать пространственно-временную картину взаимодействий, обладающих дуальными свойствами. В частно-

\*) В списке цитированной литературы приводятся статьи, которые, по мнению автора, наиболее ясно написаны и могут быть особенно полезны для понимания предмета. Исчерпывающе полный список, скрупулезно отражающий приоритет всех исследователей дуальных моделей, едва ли уместен в этом обзоре.

сти, было показано<sup>13</sup>, что приближенное суммирование определенного класса диаграмм Фейнмана (рис. 1) приводит к амплитудам типа Венециано. Иными словами, дуальные амплитуды возникают, когда частицы обмениваются комплексами, состоящими из большого числа сильно взаимодействующих частиц. Так появилось мнение<sup>14</sup>, что ДМ тесно связаны с партонной динамикой (о партонах см., например, в статье Фейнмана<sup>15</sup>).

Еще раньше в работах Харари<sup>16a</sup> и Рознера<sup>16b</sup> было замечено, что реджеонно-резонансную дуальность естественно выразить на языке кварков. Можно считать установленным, что нет ни резонансов, ни полюсов Редже с «экзотическими» квантовыми числами (например, мезонов с изоспином 2 или гиперонов со странностью +1) и что все частицы принадлежат к простейшим представлениям группы  $SU(3)$ : синглету, октету или (для барионов) декаплету. Это наблюдение можно понимать и так: все мезонные состояния (резонансы и полюса Редже) построены из пары кварк-антикварк ( $q\bar{q}$ ), а барионные состояния — из трех кварков ( $qqq$ ). Разумеется, с точки зрения квантовой теории поля, в частице с необходимостью присутствует также неопределенное число «виртуальных пар»  $q\bar{q}$ , однако они так связаны, что не меняют полных квантовых чисел системы. Можно предположить, что во всех сильных взаимодействиях частиц

основную роль играют промежуточные состояния того же типа ( $q\bar{q}$  или  $qqq$ ). (Кроме этого, в упругом рассеянии доминирует дифракция, обусловленная обменом полюсом Померанчука; эту составляющую следует учитывать отдельно.) Это предположение выражается с помощью простых диаграмм

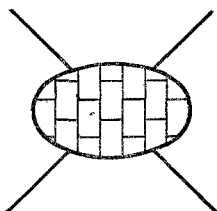


Рис. 1. Диаграмма Фейнмана типа «рыбачья сеть».

Виртуальные импульсы, циркулирующие в каждом из контуров, считаются малыми

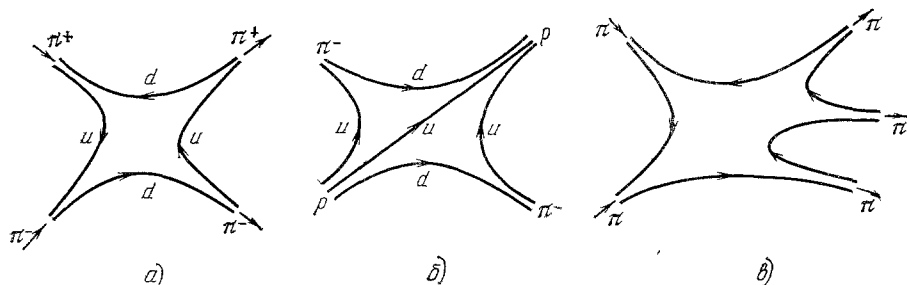


Рис. 2. Рассеяние частиц как процесс взаимодействия кварков.

Диаграммы Харари — Рознера: а)  $\pi^+\pi^-\rightarrow\pi^+\pi^-$ , дуальность s- и u-каналов; б)  $\pi^-p\rightarrow\pi^-p$ , дуальность s- и u-каналов, диаграмма существенна в рассеянии назад; в)  $\pi\pi\rightarrow\pi\pi$ , пример неупругого процесса (u и d на диаграммах — «протонный» и «нейтронный» кварки).

типа рис. 2, называемых диаграммами Харари — Рознера, которые, по определению, не содержат виртуальных кварковых петель, а также пересечений кварковых линий, т. е. являются «плоскими». Независимо от деталей кварковой динамики и точности  $SU(3)$ -симметрии, такая картина приводит к ряду качественных предсказаний, которые, как правило, согласуются с опытом. С другой стороны, диаграммы Харари — Рознера наглядно выражают дуальность, если ограничиться в каждом канале лишь одночастичными «разрешенными» ( $q\bar{q}$  или  $qqq$ ) промежуточными состояниями.

Оба подхода, партонный и кварковый, не противоречат друг другу, если считать, что на диаграмме Фейнмана рис. 1 граничные линии описы-

вают движение кварков, а внутренние линии — связывающие их виртуальные частицы («глюоны»). Особенно наглядная картина получается, если представлять глюоны в виде пары кварк-антикварк и отождествить понятия «кварк» и «партон». Мезон представляется как цепочка ( $qq\bar{q}\bar{q} \dots q$ ), в которой взаимодействуют лишь «соседние» (в импульсном пространстве) пары  $qq$ . Каждый кварк — «двухвалентный», поэтому за взаимодействие с другими частицами отвечают лишь крайние кварки. Схема  $\pi^+\pi^-$ -рассеяния изображена на рис. 3. Цепочка может пребывать в возбужденном состоянии (резонанс). Изменение длины цепочки под внешним воздействием приводит к изменению числа частиц, в то время как средняя плотность массы на единицу длины определяется локальной динамикой и не меняется. Эта плотность, имеющая размерность  $m^2 c/\hbar$ , — основная константа теории, связанная, как будет показано, с наклоном траектории Редже  $\alpha'$ .

Диаграмма рис. 1 приводит к дуальной амплитуде в пределе бесконечного числа виртуальных частиц и при условии, что все виртуальные импульсы малы по сравнению с массами. Рождение пары  $q\bar{q}$  с большим относительным импульсом следует интерпретировать как разрыв цепочки. Существуют соображения в пользу того, что это сравнительно маловероятный процесс. Это утверждение можно рассматривать как довод в пользу ДМ, так как оно объясняет, почему доминируют промежуточные состояния, содержащие один резонанс.

#### д) Релятивистская струна как модель адрона

Плоский характер дуальных диаграмм указывает на то, что поле, переносящее взаимодействие между кварками, по какой-то причине сосредоточено в узкой области пространства вблизи линии, соединяющей кварки. С другой стороны, присущий ДМ эквидистантный характер спектра естественно интерпретировать как результат возбуждения большого числа гармонических осцилляторов с кратными частотами. Классическая система такого рода — упругая струна. Так появилось представление о том, что частицы — это квантовые состояния одномерной непрерывной системы<sup>17-19</sup>. Возникла задача классического и квантового описания релятивистской одномерной структуры — «струны».

Классический лагранжиан релятивистской струны в связи с ДМ был впервые написан Намбу<sup>20</sup> и затем проанализирован в ряде работ японских физиков<sup>21-23</sup>. Метод квантования был предложен в работе Годдара и др.<sup>24</sup>. Помимо модели, описывающей взаимодействие скалярных частиц с помощью обобщенных амплитуд Венециано, существуют другие ДМ, в частности, модель Шапиро — Вирасоро (см.<sup>25, 26</sup>), обладающая «неплоской» дуальностью, и «фермионные» модели Невё — Шварца<sup>27</sup> и Рамона<sup>28</sup>. Модель Шапиро — Вирасоро естественно возникает при рассмотрении замкнутой струны<sup>29</sup>. «Фермионные» модели получаются из струны с распределенным спином. Идея о построении цепочки из партонов со спином  $1/2$  была высказана еще Аароновым и др.<sup>30</sup>. Последовательная теория спиновой струны развита в работе Ивасаки и Киккавы<sup>31</sup>. Следующий шаг — теория взаимодействия струн, которая была разработана Мандельштамом на основе метода функционального интегрирования для обычных<sup>32</sup> и спиновых<sup>33</sup> струн.

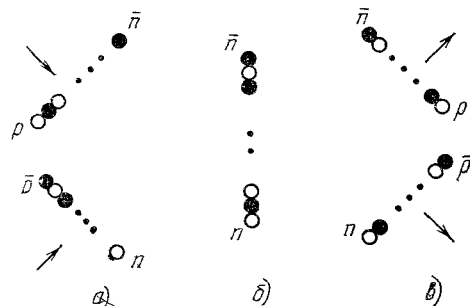


Рис. 3. Рассеяние мезонов:

а) кварковые цепочки сталкиваются и сцепляются концами; б) промежуточное состояние — единая цепочка, в) разрыв цепочки и разлет мезонов.

Таким образом, к настоящему времени основные результаты, полученные в ДМ, воспроизведены на основе теории релятивистских струн. Благодаря этому, возможно, удастся лучше понять физический смысл гипотез, приводящих к ДМ, а также обойти присущие им трудности. Заметим, что формальное тождество ДМ и теории струн не было полной неожиданностью, так как возможность перевода ДМ на язык квантовой теории поля с одним пространственным измерением известна достаточно давно<sup>34</sup>, а введение струн позволило лишь отождествить это измерение с линией в обычном пространстве<sup>35</sup>.

Механический образ, который приводит к дуальной теории и является идеализацией кварко-партонной цепи, следовало бы называть не «струной» (string), длину которой мы привыкли считать неизменяющейся, а пружиной. Будет показано, что этот объект похож на ту «пружину», американскую игрушку «slinky», которая используется в учебнике Крауфорда<sup>36</sup> для изображения волновых явлений. Это спираль из тонкой упругой проволоки, состоящая из большого числа витков. В равновесном состоянии покоящаяся пружина сжимается в отрезок, длиной в несколько сантиметров, но ее можно без необратимых изменений растянуть до длины в несколько метров. Отсутствие поперечной упругости и большой диапазон упругих растяжений делают ее реакции на внешние силы неожиданными и забавными; в частности, название «slinky» связано с тем, что она легко и быстро обходит препятствия, «крадется». При растяжении пружины до длины  $L$  возникает сила натяжения  $T = \kappa(L - l)$ , где  $l$  — начальная длина,  $\kappa$  — коэффициент жесткости. При достаточно больших деформациях  $L \gg l$ , сила пропорциональна длине, и могут возникнуть гармонические колебания с немалой амплитудой. Идеализируя, при малых  $l$  можно считать такую пружину моделью материальной точки с внутренней структурой, которая возбуждается при внешних воздействиях. Чтобы применить эту модель к элементарным частицам, следует также предположить, что проволока не только бесконечно тонка, но и бесконечно легка, так что «собственная масса» пружины равна нулю. При этом, конечно, необходимо работать в рамках теории относительности. При растяжении появляется упругая энергия, т. е. распределенная масса. В дальнейшем мы, однако, не будем отклоняться от общепринятого термина «струна».

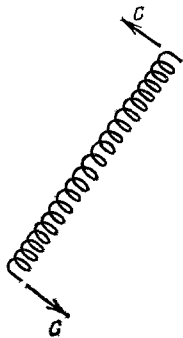


Рис. 4. Простейшее нетривиальное состояние струны — главная траектория Редже.

Для свободной струны (в отсутствие внешнего поля) простейшее нетривиальное состояние изображено на рис. 4. Концы струны не растянуты, поэтому они имеют нулевую массу и движутся со скоростью света. Центробежная сила создается упругостью. Состояние такой струны полностью определяется ее длиной. При этом возникает важное соотношение между массой и угловым моментом  $J = \alpha' M^2$  ( $\alpha'$  — константа теории). При квантовании  $J$  (а также  $M$  и длина струны) принимает лишь дискретные значения; кроме того, появляется новая постоянная  $\alpha_0$ , так что  $J = \alpha' M^2 + \alpha_0 \hbar$ . Такова наглядная интерпретация семейства частиц, лежащих на главной траектории Редже. Более сложные состояния описаны в гл. 3.

Появление в этой модели линейной траектории Редже можно пояснить следующим качественным рассуждением. Полная энергия струны  $Mc^2$  складывается из упругой потенциальной энергии и кинетической энергии внутреннего движения. Естественно считать, что оба члена —

Появление в этой модели линейной траектории Редже можно пояснить следующим качественным рассуждением. Полная энергия струны  $Mc^2$  складывается из упругой потенциальной энергии и кинетической энергии внутреннего движения. Естественно считать, что оба члена —



одного порядка (как обычно в стационарных системах) и что упругая энергия пропорциональна длине, при этом  $M \sim L$ . С другой стороны,  $J \sim PL$ , где  $P$  — эффективный импульс вращательного движения. Так как концы струны движутся со скоростью света, то  $P \sim Mc$ , и потому  $J \sim ML \sim M^2$ . В квантовом случае в энергию следует включить также вклад от нулевых колебаний  $\hbar n \nu / 2$ , где  $n$  — эффективное число осцилляторов,  $\nu$  — характерная частота. Так как колебание распространяется по струне со скоростью света, то  $\nu \sim c/L$  и  $M \sim L + \beta L^{-1}$ , где  $\beta$  — некоторая константа. Если второй член здесь меньше первого, то  $J \sim ML \sim M^2 + (\hbar \alpha_0 / \alpha')$ , где  $\alpha_0 \sim \beta$ .

Взаимодействие частиц и резонансов изображается разрывом струн или их склеиванием. Распады резонансов описываются следующим образом: струна длины  $L_0$  рвется на две, с длинами  $L_1$  и  $L_2$ , те рвутся в свою очередь, пока не образуется некоторое количество струн, сжатых в комочек, лишенных массы и несущихся со скоростью света. При разрыве происходит частичное сжатие и упругая энергия переходит в кинетическую энергию разлета. Такая картина отвечает представлению о каскадном механизме распада резонансов. Например,  $A_2$ -мезон (масса  $1340 \text{ Мэв}/c^2$ ) распадается в основном по схеме  $A_2 \rightarrow \rho\pi \rightarrow (\pi\pi)\pi$ . Несколько труднее представить себе обратный процесс — склеивание струн. При столкновении две струны сцепляются концами и существуют в виде одной струны до разрыва, возможно уже в другом месте. Так описывается бинарный процесс — рассеяние двух частиц (или резонансов) (см. рис. 2 и 3). Разумеется, в классической механике трудно представить себе контактное взаимодействие — столкновение двух материальных точек, концов струн. Однако в квантовой теории это вполне естественно, достаточно вспомнить, например,  $\nu$ -рассеяние в теории Ферми. Пучок частиц с определенным импульсом в силу соотношения неопределенности описывается волновой функцией, распределенной по широкой области пространства. Поэтому возникает не малая амплитуда вероятности встречи двух частиц в одной точке. Это соображение справедливо в любой локальной теории и вполне применимо к взаимодействию концов струн. Следует отметить, кстати, что и разрыв, как любой спонтанный процесс, выходит за рамки классической механики.

Чрезвычайно важно, что, исходя из описанных наглядных соображений и применяя современный аппарат квантовой теории, удалось вычислить амплитуды взаимодействия и получить формулы дуальной теории (этот результат принадлежит Мандельштаму). Конечно, полюсный характер амплитуды взаимодействия заранее очевиден, так как здесь промежуточное состояние — это струна с эквидистантным дискретным спектром. Нетривиальна однако кроссинг-симметрия амплитуды. Существенно также то, что с помощью струн воспроизводится вся дуальная теория, вместе с поправками на многочастичные промежуточные состояния (виртуальные резонансные петли). Интерпретация вклада двухрезонансного промежуточного состояния в процессе рассеяния особенно проста: струна рвется, затем обрывки склеиваются, и лишь затем происходит окончательный разрыв (подробнее см. в гл. 2).

Несмотря на кажущуюся простоту, теория струны отнюдь не тривиальна. Наличие бесконечного числа степеней свободы приводит к трудностям при квантовании. Более того, несмотря на изобретение нескольких новых вариантов, до сих пор никому не удалось найти такую классическую модель нелокальной одномерной системы, которую можно было бы проквантовать непротиворечивым образом. Так обнаруженные ранее принципиальные трудности дуальных моделей приобрели ясную физическую интерпретацию.

Помимо возможного применения к физике сильных взаимодействий, релятивистская струна очень интересна с чисто теоретической точки зрения. Это красивый пример нелокальной релятивистской системы, который построен как естественное обобщение механики материальной точки. Возникающие при квантовании трудности специфичны для квантовой теории поля, простейшим двумерным вариантом которой является механика струны, и связаны с наличием таких типичных особенностей современной теории, как неабелева калибровочная группа и швингеровские члены в алгебре токов (см. об этом в гл. 4).

### е) Содержание обзора

В гл. 2 приведены основные результаты, относящиеся к дуальной модели Венециано и ее модификациям. Этот раздел, как правило, не содержит доказательств, а лишь описывает качественные особенности теории. Гл. 3 содержит классическую теорию релятивистской струны. Основное внимание уделяется вопросам, важным для построения квантовой теории, — каноническому формализму и конформной симметрии. В гл. 4 описано каноническое квантование и показано, что квантовая теория непротиворечива лишь при специальных условиях на характер спектра и в 26-мерном пространстве. Гл. 5 посвящена классической и квантовой теории струны с распределенным спином. Для описания спиновых степеней свободы в классической теории необходимо введение антикоммутирующих классических переменных, т. е. механики на алгебре Грассмана. Изложена теория классической частицы со спином. Спиновая струна строится как ее естественное обобщение. Квантование в этом случае непротиворечиво лишь в 10-мерном пространстве. В гл. 6 показано, как с помощью интегралов по траекториям строятся квантовые амплитуды взаимодействия струн и воспроизводятся ДМ. Некоторые вопросы, сложные с технической точки зрения, вынесены в приложения.

Ряд интересных проблем выходит за рамки настоящего обзора. Первая из них — по какой причине полевая энергия оказывается сконцентрированной в узкой, почти одномерной, области пространства, иными словами, вопрос о «микроструктуре» струны. Высказывалось мнение, что такая ситуация может возникнуть в теориях поля, допускающих спонтанное нарушение симметрии<sup>37</sup>. Появление образований типа струны связывают с такими вопросами, как «запирание кварков» (quark confinement) и инфракрасные расходимости в теории векторных мезонов типа Янга — Миллса. Обсуждение этих идей можно найти в работах<sup>38–42</sup>.

Спонтанное нарушение симметрии дуальных моделей, связанной с вырождением резонансов по массе и спину, может существенно изменить существующие представления и сделать теорию более реалистичной. Этот подход к дуальности и ее кварковой интерпретации разрабатывается Волковым и др.<sup>43, 44</sup>, Бардакчи и Гальперном<sup>45, 46</sup>.

В дуальных теориях типа модели Венециано, которые интерпретируются с помощью взаимодействующих струн, адронные резонансы имеют в первом приближении нулевую ширину. В настоящем обзоре не обсуждаются такие модификации дуальной теории, которые связаны с отказом от приближения нулевых ширин. В подобных моделях уже затравочные амплитуды имеют точки ветвления, требуемые условием унитарности. Детально разработанным примером такой теории является построение дуальных амплитуд с мандельштамовской аналитичностью<sup>47</sup>. Введение конечных ширин в дуальные амплитуды приводит к интересным предсказаниям для наблюдаемых резонансов<sup>48</sup>.

Дуальные теории с бесконечно узкими резонансами не могут пока претендовать на реалистическое описание наблюдаемых частиц; их достоинствами являются наглядность пространственно-временной картины взаимодействий и математическая красота.

## 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ДУАЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ \*)

### а) Построение дуальных амплитуд

Рассмотрим упругое рассеяние тождественных скалярных частиц. Простейшая ДМ, предложенная Венециано <sup>49</sup>, состоит в том, что амплитуда рассеяния представляется в виде

$$A(s, t, u) = g^2 [V(s, t) + V(t, u) + V(u, s)], \quad (2.1)$$

$$V(s, t) = \frac{\Gamma(-\alpha(s)) \Gamma(-\alpha(t))}{\Gamma(-\alpha(s) - \alpha(t))} \equiv B(-\alpha(s), -\alpha(t)),$$

где  $\alpha(z) \equiv \alpha_0 + \alpha'z$ ;  $g$ ,  $\alpha_0$ ,  $\alpha'$  — константы;  $s, t, u$  — переменные Мандельштама;  $\Gamma$  и  $B$  — известные функции Эйлера. В случае рассеяния нетождественных частиц коэффициенты при  $V$  для разных каналов, а также параметры  $\alpha_0$  для функций  $\alpha(s)$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\alpha(u)$ , могут различаться. Однако «параметр наклона»  $\alpha'$  должен быть универсальным. При  $\alpha(s) = 0, 1, 2, \dots$  функция  $V(s, t)$  имеет простые полюсы с вычетами, полиномиально зависящими от  $t$ . Особенно симметричный вид принимает амплитуда при дополнительном условии

$$a \equiv \alpha(s) + \alpha(t) + \alpha(u) = 3\alpha_0 + 4\alpha'\mu^2 = -1, \quad (2.2)$$

где  $\mu$  — масса сталкивающихся частиц. В этом случае амплитуда (2.1) приводится к виду

$$A(s, t, u) = \frac{4}{\pi} g^2 \prod_{z=s, t, u} \left[ \cos\left(\frac{1}{2} \pi \alpha(z)\right) \Gamma(-\alpha(z)) \right]. \quad (2.3)$$

На первый взгляд условие (2.2) кажется нереалистичным. Действительно, если потребовать, чтобы первый полюс амплитуды рассеяния соответствовал внешней частице, т. е.  $\alpha(\mu^2) = 0$ , то из (2.2) следует  $\alpha_0 = 1$ ,  $\mu^2 = -1/\alpha'$ . Разумеется, частица с мнимой массой, «тахин», — большой недостаток модели. Однако, как будет видно в дальнейшем, условие  $\alpha_0 = 1$  является весьма привлекательным и даже необходимым в этом варианте ДМ.

Амплитуда (2.1) является решением следующей задачи. Найти симметричную функцию двух переменных, обладающую следующими свойствами (их совокупность и называется дуальностью): а) отсутствие иных сингулярностей по каждой из переменных, кроме полюсов на вещественной полуоси; б) вычет в каждом полюсе по одной из переменных является полиномом по другой переменной. Как показал Кун <sup>50</sup>, формула (2.1) дает единственное элементарное решение этой задачи \*\*, если отбросить модель с логарифмическими траекториями полюсов, которая обладает некоторыми недостатками. Следствиями требования дуальности являются: а) эквидистантный характер спектра: полюсы в точках  $s = M_k^2 \equiv (k - \alpha_0)/\alpha'$ ,  $k = 0, 1, \dots$ ; б) линейная связь между квадратом массы и спином, так как вычет в  $k$ -м полюсе по переменной  $s$ ,  $R_k(t)$ , является полиномом  $k$ -й степени по  $t$ ; в) наличие вырождения по массе состояний с разными моментами, так как  $R_k(t)$  не сводится к  $P_k(\cos \theta)$ , где  $\cos \theta = \sqrt{1 + 2t(M_k^2 - 4\mu^2)^{-1}}$ ; г) степенная «реджевская» асимптотика при  $|s| \rightarrow \infty$ ,  $\arg s > 0$ :  $V \propto \exp[\alpha(t) \ln s]$ .

Многочастичные дуальные амплитуды строятся, исходя из требования «плоской дуальности», обобщающего указанные свойства 4-частичной амплитуды, т. е. мероморфность и полиномиальный характер вычетов. Точнее, пусть  $V_N(p_1, \dots, p_N)$  — инвариантная функция импульсов  $N$  частиц,  $p_1 + \dots + p_N = 0$  (рис. 5), симметричная

\*) Читатель, знакомый с ДМ или не интересующийся приложением теории релятивистских струн к сильным взаимодействиям, может пропустить эту главу.

\*\*) Общее решение имеет вид суммы членов вида (2.1) с заменой  $\alpha(s) \rightarrow \alpha(s) - m$ ,  $\alpha(t) \rightarrow \alpha(t) - n$ ;  $m, n$  — положительные целые числа (см. формулу (А.5) в приложении А).

относительно циклических перестановок своих аргументов. Можно считать, что  $V_N$  зависит только от инвариантных переменных вида  $s_{mn} = (p_{m+1} + \dots + p_n)^2 = (p_{n+1} + \dots + p_m)^2$ . Каждая из этих переменных отвечает определенному каналу — реакции перехода  $(n-m)$  частиц в  $(N-n+m)$ . Плоская дуальность формулируется в виде требований: а)  $V_N$  не имеет иных особенностей, кроме полюсов по переменным  $s_{mn}$ :

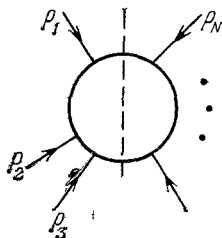


Рис. 5.  $N$ -частичная амплитуда взаимодействия. Сечение диаграммы отвечает каналу взаимодействия.

$$V_N = \sum_k (s_{mn} - M_k^2)^{-1} R_k^{(mn)}; \quad (2.4)$$

б) вычеты в этих полюсах не имеют особенностей по «поперечным» переменным  $s_{m'n'}$ , где  $m' < m$  и  $n' < n$  (или  $m' > n$ ,  $n' > m$ ). Функции, обладающие этими свойствами, были найдены (см., например, работу Гебеля и Сакиты<sup>51</sup>), и для них было построено явно симметричное интегральное представление<sup>52</sup> (см. также приложение А). Необходимо, однако, было проверить, что подобный чисто аналитический подход приводит к амплитудам, не противоречащим унитарности (разумеется, в принятой в ДМ одночастичной форме). Такая проверка была сделана в работе Фубини и Венециано<sup>53</sup>, и при этом выяснились новые важные свойства спектра частиц.

### б) Спектр одночастичных состояний

Полюсы амплитуд интерпретируются как резонансы. Поэтому, очевидно, следует считать, что положение полюсов для всех амплитуд совпадает, т. е.

$$M_k^2 = \frac{k - \alpha_0}{\alpha'}, \quad (2.5)$$

как и в простейшем случае (2.1). Из унитарности же следует, что вычет в полюсе должен иметь вид произведения матричных элементов перехода или, при наличии вырождения, — суммы таких произведений:

$$R_k^{(mn)} = \sum_{l=0}^k \sum_v T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(l, v)}(p_{m+1}, \dots, p_n) T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(l, v)}(p_{n+1}, \dots, p_m); \quad (2.6)$$

здесь  $T^{(l, v)}$  — неприводимый тензор \*) ранга  $l$ , т. е.  $l$  — угловой момент резонанса,  $v$  — индекс, связанный с дополнительным вырождением. Как функции импульсов, тензоры  $T^{(l, v)}$  обладают теми же свойствами дуальности, что и амплитуда в целом, в частности, они имеют полюсные особенности по своим «внутренним» инвариантным переменным. Весьма существенно, что разложение (2.6) справедливо для любого вычета любой амплитуды, причем  $T^{(l, v)}$  — универсальная система тензорных функций. Первоначальное доказательство<sup>53</sup> этого факта было весьма громоздким. Его удалось существенно упростить<sup>54</sup> путем введения операторного формализма. Однако факторизация вычета (формула (2.6)) получается ценой мощнейшего вырождения: число членов в сумме быстро растет с ростом  $k$ .

Это обстоятельство нетрудно понять. При заданном  $l$  неприводимые тензоры  $T_{\mu_1 \dots \mu_l}^{(l, v)}(p_1, \dots, p_j)$  различаются прежде всего тем, каким образом их индексы  $\mu_1, \dots, \mu_l$  распределены между их векторными аргументами  $p_1, \dots, p_j$ . (Так как мы рассматриваем амплитуды с произвольным числом частиц, то всегда можно считать, что  $j > l$ .) Таким образом, грубо говоря, число различных тензоров  $T^{(l, v)}$  (при заданном  $l$ ) равно числу представлений числа  $l$  в виде суммы целых чисел,  $P(l)$ . Эта классическая задача теории чисел давно решена; известно, в частности<sup>55</sup>, что при больших  $l$   $P(l) \sim c l^{-1} \exp(\gamma \sqrt{l})$ , где  $c$  и  $\gamma$  — некоторые константы. Таким образом, для каждого значения массы  $M_k$  существует некоторое число резонансов  $D(k)$ , которое быстро растет с ростом  $k$  (и массы)  $D(k) \sim \exp(\gamma \sqrt{k})$ .

И все же проблему не удалось решить до конца. С точки зрения унитарности необходимо, чтобы для упругих переходов вычеты были положительны, т. е. чтобы оператор  $\hat{R}_k$  с матричными элементами (2.6) был положительно определенным. Иными словами, среди резонансов не должно быть «призраков», состояний с отрицательной

\*) Неприводимыми называются симметричные тензоры, свертка которых по любой паре индексов равна нулю.

нормой. Между тем псевдоевклидова метрика приводит к тому, что в тензорной свертке (2.6) присутствуют отрицательные члены, связанные с энергетическими компонентами импульсов. Эти члены не приведут к появлению призраков только при условии, что они компенсируются вкладом пространственных компонент импульсов. Анализ показал (см. подробнее в обзоре Шварца <sup>6</sup>), что для универсального устранения призраков необходимо условие  $\alpha_0 = 1$ . Это не очень приятное ограничение, так как нельзя отождествить внешние скалярные частицы с основным состоянием, лежащим на траектории  $\alpha(s)$  ( $k = 0$ ). В теории присутствует также безмассовая частица со спином 1 (сильнодействующий «фотон»). При  $M^2 = 1/\alpha'$  имеется пара вырожденных состояний — частицы со спинами 2 и 0. При  $M^2 = 2/\alpha'$  — состояние со спином 3 и два состояния со спином 1 и противоположными четностями и т. д. В полностью симметризованной амплитуде (2.1) нечетные полюсы уничтожаются. Однако резонансы с нечетными спинами присутствуют в многочастичных амплитудах.

Описанная картина мало похожа на наблюдаемый спектр резонансов. Тем не менее, едва ли в этом подходе можно отказаться от условия  $\alpha_0 = 1$ . Формальная причина этого в том, что при  $\alpha_0 = 1$  дуальные амплитуды обладают мощной дополнительной симметрией, связанной с алгеброй Ли, найденной Вирасоро <sup>56</sup> (см. приложение В), которая позволяет исключить временные компоненты.

Неудовлетворение, которое вызывает описанная здесь простейшая модель, было одной из причин того, что появились более сложные ДМ, в которых, однако, также пока не удалось преодолеть присущих этому подходу трудностей.

#### в) Высшие порядки и различные модификации дуальной теории

Простейшие дуальные амплитуды вида (2.1) могут претендовать на описание вклада одночастичных промежуточных состояний (рис. 6). Итерация полюсных амплитуд в принципе должна приводить к учету более сложных промежуточных состояний

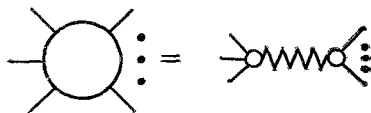


Рис. 6. Амплитуда взаимодействия как сумма по резонансам (полюсное приближение).



Рис. 7. Двухрезонансное промежуточное состояние.

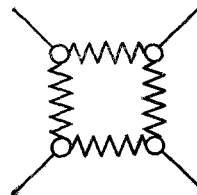


Рис. 8. «Однопетлевая» диаграмма дуальной теории.

Волнистая линия — бесконечная последовательность резонансов.

(рис. 7). Как было показано в работах Киккавы и др. <sup>57, 58</sup> (см. также в обзоре <sup>5</sup>), можно построить последовательную теорию итерации дуальных амплитуд, аналогичную теории возмущений, представляя амплитуды взаимодействия в виде рядов с членами, изображаемыми диаграммами типа Фейнмана (рис. 8).

Заметим, кстати, что эти ряды буквально переходят в ряды теории возмущений обыкновенной квантовой теории поля при  $g^2 \equiv \alpha'\lambda^2 \rightarrow 0$ ,  $\lambda$  — фиксировано. Действительно, легко видеть (см. приложение А), что

$$\lim_{\alpha' \rightarrow 0} g^2 V(s, t) = -\lambda^2 [(s - M^2)^{-1} + (t - M^2)^{-1}], \quad (2.7)$$

где  $M^2 = -\alpha_0/\alpha'$ , т. е. в этом пределе амплитуда Венециано сводится к борновской амплитуде теории скалярного поля с взаимодействием  $\lambda\phi^3$ . Можно показать (см. работы <sup>59-61</sup>), что если  $\alpha_0 = 1$ , то пределом является безмассовая скалярная электродинамика, а при  $\alpha_0 = 2$  (модель Вирасоро) — теория типа гравитации. Наглядным указанием на возможность подобного предельного перехода является то, что при  $\alpha' \rightarrow 0$  расстояние между полюсами стремится к бесконечности, и из всего семейства резонансов остается лишь нижнее состояние.

Сложные (неполюсные) дуально-резонансные диаграммы также можно интерпретировать с помощью обыкновенных фейнмановских диаграмм (рис. 9), как указано в работе Ферли и Нильсена <sup>62</sup> (см. также в связи с этим в работах <sup>34, 63</sup>). Таким образом, разложение по числу резонансных петель соответствует выделению классов диаграмм

Фейнмана, характеризующихся заданным числом контуров, по которым протекает не малый виртуальный импульс. На языке кварков и глюонов резонансный петле соответствует виртуальное рождение пары кварк-антикварк (рис. 10).

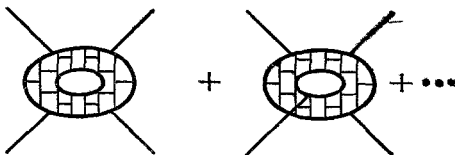


Рис. 9. Диаграммы Фейнмана для однопетлевой дуальной диаграммы.

В принципе, можно вычислить дуально-резонансную диаграмму с любым количеством петель, хотя это вычисление далеко не так просто, как для диаграммы Фейнмана. Однако анализ показывает, что получаемое таким образом разложение не содержит параметра малости, и каждый новый член радикально меняет амплитуду. В частности, уже в однопетлевом приближении (см. рис. 8) возникают весьма сложные особенности<sup>64</sup>, и от простой дуальной

картины не остается и следа. Примечательно, однако, что в однопетлевом приближении можно получить амплитуду, не имеющую особенностей, кроме простых полюсов, лежащих на новой («петлевой») линейной траектории

$$\alpha_L(s) = 2\alpha_0 + \frac{1}{2} \alpha' s, \quad (2.8)$$

если размерность пространства равна 26 (см. <sup>65</sup>). Получаемая при этом амплитуда

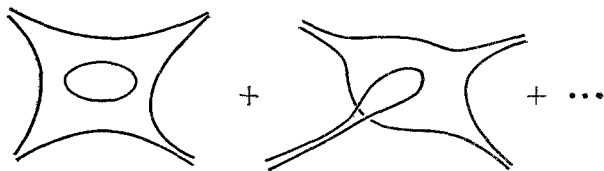


Рис. 10. Кварковая интерпретация для диаграммы рис. 8.

полностью симметрична и приводится к виду, предложенному ранее Вирасоро<sup>25</sup>. Амплитуда Вирасоро

$$W(s, t, u) = g_W^2 \prod_{z=s, t, u} \frac{\Gamma(-(1/2)\alpha(z))}{\Gamma(-(1/2)a - (1/2)\alpha(z))}, \quad (2.9)$$

где  $a = \alpha(s) + \alpha(t) + \alpha(u)$ , содержит полюсы в каждом из трех каналов, т. е. обладает «неплоской» дуальностью. При  $a = -1$  амплитуда  $W$  приводится к виду (2.1) (или (2.3)), если  $g_W^2 = g^2/\sqrt{\pi}$ . Однако более подходящим для амплитуды (2.9) является условие  $a = -2$ , которое находится в согласии с уравнением (2.8) при  $\alpha_0 = 1$ , если для внешних частиц  $\mu^2 = -4/\alpha'$ . Для траектории вида

$$\alpha(s) = 2 + \frac{1}{2} \alpha' s$$

в модели Вирасоро не возникает призрачных состояний (как в модели Венециано при  $\alpha_0 = 1$ ), причем для амплитуды многочастичного взаимодействия может быть написано симметричное и полностью дуальное интегральное представление (см. приложение А). Как отметил Шаширо<sup>25</sup>, амплитуда (2.9) может быть получена из диаграммы Фейнмана с малыми виртуальными импульсами (как диаграмма рис. 1), покрывающей замкнутую поверхность.

Вульгарная интерпретация изложенных результатов состоит в следующем. Траектории, входящие в амплитуду Венециано (2.1), соответствуют физическим мезонам (например,  $\rho$ -мезонам). Резонансы, присутствующие в амплитуде Вирасоро (2.9), — двухчастичные, связанные состояния « $\rho$ -мезонных» резонансов, лежат на вакуумной траектории, которая имеет вдвое более высокую точку пересечения с осью ординат и вдвое меньший наклон (согласно формуле (2.8)). Такая концепция казалась привлекательной, так как экспериментально «установлено», что для вакуумной траектории  $\alpha_0^{(P)} \approx 1$ ,  $\alpha'_P \approx 0,5 \text{ Гэв}^{-2}$ , а для  $\rho$ -мезонной —  $\alpha_0^{(\rho)} \approx 0,5$ ,  $\alpha'_\rho \approx 1 \text{ Гэв}^{-2}$ . Не следует, однако, забывать, что согласованная теория получается лишь при условии, что  $\alpha_0^{(\rho)} = \alpha_0^{(P)/2} = 1$  и... в 26-мерном пространстве!

Тот факт, что простейшие ДМ типа Венециано (или Вирасоро) избавляются от некоторых из своих недостатков в 26-мерном пространстве, указывает на то, что в тео-

рию следует ввести какие-то дополнительные степени свободы, которые привяли бы на себя функции части пространственных компонент. Это наводящее соображение оказывается вполне справедливым: вводя для классификации состояний новые квантовые числа, удается понизить критическую размерность пространства. Наиболее прямой (но отнюдь не тривиальный) способ — введение внутренней симметрии относительно группы  $SU(N)$ , модель Бардакчи — Гальперна <sup>66</sup> (см. также работы <sup>67</sup> и обзор Шварца <sup>68</sup>). Критическая размерность при этом понижается,  $d_{cr} = 26 - N$ , однако модель явно не реалистична.

Более интересное обобщение ДМ связано с введением дополнительных фермиевских степеней свободы. Таким образом, в частности, удается построить ДМ для взаимодействия фермионов (модель Рамона <sup>28</sup>). С точки зрения кварковой картины, подобный подход для взаимодействия бозонов (модель Неве — Шварца <sup>27</sup>) интерпретируется просто как учет наличия у кварков спина  $1/2$ . При этом возникают два семейства резонансов, образованных парой кварк-антикварк в состояниях с полным спином 0 и 1 («пионные» и «ρ-мезонные» траектории). Получаемые таким образом амплитуды мезон-мезонного взаимодействия имеют ту же структуру, что и амплитуды Венециано (2.1). В частности, для  $\pi\pi$ -рассеяния

$$A_{\pi\pi} = g^2 \frac{\Gamma(1 - \alpha_\rho(s)) \Gamma(1 - \alpha_\rho(t))}{\Gamma(1 - \alpha_\rho(s) - \alpha_\rho(t))}. \quad (2.10)$$

Однако спектр состояний отличается от спектра, описанного в разделе б) гл. 2. Например, для низших состояний на траекториях получается  $\mu_\pi^2 = -1/2\alpha'$ ,  $\mu_\rho^2 = 0$  (вместо  $\mu^2 = -1/\alpha'$  в модели Венециано). Можно построить и непланарно-дуальный вариант <sup>68</sup> модели Неве — Шварца. Путем некоторой модификации <sup>69-71</sup> теории Неве — Шварца (введением дополнительной фермиевской переменной) удалось даже избавиться от состояний с  $\mu^2 < 0$  («тахионов»), однако и эта модель далека от схождения с реальностью. Критическая размерность для «спиновых» ДМ равна 10 (вместо 26). Для наглядной интерпретации моделей Неве — Шварца и Рамона используется представление о «струне» с распределенным спином, которая описана в гл. 5.

Модель	Ведущая траектория $\alpha(s)$	Спин при $M=0$	Тахион, $\alpha'\mu^2$	Критическая размерность, $d$	Предел $\alpha' \rightarrow 0$	Свойства струны
Венециано	$1 + \alpha's$	1	-1	26	Скалярная теория $\Lambda\varphi^3$	Свободная струна
Вирасоро	$2 + \frac{1}{2}\alpha's$	2	-4	26	Квантованная гравитация	Замкнутая струна
Рамон	$\frac{1}{2} + \alpha's$	$\frac{1}{2}$	Нет	10	Безмассовая электродинамика	Струна с распределенным спином. На концах — кварки
Неве — Шварц	( $\rho f$ ): $1 + \alpha's$ ( $\pi\omega$ ): $\alpha's$	1 0		10	Скалярная электродинамика	Струна с распределенным спином. На концах — кварк и антикварк
Добавление внутренней симметрии	Как в исходной дуальной модели			$d - N$	Теория типа Янга — Миллса	Простая интерпретация отсутствует

В таблице приведены основные качественные характеристики дуальных моделей (для модели Неве — Шварца тахионы отсутствуют лишь при соответствующей модификации <sup>69-71</sup>).

Математический аппарат, необходимый для описания ДМ, очень формален и довольно сложен. Введение релятивистских струн позволило сделать картину гораздо более наглядной и доступной физической интуиции, а в некоторых случаях — и упростить вычисления.

## 3. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУНА. КЛАССИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

## а) К и н е м а т и к а и в а р и а ц и о н н ы й п р и н ц и п

Движение точки в теории относительности изображается линией в четырехмерном пространстве-времени:  $x_\mu = x_\mu(\tau)$ , где  $\tau$  — параметр, меняющийся вдоль линии. Классическое действие для свободной материальной точки пропорционально длине дуги этой линии <sup>72</sup>

$$\mathcal{S} = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{\dot{x}^2} d\tau, \quad (3.1)$$

где  $m$  — масса точки;  $\dot{x}_\mu = dx_\mu/d\tau$  — касательный вектор, лежащий внутри светового конуса,  $\dot{x}^2 > 0$ . Действие  $\mathcal{S}$  инвариантно относительно преобразований Лоренца и выбора параметра  $\tau$ . Обычно употребляют один из двух способов параметризации: 1)  $\tau$  — «лабораторное» время,  $x_0 = \tau$ ,  $\dot{x}^2 = 1 - v^2$ ; 2)  $\tau$  — «собственное» время,  $\dot{x}^2 = 1$ .

Рассмотрим одномерную материальную систему конечной длины, точки которой характеризуются «внутренней координатой»  $\sigma$ ,  $0 \leq \sigma \leq \sigma_0$ . Движение такой системы изображается двумерной поверхностью  $x_\mu(\tau, \sigma)$  в пространстве Минковского. Естественно, что особый интерес представляют системы, для которых действие инвариантно относительно выбора параметров  $\tau, \sigma$ . Этим свойством обладает действие \*), пропорциональное площади области на поверхности, ограниченной линиями  $\tau = \tau_i$  и  $\tau = \tau_f$ :

$$\mathcal{S} = -A \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_0} d\sigma \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}, \quad (3.2)$$

здесь  $A$  — константа размерности  $m^2$ ,  $\dot{x}_\mu = dx_\mu/d\tau$ ,  $x'_\mu = dx_\mu/d\sigma$ . Подкоренное выражение в (3.2) положительно, если поверхность — времени-подобная, т. е. в любой ее точке существует касательный вектор, лежащий внутри светового конуса \*\*). Кроме того, полагаем  $\dot{x}^2 \geq 0$ , так что  $\tau$  можно считать «внутренним временем». В принципе, можно рассматривать также двух- и трехмерные системы \*\*\*) (см., например, работу <sup>80</sup>).

Очевидно, что действие (3.2) инвариантно относительно замены переменных

$$\tau \rightarrow \tilde{\tau} = f(\tau, \sigma), \quad \sigma \rightarrow \tilde{\sigma} = h(\tau, \sigma), \quad (3.3)$$

где  $f$  и  $h$  — произвольные дифференцируемые функции. Существенно лишь, чтобы якобиан преобразования (3.3) нигде не обращался в нуль

\*) До появления дуальных моделей и вызванного ими интереса к релятивистским струнам лагранжианы вида (3.2) рассматривали Дирак <sup>73</sup>, Барбашов и Черников <sup>74</sup>. Кроме упомянутых выше работ <sup>20-24</sup>, система, описываемая действием (3.2), изучалась в статьях Чжана, Мансури и Намбу <sup>75-77</sup>, Кониса <sup>78</sup>, Барбашова и Черникова <sup>79</sup>.

\*\*) Произвольный вектор, касательный к поверхности, имеет вид  $y_\mu = ax_\mu + bx'_\mu$ . Часть поверхности лежит внутри светового конуса, если существуют два различных нулевых вектора,  $y^2 = 0$ . Отсюда  $(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2 > 0$ .

\*\*\*) При этом  $x_\mu = x_\mu(\tau, \sigma_1, \sigma_2)$  или  $x_\mu = x_\mu(\tau, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  действие имеет вид

$$\mathcal{S} = A \int d\tau \int \Pi d\sigma F,$$

где  $F^2 = \det \| (x^{(\alpha)} x^{(\beta)}) \|$ ,  $\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ ,  $x_\mu^{(\alpha)} = dx_\mu/d\sigma_\alpha$ ,  $\sigma_0 \equiv \tau$ .



и чтобы граница поверхности имела прежний вид, т. е.  $h(\tau, 0) = 0$ ,  $h(\tau, \sigma_0) = \tilde{\sigma}_0 = \text{const.}$

Удобно ввести на поверхности ортонормированную систему координат, которая задается инвариантными условиями

$$(\dot{x}x') = 0, \quad \dot{x}^2 = -x'^2, \quad (3.4a)$$

или, эквивалентно,

$$(\dot{x} \pm x')^2 = 0. \quad (3.4b)$$

Важной особенностью двумерной псевдоевклидовой поверхности является то, что условия (3.4a) — (3.4b) не полностью фиксируют систему параметров, а лишь выделяют некоторый, и притом весьма широкий класс систем. Легко видеть, что эти условия, а также граница поверхности, инвариантны относительно преобразований вида

$$\begin{aligned} \tilde{\tau} &= \tau_1 + \tau + g(\tau + \sigma) + g(\tau - \sigma), \\ \tilde{\sigma} &= \sigma + g(\tau + \sigma) - g(\tau - \sigma), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где  $\tau_1$  — константа,  $g(u)$  — произвольная периодическая функция  $g(u) = g(u + 2\sigma_0)$ , такая, что  $\partial(\tilde{\tau}, \tilde{\sigma})/\partial(\tau, \sigma) \neq 0$ , т. е.

$$2 \frac{dg}{du} + 1 \neq 0 \quad (3.6)$$

при любом  $u$ . Формулы (3.5) описывают конформное преобразование (см. Приложение В).

Наиболее проста и наглядна «лабораторная» параметризация

$$x_0 = \tau, \quad \dot{x}_0 = 1, \quad \dot{x}_i = v_i, \quad x'_0 = 0, \quad x'_i = w_i; \quad (3.7a)$$

здесь  $\mathbf{v}$  — скорость точки,  $\mathbf{w}$  — вектор, касательный к кривой  $\mathbf{x}(x_0, \sigma)$ ,  $|\mathbf{w}| = dl/d\sigma$ ,  $dl$  — элемент длины на этой кривой. Из условий (3.4) следует

$$(\mathbf{v}\mathbf{w}) = 0, \quad \mathbf{w}^2 = 1 - \mathbf{v}^2. \quad (3.7b)$$

Таким образом, скорость любой точки всегда направлена по нормали к мгновенному положению кривой. Собственная длина кривой  $L_0$  и «лабораторная» длина  $L$  (с учетом лоренцова сокращения) определяются формулами

$$\begin{aligned} L_0(\tau) &= \int dl = \int_0^{\sigma_0} \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} d\sigma, \\ L(\tau) &= \int \sqrt{1 - \mathbf{v}^2} dl = \int_0^{\sigma_0} (1 - \mathbf{v}^2) d\sigma. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Длина  $L$ , вообще говоря, не сохраняется в процессе движения. Действие (3.2) имеет вид  $\mathcal{S} = - \int L(\tau) d\tau$ , так что принцип минимума  $\mathcal{S}$  можно рассматривать как комбинацию динамического принципа Гамильтона для точек струны и статического условия минимальности длины  $L$ . Поэтому, вопреки установившейся терминологии, более правильно представлять себе описываемую систему не в виде струны, а в виде тонкой и гибкой пружины. Существенно, однако, что система является релятивистской. В простейшем случае пружина имеет нулевую длину, нулевую массу и летит со скоростью света. Нетривиальные решения описаны в следующем разделе.

## б) У р а в н е н и я д в и ж е н и я и з а к о н ы с о х р а н е н и я

Найдем изменение действия (3.2) при произвольной вариации  $\delta x_\mu(\tau, \sigma)$  (разумеется,  $\delta x_\mu(\tau_i) = \delta x_\mu(\tau_f) = 0$ ):

$$\delta \mathcal{J} = \int d\tau \left[ \int_0^{\sigma_0} d\sigma \left( \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} + \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_\mu} \right) \delta x_\mu - \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_\mu} \delta x_\mu \right)_{\sigma=0} \right], \quad (3.9)$$

где

$$\mathcal{L} = -A \sqrt{(\dot{x}x')^2 - \dot{x}^2 x'^2}.$$

Обозначим

$$p^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu}, \quad \pi^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x'_\mu}. \quad (3.10)$$

Уравнения движения, отвечающие вариационному принципу  $\delta \mathcal{J} = 0$ , имеют вид

$$\frac{\partial p^\mu}{\partial \tau} + \frac{\partial \pi^\mu}{\partial \sigma} = 0. \quad (3.11)$$

Граничные условия для свободной струны \*) (вариация  $\delta x_\mu$  на концах — произвольна), которые также следуют из (3.9), имеют вид

$$\pi^\mu(\tau, 0) = \pi^\mu(\tau, \sigma_0) = 0. \quad (3.12)$$

Отметим, что из явного вида  $\mathcal{L}$  следует

$$p^2 = -A^2 \dot{x}^2, \quad \pi^2 = -A^2 x'^2, \quad (3.13)$$

и, в частности, при  $\sigma = 0$ ,  $\sigma_0$  имеем  $\dot{x}^2 = 0$ . Иными словами, концы струны движутся со скоростью света. Это вполне естественно, так как система характеризуется нулевой плотностью массы покоя — масса  $u$  системы в целом появляется в результате внутреннего движения и натяжений.

Инвариантность действия приводит к различным законам сохранения. Используя равенство (3.9) при  $\delta x_\mu = \text{const}$ , получаем закон сохранения полного импульса, который равен

$$P^\mu = \int_\Gamma p^\mu_\Gamma d\gamma, \quad (3.14)$$

где  $\Gamma$  — произвольная кривая, перерезающая поверхность,  $p^\mu_\Gamma d\gamma \equiv p^\mu d\sigma - \pi^\mu d\tau$ . В частности, если  $\Gamma$  — линия  $\tau = \text{const}$ , то  $p^\mu_\Gamma d\gamma \equiv p^\mu d\sigma$ . Разумеется, сохранение импульса (3.14) можно рассматривать и как тривиальное следствие уравнений (3.11), которые имеют вид закона сохранения потока двумерного вектора  $(p, \pi)$  на поверхности  $(\tau, \sigma)$ . При  $\delta x_\mu = \omega_\mu{}^\nu x^\nu$  получаем из (3.9) сохраняющийся полный момент импульса

$$J^{\mu\nu} = \int_\Gamma (x^\mu p^\nu_\Gamma - x^\nu p^\mu_\Gamma) d\gamma. \quad (3.15)$$

Будем использовать теперь ортогональную параметризацию  $(\tau, \sigma)$ , т. е. добавим к лагранжиану дополнительные условия (3.4). При этом лагранжиан можно представить в явно конформно-инвариантном виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} A (\dot{x}^2 - x'^2), \quad (3.16)$$

\*) О замкнутой струне см. в разделе г).

а уравнения движения и граничные условия принимают особенно простой вид \*):

$$\ddot{x}_\mu - x_\mu^{\prime 2} = 0, \quad (3.17a)$$

$$x'_\mu(\tau, 0) = x'_\mu(\tau, \sigma_0) = 0. \quad (3.17b)$$

В лабораторной параметризации (3.7) уравнение (3.17a) можно переписать в виде второго закона Ньютона для элемента струны  $\frac{1}{A}$ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left( \rho \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1-v^2}} \right) = \frac{\partial}{\partial \sigma} (T \mathbf{n}), \quad (3.18)$$

где  $\rho = A \sqrt{1-v^2}$  — линейная плотность массы,  $T = A \sqrt{1-v^2}$  — сила натяжения в данной точке,  $\mathbf{n}$  — единичный касательный вектор. Таким образом, точки струны, в которых натяжение равно нулю, движутся со скоростью света, так как плотность массы в этих точках также равна нулю.

Общее решение задачи (3.17) имеет вид

$$x_\mu(\tau, \sigma) = r_\mu \tau + f_\mu(\tau + \sigma) + f_\mu^-(\tau - \sigma), \quad (3.19)$$

где  $r_\mu$  — постоянный вектор,  $f_\mu(u)$  — дифференцируемая векторная функция, удовлетворяющая тождествам

$$f_\mu(u) = f_\mu(u + 2\sigma_0), \quad (3.20a)$$

$$\left( r_\mu + 2 \frac{df_\mu}{du} \right)^2 = 0. \quad (3.20b)$$

Первое следует из граничного условия (3.17b), второе — из (3.4b). Начальные данные определяют функцию  $f_\mu(u)$  на отрезке  $[-\sigma_0, \sigma_0]$ :

$$f_\mu(u) = \frac{1}{2} \left[ x_\mu(0, |u|) + \varepsilon(u) \int_0^{|u|} \dot{x}(0, \sigma) d\sigma - r_\mu u \right], \quad (3.21)$$

$$\varepsilon(u) \equiv \frac{u}{|u|}.$$

Вектор  $r_\mu$  связан с полным импульсом системы

$$r_\mu = \sigma_0^{-1} \int_0^{\sigma_0} \dot{x}_\mu(0, \sigma) d\sigma = (A\sigma_0)^{-1} P_\mu. \quad (3.22)$$

Отметим, что в лабораторной параметризации (3.7)  $f_0(u) \equiv 0$ ,  $r_\mu$  — единичный вектор с компонентами (1, 0, 0, 0), так что в этом случае параметр  $\sigma_0$  просто связан с массой

$$M = A\sigma_0. \quad (3.23)$$

Рассмотрим один интересный частный случай. Пусть начальные условия имеют вид

$$x_\mu(0, \sigma) = \omega_N^{-1} W_\mu \cos \omega_N \sigma, \quad \dot{x}_\mu(0, \sigma) = r_\mu + V_\mu \cos \omega_N \sigma, \quad (3.24)$$

$$\omega_N = \frac{N\pi}{\sigma_0} \quad (N = 1, 2, \dots),$$

\*) Убедимся в том, что условия (3.4) согласуются с уравнениями движения. Скалярные функции  $\varphi_\pm = (x \pm x')^2$  в силу уравнения (3.17a) удовлетворяют условию  $\ddot{\varphi}_\pm = \pm \varphi'_\pm$ . Поэтому если  $\varphi_\pm = 0$  при всех  $\sigma$  в начальный момент  $\tau = \tau_i$ , то  $\varphi_\pm \equiv 0$  при всех  $\tau$  и  $\sigma$ .

Тогда из (3.4) следует, что

$$(rV) = (rW) = (VW) = 0, \quad r^2 = -V^2 = -W^2. \quad (3.25a)$$

Выберем систему центра масс,  $\mathbf{P} = 0$ ,  $P_0 = M$  — полная масса, и введем на поверхности  $(\tau, \sigma)$  такие единицы измерения, чтобы получить «лабораторную» параметризацию (3.7). При этом

$$r_0 = \frac{M}{A\sigma_0} = 1, \quad \mathbf{r} = 0, \quad V_0 = W_0 = VW = 0, \quad (3.25b)$$

$\mathbf{V}$  и  $\mathbf{W}$  — единичные ортогональные векторы. Решение (3.19) принимает вид

$$x_0(\tau, \sigma) = \tau, \quad \mathbf{x}(\tau, \sigma) = \omega_N^{-1} \cos \omega_N \sigma [\mathbf{W} \cos \omega_N \tau + \mathbf{V} \sin \omega_N \tau]. \quad (3.26)$$

Легко видеть, что эти формулы описывают струну, сложенную  $N$  раз и принявшую вид прямолинейного отрезка, который вращается в плоскости  $(\mathbf{V}, \mathbf{W})$  вокруг своей середины с такой угловой скоростью, что его концы движутся со скоростью света (см. рис. 11). Вычислим угловой момент  $\mathbf{J}$  системы, пользуясь формулой (3.15). Это вектор, направленный по нормали к плоскости  $(\mathbf{V}, \mathbf{W})$  и имеющий длину

$$J = (2\pi AN)^{-1} M^2. \quad (3.27)$$

Таким образом, получается характерная для дуальных моделей линейная зависимость между угловым моментом и квадратом массы (в классическом пределе  $J \gg 1$  или  $\alpha_0 \rightarrow 0$ ). Теперь очевидно, что фундаментальная константа  $A$  связана с наклоном траектории Редже

$$A = (2\pi\alpha')^{-1}. \quad (3.28)$$

Состояние с  $N = 1$  отвечает главной траектории, при  $N > 1$  получаются

Рис. 11. Сложенная вращающаяся струна — базисное решение (3.26).  
а)  $N = 1$ , б)  $N = 4$ .

некоторые из резонансов, лежащих на «дочерних» траекториях. Напомним, что величина  $A$  равна силе натяжения струны в точке с  $\mathbf{v} = 0$  (см. формулу (3.18)). Если принять  $\alpha' = m_p^{-2}$ , то, переходя к обычным единицам, получаем  $A = m_p c^2 / \lambda_p = 1,6 \cdot 10^{-3} / 1,3 \cdot 10^{-13} \text{ эрг/см} \approx 13 \text{ т}$  ( $\lambda_p = 2\pi\hbar/m_p c$  — комптоновская длина волны протона). Замечая, что для решения (3.26)  $v^2 = \cos^2 \omega_N \sigma$ , найдем из (3.8) величины «лабораторной» и «собственной» длин струны:  $L = \sigma_0/2 = M/2A$ ,  $L_0 = 2\sigma_0/\pi$ ; длина струны пропорциональна ее массе. Для решения (3.26) длина струны сохраняется во времени.

### в) Г а м и л ь т о н о в ф о р м а л и з м

Для канонического квантования необходимо найти гамильтониан, соответствующий собственному времени  $\tau$ , переписать уравнения движения в форме Гамильтона и ввести алгебру скобок Пуассона. Из-за инвариантности относительно общих преобразований (3.3) исходный лагранжиан (3.9) описывает систему, вырожденную в смысле Дирака<sup>81</sup>, так как уравнение

$$p^\mu(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} \quad (3.29)$$

неразрешимо относительно  $\dot{x}_\mu$ . Легко видеть, что это уравнение приводит к условиям \*)

$$\varphi_\pm(x, p) \equiv (p \pm Ax')^2 = 0. \quad (3.30)$$

В соответствии с теорией Дирака, плотность гамильтониана имеет в этом случае вид

$$\mathcal{H}(x, p) = \dot{x}_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_\mu} - \mathcal{L} + v_+ \varphi_+ + v_- \varphi_-, \quad (3.31)$$

где  $v_\pm(\sigma)$  — произвольные функции, выбор которых фиксирует «калибровку». Первые два члена взаимно уничтожаются. Положим  $v_+ = v_- = -1/4A$ ; тогда

$$H = \int_0^{\sigma_0} \mathcal{H}(x, p) d\sigma = -\frac{1}{2} \int_0^{\sigma_0} \left( \frac{p^2}{A} + Ax'^2 \right) d\sigma. \quad (3.32)$$

Скобки Пуассона для канонических переменных имеют обычный вид \*\*)

$$\{p_\mu(\sigma_1), x_\nu(\sigma_2)\}_{\text{P.B.}} = -g_{\mu\nu} \delta(\sigma_1 - \sigma_2). \quad (3.33)$$

Уравнения движения

$$\dot{x}_\mu = \frac{\delta H}{\delta p^\mu} = -\frac{p_\mu}{A}, \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\delta H}{\delta x^\mu} = -Ax''_\mu \quad (3.34)$$

эквивалентны (3.17а), и потому указанная калибровка совпадает с выбором ортонормированной системы координат на поверхности при условиях (3.4).

Введем вместо  $\sigma$  независимую переменную  $\theta$ ,  $-\sigma_0 \leq \theta \leq \sigma_0$ , и перейдем к новым динамическим переменным  $y_\mu(\tau, \theta)$ :

$$y_\mu(\tau, \theta) = \frac{1}{2} [g_{\mu\nu} p^\nu(\tau, \sigma) \pm Ax'_\mu(\tau, \sigma)] \quad \text{при} \quad \theta = \pm \sigma. \quad (3.35)$$

Наложим граничные условия  $y_\mu(\tau, +0) = y_\mu(\tau, -0)$  и  $y_\mu(\tau, \sigma_0) = y_\mu(\tau, -\sigma_0)$ , эквивалентные (3.17б). В этих переменных скобки Пуассона принимают вид

$$\{y_\mu(\theta_1), y_\nu(\theta_2)\}_{\text{P.B.}} = \frac{1}{2} Ag_{\mu\nu} \delta'(\theta_1 - \theta_2), \quad (3.36)$$

связи выражаются условием

$$y^2(\theta) = 0, \quad (3.37)$$

гамильтониан и полный импульс равны

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{A} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} y^2(\theta) d\theta, \quad (3.38)$$

$$P_\mu = \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} y_\mu(\theta) d\theta. \quad (3.39)$$

Естественно интерпретировать  $y_\mu(\theta)$  как плотность обобщенного импульса. «Соседние» точки взаимодействуют и это приводит к неканониче-

\*) Аналогично, в случае материальной точки с действием (3.1) инвариантность относительно выбора параметра  $\tau$  приводит к условию  $p^2 = m^2$ .

\*\*) Используется метрика  $g_{00} = 1$ ,  $g_{kk} = -1$  при  $k = 1, 2, 3$ . Скобки Пуассона определены согласно книгам <sup>81, 84</sup>.

скому виду скобок Пуассона, и поэтому благодаря «контактному» характеру взаимодействия гамильтониан имеет квазисвободный вид. Заметим, что гамильтониан для точечной частицы, получаемый из действия (3.1) при условии  $\dot{x}^2 = 1$  ( $\tau$  — собственное время) равен  $H = -(p^2 - m^2)/2m$  (см. приложение А в статье Фейнмана<sup>82</sup>, а также работу Касальбуони и др.<sup>83</sup>). Условия (3.37) означают тому, что струна сделана из «безмассовой» материи. Напомним, что в каждой точке струны заданы два вектора,  $y_\mu(\sigma)$  и  $y_\mu(-\sigma)$ , один из которых можно интерпретировать как импульс партона, а другой — как импульс антипартон.

Отметим, что гамильтониан (3.38) определяет эволюцию динамических переменных при изменении параметра  $\tau$  и не совпадает с энергией  $P_0$  (формула (3.39)), которая определяет развитие системы во времени с точки зрения внешнего наблюдателя.

Уравнения движения для гамильтониана (3.38)

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial y_\mu}{\partial \theta} \quad (3.40)$$

с граничным условием  $y_\mu(\tau, \sigma_0) = y_\mu(\tau, -\sigma_0)$  имеют простое решение

$$y_\mu(\tau, \theta) = Y_\mu(\tau + \theta), \quad (3.41)$$

$$Y_\mu^*(u) \equiv y_\mu(0, u) = Y_\mu(u + 2\sigma_0).$$

Для дальнейшего полезна также еще одна замена переменных. Разложим  $y_\mu(\theta)$  в ряд Фурье:

$$y_\mu(\tau, \theta) = \frac{1}{2\sigma_0} \left[ P_\mu + \sqrt{\pi A} \sum_{m \neq 0} a_\mu^m(\tau) e^{i\omega_m \theta} \right], \quad (3.42)$$

$$\omega_m = \frac{\pi m}{\sigma_0}, \quad a_\mu^{-m} = (a_\mu^m)^*;$$

здесь член с  $m = 0$  выписан отдельно в соответствии с (3.39). Уравнения движения в переменных  $a_\mu^m$  и их решения имеют вид

$$\dot{a}_\mu^m = i\omega_m a_\mu^m, \quad (3.43)$$

$$a_\mu^m(\tau) = a_\mu^m e^{i\omega_m \tau}. \quad (3.44)$$

Если рассматривать струну как колебательную систему с бесконечным числом степеней свободы, то величины  $a_\mu^m$  аналогичны «нормальным переменным» (см., например, <sup>84</sup>). Разумеется, решение (3.42), (3.44) можно получить непосредственно из формулы (3.19), разлагая функцию  $f_\mu(u)$  в ряд Фурье. Частное решение (3.26) отвечает начальному условию  $a_\mu^m = 0$  при  $m \neq N$ , т. е. возбуждению лишь  $N$ -го осциллятора.

Скобки Пуассона для нормальных переменных получаются из (3.36)

$$\{a_\mu^m, a_\nu^n\}_{P,V} = i m g_{\mu\nu} \delta(m+n), \quad (3.45)$$

где  $\delta(k) = 0$  при  $k \neq 0$  и  $\delta(0) = 1$ . Специфика рассматриваемой системы состоит в наличии связей. Разлагая левую часть уравнения (3.37) в ряд Фурье, получим

$$L_0 \equiv -\frac{\sigma_0 H}{\pi} = (2\pi A)^{-1} P^2 + \sum_{n>0} (a^n a^{-n}) = 0, \quad (3.46a)$$

$$L_m = L_{-m}^* = (\pi A)^{-1/2} (P a^m) + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0, m} (a^n a^{m-n}) = 0. \quad (3.46b)$$

Очевидно, что величины  $L_m(\tau)$  удовлетворяют уравнениям вида (3.43), так что  $L_m(\tau) = \Lambda_m e^{i\omega_m \tau}$ , где  $\Lambda_m$  — константы, и условия  $L_m = 0$  не противоречат уравнениям движения. Используя (3.45), находим

$$\{a_\mu^m, L_n\}_{\text{P.B.}} = i m a_\mu^{m+n}, \quad (3.47a)$$

$$\{L_m, L_n\}_{\text{P.B.}} = i(m-n)L_{m+n}. \quad (3.47b)$$

Так как скобки Пуассона для величин  $L_m$  линейно выражаются через эти же величины ( $L_m$  образуют алгебру Ли), то условия (3.46) определяют связи первого рода (по терминологии Дирака <sup>81</sup>) и  $L_m$  являются генераторами группы симметрии. Легко видеть, что это группа конформных преобразований (3.5) (подробнее см. в приложении В).

Вещественные и мнимые части переменных  $a_\mu^m$  связаны с разложением в ряд Фурье импульсов и координат точек струны:

$$\begin{aligned} p_\mu(\tau, \sigma) &= \sigma_0^{-1} [P_\mu + (\pi A)^{1/2} \sum_{m \neq 0} a_\mu^m(\tau) \cos \omega_m \sigma], \\ x_\mu(\tau, \sigma) &= X_\mu(\tau) + (\pi A)^{-1/2} \sum_{m \neq 0} (im)^{-1} a_\mu^m(\tau) \cos \omega_m \sigma. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Здесь  $X_\mu$  — координата центра массы; из уравнений движения следует, что  $X_\mu(\tau) = q_\mu + \tau P_\mu / A \sigma_0$ , где  $q_\mu$  — постоянный вектор. Полный момент вычисляется в новых переменных с помощью (3.15)

$$J_{\mu\nu} = (X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu) + i \sum_{m>0} m^{-1} (a_\mu^m a_\nu^{-m} - a_\nu^m a_\mu^{-m}). \quad (3.49)$$

Первый член здесь — орбитальный момент струны как целого, второй член — полный спин, связанный с внутренним движением. Согласно формуле (3.46a) масса струны равна

$$M^2 = -2\pi A \sum_{m>0} (a^m a^{-m}). \quad (3.50)$$

### г) Закрытая струна

Описанная в предыдущих разделах теория легко переносится на систему, изображаемую замкнутой линией в пространстве. Такая система представляет интерес в связи с моделью Шапиро — Вирасоро. Будем считать, что в случае замкнутой струны параметр  $\sigma$  меняется в интервале  $[-\sigma_0, \sigma_0]$ , так что  $x_\mu(-\sigma_0) = x_\mu(\sigma_0)$ . Уравнения движения (3.11) остаются справедливыми. При варьировании действия следует положить  $\delta x_\mu(\sigma_0) = \delta x_\mu(-\sigma_0)$ , тогда условие экстремума приводит вместо (3.12) к условию  $\pi_\mu(\sigma_0) = \pi_\mu(-\sigma_0)$ . Таким образом, в ортогональной системе координат (3.4) справедливо уравнение (3.17a) с граничными условиями

$$x_\mu(\tau, \sigma_0) = x_\mu(\tau, -\sigma_0), \quad x'_\mu(\tau, \sigma_0) = x'_\mu(\tau, -\sigma_0). \quad (3.51)$$

Общее решение вместо (3.19) принимает вид

$$x_\mu(\tau, \sigma) = r_\mu \tau + f_\mu^{(+)}(\tau + \sigma) + f_\mu^{(-)}(\tau - \sigma), \quad (3.52)$$

где

$$f_\mu^{(\pm)}(u) = f_\mu^{(\pm)}(u + 2\sigma_0), \quad (3.53a)$$

$$\left( r_\mu + 2 \frac{df_\mu^{(\pm)}}{du} \right)^2 = 0. \quad (3.53b)$$

Функции  $f_\mu^{(\pm)}(u)$  на отрезке  $[-\sigma_0, \sigma_0]$  и вектор  $r_\mu$  находятся из начальных условий

$$\begin{aligned} r_\mu &= (2\sigma_0)^{-1} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \dot{x}_\mu(0, \sigma) d\sigma, \\ f_\mu^{(\pm)}(\pm\sigma) &= \frac{1}{2} \left\{ x_\mu(0, \sigma) \pm \int_0^\sigma [\dot{x}_\mu(0, \sigma') - r_\mu] d\sigma' \right\}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Аналогично (3.35), можно ввести новые переменные в фазовом пространстве

$$y_{\mu}^{(\pm)}(\sigma) = \frac{1}{2} [p_{\mu}(\sigma) \pm Ax'(\sigma)], \quad -\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_0. \quad (3.55)$$

Тогда общее решение (3.52) запишется в виде

$$y_{\mu}^{(\pm)}(\tau, \sigma) = (2\sigma_0)^{-1} [P_{\mu}^{(\pm)} + (\pi A)^{1/2} \sum_{m \neq 0} a_{\mu}^{(\pm)m}(\tau) e^{\pm i\omega m \sigma}], \quad (3.56)$$

$$a_{\mu}^{(\pm)m}(\tau) = [a_{\mu}^{(\pm)-m}(\tau)]^* = \alpha_{\mu}^{(\pm)m} e^{i\omega m \tau}.$$

Полный импульс  $P_{\mu} = P_{\mu}^{(+)} + P_{\mu}^{(-)}$ . Таким образом, возникают две независимые совокупности нормальных переменных  $a^{(+)}$  и  $a^{(-)}$ , и, соответственно, две системы связей вида (3.46),  $L_m^{(+)}$  и  $L_m^{(-)}$ . Полный гамильтониан имеет вид  $H = -\pi (L_0^{(+)} + L_0^{(-)})/2\sigma_0$ .

Замкнутая струна обладает всеми решениями, которые существуют для незамкнутой струны. Они получаются, если «сложить» струну и потребовать, чтобы точки сгиба имели скорость света (натяжение в точках сгиба равно нулю). Это отвечает таким начальным условиям, для которых  $f_{\mu}^{(+)}(u) \equiv f_{\mu}^{(-)}(u)$ . В частности, получаются «линейные траектории», описываемые формулой (3.27), однако для ведущей траектории (рис. 12) теперь  $N = 2$ . Эффективно это приводит к вдвое меньшему наклону, в полном согласии с представлениями, изложенными в разделе в гл. 2 (см. формулу (2.8)).

У замкнутой струны имеются также и специфические решения (см. подробнее в работе Барбапова и Черникова<sup>79</sup>). Например, струна может в любой момент времени иметь вид окружности. При этом

$$\mathbf{x}(\tau, \sigma) = R \sin \frac{\pi \tau}{\sigma_0} \cdot \mathbf{n}(\sigma), \quad \mathbf{v}(\tau, \sigma) = \cos \frac{\pi \tau}{\sigma_0} \cdot \mathbf{n}(\sigma), \quad (3.57)$$

Рис. 12. Простейшее нетривиальное движение замкнутой струны.

где  $\mathbf{n}(\sigma)$  — единичный вектор с компонентами  $(\cos \pi \sigma / \sigma_0, \sin \pi \sigma / \sigma_0, 0)$ . Максимальная скорость точек струны равна скорости света  $c$ ,  $R = \sigma_0 / \pi$  — максимальный радиус окружности, масса  $M = 2\sigma_0 A$ . Струна пульсирует с частотой  $\nu = 1/2\sigma_0 = (2\pi \alpha' M)^{-1}$  от нулевого радиуса до максимального  $R$ . Нетрудно указать и более сложные плоские движения. Пусть в какой-то момент времени струна имеет вид некоторой плоской кривой. Тогда скорость, лежащая в той же плоскости, однозначно определяется по направлению и величине условиями (3.7). После этого легко найти решение в произвольный момент времени.

#### 4. РЕЛЯТИВИСТСКАЯ СТРУНА. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ

##### а) Каноническое квантование

Переход к квантовой теории производится с помощью обычного предписания<sup>104</sup> — путем замены скобок Пуассона для канонических переменных на коммутатор,  $-i\hbar \{...\}_{\text{P}} \rightarrow [...]$ . Полный набор переменных для струны состоит из векторов  $X_{\mu}$ ,  $P_{\mu}$ ,  $a_{\mu}^m$  (см. (3.48)), так что ковариантные условия квантования имеют вид

$$[\hat{P}_{\mu}, \hat{X}_{\nu}] = i\hbar g_{\mu, \nu}, \quad (4.1a)$$

$$[a_{\mu}^m, a_{\nu}^n] = \hbar m g_{\mu \nu} \delta(m + n). \quad (4.1b)$$

Таким образом,  $c_k = a_k^m / \sqrt{m}$  ( $k = 1, 2, 3; m > 0$ ) является оператором рождения,  $\hat{c}_k^{\dagger} = a_k^{-m} / \sqrt{m}$  — оператором уничтожения для  $m$ -го осциллятора. Для временных компонент знак в правой части противоположный, что могло бы приводить к состояниям с отрицательной нормой («призраки»). Это является следствием векторного характера динамической переменной, и подобная ситуация хорошо известна в теории квантования электромагнитного поля. В квантовой электродинамике трудность устраняется благодаря калибровочной инвариантности; на физически допустимые состоя-



ния накладывается требование, соответствующее выбору лоренцовой калибровки в классической теории (см., например, книгу Ахиезера и Берестецкого <sup>85</sup>):

$$\frac{\partial A_{\mu}}{\partial x_{\mu}} | \Phi \rangle = 0; \quad (4.2)$$

здесь  $A_{\mu}$  — часть оператора электромагнитного поля  $A_{\mu}(x)$ , содержащая операторы уничтожения фотона,  $| \Phi \rangle$  — вектор физического состояния. Аналогичным образом, благодаря наличию группы конформных преобразований (3.5), устраняются «призраки» при квантовании струны.

Прежде всего запишем генераторы симметрии в нормальной операторной форме

$$L_m = \frac{\sigma_0}{\pi A} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} : y^2(\theta) : e^{-i\omega_m \theta} d\theta, \quad (4.3)$$

$$L_0 = (2\pi A)^{-1} P^2 + \sum_{m>0} (a^m a^{-m}), \quad (4.4a)$$

$$L_m = (L_{-m})^+ = (\pi A)^{-1/2} (P a^m) + \sum_{n>0} (a^{m+n} a^{-n}) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{m-1} a^{m-n} a^n, \quad m > 0. \quad (4.4b)$$

Операторы в сумме, определяющей  $L_m$ , коммутируют, и мы лишь перегруппировали члены. Что касается  $L_0$ , то переход к квантовому выражению неоднозначен — оператор  $L_0$  определен с точностью до  $c$ -числового слагаемого, и это следует учитывать в дальнейшем. Используя (4.1), получаем \*)

$$[L_m, L_n] = (m-n) L_{m+n} + \frac{1}{12} dm(m^2-1) \delta(m+n), \quad (4.5)$$

где  $d$  — размерность пространства-времени (мы рассматриваем  $d$ -мерный случай, так как при  $d=4$  теория оказалась противоречивой). Квантование приводит к появлению лишнего члена в этом коммутаторе по сравнению с (3.476). Этот эффект характерен для систем с бесконечным числом степеней свободы (см. обсуждение в работе <sup>86</sup>). Подобные «лишние» члены в квантовой теории носят имя Швингера (см., например, книгу <sup>87</sup>). Формулу (4.5) легко получить, вычислив вакуумное среднее

$$\begin{aligned} \langle 0 | L_m L_{-m} | 0 \rangle &= \left\langle 0 \left| \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{m-1} (a^{m-n} a^n) \sum_{l=1}^{m-1} (a^{-l} a^{l-m}) \right| 0 \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} \sum_{n=1}^{m-1} n(m-n). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Таким образом, операторы  $L_m$  уже не образуют замкнутой алгебры Ли; в этом формальная причина противоречивости теории.

Как обычно, при квантовании связи переходят в условия на допустимые векторы в гильбертовом пространстве, описывающие физические состояния

$$L_0 | \Phi \rangle = -\alpha_0 | \Phi \rangle, \quad (4.7a)$$

$$L_{-m} | \Phi \rangle = 0, \quad m > 0; \quad (4.7b)$$

\*) В дальнейшем используется система единиц, в которой  $\hbar = 1$ .

здесь  $\alpha_0$  — новая константа теории, число, введение которого связано с неоднозначностью выбора оператора  $L_0$ . Как и в электродинамике, физические состояния аннулируются лишь «уничтожающими» операторами  $L_{-m}$ , требование (4.76) для всех  $m$  противоречило бы коммутационным соотношениям. Однако так как  $L_m = (L_{-m})^+$ , матричные элементы, относящиеся к физическим состояниям, «зануляются» для любого оператора  $L_m$ . Теория будет разумной, если подпространство физических состояний замкнуто и не содержит состояний с отрицательной нормой.

Полный базис в гильбертовом пространстве можно построить с помощью операторов рождения

$$|\Psi_N(P)\rangle = \prod_{n=1}^N a_{\mu_n}^{m_n} |0, P\rangle, \quad m_n > 0, \quad (4.8)$$

где  $|0, P\rangle$  описывает невозбужденное состояние струны с импульсом  $P_\mu$ . Среди этих векторов есть, в частности, и векторы с отрицательной нормой, связанной с действием операторов  $a_\mu^n$ . Физические состояния  $|\Phi\rangle$  — некоторые линейные комбинации векторов (4.8), удовлетворяющие условиям (4.7). Можно доказать, что среди векторов  $|\Phi\rangle$  нет состояний с отрицательной нормой при  $d \leq 26$ , причем подпространство замкнуто при  $d = 26$  и  $\alpha_0 = 1$ . Это доказательство весьма сложно и здесь не воспроизводится (см., например, обзор Шерка<sup>10</sup>). Мы рассмотрим сейчас более простой подход, развитый в работе Годдара и др.<sup>24</sup>, который позволяет убедиться в том, что все физические состояния обладают положительной нормой.

#### б) Нековариантное квантование и «поперечные» физические состояния

При построении гамильтонова формализма и квантовании систем со связями в фазовом пространстве обычно возникает дилемма: постулировать скобки Пуассона и коммутаторы в обычном виде и затем накладывать связи или с помощью связей исключить часть переменных, «искривив» при этом фазовое пространство и заменив скобки Пуассона на скобки Дирака. (Квантование систем со связями рассматривалась впервые Дираком, обзор его работ можно найти в книге<sup>81</sup>. Дальнейшее развитие идей Дирака см. в работах Фаддеева<sup>88</sup> и Хансона, Редже и Тейтельбойма<sup>89</sup>.) Простейший пример — релятивистская точечная частица. Первый подход состоит в том, чтобы постулировать для координаты и импульса коммутатор (4.1а), наложив на состояния условие  $(P^2 - M^2)|\Phi\rangle = 0$  (так возникает инвариантное уравнение Клейна — Гордона). При втором подходе постулируются коммутаторы для пространственных компонент  $P$  и  $X$ , а  $P_0$  выражается через  $P$ :  $P_0 = (P^2 + M^2)^{1/2}$ . В этом случае состояния — произвольные функции от  $P$ , а коммутатор  $[P_0, X] \neq 0$ . В предыдущем разделе обсуждалось инвариантное квантование струны; оказалось, что оно приводит к трудностям при построении физических состояний. Рассмотрим второй подход.

Направим ось  $x_1$  вдоль вектора  $P$ . Воспользуемся калибровочной инвариантностью (3.5) и отождествим параметр  $\tau$  с координатой  $x_+$

$$x_+(\tau, \sigma) \equiv \frac{x_0 + x_1}{\sqrt{2}} = \tau. \quad (4.9)$$

Такая параметризация аналогична «лабораторной» (3.7а), но вместо обычного времени используется переменная на световом конусе. Роль энергии играет теперь переменная  $P_- = (P_0 - P_1)/\sqrt{2}$ , которую следует выра-

зять через остальные компоненты импульса \*)

$$P_- = \frac{P_+^2 + M^2}{P_+} = \frac{M^2}{P_+}. \quad (4.10)$$

Условия (3.46) и (4.9) позволяют явно исключить продольные компоненты векторов  $a_\mu^m$  (в этом как раз и состоит преимущество выбора (4.9)):

$$a_+^m = 0, \quad (4.11a)$$

$$a_-^m = \sqrt{\pi A} \frac{1}{P_+} \left[ L_m + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0, m} (a_+^n a_+^{n-m}) \right] \quad (4.11b)$$

для всех  $m \neq 0$ . Независимыми являются поперечные компоненты векторов  $a^m$ , и только их следует использовать для построения физических состояний

$$|\Phi_N(P)\rangle = \prod_{n=1}^N a_{jn}^{mn} |0, P_+\rangle, \quad (4.12)$$

где  $j_n = 2, \dots, d-1$ . Таким образом, мы исключили «временные» осцилляторы с отрицательной нормой, а вместе с ними также одно из пространственных измерений.

Чтобы вычислить спектр масс, достаточно воспользоваться условием (4.7a)

$$M^2 |\Phi_N\rangle = 2\pi A \left( -\alpha_0 + \sum_{m>0} m N_m \right) |\Phi_N\rangle, \quad (4.13)$$

где  $N_m$  — числа заполнения, собственные значения оператора  $(a_+^m a_-^m)/m$ ,  $\sum N_m = N$ . Так мы получили эквидистантный и сильно вырожденный спектр, описанный в гл. 2. Состояние (4.12) описывается тензором ранга  $N$  в «поперечном» пространстве. Разлагая этот тензор на неприводимые составляющие, мы получим различные спины от 0 до  $N$ . Если возбужден лишь первый осциллятор,  $N_1 = N$ ,  $N_m = 0$  при  $m > 1$ , то классическое движение изображается рис. 4, где ось  $x_1$  перпендикулярна к плоскости вращения. Вычисляя спин этого состояния с помощью формулы (3.49), получим уравнение ведущей траектории

$$J = N_1 = \alpha_0 + \alpha' M^2, \quad (4.14)$$

где  $\alpha' = (2\pi A)^{-1}$  в согласии с классическим рассмотрением в разделе б) гл. 3.

Так как построение не было релятивистски инвариантным, необходимо проверить ковариантность результата. Иными словами, преобразование Лоренца не должно выводить вектор из пространства физических состояний, а для этого необходимо, чтобы для операторов  $\mathcal{Y}_{\mu\nu}$ , построенных по формуле (3.49), выполнялись обычные коммутационные соотношения. В классическом случае для скобок Пуассона это было нетрудно проверить. В квантовом случае появляются швингеровские члены, которые разрушают алгебру. Чтобы убедиться в этом, следует найти коммутатор  $[\mathcal{Y}_i, \mathcal{Y}_j]$ , который должен был бы быть равен нулю. Однако можно

\*) Мы используем следующие обозначения: для любой пары векторов  $b_\mu$  и  $c_\mu$  скалярное произведение равно

$$(bc) = b_+ c_- + b_- c_+ - (b_\perp c_\perp), \quad \text{где } (b_\perp c_\perp) = \sum_{j=2}^{d-1} b_j c_j.$$

показать, что

$$[\mathcal{Y}_i, \mathcal{Y}_j] = 2 (\pi A P_+^2)^{-1} \sum_{m>0} \left[ m \left( 1 - \frac{d-2}{24} \right) + m^{-1} \left( \frac{d-2}{24} - \alpha_0 \right) \right] (a_j^m a_i^{-m} - a_i^m a_j^{-m}). \quad (4.15)$$

При вычислении использовалась формула (4.11б) и ненулевой результат получился по той же причине, что и второй член в коммутаторе (4.5). Таким образом, теория непротиворечива лишь при условии, что

$$\alpha_0 = 1, \quad d = 26. \quad (4.16)$$

Требование  $\alpha_0 = 1$  имеет простой смысл. Векторная частица, отвечающая  $N = N_1 = 1$ , инвариантно описывается поперечной волновой функцией лишь при условии, что ее масса равна нулю. Условие  $d = 26$  не имеет столь простой интерпретации. Его можно сформулировать как требование, чтобы реальное число степеней свободы системы было равно  $4! = 24$ . В своей книге<sup>81</sup> Дирак указывал на то, что может существовать такая система со связями, для которой нельзя построить квантовую теорию. Струна — пример такой системы.

На самом деле, имея в виду отдельную струну, можно обойтись и без 26-мерного пространства, если не рассматривать возбуждения осцилляторов, связанных с «лишними» 22-мя поперечными координатами. С формальной точки зрения несостоятельность вывода (4.16) обусловлена тем, что переход к «конусному» времени (4.9) возможен не всегда (это замечание принадлежит Патрашоу<sup>90</sup>). Для выполнения замены переменных необходимо условие невырожденности якобиана (3.6), которое в данном случае принимает вид

$$r_+ + 2f'_+(u) \neq 0 \quad (4.17)$$

при всех  $u$ ; здесь  $r_+$  и  $f_+(u)$  определяют решение согласно формуле (3.19). С другой стороны, в силу условия (3.20б), неравенство (4.17) возможно лишь в том случае, когда скорость конца струны ни в какой момент времени не оказывается направленной «вперед», т. е. по оси  $P$ . Класс таких состояний определен не инвариантно, и не удивительно, что алгебра генераторов группы Лоренца не замыкается. В ряде работ<sup>90–93</sup> предпринимались попытки произвести квантование, не связанное с переменными на конусе. Однако вывод о необходимости условий (4.16), по-видимому, сохраняет свою силу<sup>94</sup>. Простая теоретико-полевая интерпретация критической размерности пространства — времени предложена в работе Бринка и Нильсена<sup>95</sup>. Эти авторы вычислили энергию нулевых квантовых флуктуаций и показали, что перенормировка приводит к разумному ответу лишь при условии (4.16).

Однако даже если бы свободную струну и можно было проквантовать, необходимо иметь также непротиворечивое описание взаимодействия. Как показал Мандельштам<sup>32</sup>, в этом случае вновь возникает требование  $d = 26$ .

## 5. СТРУНА СО СПИНОМ

Так как не удастся построить последовательной квантовой теории релятивистской струны, возникает вопрос, можно ли так модифицировать теорию, чтобы сделать ее непротиворечивой и более реалистичной. Наиболее интересная возможность — ввести наряду с координатами также спиновые переменные. К этому побуждает также то обстоятельство, что обычная струна не может моделировать частицу с полупелым спином.

Введение спина особенно наглядно с точки зрения партонной картины: естественно считать, что фундаментальные частицы имеют спин  $1/2$  (эта идея высказана в работе Ааронова и др.<sup>30</sup>). Были построены дуальные модели со спиновыми переменными<sup>27, 28</sup>, и в работе Жервэ и Сакиты<sup>96</sup> было показано, что эти модели связаны с введением фермионных полей в двумерном пространстве-времени. Эта работа, наряду с другими независимыми подходами<sup>97, 98</sup>, послужила основой для нового направления в теории — исследования групп симметрии с антикоммутирующими параметрами, «суперсимметрии» (см. обзор Огиевского и Мезинческу<sup>99</sup>, который содержит обширную библиографию).

Квантовая теория с антикоммутаторами может быть построена путем квантования обобщенной классической механики на алгебре Грассмана с антикоммутирующими образующими. Такая обобщенная механика описана в работе<sup>100</sup>. Квантовый принцип действия для антикоммутирующих канонических переменных был впервые рассмотрен Швингером<sup>101</sup>. Идея построения грассмановского аналога механики четко сформулирована также в работе Мартина<sup>102</sup>. В следующем разделе излагается классическая теория релятивистской частицы со спином, рассмотренная детально в работе<sup>100</sup>. После этого введение спина на струне представляется вполне естественным.

#### а) Классическая динамика частицы со спином

В перерелятивистской теории будем описывать спин трехмерным вектором  $\xi$  с антикоммутирующими компонентами

$$\xi_k \xi_l + \xi_l \xi_k = 0; \quad k, l = 1, 2, 3 \quad (5.1)$$

(в частности,  $\xi_k^2 = 0$ ). Фазовое пространство частицы со спином строится путем добавления к обычному шестимерному пространству  $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$  трехмерного пространства  $(\xi)$ . Иными словами, динамические переменные, т. е. функции на фазовом пространстве, являются элементами алгебры Грассмана  $G_3$  с тремя образующими  $\xi_k$ . Элементы алгебры Грассмана не являются функциями в обычном смысле слова, однако для них возможно построение аналогов таких понятий обычного анализа, как дифференцирование и интегрирование\*). Пусть полное действие — четный вещественный элемент алгебры  $G_3$ . Тогда его можно записать следующим образом:

$$\mathcal{S} = \int_{t_i}^{t_f} \left( \mathbf{p} \dot{\mathbf{q}} + \frac{i}{2} \xi \dot{\xi} - \mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \xi) \right) dt, \quad (5.2)$$

где  $\mathcal{H}$  — функция Гамильтона. Любой элемент  $G_3$  можно записать как полином по  $\xi$  степени не выше 3. Так как, кроме того, гамильтониан  $H$  — четный элемент  $G_3$  (коммутирует с любым  $\xi_k$ ), то он линейно зависит от вектора спинного момента

$$S_k = -\frac{i}{2} \varepsilon_{klm} \xi_l \xi_m. \quad (5.3)$$

Наиболее общий локальный гамильтониан имеет вид

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \xi) = \frac{p^2}{2m} + V_0(\mathbf{q}) + \mathbf{L} \mathbf{S} V_1(\mathbf{q}) + \mathbf{S} \mathbf{B}(\mathbf{q}), \quad (5.4)$$

где  $\mathbf{L} = [\mathbf{q}\mathbf{p}]$  — орбитальный момент,  $V_0(\mathbf{q})$  и  $V_1(\mathbf{q})$  — потенциальные функции,  $\mathbf{B}(\mathbf{q})$  — векторное поле. Третий член в гамильтониане описывает спин-орбитальное взаимодействие, а последний член — взаимодействие с внешним магнитным полем.

Действие (5.2) приводит к следующему выражению для скобок Пуассона

$$\{f, g\}_{\text{P.B.}} = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{p}} + i \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \xi} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \xi}, \quad (5.5)$$

\*) Точные определения и многие результаты можно найти в книге Березина<sup>103</sup>.

где  $\overleftarrow{\partial}$  и  $\overrightarrow{\partial}$  — правая и левая производные, соответственно (см. книгу<sup>103</sup>). В частности,

$$\{\xi_k, \xi_l\}_{\mathbf{p}, \mathbf{v}} = i\delta_{kl}. \quad (5.6)$$

Динамика определяется «гейзенберговскими» уравнениями

$$\dot{f} = \{\mathcal{H}, f\}_{\mathbf{p}, \mathbf{v}} \quad (5.7)$$

для любой функции  $f(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \xi)$ . В частности, уравнения движения, следующие из вариационного принципа для действия (5.2), имеют вид

$$\dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}}, \quad \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}}, \quad \dot{\xi} = i \frac{\overleftarrow{\partial} \mathcal{H}}{\partial \xi}. \quad (5.8)$$

Квантование производится путем замены фундаментальных скобок (5.6) на антикоммутатор, деленный на  $-i\hbar$ ,

$$[\hat{\xi}_k, \hat{\xi}_l]_+ = \hbar \delta_{kl}. \quad (5.9)$$

Обозначив  $\hat{\xi}_k = \sqrt{\hbar/2} \hat{\sigma}_k$ , получаем для операторов  $\hat{\sigma}_k$  соотношения  $[\hat{\sigma}_k, \hat{\sigma}_l] = 2\delta_{kl}$ , которые реализуются на матрицах Паули. При этом оператор спина (5.3) принимает обычный вид:

$$\hat{S}_k = -\frac{i}{2} \epsilon_{klm} \hat{\xi}_l \hat{\xi}_m = \frac{1}{2} \hbar \hat{\sigma}_k. \quad (5.10)$$

Так, после квантования воспроизводится обычная теория частицы со спином  $1/2$ .

Действие для свободной релятивистской частицы запишем в виде

$$\mathcal{S} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left\{ -mz + \frac{i}{2} [-(\dot{\xi}\xi) + (u\xi)(\dot{u}\xi)] \right\} d\tau, \quad (5.11)$$

где  $z = (\dot{x}^2)^{1/2}$ ,  $u_\mu = \dot{x}_\mu/z$ ,  $\xi_\mu$  — четырехмерный вектор с антикоммутирующими компонентами. Действие построено так, что в системе покоя оно не зависит от  $\xi_0$  и совпадает с (5.2). Матрица билинейной формы по  $\xi$  и  $\dot{\xi}$  в (5.11) вырождена, поэтому для продольной компоненты вектора  $\xi$  нельзя написать уравнения движения. Чтобы доопределить динамику, необходима связь, которую можно выбрать в инвариантном виде, введя пятую координату в спинном пространстве

$$(u\xi) - \xi_5 = 0. \quad (5.12)$$

Следуя Дираку<sup>81</sup>, включаем в действие связь с неопределенным множителем

$$\mathcal{S} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left\{ -mz + \frac{i}{2} [-(\dot{\xi}\xi) + \xi_5 \dot{\xi}_5 + m((u\xi) - \xi_5)\lambda] \right\} d\tau, \quad (5.13)$$

$\lambda$  антикоммутирует со всеми  $\xi$ . Канонический импульс

$$p^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_\mu} = -mu^\mu + \frac{i}{2} m (\xi^\mu - (u\xi) u^\mu) \lambda \quad (5.14)$$

подчиняется уравнениям связи

$$p^2 - m^2 = 0, \quad (p\xi) - m\xi_5 = 0. \quad (5.15)$$

Полное действие в форме Гамильтона для свободной частицы записывается следующим образом:

$$\mathcal{S} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left\{ -(p\dot{x}) + (p^2 - m^2)v - \frac{i}{2} [(\dot{\xi}\xi) - \xi_5 \dot{\xi}_5] + \frac{i}{2} [(p\xi) - m\xi_5]\lambda \right\} d\tau, \quad (5.16)$$

$v$  и  $\lambda$  — произвольные функции.

Уравнения (5.15) являются следствием симметрии лагранжиана относительно двух групп преобразований. Первая симметрия, «калибровочная», связана со свободой выбора параметра  $\tau$  (как и в случае бесспиновой частицы). Инфинитезимальные пре-

образования второго рода имеют вид

$$\begin{aligned}\xi_\mu &\rightarrow \tilde{\xi}_\mu = \xi_\mu + u_\mu \eta, & \xi_5 &\rightarrow \tilde{\xi}_5 = \xi_5 + \eta, \\ x_\mu &\rightarrow \tilde{x}_\mu = x_\mu + \frac{i\xi_\mu \eta}{m},\end{aligned}\quad (5.17)$$

где  $\eta(\tau)$  — антикоммутирующий «параметр», зависящий от  $\tau$  произвольно, но так, что  $\eta(\tau_i) = \eta(\tau_f) = 0$ . Используя введенный в работе <sup>96</sup> термин, будем называть преобразование (5.17) «суперкалибровочным». Выбор  $\lambda$  произволен и фиксирует зависимость  $\xi_5$  от  $\tau$ . Заметим, что импульс (5.14) не пропорционален скорости  $\dot{x}_\mu$ , как в обычном случае, а содержит еще спинные члены. Это явление рассмотрено Шрёдингером в квантовой теории (см. обсуждения в книгах Дирака <sup>104</sup> § 69 и Бете <sup>105</sup>) и называется «дрожащим движением» (Zitterbewegung) электрона.

Квантование приводит к соотношениям

$$[\hat{\xi}_\mu, \hat{\xi}_\nu]_+ = -\hbar g_{\mu\nu}, \quad [\hat{\xi}_5, \hat{\xi}_5]_+ = \hbar, \quad [\hat{\xi}_\mu, \hat{\xi}_5]_+ = 0, \quad (5.18)$$

представление которых дает алгебра матриц Дирака:

$$\hat{\xi}_\mu = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \gamma_5 \gamma_\mu, \quad \hat{\xi}_5 = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} \gamma_5. \quad (5.19)$$

Связи переходят в условия на состояние

$$(p^2 - m^2)\psi = 0, \quad [(p\gamma) - m]\psi = 0. \quad (5.20)$$

Так из классического действия (5.11) выводится уравнение Дирака.

В случае безмассовой частицы ( $m = 0$ ) естественно переписать действие (5.16) в виде

$$\mathcal{S} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} \left[ -(p\dot{x}) - \frac{i}{2} (\dot{\xi}\dot{\xi}) + \frac{i}{2} \dot{\xi}_5 \dot{\xi}_5 + v p^2 + \frac{i}{2} (p\dot{\xi}) \lambda \right] d\tau. \quad (5.21)$$

При этом связи имеют вид  $p^2 = 0$  и  $(p\dot{\xi}) = 0$ , а  $\dot{\xi}_5 = 0$  — теория « $\gamma_5$ -инвариантна». Заметим, что лагранжев принцип действия для безмассовой частицы не существует.

## б) Классическая теория спиновой струны

Для описания струны со спином введем наряду с обобщенными импульсами точек струны  $y_\mu(\tau, \theta)$  (см. раздел в) гл. 3) также антикоммутирующие спинные переменные  $\xi_\mu(\tau, \theta)$ . Иными словами, в каждой точке струны задается пара векторов  $\xi_\mu(\tau, \sigma)$  и  $\xi_\mu(\tau, -\sigma)$ , один из которых описывает спин партонa, а другой — спин антипартонa. Постулируем канонические скобки Пуассона, аналогичные (5.6),

$$\{\xi_\mu(\theta_1), \xi_\nu(\theta_2)\}_{\text{P.B.}} = -ig_{\mu\nu} \delta(\theta_1 - \theta_2). \quad (5.22)$$

Уравнения связей, обобщающие (3.37) и (5.15), запишем в виде

$$(y\dot{\xi}) = 0, \quad y^2 + \frac{i}{2} A \xi \xi' = 0. \quad (5.23)$$

Первое из них позволяет исключить продольную компоненту вектора  $\xi$ , а второе находится из требования замкнутости алгебры Ли для уравнения связи (см. книгу Дирака <sup>81</sup>). Чтобы получить этот результат, вычислим, используя (3.36) и (5.22), скобки Пуассона для функционалов

$$\Phi(\varphi) = \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (y\dot{\xi}) \varphi(\theta) d\theta, \quad F(f) = \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \left( y^2 + \frac{i}{2} A \xi \xi' \right) f(\theta) d\theta, \quad (5.24)$$

где  $\Phi(\theta)$  и  $f(\theta)$  — дифференцируемые функции,  $\Phi(-\sigma_0) = \Phi(\sigma_0)$ ,  $f(-\sigma_0) = f(\sigma_0)$ . Имеем

$$\begin{aligned}\{\Phi(\varphi_1), \Phi(\varphi_2)\}_{P.B} &= -iF(\varphi_1\varphi_2), \\ \{\Phi(\varphi), F(f)\}_{P.B} &= A\Phi\left(\frac{1}{2}\varphi f' - \varphi' f\right), \\ \{F(f_1), F(f_2)\}_{P.B} &= AF(f_1f_2' - f_1'f_2).\end{aligned}\quad (5.25)$$

Уравнения связей (5.23) эквивалентны требованиям  $\Phi \equiv 0$ ,  $F \equiv 0$  при любых  $\varphi$  и  $f$ . Наличие замкнутой системы связей приводит к симметрии системы относительно группы преобразований. Инфинитезимальные преобразования этой группы можно найти, рассматривая функционалы

$$B_\mu(b) = \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} y_\mu b(\theta) d\theta, \quad \Omega_\mu(\omega) = \int \xi_\mu \omega(\theta) d\theta, \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned}\{F(f), B_\mu(b)\}_{P.B} &= AB_\mu(fb'), \\ \{F(f), \Omega_\mu(\omega)\}_{P.B} &= A\Omega_\mu\left(f\omega' + \frac{1}{2}f'\omega\right),\end{aligned}\quad (5.27)$$

$$\begin{aligned}\{\Phi(\varphi), B_\mu(\omega)\}_{P.B} &= -\frac{1}{2}A\Omega_\mu(\varphi b'), \\ \{\Phi(\varphi), \Omega_\mu(\omega)\}_{P.B} &= iB_\mu(\varphi\omega).\end{aligned}\quad (5.28)$$

Из (5.28) следует, что  $\Phi(\varphi)$  генерирует суперкалибровочные преобразования (ср. с (5.17))

$$\delta \xi_\mu = y_\mu \eta, \quad \delta y_\mu = \frac{i}{2} A (\xi'_\mu \eta + \xi_\mu \eta'), \quad (5.29)$$

где  $\eta = \varepsilon \varphi(\theta)$  — антикоммутирующая с  $\xi_\mu$  функция,  $\varepsilon$  — бесконечно малый параметр супергруппы. Легко видеть также, что функционал  $F(f)$  генерирует преобразование вида

$$y_\mu(\theta) \rightarrow \beta y_\mu(\tilde{\theta}), \quad \xi_\mu(\theta) \rightarrow \beta^{1/2} \xi_\mu(\tilde{\theta}), \quad (5.30)$$

где при малых  $f$  имеем  $\tilde{\theta} = \theta - Af(\theta)$ ,  $\beta = 1 - Af'$ . При конечных  $f$  функция  $\tilde{\theta} = g(\theta)$  находится из уравнения  $h(g) = h(\theta) + 1$ , где  $h' = [-Af(\theta)]^{-1}$ ; при этом  $\beta = f(\tilde{\theta})/f(\theta) = g'$  (см. также приложение В).

Запишем гамильтоново действие для спиновой струны, обладающей симметрией относительно указанных преобразований

$$\mathcal{S} = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} d\theta \left( x\dot{y} + \frac{y^2}{A} + \frac{i}{2} \xi \dot{\xi}' - \frac{i}{2} \dot{\xi} \xi' \right). \quad (5.31)$$

Такая форма отвечает введению связей (5.23) с коэффициентами 0 и  $-A^{-1}$  (как и в (3.38)) соответственно. Вариационный принцип приводит к уравнениям движения

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial y_\mu}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \tau} = \frac{\partial \xi_\mu}{\partial \theta} \quad (5.32)$$

и граничным условиям

$$y_\mu(\sigma_0) = y_\mu(-\sigma_0), \quad \xi \delta \xi|_{\sigma=\sigma_0} = \xi \delta \xi|_{\sigma=-\sigma_0}, \quad (5.33)$$



где  $\delta \xi_\mu$  — вариация  $\xi_\mu$ . Решение для  $y_\mu(\tau, \sigma)$  сохраняет прежний вид (3.41), для спиновой переменной \*)

$$\begin{aligned}\xi_\mu(\tau, \theta) &= \xi_\mu(\tau + \theta), \quad \xi_\mu(u) \equiv \xi_\mu(0, u), \\ \xi_\mu(u + 2\sigma_0) &= \varepsilon \xi_\mu(u), \quad \varepsilon = \pm 1.\end{aligned}\quad (5.34)$$

Последнее следует из граничного условия, причем  $\varepsilon = +1$  описывает струну, ведущую себя в целом как фермион (модель Рамона), а  $\varepsilon = -1$  описывает бозонную струну (модель Невё — Шварца). Указанные решения инвариантны относительно конформных преобразований (3.5). При этом связи (5.23) также инвариантны, если пара функций  $y_\mu(\tau, \pm\sigma) = y_\mu^\pm$  преобразуется как двумерный конформный вектор, а пара  $\xi_\mu(\tau, \pm\sigma) = \xi_\mu^\pm$  — как двумерный спинор на поверхности  $(\tau, \sigma)$  (см. также в работе <sup>7)</sup>, в согласии с формулами (5.30).

Переход к нормальным переменным осуществляется путем преобразования Фурье \*\*):

$$\xi_\mu(\tau, \theta) = (2\sigma_0)^{-1/2} \sum_r b_\mu^r(\tau) e^{i\omega_r \theta}, \quad (b_\mu^r)^* = b_\mu^{-r}, \quad (5.35)$$

$$\{b_\mu^r, b_\nu^s\}_{\text{P. B.}} = -ig_{\mu\nu} \delta(r+s). \quad (5.36)$$

Решение уравнений движения имеет вид

$$b_\mu^r(\tau) = \beta_\mu^r e^{i\omega_r \tau}. \quad (5.37)$$

Переписывая связи (5.23) в нормальных переменных (3.42), (5.35), получаем

$$\begin{aligned}G_r &= \sqrt{\frac{2\sigma_0}{\pi A}} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (y \xi) \exp(-i\omega_r \theta) d\theta = \\ &= (\pi A)^{-1/2} (P b^r) + \sum_{n \neq 0} (a^n b^{r-n}) = 0,\end{aligned}\quad (5.38)$$

$$L_m = \frac{\sigma_0}{\pi A} \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} \left( y^2 + \frac{i}{2} A \xi \xi' \right) \exp(-i\omega_m \theta) d\theta,$$

$$L_0 = (2\pi A)^{-1} P^2 + \sum_{n \geq 0} (a^n a^{-n}) - i \sum_{r \geq 0} r (b^r b^{-r}) = 0, \quad (5.39)$$

$$L_m = (\pi A)^{-1/2} (P a^m) + \frac{1}{2} \sum_{n \neq 0, m} (a^n a^{m-n}) - \frac{i}{2} \sum_r \left( r - \frac{m}{2} \right) (b^r b^{m-r}) = 0, \quad m \neq 0.$$

Скобки Пуассона вычисляются с помощью (5.25):

$$\begin{aligned}\{G_r, G_s\}_{\text{P. B.}} &= -2i L_{r+s}, \quad \{G_r, L_m\}_{\text{P. B.}} = \\ &= i \left( r - \frac{1}{2} m \right) G_{r+m}, \quad \{L_m, L_n\}_{\text{P. B.}} = i (m-n) L_{m+n}.\end{aligned}\quad (5.40)$$

\*) Вид гамильтониана в (5.34) указывает на то, что решение уравнений движения можно рассматривать как результат преобразования (5.30) при  $f = -\tau/A$ . В этом случае  $\tilde{\theta} = \theta + \tau$ ,  $\beta \equiv 1$ .

\*\*) В этом разделе  $r, s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  при  $\varepsilon = 1$  (фермионная струна);  $r, s = \pm 1/2, \pm 3/2, \dots$  при  $\varepsilon = -1$  (бозонная струна);  $m, n$  — целые числа;  $\omega_k = k\pi/\sigma_0$ .

Масса и полный момент также просто выражаются через эти переменные:

$$M^2 = -2\pi A \left[ \sum_{n>0} (a^n a^{-n}) - i \sum_{r>0} r (b^r b^{-r}) \right], \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} J_{\mu\nu} &= \int_{-\sigma_0}^{\sigma_0} (x_\mu y_\nu - x_\nu y_\mu - i \xi_\mu \xi_\nu) d\theta = \\ &= X_\mu P_\nu - X_\nu P_\mu + i \sum_{n>0} n^{-1} (a_\mu^n a_\nu^{-n} - a_\nu^n a_\mu^{-n}) - i \sum_{r>0} b_\mu^r b_\nu^{-r}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

(Ср. с формулами (3.49) и (3.50))

### в) К в а н т о в а н и е

При квантовании спиновой струны к коммутаторам (4.1) следует присоединить фермиевские перестановочные соотношения для операторов  $\hat{b}_\mu^r$  (полагаем  $\hbar = 1$ )

$$[\hat{b}_\mu^r, \hat{b}_\nu^s]_+ = -g_{\mu\nu} \delta(r+s). \quad (5.43)$$

Операторы  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$  всегда коммутируют. Как и в случае бесспиновой струны, в операторе  $\hat{L}_0$  принимаем нормальный порядок сомножителей в суммах. Алгебра операторов симметрии (5.40) искажается в соотношениях, содержащих  $L_0$  (ср. (4.5)):

$$\begin{aligned} [\hat{G}_r, \hat{G}_s]_+ &= -2\hat{L}_{r+s} + \frac{1}{2} d \left( r^2 - \frac{1}{8} (1-\varepsilon) \right) \delta(r+s), \\ [\hat{G}_r, \hat{L}_m]_- &= \left( r - \frac{1}{2} m \right) \hat{G}_{r+m}, \\ [\hat{L}_m, \hat{L}_n]_- &= (m-n) \hat{L}_{m+n} + \frac{1}{8} dm \left( m^2 - \frac{1}{2} (1-\varepsilon) \right) \delta(m+n). \end{aligned} \quad (5.44)$$

Векторы состояний различаются числами заполнения для бозонных и фермионных осцилляторов. В фермионном случае ( $\varepsilon = +1$ ) существует также векторный оператор  $\hat{b}_\mu^a$ , который представляется матрицами  $\gamma_5 \gamma_\mu / \sqrt{2}$  и имеет смысл среднего спинового вектора струны. Наинизшее состояние при этом имеет спин  $1/2$  и массу 0, а связь  $G_0 = 0$  превращается в уравнение Дирака,  $(P\gamma)\psi = 0$ . Как и в бесспиновом случае, ведущая траектория имеет вид  $J = \alpha_0 + \alpha' M^2$ . При этом постоянная  $\alpha_0$  связана с уравнением связи  $L_0 |\Phi\rangle = -(\alpha_0 - 1/2) |\Phi\rangle$  аналогично уравнению (4.7a). Для фермионной струны теория непротиворечива лишь при условии  $\alpha_0 = 1/2$ , так что  $\mu = 0$  ( $\mu$  — масса наинизшего состояния на главной траектории). Это видно хотя бы из того, что  $\hat{L}_0 = -\hat{G}_0^2$ , и  $G_0 |\Phi\rangle = 0$ . В мезонном случае также возникает условие  $\alpha_0 = 1/2$ , низшее состояние (аналог  $\pi$ -мезона) — тахион,  $\mu^2 = -1/2 \alpha'$ . Следующая траектория отвечает возбуждению спинового колебания с минимальной частотой,  $r = 1/2$  (спиновая волна длины  $4\sigma_0$ ). Уравнение этой траектории имеет вид  $J = \alpha_0 + 1/2 + \alpha' M^2$ . Низшее состояние на ней ( $\rho$ -мезон) — безмассовая векторная частица. Заметим, что модель предсказывает правильное соотношение  $\alpha_0^{(p)} - \alpha_0^{(n)} = 1/2$ .

Так как лагранжиан является четной функцией  $\xi$ , теория спиновой струны обладает симметрией относительно инверсии  $\xi \rightarrow -\xi$ , которую Невё и Шварц<sup>27</sup> связали с  $g$ -четностью. Эта симметрия выражается в том, что четность числа спиновых возбуждений сохраняется. Иными словами, сохраняется оператор  $\hat{C} = (-1)^{\hat{F}}$ , где  $\hat{F} = -\sum_{r>0} (\hat{b}^r \hat{b}^{-r})$ . Буквально

в такой модели переход  $\rho \rightarrow 2\pi$  запрещен. Картина становится более реалистической, если ввести изоспин  $I$ ; тогда сохраняется оператор  $\hat{G} = (-1)^{\hat{F}+I}$ , и запрещенным становится переход  $\pi \rightarrow 2\rho$ , а не  $\rho \rightarrow 2\pi$ . Более подробное обсуждение можно найти в обзоре Мандельштама<sup>9</sup>.

Состояния, удовлетворяющие уравнениям связи, можно строить, как в разделе б) гл. 4, используя переменные на световом конусе. При этом с помощью суперкалибровочного преобразования накладывается дополнительное условие:

$$b_+^r = 0, \quad r \neq 0, \quad (5.45)$$

а  $b_-^r$  выражается через поперечные компоненты формулой (5.38). Повторив вычисления, которые привели к (4.15), можно убедиться, что теория непротиворечива лишь при условиях

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}, \quad d = 8 + 2 = 10. \quad (5.46)$$

Интерпретация этого результата состоит в том, что на каждую орбитальную степень свободы приходится две спиновые и необходимое число поперечных колебаний получается по правилу  $8 + 2 \cdot 8 = 24$ .

## 6. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

До сих пор рассматривались свободные струны. Переходя к теории, описывающей движение струны под действием сил, следует иметь в виду, что для возможности квантования весьма существенна инвариантность теории относительно замены переменных  $(\tau, \sigma)$  (формулы (3.3) и (3.5)). Вводя взаимодействие, нельзя нарушать этой симметрии, иначе вновь возникает проблема «призраков». Это ограничение приводит к тому, что «валентными» оказываются лишь крайние точки.

### а) Струна во внешнем поле

Воздействие на струну внешнего электромагнитного поля с напряженностью  $F^{\mu\nu}(x)$  можно описать конформно-инвариантным образом, добавляя к действию член (работа Адемолло и др.<sup>29</sup>)

$$\mathcal{S}_{e-m} = \int d\tau \int d\sigma \mathcal{L}_{e-m}, \quad (6.1)$$

$$\mathcal{L}_{e-m} = -e F^{\mu\nu}(x) \dot{x}_\mu x'_\nu = -e (Ew + w[vH]),$$

где  $e$  — заряд,  $v$  — скорость,  $w$  — касательный вектор (3.7). Формула (6.1) описывает энергию электрического диполя, помещенного во внешнее поле  $(E, H)$  и находится в согласии с представлением о струне как партон-антипартонной цепи. Однако в такой картине вещество струны в среднем нейтрально. Действительно, подставляя  $F^{\mu\nu} = \partial A^\nu / \partial x_\mu - \partial A^\mu / \partial x_\nu$  и интегрируя по  $\sigma$ , приводим  $\mathcal{S}_{e-m}$  к виду

$$\mathcal{S}_{e-m} = e \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [(\dot{x}A)|_{\sigma=\sigma_0} - (\dot{x}A)|_{\sigma=0}]. \quad (6.2)$$

Это действие отвечает нейтральной струне с зарядами  $\pm e$  на концах. Кроме того, можно поместить на любом из концов произвольные дополнительные заряды. Заметим, что такая картина для резонансов на основной траектории предсказывает гиромагнитное отношение, равное 1.

Магнитный момент, связанный с зарядом  $e_0$ , находящимся на конце вращающейся струны (рис. 4), равен

$$\kappa = \frac{1}{4} e_0 L_0 = \frac{e_0}{M} J, \quad (6.3)$$

где  $L_0$  — собственная длина струны.

Подобная простая модель находится в явном противоречии с тем, что нам известно об электромагнитной структуре адронов. До сих пор из-за необходимости соблюдать конформную симметрию не удалось разумным образом ввести электромагнитный (а также слабый) ток в «струнной материи», и это является одним из общепризнанных недостатков дуальных моделей. (См. в связи с этим работы Намбу<sup>75</sup> и Виллемсена<sup>106</sup>).

### б) Взаимодействие струн

Как указывалось в разделе а) гл. 3, физическая картина взаимодействия между струнами весьма проста: струны могут разрываться или склеиваться концами. Однако это наглядное представление приводит к нетривиальному математическому аппарату. Сложность теоретического описания взаимодействия связана с тем, что свободное движение имеет простой вид в нормальных координатах, а взаимодействие локализовано в  $x$ -пространстве. Кроме того, некоторые усложнения вызваны наличием условий, связанных с конформной инвариантностью.

Математическая модель разрыва струны в классической теории формулируется так. Пусть функция  $f(\sigma)$  задана на отрезке  $[A, C]$  рядом Фурье с коэффициентами  $a^m$ , а на отрезке  $[C, B]$  — рядом Фурье с коэффициентами  $b^m$ . Тогда для отрезка  $[A, B]$  коэффициенты ряда Фурье  $c^m$  линейно выражаются через  $\{a\}$  и  $\{b\}$ . Чтобы применить эту модель к струне (см., например, работу Ребби<sup>107</sup>), надо согласовать координатные системы  $(\tau, \sigma)$  на трех взаимодействующих струнах. Наиболее удобной является «конусная» калибровка (4.9). При этом параметр  $\sigma_0$  пропорционален не массе, как в «лабораторной» калибровке (3.23), а «конусному импульсу»  $P_+$ , и закон сохранения импульса приводит к сохранению длин по оси  $\sigma$ : для распада  $c \rightarrow a + b$  получим  $\sigma_0^{(c)} = \sigma_0^{(a)} + \sigma_0^{(b)}$ . Кроме того, автоматически учитываются связи (4.11), исключаяющие продольные и «временные» колебания. Однако в таком подходе снова возникает вопрос о релятивистской инвариантности. Как показал Мандельштам<sup>108</sup>, в квантовом случае описания картина непротиворечива лишь при условии (4.16).

Общий принцип построения амплитуд взаимодействия естественно сформулировать на языке фейнмановского континуального интеграла.  $S$ -матрица представляется в виде интеграла от  $\exp(i\mathcal{S}/\hbar)$ , где  $\mathcal{S}$  — классическое действие (3.2), по всем возможным двумерным поверхностям в пространстве Минковского. Топология поверхностей определяет начальные, промежуточные и конечные состояния. Например, для полюсной амплитуды (неупругого) рассеяния двух резонансов (см. рис. 3) поверхности имеют вид рис. 13. Интегрирование проводится по координатам всех точек поверхности, а также по моментам «времени», в которые происходят склейка ( $\tau_1$ ) и разрыв ( $\tau_2$ ). Чтобы пояснить этот формализм, рассмотрим обычную теорию скалярных полей  $\phi(x)$  и  $\Phi(x)$  с массами  $m$  и  $M$  и лагранжианом взаимодействия  $\lambda\phi^2\Phi$ . Простейшая полюсная амплитуда рассеяния  $\phi$ -частиц отвечает классическим траекториям вида рис. 14. Под интеграл входит лишь действие для свободных частиц, интегралы по  $x_\mu(\tau)$  легко вычисляются. При  $\tau_i \rightarrow -\infty$ ,  $\tau_f \rightarrow +\infty$  результат зависит лишь от  $\tau_2 - \tau_1$ . Интегрирование по  $\tau_1$  и  $\tau_2$  приводит к появлению пропагатора  $(P^2 - M^2)^{-1}$  (см. об этом подходе в статье<sup>83</sup>). С этой точки зре-

ния диаграммы Фейнмана определяют топологию мировых линий в  $x$ -пространстве, дающих вклад в континуальный интеграл для амплитуды рассеяния. Для струны, как и для частицы, действие имеет вид квадратичного функционала (см. (3.16) или (3.32)), что позволяет вычислить континуальный интеграл. Чтобы выполнить это вычисление, Мандельстам<sup>32</sup> перешел к переменной  $\tilde{\tau} = i\tau$  («поворот Вика») и привел задачу к интегрированию по функциям комплексной переменной  $\rho = \tilde{\tau} + i\sigma$  (аналог конформной переменной  $\tau + i\sigma$ ), заданным в полосе с разрезами (рис. 15).

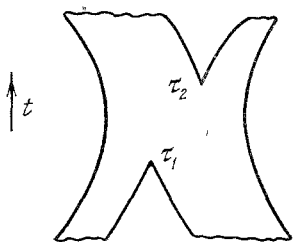


Рис. 13. Поверхность в пространстве Минковского, изображающая рассеяние двух струн.

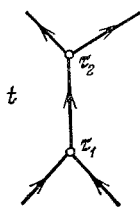


Рис. 14. Мировые линии рассеивающихся точечных частиц в полюсном приближении.

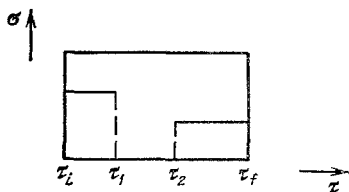


Рис. 15. Отображение поверхности рис. 13 на комплексную плоскость.

Применением преобразования Кристоффеля — Шварца эта область переводится в единичный круг и вычисление континуального интеграла сводится к задаче Неймана (см. приложение Б). Для  $N$ -частичной амплитуды интегрирование по  $\tau_1, \dots, \tau_{N-2}$  (моменты разрывов и склеек) приводит к представлению Коба и Нильсена (см. приложение А). Из-за наличия связей надо либо применять метод Фаддеева<sup>88</sup>, сохраняя явную инвариантность (как в работе Жерве и Сакиты<sup>35</sup>), либо интегрировать лишь по поперечным координатам. Второй способ проще и его удалось провести до конца<sup>32</sup>, но инвариантность результата снова требует условия (4.16).

Как и в обычной теории поля, функциональное интегрирование — не единственный способ определения  $S$ -матрицы. Взаимодействие можно описать, рассматривая эволюцию квантовой струны под действием классического поля, созданного другой струной. Этот подход был разработан Адемолло и др.<sup>29</sup> (см. также обзор Ребби<sup>8</sup>). Его недостатком является отсутствие явной дуальности. В ряде работ была построена нелокальная полевая теория для квантованных струн, также приводящая к дуальным амплитудам<sup>109–111</sup>. Независимо от вывода, процедура построения амплитуд сводится к простым правилам типа правил Фейнмана. Надо отметить, кстати, что, в отличие от электродинамики Швингера — Фейнмана, эти правила были известны еще до разработки теории струны (см., например, обзоры<sup>4, 5</sup>). Пусть нас интересует беспетлевая («борновская»)  $N$ -частичная амплитуда. Изобразим ее в виде кварковой диаграммы Харари — Рознера (типа рис. 2) и стянем (любым способом) в «древесную» диаграмму рис. 16. Вершинам испускания частиц и внутренним резонансным линиям ставятся в соответствие операторы, выраженные через нормальные переменные  $a_{\mu}^m$ ,

$$\hat{\Gamma}_{u,d}(p) = ig(\alpha')^{-1/2} : \exp[ip\hat{x}^{(u,d)}] : , \quad \hat{D} = -i\alpha'(\hat{L}_0 - \alpha_0)^{-1}, \quad (6.4)$$

где  $p_{\mu}$  — импульс испускаемой частицы,  $\alpha' = (2\pi A)^{-1}$ ,  $g$  — константа связи. Индекс  $u$  пишется для частицы, испущенной «вверх» на диаграмме

рис. 16,  $d$  — для частицы, испущенной «вниз»,  $\hat{x}_\mu^{(u)} = \hat{x}_\mu|_{(\sigma=0)}$ ,  $\hat{x}_\mu^{(d)} = \hat{x}_\mu|_{(\sigma=\sigma_0)}$ , оператор  $\hat{x}_\mu$  имеет вид (3.48), оператор  $\hat{L}_0$  определен в (4.4а). Очевидно,  $\hat{D}$  имеет полюсы при  $P^2 = M_k^2$ ,  $M_k$  — массы резонансов (2.5). Амплитуда рис. 16 имеет вид

$$V_N(p_1, \dots, p_N) = \langle 0, p_1 | \hat{\Gamma}_u(p_2) \hat{D} \hat{\Gamma}_u(p_3) \hat{D} \hat{\Gamma}_d(p_4) \dots \hat{D} \hat{\Gamma}_u(p_{N-1}) | 0, p_N \rangle. \quad (6.5)$$

Этот матричный элемент можно вычислить с помощью техники «когерентных состояний». Для построения более сложных диаграмм вводят также

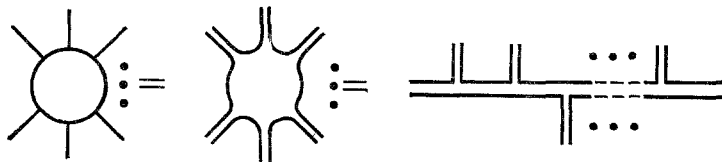


Рис. 16. Правила Фейнмана для дуальной амплитуды.

оператор испускания резонанса («трехреджеонная вершина») и оператор «перекручивания»  $\hat{T}$ , такой, что  $\hat{T} \hat{\Gamma}_u \hat{T} = \hat{\Gamma}_d$ ,  $\hat{T}^2 = 1$ . Каждая внутренняя линия может быть «перекручена», и тогда она изображается оператором  $\hat{D} \hat{T}$ .

Рассмотрены также взаимодействия спиновых струн: в работах Мандельштама<sup>33</sup> — методом континуального интеграла, в работе Каку<sup>112</sup> — с помощью нелокальной квантово-полевой теории. По-видимому, метод Мандельштама наиболее адекватен задаче. В частности, он впервые вычислил дуальные амплитуды фермион-антифермионного рассеяния в модели Рамона. В операторном подходе эту проблему не удавалось решить до конца (см. работы<sup>113, 114</sup>).

При взаимодействии открытые струны могут соединяться в замкнутые, которые изображаются трубчатыми поверхностями в пространстве

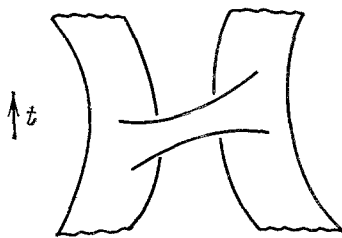


рис. 17. Поверхность, изображающая рассеяние двух резонансов с обменом полюсом Померанчука.

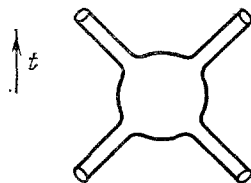


Рис. 18. Рассеяние померона на помероне — амплитуда Вирасоро.

Минковского (рис. 17) и интерпретируются как резонансы, лежащие на траектории Померанчука и ее дочерних траекториях («помероны»). Теория взаимодействия резонансов с померонами рассматривалась в работах<sup>9, 29, 115</sup>. Дуальная теория взаимодействующих померонов в низшем порядке (беспетлевое приближение; рис. 18) — это модель Шапиро — Вирасоро.

## 7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возникшая за последние годы теория взаимодействующих струн — важный этап в теоретической физике. Это первая модель релятивистских протяженных объектов, имеющая прочное основание в виде замкнутой классической теории. Наглядные представления обладают большой привлекательностью, но физический мир слишком сложен; стремясь его описать, мы вынуждены отойти от простой «механистической» картины. Первый шаг, при котором мы еще не совсем порываем с геометрией, — это введение спина. Так же можно описать и внутреннюю симметрию, например, вводя на струне антикоммутирующее поле со свойствами изовектора. Для построения наиболее интересной среди дуальных теорий, модели Бардакчи — Гальперна <sup>66</sup>, надо добавить спинорное фермиевское поле со свойствами кваркового представления  $SU(N)$ . Стоит ли после подобных усложнений сохранять название «струна», — это вопрос терминологии.

Отказавшись от пространственно-временной картины, можно изобрести новые «струноподобные» объекты. В частности, была найдена модель <sup>116</sup>, допускающая непротиворечивое квантование при любом числе измерений. Однако реализация в этой модели оператора энергии-импульса является произвольной, и это ее сильно обесценивает. Главный же недостаток подобной теории в том, что без ясной геометрической картины нет способа построить причинное взаимодействие.

С формальной точки зрения струна — это пример системы с бесконечным числом внутренних степеней свободы, в которой генераторы группы Пуанкаре (энергия, импульс, угловой момент) представляются в виде интегралов по внутренним переменным (формулы (3.14), (3.15), (3.39)). В классической теории эти наблюдаемые величины образуют алгебру Ли, правильную с геометрической точки зрения. Таким образом, струна — нетривиальный пример реализации общей программы Дирака <sup>117</sup> для построения релятивистской динамики. До сих пор никому не удалось найти удовлетворительного варианта модели. Вероятно, необходимо рассмотреть более сложную геометрию, другие внутренние пространства и новые типы полей.

В заключение перечислим еще раз необходимые элементы физики частиц, отсутствующие в современной теории струн. 1) Реалистический спектр состояний без «тахеонов» и с правильной мультиплетной структурой. 2) Непротиворечивое квантование в четырехмерном пространстве. 3) Сходящаяся «теория возмущений» по числу петель и перенормировки. 4) Модель для барионов как состояний, построенных из троек кварков (и множества пар?). 5) Электромагнитные и слабые токи.

Автор глубоко благодарен К. Г. Борескову, А. Б. Кайдалову, В. И. Огневскому, Л. Б. Окуню за интерес к статье и конструктивную критику.

## ПРИЛОЖЕНИЕ

## А. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ДУАЛЬНЫХ АМПЛУТУД

## 1. Амплитуда Венециано

В-функцию, входящую в амплитуду Венециано (2.4), можно представить в виде

$$V(s, t) = \int_0^1 x^{-\alpha(s)-1} (1-x)^{-\alpha(t)-1} dx. \quad (\text{A.1})$$

Этот интеграл имеет смысл при  $\alpha(s) < 0$ ,  $\alpha(t) < 0$ . Для аналитического продолжения в физическую область его можно переписать в виде контурного интеграла в комплексной плоскости (см., например, книгу <sup>118</sup>). Разлагая второй множитель под инте-

гралом в ряд по  $x$ , получим

$$V(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{G_n(1+\alpha(t))}{n! [n-\alpha(s)]}, \quad (\text{A.2})$$

где  $G_n(a) \equiv \Gamma(a+n)/\Gamma(a)$  — полином Похгаммера см. <sup>118</sup>, с. 67). Асимптотика при  $|\alpha(s)| \rightarrow \infty$ ,  $\arg s \neq 0$  вычисляется путем замены  $x = e^{-v}$ . Полагая  $\alpha(s) = \alpha_0 + \alpha's < 0$ ,  $|s| \rightarrow \infty$ , получим

$$\begin{aligned} V(s, t) &= \int_0^{\infty} e^{v\alpha(s)} (1-e^{-v})^{-\alpha(t)-1} dv \approx \int_0^{\infty} e^{v\alpha(s)} v^{-\alpha(t)-1} dv = \\ &= \Gamma(-\alpha(t)) (-\alpha's)^{\alpha(t)}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Таким образом,  $V(s, t)$  имеет лишь полюсные особенности (с полиномиальными вычетами) и «реджевскую» асимптотику, т. е. обладает свойством «дуальности».

Модель можно обобщить, введя под интеграл «весовую» функцию  $\rho(x)$ , не имеющую особенностей при  $0 \leq x \leq 1$ . Если представить эту функцию в виде ряда

$$\rho(x) = \sum_{m, n=0} P_{m, n}(s, t) x^m (1-x)^n, \quad (\text{A.4})$$

где  $P_{m, n}(s, t)$  — полином от переменных  $s$  и  $t$  степени  $m$  и  $n$  соответственно, то амплитуда примет вид

$$\tilde{V}(s, t) = \sum_{m, n=0} P_{m, n}(s, t) B(m-\alpha(s), n-\alpha(t)). \quad (\text{A.5})$$

Характер спектра и асимптотика при этом не меняются. Предел  $\alpha' \rightarrow 0$  (формула (2.7)) вычисляется непосредственно из (A.4), если разбить область интегрирования на две части  $[0, 1/2]$  и  $[1/2, 1]$  и разложить по параметру  $\alpha'$ .

## 2. Представление Коба — Нильсена <sup>52</sup>

Подынтегральная функция в (A.1) имеет степенные сингулярности при  $x \rightarrow 1$ ,  $\infty$  и 0, которые приводят к наличию у амплитуды полюсов по переменным  $t$ ,  $u$  и  $s$  соответственно. Произведем замену переменной

$$x = \frac{(y-y_3)(y_2-y_1)}{(y-y_2)(y_3-y_1)}, \quad (\text{A.6})$$

где  $y_3 < y_1 < y_2$  — некоторые фиксированные точки на оси  $y$ . Переменная  $x$  равна двойному отношению для четверки  $(y_1, y_2, y_3, y)$  и поэтому является инвариантом относительно проективных (дробно-линейных) преобразований <sup>\*</sup>) прямой  $y$ . Как будет показано, замена (A.6) удобна для обобщения на многочастичные амплитуды, в частности, для доказательства кроссинг-симметрии. Обозначая  $y_4 = y$ ,  $\beta = \alpha_0 - 2(\alpha_0 + \alpha'\mu^2)$  и используя равенства

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= 2\alpha' p_1 p_2 - \beta, \quad \alpha(s) + \alpha(t) + \alpha(u) = \alpha_0 - 2\beta, \\ 1-x &= \frac{(y-y_1)(y_3-y_2)}{(y-y_2)(y_3-y_1)}, \quad \frac{dx}{x(1-x)} = \frac{(y_3-y_1)dy}{(y-y_1)(y-y_3)}, \end{aligned}$$

получаем

$$V = C \int d\mu_4(y) \prod_{n>m} (y_n - y_m)^{-2\alpha'(p_m p_n)}, \quad (\text{A.7})$$

где мера интегрирования имеет вид

$$\begin{aligned} d\mu_4(y) &= \prod_{n=1}^4 (y_n - y_{n-1})^{\beta-1} [(y_3 - y_1)(y_4 - y_2)]^{\alpha_0 - \beta} dy_4, \\ C &= (y_2 - y_1)(y_3 - y_2)(y_3 - y_1), \quad y_0 \equiv y_4, \end{aligned}$$

и область интегрирования  $y_3 < y_4 < y_1$ . Интеграл (A.7) инвариантен относительно циклической перестановки индексов 1, 2, 3, 4. Интегральное представление (A.7) допу-

<sup>\*</sup>) О связи специальных функций с группой проективных преобразований прямой см. в книге Виленкина <sup>119</sup>, гл. VII.



скает естественное обобщение на произвольное число частиц  $N$ . Мера  $d\mu_N(y)$  существенно упрощается, если принять условие «самосогласованности»: внешние частицы лежат на той же траектории  $\alpha(p^2)$ , что и резонансы. В этом случае  $\alpha(\mu^2) = 0$  и  $\beta = \alpha_0$ . Эквивалентное и еще более симметричное представление получается, если перевести прямую  $-\infty < y < \infty$  в единичный круг  $z = e^{i\theta}$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$ , применив комплексное дробно-линейное преобразование

$$y_N^* = -i \frac{z-1}{z+1} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} \quad (\text{A.8})$$

(рис. 19). Отметим, что при  $\beta = \alpha_0$  мера интегрирования инвариантна относительно дробно-линейных преобразований. Итак, амплитуда  $N$ -частичного процесса рис. 16 представляется в виде

$$V_N(p_1, \dots, p_N) = C \int \prod_{m \neq n} |z_n - z_m|^{-\alpha'(p_n p_m)} d\mu_N(z), \quad (\text{A.9})$$

$$d\mu_N(z) = \prod_{n=1}^N |z_n - z_{n-1}|^{\alpha_0 - 1} \prod_{n=4}^N d\theta_n,$$

$C = |(z_1 - z_2)(z_2 - z_3)(z_3 - z_1)|$  интегрирование в пределах  $\theta_2 \leq \theta_3 \leq \dots \leq \theta_N \leq \theta_1$ . Построенная амплитуда обладает свойством «плоской дуальности», на что указывает область интегрирования, а также выражение для меры. Заметим, что с помощью дробно-линейного преобразования, оставляющего на месте единичную окружность, можно перевести точки  $(z_1, z_2, z_3)$  в любую другую тройку точек

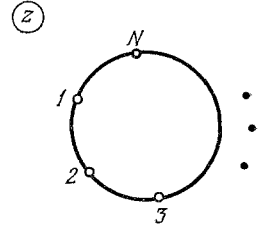


Рис. 19. Переменные Коба — Нильсена.

и амплитуда от этого не изменится (при этом существенно, что  $\sum_{n=1}^N p_n = 0$ ). Отсюда следует симметрия функции  $V_N$  относительно всех циклических перестановок ее аргументов \*).

Особенно симметричным становится интеграл (A.9) при  $\alpha_0 = 1$  (условие Вирасоро<sup>56</sup>). В этом случае мера инвариантна относительно *всех* конформных преобразований плоскости  $z$  и ее можно представить в виде

$$d\mu_N(z) = \text{const} \cdot \prod_{n=4}^N d\sigma_n, \quad (\text{A.10})$$

где  $z_n = Z(\sigma_n)$  — точки, принадлежащие замкнутой кривой  $Z$  в плоскости  $z$ , которая может быть получена из единичной окружности некоторым конформным преобразованием, а  $\sigma$  — переменная, совпадающая с длиной дуги на кривой  $Z$ . В этом случае мера не зависит также от порядка индексов, поэтому полная  $N$ -частичная амплитуда равна интегралу (A.9), где  $-\pi < \theta_n \leq \pi$  для любого  $n$ .

Исследование некоторых групповых свойств функции  $V_N$  можно найти в работах<sup>120–122</sup>.

### 3. Амплитуды Шاپиро — Вирасоро

В предыдущем разделе было дано интегральное представление амплитуды, обладающей свойством «плоской» дуальности. Шاپиро<sup>26</sup> нашел аналогичное представление для полностью дуальной амплитуды. Для  $N = 4$  и при условии  $\alpha(s) + \alpha(t) + \alpha(u) = -2$  его результат имеет вид

$$W(s, t, u) = c \int \prod_{n>m} |y_n - y_m|^{-2\alpha'(p_n p_m)} |(y_2 - y_1)(y_3 - y_2)(y_3 - y_1)|^2 d^2 y_4, \quad (\text{A.11})$$

$c = g^2/\pi$ ,  $y_n$  — точки в комплексной плоскости, интегрирование по всем  $y_4$ . Вычислим этот интеграл и покажем, что он приводит к формуле (2.10) при условии, что  $\alpha_0 = 2$ . При  $\sum p_n = 0$  интеграл (A.11) инвариантен относительно дробно-линейных преобразований и не зависит от выбора точек  $y_1, y_2, y_3$ . Положим  $y_1 = 1, y_2 = \infty, y_3 = 0$ ; тогда

$$W(s, t, u) = c \int |y|^{-2\alpha'(p_1 p_2)} |1 - y|^{-2\alpha'(p_2 p_3)} d^2 y. \quad (\text{A.12})$$

\*) При совпадающих значениях всех переменных  $(p_n p_m)$  интеграл (A.9) приводится к произведению  $\Gamma$ -функций (см. работы<sup>128, 129</sup>).

Интеграл симметричен относительно подстановок  $y \rightarrow (1 - y)$  и  $y \rightarrow y^{-1}$ , и потому  $W(s, t, u)$  — симметричная функция своих аргументов. Для вычисления интеграла используем тождество

$$\Gamma(v) a^{-v} = \int_0^{\infty} t^{v-1} e^{-at} dt. \quad (\text{A.13})$$

Представляя таким образом степени переменных  $a_0 = |y|^2$  и  $a_1 = |1 - y|^2$ , приводим интеграл (A.12) к гауссовской форме по  $y$ . Оставшийся двойной интеграл по  $(t_0, t_1)$  вычисляется путем замены  $t_0 = tz^{-1}$ ,  $t_1 = t(1 - z)^{-1}$ .

Обобщение интеграла (A.11) на случай произвольного числа частиц  $N$  так же очевидно, как в представлении Куба — Нильсена. Отображая комплексную плоскость  $y$  на сферу посредством стереографической проекции (аналогично (A.8)), можно привести (A.11) к явно дуальному виду.

Рассматривая интеграл по  $n$ -мерной сфере, Бровер и Годдар<sup>123</sup> нашли дуальные амплитуды при  $\alpha_0 = n$ , для которых (A.9) и (A.11) являются частными случаями при  $n = 1$  и 2. Применяя аналитическое продолжение этого интеграла по  $n$ , Кудрявцев<sup>124</sup> нашел интегральное представление для любого  $\alpha_0$ .

## Б. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ В ДУАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

Амплитуды взаимодействия в дуальных моделях могут быть представлены в виде континуальных интегралов. Такое представление имеет универсальный характер, так как оно позволяет в единой форме найти вклад диаграмм с любым числом квадратиных моделей, в том числе фермионных. Этот подход применялся в работах Сакиты и др.<sup>7, 136, 34, 35</sup>.

Вычислим вначале гауссовский континуальный интеграл (приложение C в работе Фейнмана<sup>125</sup>):

$$I[g] = \frac{\int D[f] \exp \left[ -\frac{1}{2} (f, Af) + i(g, f) \right]}{\int D[f] \exp \left[ -\frac{1}{2} (f, Af) \right]}, \quad (\text{B.1})$$

где  $f, g$  — векторы из некоторого гильбертова пространства  $\mathcal{H}$ ,  $A$  — эрмитов линейный оператор в  $\mathcal{H}$ ,  $D[f]$  — мера интегрирования. В нашем случае  $\mathcal{H}$  — множество квадратично интегрируемых функций,  $A$  — дифференциальный оператор. Вычисляя  $I[g]$  путем предельного перехода для многократных интегралов, получаем

$$I[g] = \exp \left[ -\frac{1}{2} (g, Bg) \right], \quad B = A^{-1}. \quad (\text{B.2})$$

Пусть  $f$  — функции, заданные на области  $D$  в плоскости  $(\xi, \eta)$  с граничной кривой  $\Gamma$ ,  $g$  — функция на  $\Gamma$ , причем

$$\begin{aligned} (f, Af) &= - \int_D d\xi d\eta \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right] = \\ &= \int_D f \Delta f d\xi d\eta - \int_{\Gamma} f \frac{\partial f}{\partial n} d\gamma, \quad (g, f) = \int_{\Gamma} g(\gamma) f(\gamma) d\gamma, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial \xi^2 + \partial^2/\partial \eta^2$ ,  $\partial/\partial n$  — нормальная производная,  $\gamma$  — длина дуги на кривой  $\Gamma$ . Ядро оператора, обратного  $A$ , удовлетворяет уравнениям ( $\xi_1 = \xi$ ,  $\xi_2 = \eta$ )

$$\Delta_{\xi} B(\xi, \xi') = \delta^{(2)}(\xi, \xi'), \quad \frac{\partial B}{\partial n} \Big|_{\xi, \xi' \rightarrow \Gamma} = -\delta(\gamma - \gamma'). \quad (\text{B.4})$$

Таким образом,  $B(\xi, \xi')$  — функция Грина задачи Неймана для уравнения Лапласа в области  $D$  (см. книгу<sup>126</sup>, гл. 6, 7).

Если  $D$  — единичный круг, то

$$B(\xi, \xi') = -\frac{1}{2\pi} \ln \left( |z - z'| \left| z - \frac{1}{z'^*} \right| \right), \quad (\text{B.5})$$

где  $z = \xi + i\eta$  — комплексная координата на плоскости. На окружности  $|z| = 1$  имеем  $1/z = z^*$ , поэтому

$$(g, Bg) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\gamma_1) g(\gamma_2) \ln |e^{i\gamma_1} - e^{i\gamma_2}| d\gamma_1 d\gamma_2. \quad (\text{B.6})$$

Считая функции  $f$  и  $g$  четырехмерными векторами и полагая

$$g = g^\mu(\gamma) = \sqrt{2\pi\alpha'} \sum_{n=1}^N p_n^\mu \delta(\gamma - \theta_n), \quad (\text{Б.7})$$

получим представление (Б.4) для подынтегральной функции в (А.9). (При этом следует еще исключить члены типа собственной энергии  $\sim p_n^2 [\delta(\gamma - \theta_n)]^2$ ; см. подробнее в работе <sup>7</sup>.)

Квантовая теория взаимодействия струн естественно приводит к континуальному интегралу (см. гл. 6), причем  $f^\mu = x^\mu$  — координата точки струны. Полоса с разрезами (см. рис. 15) превращается в полушлюсность путем подстановки

$$\rho \equiv \tilde{\tau} + i\sigma = \sum_{n=1}^N \lambda_n \ln(y - y_n), \quad \sum \lambda_n = 0, \quad (\text{Б.8})$$

где  $\lambda_n = P_n^{(n)}$ , длины струн  $\sim |\lambda_n|$ . Полушлюсность  $\text{Re } y \geq 0$  переводится затем в единичный круг преобразованием (А.8). Многопетлевые диаграммы описываются представлением (Б.1) — (Б.3) с многосвязными областями  $D$ . Для введения фермионных степеней свободы следует в «лагранжиан» (Б.3) добавить двумерное фермионное поле (см., например (В.9)). К интегралу (Б.4) можно привести также вычисление «сетевых» диаграмм (рис. 4 (из работ <sup>13b, 19</sup>)). Для этого надо представить пропагаторы при  $p^2 \ll m^2$  в виде  $(p^2 - m^2)^{-1} \approx -m^2 [1 + (p^2/m^2)] \approx -m^2 \exp(p^2/m^2)$ . В пределе бесконечного числа контуров приходим к гауссовскому континуальному интегралу.

## В. ДВУМЕРНАЯ КОНФОРМНАЯ ГРУППА И СУПЕРГРУППА

Конформной группой (КГ) называется множество всех непрерывных преобразований пространства, при которых интервал между двумя бесконечно близкими точками умножается на положительную функцию (обсуждение см., например, в работе Розена <sup>127</sup>). При этом сохраняются углы, образованные парами линий, имеющих общую точку. Для  $d$ -мерного пространства элементы КГ зависят от  $(d+1)(d+2)/2$  параметров. При  $d=2$  КГ — бесконечномерная, она изоморфна прямому произведению  $\Gamma \times G$ , где  $G$  — группа всех непрерывных преобразований одной переменной.

Рассмотрим вначале структуру группы  $G$ . Пусть  $\xi$  — координата на прямой,  $-\infty < \xi < \infty$ ,  $\varphi(\xi)$  — бесконечно дифференцируемая функция. Замену переменной

$$\xi \rightarrow \tilde{\xi} = g(\xi), \quad (\text{В.1})$$

где  $g(\xi)$  — монотонная гладкая функция, можно представить в операторной форме:

$$\varphi(\xi) \rightarrow \tilde{\varphi}(\xi) \equiv \varphi^*(\tilde{\xi}) = \hat{T} \varphi(\xi), \quad \hat{T} = \exp \left[ f(\xi) \frac{d}{d\xi} \right], \quad (\text{В.2})$$

где функции  $f(\xi)$  и  $g(\xi)$  связаны уравнением

$$\frac{f(g)}{f(\xi)} = \frac{dg}{d\xi}. \quad (\text{В.3})$$

Разложение функции  $f(\xi)$  в ряд Лорана дает систему генераторов группы  $G$ :

$$f(\xi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \xi^k, \quad \hat{T} = \exp \left( - \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{m+1} \hat{L}_m \right), \quad (\text{В.4})$$

$$\hat{L}_m = -\xi^{m+1} d/d\xi, \quad [\hat{L}_m, \hat{L}_n] = (m-n) \hat{L}_{m+n}.$$

Таким образом, алгебра Ли группы  $G$  изоморфна алгебре Вирасоро (ср. (3.476)). Операторы  $\hat{L}_{+1}$ ,  $\hat{L}_0$ ,  $\hat{L}_{-1}$  образуют замкнутую подалгебру, изоморфную алгебре Ли группы  $SU(1,1) \sim SL(2, R)$  (определения см. в книге Виленкина <sup>119</sup>):

$$[\hat{L}_{+1}, \hat{L}_{-1}] = 2\hat{L}_0, \quad [\hat{L}_{\pm 1}, \hat{L}_0] = \pm \hat{L}_{\pm 1}. \quad (\text{В.5})$$

Эта тройка операторов порождает группу проективных (дробно-линейных) преобразований прямой. В этом случае функция  $f(\xi)$  — квадратный трехчлен, и подстановку (В.1) можно представить в виде

$$\frac{\tilde{\xi} - c_1}{\tilde{\xi} - c_2} = \exp[\alpha(c_1 - c_2)] \frac{\xi - c_1}{\xi - c_2}, \quad (\text{В.6})$$

если  $f(\xi) = \alpha(\xi - c_1)(\xi - c_2)$ .

Рассмотрим теперь КГ для псевдоевклидовой плоскости с координатами  $(\tau, \sigma)$ . Введя переменные  $\xi_{\pm} = \tau \pm \sigma$ , элемент длины на плоскости можно представить в виде  $ds^2 \equiv d\tau^2 - d\sigma^2 = d\xi_+ d\xi_-$ . Независимые подстановки вида (В.1) для переменных  $\xi_{\pm}$  приводят к конформным преобразованиям плоскости. При этом окрестность каждой точки плоскости претерпевает растяжение с масштабным множителем  $\mu$  и гиперболический поворот на угол  $\omega$

$$\mu = \sqrt{g'_+ g'_-}, \quad \omega = \frac{1}{2} \ln \frac{g'_+}{g'_-}, \quad (\text{В.7})$$

где  $g'_{\pm} = d\tilde{\xi}_{\pm}/d\xi_{\pm}$ . Следуя работе Жерва и Сакиты<sup>7</sup>, неприводимое конформное поле будем задавать парой индексов  $\kappa, j$  и запишем закон преобразования в виде

$$\varphi_{\kappa, j}(\xi) \rightarrow \tilde{\varphi}_{\kappa, j}(\tilde{\xi}) = \mu^{\kappa} e^{-j\omega} \varphi_{\kappa, j}(\tilde{\xi}) \equiv (g'_+)^{(\kappa-j)/2} (g'_-)^{(\kappa+j)/2} \varphi_{\kappa, j}(\tilde{\xi}). \quad (\text{В.8})$$

Пара полей с  $\kappa = -1/2, j = \pm 1/2$  называется конформным спинором, пара полей с  $\kappa = -1, j = \pm 1$  — конформный вектор. В частности,  $\partial_{\pm} \varphi_{0,0}$  — конформный вектор (здесь  $\partial_{\pm} \equiv \partial/\partial \xi_{\pm}$ ).

Двумерная теория поля с лагранжианом

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int d\tau d\sigma [\partial_+ \varphi \partial_- \varphi + i\psi_+ \partial_- \psi_+ + i\psi_- \partial_+ \psi_-], \quad (\text{В.9})$$

где  $\varphi$  — скалярное поле,  $\psi_{\pm}$  — конформный антикоммутирующий спинор, — инвариантна относительно КГ. Кроме того, эта теория обладает дополнительной симметрией. Пусть  $\eta_{\pm} = \eta_{\pm}(\xi_{\pm})$  — антикоммутирующее поле с  $\kappa = \mp 1/2, j = \mp 1/2$  (сопряженный конформный спинор,  $\psi_+ \eta_+ + \psi_- \eta_-$  — инвариант КГ). Лагранжиан (В.9) не меняется при преобразованиях

$$\delta \psi_{\pm} = \partial_{\pm} \varphi \eta_{\pm}, \quad \delta \varphi = i(\psi_+ \eta_+ + \psi_- \eta_-). \quad (\text{В.10})$$

Это простейший пример суперсимметрии (подробнее см. в обзоре<sup>99</sup>). Конформно-инвариантные двумерные теории рассматривались в работе Итабаси<sup>130</sup>.

Конформные преобразования, оставляющие неподвижной прямую на плоскости, образуют подгруппу  $\Gamma \subset G \times G$  (например, для прямой  $\sigma = 0$ ,  $g_+(\xi) \equiv g_-(\xi)$ ). Требование неподвижности пары параллельных прямых приводит к сужению на подгруппу, для элементов которой функция  $g(\xi)$  — периодическая. Релятивистская струна со спином — несколько усложненный наличием дополнительного векторного индекса пример системы с лагранжианом (В.9), которая инвариантна относительно преобразований, оставляющих неподвижными прямые  $\sigma = 0$  и  $\sigma = \sigma_0$ .

## Г. КОММЕНТАРИЙ К СПИСКУ ЛИТЕРАТУРЫ

Объем настоящей статьи не позволил коснуться ряда новых путей развития основной темы. К тому же сейчас не ясно, что из полученных теоретических результатов будет существенно для понимания физики частиц, а что окажется лишь формальными упражнениями. Чтобы облегчить читателям, предполагающим активно работать в этом направлении, поиски статей по интересующей их теме, к обзору приложен дополнительный список литературы. В этом списке указаны также некоторые интересные статьи по основной теме обзора, на которые не было ссылок в основном тексте. Чтобы помочь ориентироваться в обоих списках, ниже приводится тематический указатель к литературе:

- 1) Обзоры: 1–12, 42, 44, 47, 206, 239, 267, 276, 293, 295.
- 2) Классическая и квантовая теория релятивистской струны: 8–10, 17–24, 73–80, 89–95, 201, 208, 227, 228, 279, 280, 283, 286.
- 3) Замкнутая струна и модель Вирасоро — Шапиро: 25, 26, 29, 31, 65, 68, 115, 249, 252, 253, 258, 271, 282, 295.
- 4) Струна со спином и суперсимметрия: 27, 28, 33, 68–71, 96–100, 112, 207, 221, 226, 253, 256, 258, 259, 273, 283, 295, 296, 298.
- 5) Внутренние симметрии: 6, 66, 67, 204, 205, 207, 218, 231, 256, 268, 273, 274.
- 6) Конкретные модели барионов и мезонов: 17, 92, 212–214, 220, 222, 282, 285, 237, 244, 246–248, 251, 254, 264, 265, 279.
- 7) Взаимодействие струн. Струны во внешних полях: 9, 29, 32, 33, 35, 75, 94, 106–115, 201, 209, 213, 217, 243, 245, 249, 252, 258, 263, 265, 270, 275, 278, 284, 285, 295.
- 8) Партоны, кварки и «сетевые» диаграммы Фейнмана: 13–19, 30, 213, 250, 266, 268, 273, 297.
- 9) Функциональное интегрирование в дуальных моделях: 7, 9, 32, 33–35, 240, 262, 263, 266, 285.

- 10) Операторная алгебра: 5, 6, 25, 27, 28, 54, 56, 69-71, 113, 114, 210, 214, 221, 223, 242, 257, 287.
- 11) Различные варианты дуальных моделей: 11, 47-53, 92, 123, 124, 203, 206, 210, 236, 238, 240, 257, 264, 270, 274, 275, 297.
- 12) Интегральные представления дуальных амплитуд: 26, 51, 52, 62-65, 120-124, 128, 129, 236, 261, 262.
- 13) Высшие порядки («петлевые диаграммы»): 4, 5, 57-59, 204, 209, 269, 277.
- 14) Спонтанное нарушение симметрии: 43-46, 202, 224, 250, 278.
- 15) Модификации теории струны: распределенная масса, кварки на концах и пр.: 116, 208, 212, 215, 218, 219, 225, 229-232, 244, 246, 251, 255, 259, 265, 278, 280, 284, 288, 291, 292.
- 16) Полевые модели образования струн: калибровочные поля, вихри, монополи и пр.: 37-42, 211, 216-219, 224, 233, 234, 239, 241, 248, 255, 260, 268, 281, 282, 286, 289-292, 294.
- 17) Переход к пределу  $\alpha' \rightarrow 0$  и связь с локальными теориями: 59-61, 271, 272, 294.

Институт теоретической и экспериментальной  
физики, Москва

### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. G. Veneziano, Phys. Rept. C9, 201 (1974).
2. А. Б. Кайдалов, УФН 105, 97 (1971).
3. а) Е. М. Левин, УФН 111, 29 (1973).  
б) Л. Л. Енковский, В. П. Шелест, *ibid.*, с. 87.
4. D. Sivers, J. Yellin, Rev. Mod. Phys. 43, 125 (1971).
5. V. Alessandrini, D. Amati, M. Le Bellac, D. Olive, Phys. Rept. C1, 269 (1971).
6. J. H. Schwarz, *ibid.* C8, 269 (1973).
7. J. L. Gervais, B. Sakita, Phys. Rev. D4, 2291 (1971).
8. C. Rebbi, Phys. Rept. C12, 1 (1974).
9. S. Mandelstam, *ibid.* C13, 260.
10. J. Scherk, Rev. Mod. Phys. 47, 123 (1975).
11. R. J. N. Phillips, D. P. Roy, Rept. Progr. Phys. 37, 1035 (1974).
12. D. Olive, in: Proc. of the 17th Intern. Conference on High Energy Physics (London, July 1974), Ed. J. S. Smith, Rutherford Lab., Chilton, Didcot, UK, p. I-269.
13. а) Н. В. Nielsen, P. Olesen, Phys. Lett. B32, 203 (1970).  
б) B. Sakita, M. A. Virasoro, Phys. Rev. Lett. 24, 1146 (1970).
14. Н. В. Nielsen, L. Susskind, A. B. Kraemmer, Nucl. Phys. B28, 34; B31, 602 (1971).  
P. Olesen, *ibid.* B29, 77.
15. Р. Фейнман, УФН 119, 689 (1976).
16. H. Harari, Phys. Rev. Lett. 22, 562 (1969).  
J. Rosner, *ibid.*, p. 689.
17. Y. Nambu, in: Proc. of Intern. Conference on Symmetries and Quark Models (Detroit, 1969), N.Y., Gordon and Breach, 1970, p. 269.
18. L. Susskind, Phys. Rev. D1, 1182 (1970); Nuovo Cimento A69, 457 (1970).
19. Н. В. Nielsen, Paper submitted to the 15th Conference on High Energy Physics, Kiev, 1970.
20. Y. Nambu, Lecture for the Copenhagen Symposium, 1970.
21. T. Takabayashi, Progr. Theor. Phys. 43, 1117 (1970); 44, 1429; 46, 1528 (1971).
22. O. Hara, *ibid.*, p. 1549.
23. T. Goto, *ibid.*, p. 1560.
24. P. Goddard, J. Goldstone, C. Rebbi, C. B. Thorn, Nucl. Phys. B56, 109 (1973).
25. M. A. Virasoro, Phys. Rev. 177, 2309 (1969).
26. J. A. Shapiro, Phys. Lett. B33, 361 (1970).
27. A. Neveu, J. H. Schwarz, Nucl. Phys. B31, 86 (1971).
28. P. Ramond, Phys. Rev. D3, 2415 (1971).
29. M. Ademollo, A. D'Adda, R. D'Auria, E. Napolitano, S. Sciutto, P. Di Vecchia, F. Gliozzi, R. Musto, F. Nicodemi, Nuovo Cimento A21, 77 (1974).
30. Y. Aharonov, A. Casher, L. Susskind, Phys. Lett. B35, 512 (1971); Phys. Rev. D5, 988 (1971).
31. Y. Iwasaki, K. Kikkawa, *ibid.* D8, 440 (1973).
32. S. Mandelstam, Nucl. Phys. B64, 205 (1973).
33. S. Mandelstam, Phys. Lett. B46, 447 (1973); Nucl. Phys. B69, 77 (1973).
34. C. S. Hsue, B. Sakita, M. A. Virasoro, Phys. Rev. D2, 2857 (1970).
35. J.-L. Gervais, B. Sakita, Phys. Rev. Lett. 30, 716 (1973).
36. Ф. Крауфорд, Волны, М., «Наука», 1974, с. 24.
37. Н. В. Nielsen, P. Olesen, Nucl. Phys. B61, 45 (1973).

38. Y. Nambu, Quarks, Strings and Gauge Fields. Preprint EFI—74/03, Chicago, 1974; Phys. Rev. **D10**, 4262 (1974).
39. P. Olesen, H. C. Tze, Phys. Lett. **B50**, 482 (1974).
40. D. E. L. Pottinger, R. J. Rivers, Nuovo Cimento **A26**, 16 (1975).
41. Z. F. Ezawa, H. C. Tze, Nucl. Phys. **B100**, 1 (1975).
42. И. Ю. Кобзарев, в сб. Элементарные частицы (III школа ИТЭФ), М., Атомиздат, 1975, с. 28.
43. Д. В. Волков, А. А. Желтухин, А. И. Пашнев, ЯФ **18**, 902 (1973); **20**, 488 (1974).
44. Д. В. Волков, Кварки как следствие дуальности, Дубна, ОИЯИ, P2-8765, 1975.
45. K. Bardakci, Nucl. Phys. **B68**, 331; **B70**, 397 (1974).
46. K. Bardakci, M. B. Halpern, Phys. Rev. **D10**, 4230 (1974); Nucl. Phys. **B96**, 285 (1975).
47. A. I. Bugrij, G. Cohen-Tannoudji, L. L. Jenkovszky, N. N. Kobylinsky, Fortschr. Phys. **21**, 427 (1973).
48. Г. С. Ирошников, ЯФ **23**, 875; **25**, 177 (1977).
49. G. Veneziano, Nuovo Cimento **A57**, 190 (1968).
50. D. D. Coon, Phys. Lett. **B29**, 669 (1969).
51. C. Goebel, B. Sakita, Phys. Rev. Lett. **22**, 257 (1969).
52. Z. Koba, H. B. Nielsen, Zs. Phys. **229**, 243 (1969); Nucl. Phys. **B12**, 517 (1969).
53. S. Fubini, G. Veneziano, Nuovo Cimento **A64**, 811 (1969).
54. S. Fubini, D. Gordon, G. Veneziano, Phys. Lett. **B29**, 679 (1969).
55. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, т. 3, М., «Наука», 1967, с. 200.
56. M. A. Virasoro, Phys. Rev. **D1**, 2933 (1970).
57. K. Kikkawa, B. Sakita, M. A. Virasoro, ibid. **184**, 1701 (1969).
58. K. Kikkawa, S. Klein, B. Sakita, M. A. Virasoro, ibid. **D1**, 3258 (1970).
59. J. Scherk, Nucl. Phys. **B31**, 222 (1971).
60. A. Neveu, J. Scherk, ibid. **B36**, 155 (1972).
61. J.-L. Gervais, A. Neveu, ibid. **B46**, 381.
62. T. Yoneya, Progr. Theor. Phys. **51**, 1907 (1974).
63. D. B. Fairlie, H. B. Nielsen, Nucl. Phys. **B20**, 637 (1970).
64. C. Lovelace, Phys. Lett. **B32**, 703 (1970); M. Kaku, M. A. Virasoro, M. Yoshimura, Nucl. Phys. **B33**, 109 (1971).
65. D. J. Gross, A. Neveu, J. Scherk, J. H. Schwarz, Phys. Rev. **D2**, 697 (1970).
66. C. Lovelace, Phys. Lett. **B34**, 500 (1971).
67. K. Bardakci, M. B. Halpern, Phys. Rev. **D3**, 2493 (1971).
68. R. C. Brower, Phys. Lett. **B34**, 143 (1971).
69. L. Clavelli, Phys. Rev. **D3**, 3166 (1971).
70. J. H. Schwarz, Nucl. Phys. **B46**, 61 (1972).
71. M. B. Halpern, Phys. Rev. **D4**, 3082 (1971).
72. K. Bardakci, Nucl. Phys. **B33**, 464 (1971).
73. M. B. Halpern, C. B. Thorn, Phys. Lett. **B35**, 441 (1971).
74. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, М., «Наука», 1973, с. 40.
75. P. A. M. Dirac, Phys. Rev. **74**, 817 (1948).
76. Б. М. Барбашов, Н. А. Черников, ЖЭТФ **50**, 1296; **51**, 658 (1966); Comm. Math. Phys. **3**, 313 (1966).
77. Б. М. Барбашов, ЖЭТФ **54**, 180 (1968).
78. Y. Nambu, Phys. Rev. **D4**, 1193 (1971).
79. L. N. Chang, J. Mansouri, ibid. **D5**, 2535 (1972).
80. J. Mansouri, Y. Nambu, Phys. Lett. **B39**, 375 (1972).
81. G. Konisi, Progr. Theor. Phys. **48**, 2008 (1972).
82. Б. М. Барбашов, Н. А. Черников, Препринт ОИЯИ P-2-7852, Дубна, 1974.
83. J. Dethlefsen, H. B. Nielsen, H. C. Tze, Phys. Lett. **B48**, 48 (1974).
84. П. Дирак, Лекции по квантовой механике, М., «Мир», 1968.
85. R. P. Feynman, Phys. Rev. **80**, 440 (1950).
86. R. Casalbuoni, J. Gomis, G. Longhi, Nuovo Cimento **A24**, 249 (1974).
87. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика, М., «Наука», 1973.
88. А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий, Квантовая электродинамика, М., Физматгиз, 1969.
89. D. C. Mattis, E. H. Lieb, J. Math. Phys. **6**, 304 (1965).
90. С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов, М., «Мир», 1970, с. 239.
91. Л. Д. Фаддеев, ТМФ **1**, 3 (1969).

89. A. J. Hanson, T. Regge, C. Teitelboim, *Constrained Hamiltonian Systems*, Preprint, Princeton, 1974.
90. A. Patrascioiu, *Lett. Nuovo Cimento* **10**, 676 (1974); *Nucl. Phys.* **B81**, 525 (1974).
91. F. Rohrllich, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 842 (1975); *Nucl. Phys.* **B112**, 177 (1976).
92. P. H. Frampton, *Phys. Rev.* **D12**, 538 (1975).
93. R. Marnelius, *Nucl. Phys.* **B104**, 477 (1976).
94. P. Goddard, A. J. Hanson, G. Ponzano, *ibid.* **B89**, 76 (1975).
95. L. Brink, H. B. Nielsen, *Phys. Lett.* **B45**, 332 (1973).
96. J.-L. Gervais, B. Sakita, *Nucl. Phys.* **B34**, 632 (1971).
97. Ю. А. Гольфанд, Е. П. Лихтман, *Письма ЖЭТФ* **13**, 452 (1971).
98. Д. В. Волков, В. П. Акулов, *ibid.* **16**, 621 (1972).
99. В. И. Огневский, Л. Мезинческу, *УФН* **117**, 637 (1975).
100. Ф. А. Березин, М. С. Маринов, *Письма ЖЭТФ* **21**, 678 (1975); *Препринт ИТЭФ-43*, Москва, 1976; *Ann. Phys. (N.Y.)* (в печати).
101. J. Schwinger, *Phil. Mag.* **44**, 1171 (1953).
102. J. L. Martin, *Proc. Roy. Soc.* **A251**, 536 (1959).
103. Ф. А. Березин, *Метод вторичного квантования*, М., «Наука», 1965.
104. П. А. М. Дирак, *Принципы квантовой механики*, М., «Наука», 1960.
105. Г. Бете, *Квантовая механика*, М., «Мир», 1965, с. 255.
106. J. Willemsen, *Phys. Rev.* **D8**, 4457 (1973).
107. C. Rebbi, *Nuovo Cimento* **A26**, 105 (1975).
108. S. Mandelstam, *Nucl. Phys.* **B83**, 413 (1975).
109. M. Kaku, K. Kikkawa, *Phys. Rev.* **D10**, 1110, 1376 (1974).
110. E. Cremmer, J.-L. Gervais, *Nucl. Phys.* **B76**, 209 (1974); **B90**, 410 (1975).
111. P. Ramond, *Phys. Rev.* **D9**, 3427 (1974).
112. M. Kaku, *ibid.* **D10**, 3943.
113. C. B. Thorn, *ibid.* **D4**, 1112 (1971).
114. D. Olive, J. Scherk, *Nucl. Phys.* **B64**, 334 (1973).
115. C. Marshall, P. Ramond, *ibid.* **B85**, 375 (1975).
116. C. E. Carlson, L. N. Chang, F. Mansouri, J. Willemsen, *Phys. Lett.* **B49**, 377 (1974).
117. P. A. M. Dirac, *Rev. Mod. Phys.* **21**, 392 (1949).
118. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции*, т. 1, М., «Наука», 1973.
119. Н. Я. Виленькин, *Специальные функции и теория представлений групп*, М., «Наука», 1965.
120. A. C. T. Wu, *J. Math. Phys.* **12**, 2035, 2037 (1971).
121. A. J. Hanson, *Phys. Rev.* **D5**, 1948 (1972).
122. T. S. Santhanam, *J. Math. Phys.* **13**, 1823 (1972).
123. R. C. Brower, P. Goddard, *Lett. Nuovo Cimento* **1**, 1075 (1971).
124. В. А. Кудрявцев, *ЯФ* **23**, 207 (1976).
125. R. P. Feynman, *Phys. Rev.* **84**, 108 (1951).
126. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. 1, М., ИЛ, 1958.
127. G. Rosen, *Amer. J. Phys.* **40**, 1023 (1972).
128. J. Gunion, *J. Math. Phys.* **3**, 752 (1962) (имеется перевод в книге: Ф. Дайсон, *Статистическая теория энергетических уровней сложных систем*, М., ИЛ, 1963).
129. K. G. Wilson, *ibid.*, p. 1040.
130. K. Itabashi, *Progr. Theor. Phys.* **55**, 1981 (1976).

## ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

201. Н. В. Борисов, М. В. Иоффе, М. И. Эйдез, *ЯФ* **21**, 655 (1975).
202. Д. В. Волков, А. А. Желтухин, А. И. Пашнев, *Письма ЖЭТФ* **21**, 454 (1975); *ЯФ* **22**, 1225 (1975).
203. С. М. Герасюта, В. А. Кудрявцев, *Письма ЖЭТФ* **21**, 393 (1975); *ЯФ* **23**, 1080 (1976).
204. М. В. Локтионов, М. И. Нестеров, *ЯФ* **17**, 150 (1973).
205. С. Н. Манида, *ЯФ* **22**, 833 (1975).
206. В. П. Шелест, Г. М. Зиновьев, В. А. Миранский, *Модели сильно-взаимодействующих частиц*, т. 2. Дуальные модели, М., Атомиздат, 1976.
207. M. Ademollo, L. Brink, A. D'Adda et al., *Phys. Lett.* **B62**, 105 (1976).
208. F. Ardalan, F. Mansouri, *Phys. Rev.* **D9**, 3341 (1974).
209. H. Arfaei, *Nucl. Phys.* **B85**, 535 (1975).
210. M. Arik, D. D. Coon, Y. M. Lam, *J. Math. Phys.* **16**, 1776 (1975).
211. M. Arik, K. Tanaka, *Phys. Rev.* **D11**, 2803 (1975).
212. X. Artru, *Nucl. Phys.* **B85**, 442 (1975).
213. X. Artru, S. B. Ljung, *ibid.* **B103**, 123 (1976).

214. G. J. M. Austen, C. Dullemond, P. M. Vervoort, *Phys. Rev.* **D11**, 353 (1975).
215. W. A. Bardeen, I. Bars, A. J. Hanson, [R. D. Peccei, *ibid.* **D13**, 2364 (1976).
216. W. A. Bardeen, M. S. Chanowitz, S. D. Drell, M. Weinstein, T. M. Yan, *ibid.* **D11**, 1094 (1975).
217. I. Bars, *Phys. Rev. Lett.* **36**, 1521 (1976); *Nucl. Phys.* **B111**, 413 (1976).
218. I. Bars, A. J. Hanson, *Phys. Rev.* **D13**, 1741 (1976).
219. A. O. Barut, G. L. Bornzin, *Nucl. Phys.* **B81**, 477 (1974).
220. L. Brink, H. B. Nielsen, *ibid.* **B89**, 118 (1975).
221. L. Brink, J.-O. Winnberg, *ibid.* **B103**, 445 (1976).
222. R. C. Brower, J. R. Primack, *Phys. Rev.* **D12**, 237 (1975).
223. D. Bruce, E. Corrigan, D. Olive, *Nucl. Phys.* **B95**, 427 (1975).
224. R. F. Cahalan, P. H. Frampton, *Phys. Lett.* **B50**, 475 (1974).
225. C. E. Carlson, L. N. Chang, F. Mansouri, J. F. Willemsen, *Phys. Rev.* **D10**, 4218 (1974).
226. L. N. Chang, K. Macrae, F. Mansouri, *Phys. Lett.* **B57**, 59 (1975); *Phys. Rev.* **D13**, 235 (1976).
227. Y. Chikashige, M. Hosoda, S. Saito, *Progr. Theor. Phys.* **53**, 1499 (1975).
228. Y. Chikashige, K. Kimamura, *ibid.* **54**, 251.
229. A. Chodos, C. B. Thorn, *Nucl. Phys.* **B72**, 509 (1974).
230. P. A. Collins, J. E. L. Hopkinson, R. W. Tucker *ibid.* **B100**, 157 (1975); **B103**, 67 (1976).
231. E. Cremmer, J. Scherk, *ibid.*, p. 399.
232. T. Eguchi, *Phys. Lett.* **B59**, 457 (1975).
233. T. Eguchi, H. Sugawara, *Phys. Rev.* **D10**, 4257 (1974).
234. D. Forster, *Nucl. Phys.* **B81**, 84 (1974).
235. P. H. Frampton, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 840 (1975).
236. P. H. Frampton, *Phys. Rev.* **D11**, 953 (1975).
237. P. H. Frampton, *ibid.* **D12**, 2164.
238. T. Gabbiani, *Nuovo Cimento* **A24**, 449 (1974).
239. Extended Systems in Field Theory, Ed. J.-L. Gervais, A. Neveu, *Phys. Rept.* **C23**, No. 3 (1976).
240. J.-L. Gervais, B. Sakita, *Nucl. Phys.* **B34**, 477 (1971).
241. J.-L. Gervais, B. Sakita, *ibid.* **B91**, 301 (1975).
242. P. Goddard, R. Horsley, *ibid.* **B111**, 272 (1976).
243. M. B. Green, *ibid.* **B103**, 333.
244. O. Hara, *Progr. Theory. Phys.* **53**, 849 (1975).
245. J. F. L. Hopkinson, R. W. Tucker, P. A. Collins, *Phys. Rev.* **D12**, 1653 (1975).
246. M. Imachi, S. Otsuki, F. Toyoda, *Progr. Theor. Phys.* **55**, 551 (1976).
247. S. Ishida, M. Oda, *ibid.* **54**, 1221 (1975).
248. K. Johnson, C. B. Thorn, *Phys. Rev.* **D13**, 1934 (1976).
249. M. Kalb, *Nuovo Cimento* **A29**, 364 (1975).
250. T. Kanki, *Progr. Theor. Phys.* **53**, 247 (1975).
251. T. Kanki, *Lett. Nuovo Cimento* **15**, 463 (1976).
252. S. Kawati, *Progr. Theor. Phys.* **51**, 1921 (1974).
253. S. Kawati, G. Konisi, *ibid.*, p. 1131; **53**, 1487 (1975).
254. K. Kikkawa, T. Kotani, *ibid.* **54**, 836.
255. J. Kogut, L. Susskind, *Phys. Rev.* **D11**, 395 (1975).
256. G. Konisi, T. Saito, *Progr. Theor. Phys.* **52**, 1652 (1974).
257. G. Konisi, T. Saito, *ibid.*, p. 1902.
258. G. Konisi, T. Saito, *ibid.* **55**, 280 (1976).
259. A. B. Kraemmer, H. B. Nielsen, *Nucl. Phys.* **B98**, 29 (1975).
260. S. Mandelstam, *Phys. Lett.* **B53**, 476 (1975).
261. K. Mano, *J. Math. Phys.* **13**, 1136 (1972).
262. M. Minami, *Progr. Theor. Phys.* **52**, 1031 (1974); **53**, 237 (1975).
263. M. Minami, *ibid.* **52**, 1890 (1974).
264. W. Nahm, *Nucl. Phys.* **B81**, 164 (1974).
265. S. Naka, M. Kenmoku, *Progr. Theor. Phys.* **55**, 844 (1976).
266. H. B. Nielsen, *Phys. Lett.* **B35**, 515 (1971).
267. H. B. Nielsen, Dual Strings. Preprint NBI-HE-18, Copenhagen, The N. Bohr Institute, 1973.
268. S. Nussinov, *Phys. Rev. Lett.* **34**, 1286 (1975).
269. R. Roth, *Phys. Rev.* **D13**, 1614 (1976).
270. S. Saito, *Nucl. Phys.* **B94**, 344 (1975).
271. J. Scherk, J. H. Schwartz, *Phys. Lett.* **B52**, 347 (1974).
272. J. Scherk, J. H. Schwartz, *Nucl. Phys.* **B81**, 118 (1974).



- 273. J. Scherk, J. H. Schwartz, Phys. Lett. **B57**, 463 (1975).
- 274. J. H. Schwartz, Nucl. Phys. **B68**, 221 (1974).
- 275. J. H. Schwartz, C. C. Wu, *ibid.* **B72**, 397.
- 276. J. H. Schwartz, Sci. Amer. **232** (2), 61 (1975).
- 277. J. A. Shapiro, Phys. Rev. **D11**, 2937 (1975).
- 278. W. Siegel, Nucl. Phys. **B109**, 244 (1976).
- 279. A. Strumia, G. Venturi, Lett. Nuovo Cimento **13**, 337 (1975).
- 280. A. Strumia, *ibid.* **14**, 547.
- 281. K. Takahashi, *ibid.*, p. 139.
- 282. K. Takahashi, *ibid.*, p. 341.
- 283. T. Takabayashi, Progr. Theor. Phys. **52**, 1910 (1974).
- 284. C. B. Thorn, M. V. K. Uhlenla, Phys. Rev. **D11**, 3531 (1975).
- 285. J. L. Torres-Hernandez, *ibid.*, p. 3565.
- 286. H. C. Tze, Nuovo Cimento **A22**, 507 (1974).
- 287. P. Van Alstine, Phys. Rev. **D12**, 1834 (1975).
- 288. G. Venturi, Nuovo Cimento **A26**, 97 (1975).
- 289. G. Venturi, Lett. Nuovo Cimento **12**, 257 (1975).
- 290. G. Venturi, Nuovo Cimento **A31**, 79 (1976).
- 291. G. Venturi, *ibid.* **A32**, 484.
- 292. P. Vinciarelli, *ibid.* **B89**, 493 (1975).
- 293. J. Willemssen, The Beginner's String. Preprint SLAC-PUB-1460, Stanford, 1974.
- 294. T. Yoneya, Progr. Theor. Phys. **52**, 1355 (1974).
- 295. T. Yoneya, Nuovo Cimento **A27**, 440 (1975).
- 296. T. Yoneya, Progr. Theor. Phys. **54**, 526 (1975).
- 297. S. Yu, Nuovo Cimento **A28**, 203 (1975).
- 298. B. Zumino, Supersymmetry. Preprint TH.2120, Geneve, CERN, 1975.