

536.76

МЕТОД РЕНОРМ-ГРУППЫ В ТЕОРИИ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ**А. З. Паташинский, В. Л. Покровский****СОДЕРЖАНИЕ**

Введение	55
1. Вероятность и гамильтонова флуктуаций. Еще немного истории	57
2. Размерности, алгебра флуктуирующих величин, корреляторы	59
3. Подгруппа ренормировок	62
4. Свойства решений вблизи неподвижной точки	65
5. Ренормируемые и почти ренормируемые гамильтонианы	67
6. Окрестность гауссовой неподвижной точки	69
7. Теория возмущений и графики	71
8. Второе ϵ -приближение	74
9. Асимптотическая симметрия	77
10. Неустойчивость и фазовые переходы I рода	81
11. Динамика вблизи точки фазового перехода	85
12. Критическая динамика с точки зрения группы ренормировок	86
13. Динамика в окрестности гауссовой особой точки	88
а) Параметр порядка и энергия не сохраняются (88). б) Параметр порядка сохраняется, энергия не сохраняется (89). в) Параметр порядка не сохраняется, энергия сохраняется (90).	
14. Численные методы расчета с помощью ренорм-группы	92
Цитированная литература	94

ВВЕДЕНИЕ

Основы общей теории фазовых переходов II рода были заложены в известных работах Ландау (см. ^{1,2}). Сейчас уже общепризнано, что переход II рода есть не что иное, как спонтанное нарушение симметрии системы. Л. Д. Ландау ввел количественную характеристику нарушения симметрии — параметр порядка ϕ . Простая и универсальная теория, в которой флуктуации считались пренебрежимо малыми (теория самосогласованного поля), позволила весьма изящно и в хорошем согласии с экспериментом описать ряд явлений в сверхпроводниках и сегнетоэлектриках.

Вместе с тем ряд фактов не укладывался в теорию самосогласованного поля. Точное решение двумерной модели Изинга, предложенное Онсагером в 1944 г., продемонстрировало логарифмическую особенность теплоемкости вместо конечного скачка, предсказанного теорией самосогласованного поля. Эксперименты по измерению теплоемкости C_p гелия вблизи λ -точки ³ и теплоемкости C_v вблизи критической точки жидкость — пар аргона ⁴ обнаружили сильный рост теплоемкости, приближенно описываемый логарифмическим законом: $C \sim A \ln |T - T_c| + C_{\text{reg}}$. Эти эффекты и многие другие расхождения с теорией Ландау, очевидно, следует приписать сильно развитым флуктуациям параметра порядка. Вблизи точки перехода размеры r_c таких флуктуаций (радиус корреляции) становятся очень большими. В каждой области с линейными размерами $\sim r_c$ сум-

марный параметр порядка Φ_c (аналог магнитного момента ферромагнетика) растет с ростом размера области, хотя и не пропорционально объему. Вещество вблизи точки перехода можно представлять себе как совокупность макроскопических областей (ячеек), взаимодействующих друг с другом. Изменение температуры сводится к изменению размеров ячеек. Если все линейные размеры измерять в единицах r_c , а суммарный параметр порядка — в единицах Φ_c , то изменение температуры не приводит к изменению термодинамических величин и корреляционных функций.

Таким образом, была сформулирована гипотеза подобия в работах авторов этого обзора⁵ и Каданова⁶. В рамках этой гипотезы, универсальной для всех фазовых переходов II рода, поведение термодинамических величин и r_c как функций $T - T_c$, $p - p_c$ и внешних полей, а также корреляторов как функций расстояний и термодинамических переменных выражается степенными законами. Показатели степеней носят название критических индексов. Гипотеза подобия позволила выразить большое число критических индексов через какие-либо два. Состояние теории на 1967 г. было описано в обзоре одного из авторов⁷. Сейчас имеется множество экспериментальных подтверждений гипотезы подобия (см. ^{2,8}). Однако вычисление критических индексов оставалось недостижимой задачей вплоть до 1972 г. Новые идеи были предложены в работах Вильсона⁹ (метод ренорм-группы), Вильсона и Фишера¹⁰ (ϵ -разложение). Пожалуй, эти идеи вносят мало нового в наши физические представления о фазовом переходе, но они оказались мощным инструментом математического исследования и нашли применение не только в теории фазовых переходов, но и в ряде родственных проблем, таких, как эффект Кondo, теория протекания, теория молекулярных цепей и, наконец, квантовая теория поля.

В данном обзоре излагается метод ренорм-группы и его применения к теории фазовых переходов. Вычисляются статические критические индексы в ϵ -приближении. Подробно рассмотрен вопрос о динамических индексах. Здесь речь идет, во-первых, о зависимости кинетических коэффициентов от $T - T_c$ и о зависимости времени t_r релаксации флуктуаций от волнового вектора: $t_r \sim q^{-z}$. Величина z носит название динамического критического индекса. Является ли этот индекс независимым или определяется статическими индексами? Ответ на этот вопрос не однозначен, он зависит от набора сохраняющихся величин, которые характеризуют систему. В этой части обзора мы следовали работам Хальперина, Хоэнберга и Ма¹¹.

Другой физический круг вопросов, рассмотренных в обзоре, — неустойчивости и фазовые переходы I рода, вызванные флуктуациями. Оказывается, что даже в весьма простых многокомпонентных системах достаточно сильная анизотропия или взаимодействие со слабо флуктуирующей величиной могут привести к неустойчивости и фазовому переходу I рода. Здесь флуктуации играют роль, подобную фононам в сверхпроводниках: обмен «флуктуонами» приводит к эффективному притяжению других квазичастиц и в ряде случаев к неустойчивости. Теория предсказывает с некоторыми оговорками характер диаграммы состояния и параметра упорядочения, возникающего в результате перехода.

Настоящий обзор в большей мере, чем предыдущий⁷ и книга авторов², посвящен изложению математического аппарата. Кроме указанных выше причин, это связано с тем, что мы хотели продемонстрировать теорию в действии и дать возможность желающим научиться самостоятельно ею пользоваться. Мы детально рассмотрели вопрос о границах применимости теории, так как в последнее время стали множиться работы,

авторы которых пытаются применять технику ренорм-группы Гелл-Манна — Лоу в таких ситуациях, где она в принципе неприменима.

Другая особенность нашего обзора — малое количество экспериментальных данных. Это связано, в основном, с тем обстоятельством, что во всех случаях реальные индексы близки к индексам теории Ландау. Разница между индексами для одно-, двух- и трехкомпонентного параметров порядка невелика. Такое однообразие индексов приводит к тому, что эксперименты становятся несоразмерно трудными, а результаты их не слишком убедительными. Теория также приводит к близким значениям индексов, но, к сожалению, в ряде случаев теоретическая разница между индексами лежит за пределами экспериментальных возможностей (например, изменение индексов в результате магнитодипольного взаимодействия спинов в ферромагнетике¹²). Что касается неустойчивостей и фазовых переходов I рода, то здесь экспериментов еще очень мало.

Имеется уже довольно много обзоров по ренорм-группе, из которых мы укажем обзор Вильсона и Когута¹³ и Фишера¹⁴. В первом подробно рассмотрены принципиальные вопросы теории и методы вычисления размерностей. Во втором найдены индексы для ряда более сложных моделей, которые описывают свойства различных магнетиков. От этих обзоров предлагаемый ниже отличается как способом изложения, так и выбором материала, особенно в том, что касается приложений. В частности, по-видимому, впервые в связанной форме излагаются теории неустойчивостей в многокомпонентных системах и вопросы кинетики.

1. ВЕРОЯТНОСТЬ И ГАМИЛЬТОНИАН ФЛУКТУАЦИЙ. ЕЩЕ НЕМНОГО ИСТОРИИ

В теории Ландау вводится параметр упорядочения ϕ , который может быть многокомпонентной величиной. Смысл его и число компонент определяется физикой изучаемого фазового перехода. Например, в случае ферромагнитной точки Кюри параметром порядка является магнитный момент, рассчитанный на узел или на единицу объема, при антиферромагнитном переходе — разность моментов двух подрешеток, при переходе в сверхтекучее состояние — комплексная волновая функция конденсата, в критической точке жидкость — пар ϕ равно разности между средней и критической плотностью. Параметр порядка ϕ является классической величиной, определяемой как среднее по объему, содержащему большое число частиц. Правомерно, однако, рассматривать его флуктуации, т. е. считать его зависящим от координаты x точки рассматриваемой системы. Если задать $\phi(x)$ в каждой точке системы, то проводя суммирование в статистической сумме Z по остальным степеням свободы, можно найти свободную энергию F (при заданном объеме) или термодинамический потенциал Φ (при заданном давлении) как функционал $\phi(x)$. В дальнейшем мы не будем конкретизировать, при каких условиях рассматривается система, и вместо F/T и Φ/T (T — температура) будем использовать обозначение \mathcal{H} и условное название «гамильтониан». Ландау предположил, что гамильтониан может быть разложен в интегростепенный ряд по степеням $\phi(x)$ и его производных. Ограничиваясь наименьшими степенями ϕ и $\nabla\phi$, приходим к гамильтониану Ландау \mathcal{H}_L :

$$\mathcal{H}_L = \int \left[\frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + \frac{t_1}{2} \tau_0 \phi^2 + g_0 \phi^4 - h\phi \right] dx, \quad (1.1)$$

где параметры τ_0 , g_0 , h являются функциями от температуры, давления и внешних полей. Общеизвестное рассуждение Ландау показывает (см. ¹), что величина τ_0 должна менять знак, обращаясь в нуль в точке перехода

(или почти в точке перехода при малых g_0). Естественно назвать $\tau \approx (T - T_c/T_c)$ безразмерной температурой. Величина g_0 меняется не столь сильно и в дальнейшем будет считаться постоянной и называться константой взаимодействия. Величину h будем называть внешним полем. Вероятность $W[\varphi]$ данного осуществления поля упорядочения $\varphi(x)$ равна

$$W[\varphi] = Z^{-1} \exp(-\mathcal{H}[\varphi]), \quad (1.2)$$

где Z — статистический интеграл.

В приближении самосогласованного поля (теория Ландау) флуктуации φ считаются пренебрежимо малыми, а равновесные свойства системы определяются условием экстремальности \mathcal{H}_L по φ . Условие применимости приближения самосогласованного поля было найдено Леванюком^{64a} и Гинзбургом^{64b} и имеет вид (см., например, ²)

$$\frac{g_0^2 T_c^2}{\tau} \ll 1. \quad (1.3)$$

Величину $Gi = g_0^2 T_c^2$ мы называем числом Гинзбурга. Оно является характеристикой вещества и не зависит от температуры. В точке фазового перехода критерий Гинзбурга не выполняется, и приближение самосогласованного поля теряет применимость. При $Gi \geq 1$ теория Ландау не имеет области применимости. Необходимо рассматривать статистическую механику волнового поля $\varphi(x)$ с гамильтонианом \mathcal{H}_L . Поле имеет макроскопический смысл — оно сглажено, в его фурье-разложении отсутствуют коротковолновые гармоники. Такой подход к задаче о фазовом переходе в области, где возникают сильновзаимодействующие длинноволновые флуктуации упорядочения, был предложен Л. Д. Ландау в конце 50-х годов.

В работе авторов¹⁵ было показано, что задача о флуктуациях при фазовом переходе может быть последовательно сведена к задаче о волновом поле $\varphi(x)$ в трехмерном пространстве. Оказалось возможным представить корреляционные функции в виде рядов, каждый член которых выражается только через те же корреляционные функции. Если предположить, что корреляционные функции являются однородными функциями своих аргументов (т. е. координат и радиуса корреляции), то можно подобрать показатели степеней так, чтобы все члены ряда имели одинаковую размерность. Тогда остается выполнить некоторые алгебраические уравнения на константы теории. Таким образом, в работе¹⁵ было впервые сформулировано предположение о степенном виде корреляторов и соотношениях между степенями однородности корреляторов (гипотеза подобия). Однако конкретное значение степеней (масштабных размерностей) было получено в работе¹⁵ ценой дополнительных предположений. Как мы теперь понимаем, такое решение уравнений теории поля действительно существует. Однако сами уравнения нелинейны, имеют бесконечное множество степенных решений, и найденное в¹⁵ решение не удовлетворяет некоторым дополнительным физическим требованиям (локальности, конформной инвариантности). Эти условия, сформулированные в работах А. А. Мигдала и А. М. Полякова (см. ^{16,17}), дают принципиальную возможность найти масштабные размерности. Однако вычислительные трудности не позволили пойти дальше принципиальных утверждений и выяснения некоторых общих свойств.

В промежутке между работами¹⁵ и ^{16,17} появились почти одновременно работы Вайдома¹⁸ и Домба и Хантера¹⁹, в которых постулировались свойства однородности термодинамических величин, и работы авторов⁵ и Каданова⁶, в которых на основе гипотезы подобия флуктуаций доказывалась однородность термодинамических величин. Дальнейшее раз-

вите гипотезы подобия позволило описать широкий круг экспериментальных результатов (см. ²).

Новый импульс теории фазовых переходов сообщил Вильсон ⁹, применивший метод ренорм-группы Гелл-Мана и Лоу ²⁰, известный в квантовой теории поля. С принципиальной точки зрения этот метод является еще одной формулировкой гипотезы подобия. Однако эта новая формулировка оказалась весьма плодотворной. С ее помощью оказалось возможным приближенно вычислить критические индексы в зависимости от числа компонент параметра порядка, размерности пространства и вида взаимодействия, вычислить уравнение состояния, проанализировать условия устойчивости различных систем. В этих исследованиях, как правило, использовалась дополнительная идея близости к 4-мерному пространству — так называемое ϵ -разложение ¹⁰. В последнее время найдены способы прямого машинного вычисления критических индексов методом ренорм-группы без использования ϵ -разложения ²¹. Прямые методы хороши тем, что они позволяют, в принципе, неограниченно увеличивать точность вычислений.

В дальнейшем нам понадобятся некоторые общие сведения и определения флуктуационной теории фазовых переходов. Мы излагаем их ниже без обоснований, которые можно найти в книге ².

2. РАЗМЕРНОСТИ, АЛГЕБРА ФЛУКТУИРУЮЩИХ ВЕЛИЧИН, КОРРЕЛЯТОРЫ

В точке перехода характерный размер флуктуации — радиус корреляции — обращается в бесконечность. При изменении масштаба длины в λ раз физические величины, такие, как параметр порядка, плотность энергии $\epsilon(x)$, температура τ , поле h и другие, умножаются на некоторую степень λ . По определению, величины $A(x)$ имеют масштабные размерности Δ_A , если преобразование подобия

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x' = \lambda x, \\ A &\rightarrow A'(x') = \lambda^{-\Delta_A} A(x) \end{aligned} \quad (2.1)$$

не изменяет статистических свойств этих величин. Предположение о таком свойстве флуктуирующих полей $A(x)$ и есть гипотеза подобия для величин A , а различные формулировки гипотезы связаны с возможностью различным образом записать требование инвариантности статистических свойств. Физические соображения определяют некоторые соотношения для масштабных размерностей Δ_A . Например, размерность длины x есть $\Delta_x = -1$, размерность аддитивной величины — сингулярной части плотности термодинамического потенциала Φ_{sing} (гамильтониана) есть $\Delta_\Phi = d$, где d — число пространственных измерений системы. Размерности термодинамически сопряженных величин в сумме равны d , например,

$$\Delta_\Phi + \Delta_h = d. \quad (2.2)$$

Важную роль играет величина $\epsilon(x)$, сопряженная температуре τ . Ее можно назвать плотностью энтропии или (более общеупотребительно) плотностью энергии. Согласно общим правилам,

$$\Delta_\epsilon + \Delta_\tau = d. \quad (2.3)$$

Из соображений масштабной размерности определяется характер особенностей различных величин вблизи точки перехода ($\tau = 0$, $h = 0$). Например, термодинамический потенциал $\Phi(\tau, h)$ имеет при $\tau \rightarrow 0$, $h \rightarrow 0$ вид ⁵

$$\Phi(\tau, h) = \Phi_{\text{reg}} + V\tau^{2-\alpha_f}(h). \quad (2.4)$$

В формуле (2.4) Φ_{reg} — регулярная в точке перехода часть Φ , $f(k)$ — некоторая функция масштабного инварианта k :

$$k = \hbar \tau^{-\Delta_{\hbar}/\Delta_{\tau}}. \quad (2.5)$$

Показатель степени $2 - \alpha$ в формуле (2.4) выражается через размерность Δ_{τ} :

$$2 - \alpha = \frac{d}{\Delta_{\tau}}. \quad (2.6)$$

Выпишем еще важную формулу для неприводимых корреляционных функций $K(x_1 \dots x_n) = \langle \varphi(x_1) \dots \varphi(x_n) \rangle$ в точке фазового перехода²²

$$K(\lambda x_1 \dots \lambda x_n) = \lambda^{-n\Delta_{\varphi}} K(x_1 \dots x_n). \quad (2.7)$$

Соотношения однородности типа (2.7) определяют на языке корреляторов требование неизменности статистических свойств системы при преобразовании (2.1) и представляют собой одну из формулировок гипотезы подобия.

Физические величины, вообще говоря, не обладают определенной масштабной размерностью, но могут быть представлены как суперпозиция величин $A_i(x)$, обладающих определенной размерностью, или термодинамически сопряженных им «полей» h_i . Это важное предположение (гипотеза алгебры флуктуирующих величин) было сформулировано Поляковым и Кадановым²³:

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i A_i(x), \\ h &= \sum_{i=1}^{\infty} a_i h_i. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Коэффициенты a_i , α_i и подобные им не являются универсальными. Размерностью физической величины (например, φ) мы называем наименьшую размерность Δ_i в ряду (2.8), для которой $a_i \neq 0$. Именно она проявится в корреляциях на больших расстояниях. Бывают, однако, ситуации, когда существенны и следующие члены ряда (2.8). Ряд физических применений алгебры флуктуирующих величин можно найти в книге².

Важной моделью, допускающей точный расчет, является модель свободного поля. Простая физическая интерпретация этой модели — поле оптических фононов в твердом теле при полном отсутствии ангармонизмов. Гамильтониан свободного поля есть частный случай гамильтониана Ландау \mathcal{H}_L при $g_0 = 0$:

$$\mathcal{H}_L = \frac{1}{2} \int [(\nabla \varphi)^2 + \tau \varphi^2] dx. \quad (2.9)$$

Для свободного поля средние вида

$$K(x_1 x_2 \dots x_n) = \langle \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \rangle$$

вычисляются по теореме Вика

$$K(x_1 x_2 \dots x_n) = \sum \Pi K(x_i - x_j). \quad (2.10)$$

В формуле (2.10) суммирование производится по всем возможным разбиениям аргументов $x_1, x_2 \dots x_{2n}$ на пары. Величина $K(x_i - x_j)$ есть парный коррелятор

$$K(x - y) = \langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle. \quad (2.11)$$

Вычисления дают для $K(x)$

$$K(x) = 2T (2\pi r_c r)^{1-(d/2)} K_{(d/2)-1} \left(\frac{r}{r_c} \right), \quad (2.12)$$

где $r = |x|$, $r_c = \tau^{-1/2}$, и $K_\nu(x)$ есть функция Макдональда порядка ν . При $r \ll r_c$

$$K(x) \sim r^{2-d} \quad (2.13)$$

и при $r \gg r_c$ имеем $K(x) \sim \exp(-r/r_c)$. В двумерном случае ($d=2$) $K(x) \sim \ln r$. Для характеристики взаимодействия в системе важны неприводимые корреляторы $G(x_1 x_2 \dots x_n) \equiv \ll \varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n) \gg$, которые получаются из $K(x_1 \dots x_n)$ вычитанием всевозможных произведений средних от групп сомножителей $\varphi(x_i)$, например

$$\begin{aligned} K(x, y) &= G(x, y) + \langle \varphi(x) \rangle \langle \varphi(y) \rangle, \\ K(x, y, z) &= G(x, y, z) + G(x, y) \langle \varphi(z) \rangle + \\ &+ G(y, z) \langle \varphi(x) \rangle + G(z, x) \langle \varphi(y) \rangle. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Для свободного поля с гамильтонианом (2.9) все неприводимые корреляторы, кроме парного $G(x, y) = K(x, y)$, равны нулю, в частности $\langle \varphi(x) \rangle = 0$. Замена двух сомножителей $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ их средним $K(x, y)$ называется спариванием. Теорема Вика (2.10) гласит, что среднее от произведения свободных полей есть сумма по всем возможным спариваниям. В дальнейшем нам понадобится понятие нормального произведения свободных полей: $\varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)$:. Нормальное произведение получается из обычного произведения вычитанием всевозможных спариваний, например,

$$\begin{aligned} :\varphi(x) \varphi(y): &= \varphi(x) \varphi(y) - K(x, y), \\ :\varphi(x) \varphi(y) \varphi(z): &= \varphi(x) \varphi(y) \varphi(z) - K(x, y) \varphi(z) - \\ &- K(y, z) \varphi(x) - K(z, x) \varphi(y). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Нормальное произведение $:\varphi(x_1) \dots \varphi(x_n):$ при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = x$ есть величина $:\varphi^n(x):$, имеющая свойства степени флуктуирующего поля. Величины

$$A_n(x) = :\varphi^n(x): \quad (2.16)$$

образуют полный набор, по которому можно разложить любую функцию поля $\varphi(x)$. При $\tau = 0$ величины $A_n(x)$ удовлетворяют свойствам подобия (1.1) с масштабными размерностями Δ_n^0 :

$$\Delta_n^0 = n\Delta_{\varphi}^0 \quad \Delta_{\varphi}^0 = \frac{d-2}{2}. \quad (2.17)$$

Более подробно свойства свободных полей изложены в книге². Для взаимодействующего поля неприводимые корреляторы $G(x_1 \dots x_n)$ не обращаются в нуль при $n > 2$, а формулы (2.10) — (2.17) не выполняются. Величина аномальной размерности

$$\eta \equiv 2(\Delta_{\varphi} - \Delta_{\varphi}^0) \quad (2.18)$$

оказалась для трехмерных систем ($d=3$) малой: $\eta \lesssim 1/20$. Как было известно из исследований по квантовой теории поля (Ландау, Абрикосов и Халатников, Судаков²⁴), при $d=4$ имеется решение с логарифмически исчезающим на больших расстояниях взаимодействием. Для произвольного n -компонентного поля φ со взаимодействием $g_0(\varphi^2)^2$ тот же результат получен в работе Ларкина и Хмельницкого²⁵. Вильсон и Фишер¹⁰ рассмотрели задачу в пространстве $4 - \epsilon$ измерений. В этом случае отличие от теории свободного поля мало при $\epsilon \ll 1$, и возможно вычисление по тео-

рии возмущений (ε -разложение). При малых ε взаимодействие на больших расстояниях мало, а поэтому мал индекс η . То обстоятельство, что экспериментальное значение η мало, дает основание ожидать, что при $\varepsilon = 1$ разложение по степеням ε все еще достаточно хорошо. Результаты расчета до некоторой степени оправдали эти надежды.

Несомненно, каждый из методов — и теоретико-полевого, и ренорм-групповой — имеет свои достоинства и недостатки. Ренорм-групповой метод оказался более конструктивным, более удобным для вычислений. Правда, привлекая идею ε -разложения, Цунето и Абрахамс²⁶ вычислили индексы в рамках теоретико-полевого подхода. Но мы пока не видим возможности увеличить точность вычислений с помощью рядов теории поля.

Переходим к изложению метода ренорм-группы.

3. ПОЛУГРУППА РЕНОРМИРОВОК

Рассмотрим флуктуирующее поле $\varphi(x)$. Это поле гладко. В фурье-разложении

$$\varphi(x) = \int \varphi_q e^{iqx} \frac{dq}{(2\pi)^d} \quad (3.1)$$

величина φ_q равна нулю при $q \leq q^0$. Вероятность W реализации $\varphi(x)$ этого поля запишем в виде

$$W = A_0 \exp[-\mathcal{H}(\varphi, q_0)], \quad (3.2)$$

где функционал $\mathcal{H}(\varphi, q_0)$ играет роль гамильтониана флуктуирующего поля. Гамильтониан $\mathcal{H}(\varphi, q_0)$ зависит от параметра обрезания q_0 . Чтобы эту зависимость изучить, просуммируем вероятность (3.2) по всем возможным значениям φ_q для q , лежащих в интервале $\lambda q_0 < q < q_0$ ($0 < \lambda < 1$). Результат представим в виде

$$W_\lambda = A_\lambda \exp[-\mathcal{H}(\varphi, \lambda q_0)] = A_0 \int \exp[-\mathcal{H}(\varphi, q_0)] \prod_{q=\lambda q_0}^{q_0} d\varphi_q. \quad (3.3)$$

Если известен $\mathcal{H}(\varphi, q_0)$, то определение (3.3) позволяет найти $\mathcal{H}(\varphi, \lambda q_0)$ для всех λ . Переход от $\mathcal{H}(q)$ к $\mathcal{H}(\lambda q)$ назовем преобразованием сглаживания и будем обозначать через $S(\lambda)$:

$$\mathcal{H}(\varphi, \lambda q) = S(\lambda) \mathcal{H}(\varphi, q). \quad (3.4)$$

Операция сглаживания нелинейна. Последовательное применение операций сглаживания есть, очевидно,

$$S(\lambda_2) S(\lambda_1) = S(\lambda_1 \lambda_2).$$

Совокупность операций $S(\lambda)$ образует то, что в математике называется полугруппой.

Произведем также масштабное преобразование величин q :

$$q \rightarrow q' = \lambda^{-1} q$$

и одновременно преобразование изменения нормировки полей

$$\varphi_q \rightarrow \varphi'_q = Z(\lambda) \varphi_{\lambda q} \quad (3.5)$$

Совокупность этих двух преобразований обозначим $D(\lambda)$. Преобразование D изменяет и гамильтониан \mathcal{H} . Это изменение сводится к замене волновых чисел $q \rightarrow q'$, к изменению всех длин в λ раз и всех полей в Z раз:

$$D(\lambda) \mathcal{H}(\varphi_q, k) = \mathcal{H}(Z^{-1} \varphi_{\lambda^{-1} q}, \lambda^{-1} k) = \mathcal{H}'(\varphi'_q, \lambda^{-1} k). \quad (3.6)$$

Последовательное применение операций $S(\lambda)$ и $D(\lambda)$ назовем операцией ренормировки:

$$R(\lambda) = D(\lambda) S(\lambda). \quad (3.7)$$

Операция сглаживания $S(\lambda)$ уменьшает область определения поля φ_q от интервала $0 < q < q_0$ до $0 < q < \lambda q_0$. Масштабное преобразование $D(\lambda)$ растягивает уменьшающийся интервал до прежнего размера. Таким образом, преобразованный гамильтониан

$$R(\lambda) \mathcal{H}(\varphi_q, q_0) = \mathcal{H}'(\varphi'_q, q_0) \quad (3.8)$$

описывает флуктуации нового поля φ'_q в неизменной области масштабов. Совокупность операций $R(\lambda)$ также образует полугруппу \mathbf{R} . Для наших целей отличие полугруппы от группы несущественно. Поэтому следуя установившейся традиции, мы будем называть \mathbf{R} группой ренормировок.

Начав с некоторого затравочного гамильтониана $H(\varphi, q_0)$ и многократно применяя к нему операцию $R(\lambda_1)$, $R(\lambda_2)$, ..., получим последовательность гамильтонианов H'_1 , H'_2 , ... Естественно возникает вопрос о предельных свойствах этой последовательности.

Если система не находится в критической точке, то, последовательно применяя операцию ренормировки, мы придем к достаточно большим масштабам (малые λq_0), лежащим в области термодинамической теории флуктуаций. В этой области распределение термодинамических величин является гауссовским. Гамильтониан \mathcal{H}_h имеет вид (см. ^{1,2})

$$\mathcal{H}_h = \frac{1}{2} \int_{q < h} (\chi^{-1} + cq^2) |\varphi_q|^2 \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}. \quad (3.9)$$

Величина χ есть восприимчивость системы $\chi = \partial \langle \varphi \rangle / \partial h$, где h — поле, сопряженное φ . Проведем сначала операцию сглаживания $S(\lambda)$ над гамильтонианом (3.9). Так как φ_q с разными значениями q не взаимодействуют, то операция сглаживания в данном случае сводится к отбрасыванию в (3.9) слагаемых с q в интервале от λk до k :

$$S(\lambda) \mathcal{H}_h = \frac{1}{2} \int_{q < \lambda h} (\chi^{-1} + cq^2) |\varphi_q|^2 \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}. \quad (3.10)$$

Теперь проведем масштабное преобразование $D(\lambda)$ над (3.10):

$$R(\lambda) \mathcal{H}_h = D(\lambda) S(\lambda) \mathcal{H}_h = \frac{\lambda^{dZ-2}}{2} \int_{q < h} (\chi^{-1} + c^2 \lambda^2 q^2) |\varphi_q|^2 \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}. \quad (3.11)$$

Обратим внимание на то, что преобразование ренормировки не затрагивает термодинамических переменных (например, τ и h или χ и c). Поэтому оно отличается от преобразований подобия (2.4). Именно, в случае преобразования подобия термодинамические величины изменяются так, что гамильтониан \mathcal{H} остается инвариантным:

$$\chi \rightarrow \chi' = \chi \lambda^{-d} Z^2, \quad c \rightarrow c' = c \lambda^{d+2} Z^{-2}.$$

Вернемся к формуле (3.11). При $\lambda \rightarrow 0$ преобразованный гамильтониан стремится к конечному пределу

$$\mathcal{H}^* = \frac{1}{2} \int_{q < h} \chi^{-1} |\varphi_q|^2 \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d}, \quad (3.12)$$

если $Z = \lambda^{d/2}$. Для вырожденной системы ниже точки перехода при $h = 0$ величина χ^{-1} обращается в нуль ². В этом случае конечный предел \mathcal{H}_h достигается при условии $Z = \lambda^{(d+2)/2}$.

В критической точке область термодинамических флуктуаций отсутствует. Поэтому вопрос о предельном поведении не может быть решен так просто. Гипотеза о существовании предельного гамильтониана \mathcal{H}^* , описывающего негауссово распределение вероятностей, и есть гипотеза подобия.

Удобно искать предел \mathcal{H}^* , рассматривая бесконечно малое ренормировочное преобразование $R(1 - \xi)$ (ξ — бесконечно малая величина):

$$R(1 - \xi) \mathcal{H}(\varphi, \lambda q_0) = \mathcal{H} + \xi f\{\mathcal{H}\}. \quad (3.13)$$

Уравнение (3.13) можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \ln \lambda} = -f\{\mathcal{H}\} \quad (3.14)$$

Процедура ренормировки $R(1 - \xi)$ зависит лишь от величины ξ . Величина λ в уравнении (3.13) входит лишь через зависимость гамильтониана $\mathcal{H}(\lambda)$. Поэтому функционал $f\{\mathcal{H}\}$, появившийся в дифференциальном уравнении (3.14), не зависит от λ . Удобно перейти к переменной $\xi = -\ln \lambda$, в связи с чем введем новое обозначение

$$\mathcal{H}(\varphi, \lambda q_0) \equiv \mathcal{H}(\varphi, \xi).$$

Уравнение (3.14) примет в новых обозначениях вид

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} = f\{\mathcal{H}\}. \quad (3.15)$$

Простота уравнения (3.15) кажущаяся. В действительности это система нелинейных уравнений для коэффициентов, определяющих гамильтониан \mathcal{H} . Ограничимся классом гамильтонианов \mathcal{H} , которые можно представить в виде рядов по степеням величины φ и ее производных. Коэффициенты этих рядов подчиняются уравнениям (3.15). Простейший вид предельного поведения решений уравнения (3.15) связан с возможным обращением в нуль функционала $f\{\mathcal{H}\}$. «Корень» уравнения

$$f\{\mathcal{H}^*\} = 0 \quad (3.16)$$

представляет собой неподвижную точку преобразований ренормировки $R(\lambda)$.

Для нелинейных систем известны и другие типы предельного поведения, например, предельный цикл (см. ²⁷). Мы не видим в настоящее время оснований для исследования таких предельных поведений и остановимся на изучении неподвижных точек.

Общая методика применения ренормировочных преобразований в теории фазового перехода состоит в следующем. Исходным является гамильтониан Ландау†

$$\mathcal{H}_L = \frac{1}{2} \int [\tau_0 \varphi^2 + (\nabla \varphi)^2 + g_0 \varphi^4] dx. \quad (3.17)$$

Параметры τ_0 и g_0 считаются регулярными функциями термодинамических переменных — температуры, давления и т. д. При некотором специальном подборе этих параметров τ_0^* , g_0^* в результате последовательного применения преобразований ренормировки возникнет негауссовский предельный гамильтониан \mathcal{H}^* . Физически очевидно, что эта точка неустойчива. При малых отклонениях τ_0 , g_0 от их критических значений $\mathcal{H}(\xi)$ при некотором значении ξ окажется достаточно близким к \mathcal{H}^* , но при дальнейшем увеличении ξ будет стремиться к гауссовой неподвижной точке. Уравнения ренормировочной группы были найдены Гелл-Манном и Лоу ²⁰ для случая квантовой электродинамики. Ренормировочная группа в квантовой теории поля подробно исследована Боголюбовым и Ширко-

вым²⁸. Применение идей ренорм-группы к теории фазовых переходов принадлежит Вильсону⁹, который разработал приближенные методы вычисления. Идея о возможности негауссовой неподвижной точки была высказана Гелл-Манном и Лоу²⁰. Общий анализ уравнений ренорм-группы дан в работах Вегнера²⁹ и Вильсона и Когута¹³.

4. СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ВБЛИЗИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

В предыдущем параграфе было показано, что распределение вероятностей в точке фазового перехода описывается предельным гамильтонианом \mathcal{H}^* , являющимся неподвижной точкой нелинейного преобразования R . Рассмотрим свойства решений уравнений (3.15) вблизи точки \mathcal{H}^* .

Мы по-прежнему рассматриваем совокупность гамильтонианов $\mathcal{H}(\varphi)$, которые можно представить в виде рядов по степеням величины и ее производных:

$$\mathcal{H}(\varphi) = \sum_n \int \dots \int d\mathbf{q}_1 \dots d\mathbf{q}_n g_n(\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_n) \delta\left(\sum_{i=1}^n \mathbf{q}_i\right) \varphi_{\mathbf{q}_1} \dots \varphi_{\mathbf{q}_n}. \quad (4.1)$$

Гамильтониан \mathcal{H} полностью определяется совокупностью величин g_n и представляется вектором (точкой) \mathbf{g} бесконечномерного пространства коэффициентов g_n . При изменении нормировки полей $\varphi \rightarrow \varphi' = Z\varphi$ гамильтониан (4.1) изменяется — происходит преобразование величин g_n : $g_n \rightarrow g'_n = Z^{-n}g_n$. Поэтому гамильтонианы, соответствующие векторам $g_n(Z) = Z^{-n}g_n$, следует считать совпадающими. Чтобы устранить такой произвол, достаточно потребовать $g_n = 1$ для какого-то n . Мы будем предполагать, что единице равен коэффициент при $(1/2) \int k^2 \varphi \mathbf{k} \varphi_{-\mathbf{k}} d\mathbf{k}$ в (4.1).

Величины $g_n(\xi)$ в такой нормировке называются инвариантными зарядами.

Уравнения (3.15) суть уравнения движения в пространстве g_n . Величина ξ играет роль времени. Функционал, фигурирующий в (3.15), в действительности является векторной функцией точки \mathbf{g} . Эту функцию мы будем обозначать той же буквой $\mathbf{f}(\mathbf{g})$. В этих обозначениях уравнения (3.15) принимают вид

$$\frac{d\mathbf{g}}{d\xi} = \mathbf{f}(\mathbf{g}). \quad (4.2)$$

Пусть \mathcal{H} близко к \mathcal{H}^* . Это означает, что соответствующая точка близка к точке \mathbf{g}^* *)

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}^* + \boldsymbol{\gamma}. \quad (4.3)$$

Малый вектор $\boldsymbol{\gamma}$ подчиняется системе линейных уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{\gamma}}{d\xi} = K\boldsymbol{\gamma}, \quad (4.4)$$

где линейный оператор K связан с $\mathbf{f}(\mathbf{g})$ соотношением

$$K = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{g}} \right|_{\mathbf{g}=\mathbf{g}^*}. \quad (4.5)$$

Обозначим через Δ_i собственные значения оператора K и $\boldsymbol{\gamma}_i$ — соответствующие собственные векторы:

$$K\boldsymbol{\gamma}_i = \Delta_i \boldsymbol{\gamma}_i. \quad (4.6)$$

Общее решение уравнения (4.4) имеет вид

$$\boldsymbol{\gamma} = \sum_i h_i \boldsymbol{\gamma}_i, \quad h_i = h_{i0} e^{\Delta_i \xi}, \quad (4.7)$$

) Уравнения ренорм-группы вблизи \mathcal{H}^ рассмотрены в работе Вегнера²⁹.

где h_{i0} — произвольные постоянные *). Мы игнорируем экзотическую возможность осцилляционной зависимости коэффициентов гамильтониана от степени близости к критической точке, возникающую при комплексных значениях Δ_i , и будем считать все Δ_i вещественными.

Заметим, что вместо уравнения (4.4) для собственных векторов можно писать аналогичные уравнения для сопряженных полей:

$$\frac{dh_i}{d\xi} = \Delta_i h_i. \quad (4.8)$$

Уравнения (4.8), как и уравнения (4.4), написаны с точностью до квадратичных по h слагаемых.

Мы пришли к масштабному преобразованию полей h_i (ср. гл. 2). Еще раз подчеркнем тесную связь и различие преобразований ренорм-группы и масштабных преобразований полей h_i . Первые изменяют гамильтониан, вторые компенсируют эти изменения так, чтобы гамильтониан оставался неизменным. Можно считать, что при ренормировках поля h_i преобразуются по закону $h_i = h_{i0} e^{\Delta_i \xi}$.

Особенно важны те векторы γ_i , собственные значения которых положительны. По мере увеличения ξ отклонения, связанные с этими векторами, растут и, в конце концов, уводят вектор g от фиксированной точки.

Таким образом, величины h_i играют роль внешних полей. Собственные значения Δ_i являются масштабными размерностями этих полей. Соответствующие векторы γ_i определяют флуктуирующие величины A_i . Обратим внимание на прямое соответствие между излагаемой здесь теорией и гипотезой алгебры флуктуирующих величин (см. введение). Именно, согласно гипотезе алгебры, величина γ_i в координатном представлении может быть представлена как интеграл от $A_i(x)$:

$$\gamma_i = \int A_i(x) dx.$$

Если $\Delta_i > 0$, то включение поля h_i выводит систему из критической точки. Таким свойством обладают магнитное поле (в ферромагнетике), температура. Сопряженные им термодинамические величины мы называли сильно флуктуирующими. Размерности Δ_i этих величин меньше размерности пространства d .

Поля h_i с размерностями $\Delta_i < 0$ сопряжены слабо флуктуирующим величинам. Если начальные значения h_{i0} таковы, что все h_{i0} , относящиеся к сильно флуктуирующим величинам, равны нулю, то решение γ стремится к нулю при $\xi \rightarrow +\infty$.

Очевидно, положительные собственные значения Δ_i ограничены сверху. В противном случае решение (4.7) теряет смысл. Это означает, что среди сильно флуктуирующих величин одна флуктуирует сильнее других. Обычно эта величина связана с параметром порядка.

Рассмотрим уравнения (4.8) с точностью до квадратичных по h_i слагаемых:

$$\frac{dh_i}{d\xi} = \Delta_i h_i - \sum_{k,l} a_{ikl} h_k h_l.$$

Введем уточненную величину $h_i^{(1)}$, связанную с h_i и другими полями соотношением

$$h_i^{(1)} = h_i + \sum_{k,l} \frac{a_{ikl} h_k h_l}{\Delta_i - \Delta_k - \Delta_l}.$$

*) Мы предполагали, что оператор K может быть приведен к диагональному виду. В общем случае он может быть представлен в жордановой форме. В этом случае, кроме экспонент $e^{\Delta_i \xi}$, в решениях появляются слагаемые вида $\xi^{h_e} e^{\Delta_i \xi}$.

Тогда в уравнении для $h_i^{(j)}$ квадратичные члены исчезнут. Очевидно, что дальнейшее уточнение величин h_i даст возможность избавиться от кубических членов и т. д. Устранение нелинейных членов в уравнениях ренорм-группы невозможно лишь в случае «резонанса», когда $\Delta_i = \Delta_k + \Delta_l$. Простейшая резонансная ситуация возникает в том случае, когда одно из полей h_0 имеет нулевое собственное значение. В уравнениях группы ренормировок в этом случае с необходимостью нужно удерживать квадратичные члены, разумеется, только резонансные. Учитывая это обстоятельство, запишем уравнения группы ренормировок для этого случая:

$$\frac{dh_0}{d\xi} = -bh_0^2, \quad (4.9)$$

$$\frac{dh_i}{d\xi} = \Delta_i h_i + a_i h_i h_0. \quad (4.10)$$

Решение этой системы уравнений имеет вид

$$h_0 = \frac{h_{00}}{1 + bh_{00}\xi}, \quad (4.11)$$

$$h_i = h_{i0} e^{\Delta_i \xi} \left(\frac{h_0}{h_{00}} \right)^{a_i/b}. \quad (4.12)$$

Таким образом, если $b \neq 0$, зависимость полей h_i и h_0 от масштаба усложняется; появляются логарифмические поправки. Если, однако, отвлечься от этих медленно меняющихся поправок, то основные размерности Δ_i остаются неизменными. При $b > 0$ решение (4.11), (4.12) справедливо во всей области и описывает приближение к неподвижной точке. В случае $b < 0$ неподвижная точка является неустойчивой: из уравнения (4.9) видно, что в этом случае малые отклонения нарастают. Однако уравнения (4.9), (4.10) и их решения (4.11), (4.12), выведенные лишь в предположении малости h_0 , остаются правильными вплоть до значений ξ , близких к полюсу $\xi_0 = -(bh_{00})^{-1}$ функции $h_0(\xi)$. Именно, требуется, чтобы $(\xi - \xi_0)^{-1} b^{-1}$ было большой величиной. При $b = 0$ из уравнений (4.9), (4.10) следует, что

$$h_0 = h_{00} = \text{const}, \quad (4.13)$$

$$h_i = h_{i0} e^{\tilde{\Delta}_i \xi}, \quad \tilde{\Delta}_i = \Delta_i + a_i h_{00}. \quad (4.14)$$

В этом приближении масштабные размерности $\tilde{\Delta}_i$ непрерывно зависят от величины h_0 .

Мы можем теперь уточнить условие непрерывности изменения индексов. Для такой зависимости необходимо и достаточно, чтобы h_0 не зависело от ξ в любом степенном порядке.

5. РЕНОРМИРУЕМЫЕ И ПОЧТИ РЕНОРМИРУЕМЫЕ ГАМИЛЬТониАНЫ

Представим, что точка g движется по одному из тех путей, которые приводят в неподвижную точку g^* . Это означает, что можно определить поправки к векторам γ_i с отрицательными размерностями Δ_i так, чтобы при ренормировке ни в каком порядке по малым отклонениям в уравнениях для h_i не появились члены с положительными размерностями. В случае, когда одно из собственных значений равно нулю, как видно из (4.12), все h_i ($i \neq 0$) становятся малыми при выполнении условия $\xi \gg \ln h_{i0}/\Delta_i$. С другой стороны, как следует из (4.11), h_0 существенно изменяется на интервале $\xi \sim h_{00}^{-1}$. При достаточно малых h_{00} существует

интервал изменения ξ :

$$\Delta_1^{-1} \ll \delta \xi \ll h_0^{-1}, \quad (5.1)$$

на котором можно пренебречь всеми полями, кроме h_0 , а изменение h_0 считать достаточно малым. Здесь Δ_1 — максимальная отрицательная размерность. В этом случае в уравнениях для h_0 и h_i законно удерживать члены любого степенного порядка по h_0 . Поэтому система уравнений движения (3.15) в рассматриваемом случае принимает вид *)

$$\frac{dh_0}{d\xi} = f(h_0), \quad (5.2)$$

$$\frac{d \ln h_i}{d\xi} = \Delta_i(h_0). \quad (5.3)$$

Эти уравнения с точностью до квадратичных членов уже были выписаны в гл. 4 ((4.9), (4.10)). При выводе (5.2), (5.3) мы пренебрегли членами порядка $h_i \sim e^{\Delta_i \xi}$ при $\xi \sim h_0^{-1}$. Другими словами, уравнения (5.2), (5.3) справедливы с относительной точностью $e^{-\Delta_1/h_0}$. Возникающее из (5.1) ограничение на величину h_0 :

$$h_0 \ll \Delta_1^{-1} \sim 1,$$

не означает, вообще говоря, что в уравнениях (5.2), (5.3) можно ограничиться первым членом. Функция $f(x)$ может, например, иметь еще один нуль при малом $x = x_0$. Тогда возникает еще одна неподвижная точка с $h_0 = x_0$, и $\Delta_i = \Delta_i(x_0)$. Уравнения (5.3) верны и для полей с положительной размерностью. В этом случае следует учитывать только резонансные члены в любом порядке по h_0 , так как остальные либо малы, либо исключаются при уточнении величины h_i .

Гамильтонианы, для которых одно или несколько собственных значений обращаются в нуль, принято называть ренормируемыми **). В случае, когда нулевому собственному значению соответствует m векторов, поведение соответствующих полей описывается системой связанных уравнений вида

$$\frac{dh_i}{d\xi} = f(h_1, \dots, h_m) \quad (i = 1, 2, \dots, m). \quad (5.4)$$

Для остальных полей h_k ($k = m + 1, m + 2, \dots$) уравнения группы ренормировок принимают вид

$$\frac{d \ln h_i}{d\xi} = \Delta_i(h_1, \dots, h_m). \quad (5.5)$$

В простейшем случае, когда можно ограничиться квадратичными членами разложения функций f_i по величинам h_1, \dots, h_m , уравнения (5.4) становятся однородными. Поэтому их можно свести к системе $m - 1$ уравнений для отношений h_i/h_1 . Исследование такого рода систем приведено в гл. 9.

Идеи, использованные при исследовании ренормируемых гамильтонианов, оказываются полезными и в том случае, когда одно или несколько собственных значений Δ_i малы по сравнению с единицей (случай почти ренормируемого гамильтониана). В этом случае уравнения группы ренормировок вблизи неподвижной точки, так же как и в ренормируемых теориях, делятся на две группы (5.4) и (5.5). В первую группу h_1, \dots, h_m

*) Уравнения такого вида были получены Гелл-Манном и Лоу в квантовой электродинамике ²⁰.

**) Иногда ренормируемыми называют гамильтонианы, у которых число неположительных собственных значений конечно. Поскольку в дальнейшем мы рассматриваем только такие гамильтонианы, для нас удобнее принятое выше определение.

входят поля с малыми размерностями, во вторую — все остальные. Характерный размер ξ_0 изменения полей h_1, \dots, h_m по порядку величины равен Δ^{-1} , где Δ — наименьшее из собственных значений. При выводе уравнений (5.4), (5.5) (или (5.2), (5.3)) мы пренебрегли членами порядка $e^{\Delta_k \xi}$, где Δ_k — не малые собственные значения. Это означает, что уравнения ренормируемого гамильтониана (5.4), (5.5) справедливы в рассматриваемом случае с экспоненциальной относительной точностью $e^{-|\Delta_k/\Delta|}$.

Рассмотрим подробнее почти ренормируемый гамильтониан с одним малым собственным значением Δ_0 . В этом случае в уравнении (5.2) необходимо удерживать не только линейные по h_0 слагаемые, но и члены более

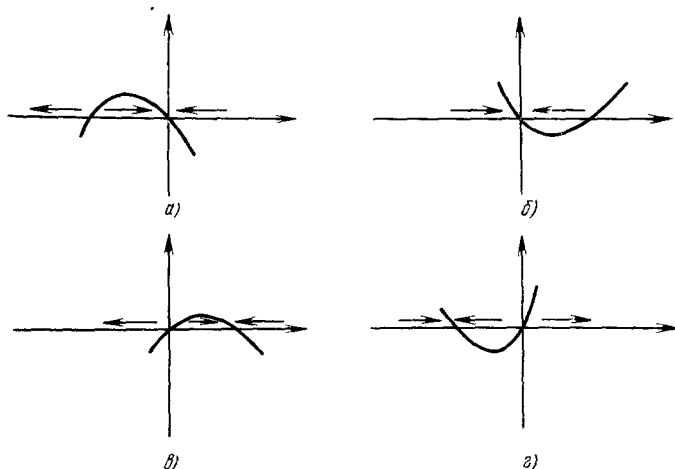


Рис. 1.

высокого порядка. В простейшем случае ограничимся линейными и квадратичными слагаемыми:

$$\frac{dh_0}{d\xi} = \Delta_0 h_0 - b h_0^2. \quad (5.6)$$

На рис. 1 показаны графики правой части уравнения (5.6) в различных возможных ситуациях. Во всех случаях возникает новая неподвижная точка $h_0^* = \Delta_0/b$. В случаях в) и г), как видно из рисунка, именно эта неподвижная точка является устойчивой. В остальных случаях устойчивой является точка $h^* = 0$. В случаях в) и г) размерности Δ_i мало меняются по сравнению с их значениями в исходной неподвижной точке. Новые значения нетрудно связать со старыми и значением h_0^* с помощью уравнений (4.10)

$$\tilde{\Delta}_i = \Delta_i + a \frac{\Delta_0}{b}, \quad \tilde{\Delta}_0 = -\Delta_0. \quad (5.7)$$

При необходимости можно уточнять значения h^* и $\tilde{\Delta}_i$, используя дальнейшие члены разложений уравнения (5.6) и (4.10) по степеням h .

6. ОКРЕСТНОСТЬ ГАУССОВОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Гамильтониан свободного поля

$$\mathcal{H}_0 = \frac{1}{2} \int q^2 \varphi_q \varphi_{-q} \frac{d\mathbf{q}}{(2\pi)^d} = \frac{1}{2} \int (\nabla \varphi)^2 d\mathbf{x} \quad (6.1)$$

является неподвижной точкой преобразований ренорм-группы для любой размерности d пространства. Изучим теперь, как ведут себя при ренор-

мировочных преобразованиях гамильтонианы, близкие к свободному. Добавка вида

$$\mathcal{H}_\tau = \frac{1}{2} \tau \int \varphi^2 dx = \frac{1}{2} \tau \int |\varphi_q|^2 \frac{dq}{(2\pi)^d} \quad (6.2)$$

оставляет гамильтониан гауссовым, но, как уже указывалось, выводит из неподвижной точки (6.1). Найдем размерность τ в этом случае. Сглаживание не изменяет гауссового гамильтониана $\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_\tau$. При масштабном преобразовании $q = \lambda q'$ необходимо для сохранения вида (6.1) произвести преобразование поля $\varphi_q = Z^{-1} \varphi_{q'}$, с $Z = \lambda^{(d+2)/2}$. При этом величина τ преобразуется по закону

$$\tau \rightarrow \tau' = \lambda^{-2} \tau = e^{2\varepsilon} \tau. \quad (6.3)$$

Таким образом, полю τ соответствует положительное собственное значение $\Delta_\tau^0 = 2$. Вычислим размерность поля h , с которым связано возмущение гамильтониана (6.1) вида

$$\mathcal{H} = -h \int \varphi(x) dx. \quad (6.4)$$

Аналогичные вычисления дают для размерности h $\Delta_h^0 = (d+2)/2$. Роль собственных векторов Υ_h играют величины $\int : \varphi^h(x) : dx$; здесь: $\varphi^h(x)$ означает нормальное произведение $:\varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_h):$ при $x_1 = x_2 = \dots = x_h = x$. Нормальное произведение определено в гл. 2 (см. формулы (2.15), (2.16)). (Более подробно см., например, ²⁾). Соответствующие им поля h_h имеют размерности Δ_h

$$\Delta_h = d - \frac{k(d-2)}{2}. \quad (6.5)$$

В частности, при $k=1$ получаем размерность $\Delta_h^0 = \Delta_1^0$. Условие существования оператора h_h размерности, равной нулю, имеет вид

$$d = \frac{2k}{k-2} = 2 + \frac{4}{k-2}, \quad (6.6)$$

где k — любое целое число, большее 2.

Целые значения d получаются лишь при $k=3, 4, 6$. Им соответствуют значения $d=6, 4, 3$. В трехмерном пространстве нулевую размерность имеет величина h_3 . Величины h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 имеют при этом положительные размерности. Даже если в силу симметрии системы h_3 и h_5 автоматически обращаются в нуль вместе с $h_1 = h$, условие $h_1 = h_2 = h_4 = 0$ может быть выполнено только тогда, когда число термодинамических переменных не меньше трех. В частности, это условие невыполнимо для однокомпонентной системы. В двухкомпонентной системе такая точка носит название трикритической.

Для $d=4$ нулевой размерностью обладает величина h_4 , положительными размерностями в этом случае обладают величины h_1, h_2, h_3 . В общем случае путем простого преобразования $\varphi \rightarrow \varphi + \text{const}$ можно обратить в нуль либо h_1 , либо h_3 . Поэтому неподвижная точка задается двумя уравнениями, например, $h_1 = 0, h_2 = 0$. Для однокомпонентной системы это соответствует критической точке.

Формально можно рассматривать пространство с размерностью $d = 4 - \varepsilon$, близкой к 4 ($\varepsilon \ll 1$). В этом случае размерность Δ_4 величины h_4 уже не равна нулю, но мала: $\Delta_4^{(0)} = \varepsilon$. Поэтому с точностью до величин порядка $e^{-\text{const}/\varepsilon}$ можно пользоваться уравнениями ренормируемой теории (5.2), (5.3).

Итак, мы рассмотрим гамильтониан Ландау \mathcal{H}_L в четырехмерном или почти четырехмерном пространстве. При $h_1 \equiv h = 0, h_2 \equiv \tau = 0$,

$\mathcal{H}_4 \equiv g=0$ этот гамильтониан превращается в гауссов, являющийся неподвижной точкой ренормировочных преобразований. Для того чтобы найти поведение \mathcal{H}_L при малых $g \neq 0$, вычислим коэффициенты уравнений группы ренормировок (5.2), (5.3). Это вычисление элементарно, но довольно громоздко, поэтому поясним программу вычислений. Для применения уравнений (5.2) и (5.3) необходимо рассмотреть конечное преобразование ренорм-группы с $\delta\xi \gg 1$, чтобы удовлетворить требованию (5.1). При этом мы воспользуемся теорией возмущений по величине $g_0 = h_{00} \ll 1$. Выражение для $g(\xi, g_0)$ представим в виде ряда по степеням g_0 . Затем продифференцируем этот ряд по ξ . Тем самым будет найдена функция $f(g)$ в виде ряда по величине g_0 . В наинизшем порядке оставим в g лишь линейный и квадратичный члены по g_0 . Получим

$$f(g) = \varepsilon g_0 - b g_0^2. \quad (6.7)$$

При $g_0 \rightarrow 0$ для любого ξ величины g и g_0 совпадают, поэтому в том же приближении можно заменить в $f(g)$ g_0 на g , так что

$$f(g) = \varepsilon g - b g^2. \quad (6.8)$$

Такая замена законна, потому, что, как было нами доказано, функция $f(g)$ зависит только от g . Далее, в следующем приближении, необходимо найти $g(g_0, \xi)$ с точностью до членов порядка g_0^3 . Это позволит, исключив в $f(g) = \varepsilon g_0 - b g_0^2 + c g_0^3$ члены третьего порядка по g_0 , найти эту функцию с точностью до третьего порядка по g и т. д. Нетривиальный факт исчезновения зависимости от ξ и g_0 в результате последовательного применения такой процедуры гарантируется общей теорией.

Предположение о существовании негауссовой неподвижной точки, близкой к гауссовой, впервые высказал А. А. Мигдал ³⁰.

7. ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ГРАФИКИ

Перейдем к конкретным вычислениям. Подвергнем гамильтониан Ландау \mathcal{H}_L операции сглаживания $S(\lambda)$ с $\lambda \ll 1$. Согласно определению операции сглаживания $S(\lambda)$ мы должны вычислить величину

$$\exp(-S(\lambda)\mathcal{H}_L) = \text{const} \cdot \int e^{-\mathcal{H}_L} \prod_{\lambda q_0 < q < q_0} d\varphi_q. \quad (7.1)$$

Введем обозначение операции сглаживания произвольного функционала A с гамильтонианом свободного поля \mathcal{H}_0 :

$$\langle A \rangle_S = \int e^{-\mathcal{H}_0} A \prod_{\lambda q_0 < q < q_0} d\varphi_q / \int e^{-\mathcal{H}_0} \prod_{\lambda q_0 < q < q_0} d\varphi_q. \quad (7.2)$$

В этих обозначениях получаем

$$\exp(-S_1(\lambda)\mathcal{H}_L) = \exp(-S_1(\lambda)\mathcal{H}_0) \langle e^{-\mathcal{H}_{\text{int}}} \rangle_S, \quad (7.3)$$

где \mathcal{H}_{int} — гамильтониан взаимодействия:

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = g_0 \int \varphi^4(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (7.4)$$

Экспоненту $e^{-\mathcal{H}_{\text{int}}}$ разложим в ряд по степеням g_0 . Общий член ряда имеет вид

$$(-1)^n \frac{g_0^n}{n!} \left\langle \left(\int \varphi^4(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right)^n \right\rangle_S. \quad (7.5)$$

Для вычисления выражения (7.5) представим $\varphi(x)$ в виде суммы:

$$\varphi = \varphi_0(x) + \varphi_1(x), \quad (7.6)$$

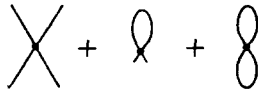
где $\varphi_0(x)$ — медленная часть функции $\varphi(x)$, содержащая фурье-гармоники φ_q с волновыми векторами $q \leq \lambda q_0$; быстро меняющаяся часть $\varphi_1(q)$ содержит гармоники с волновыми векторами q , лежащими в интервале $(\lambda q_0, q_0)$. Операция сглаживания не затрагивает φ_0 , которое играет роль заданного внешнего поля. По отношению к φ_1 сглаживание эквивалентно обычному гиббсовскому усреднению с гамильтонианом свободного поля. Поэтому в (5.5) появляются слагаемые, содержащие различные спаривания поля φ_1 . Конкретные вычисления удобно проводить в фурье-представлении, где спаривание выглядит очень просто:

$$\overline{\varphi_{1q_1}\varphi_{1q_2}} = \langle \varphi_{1q_1}\varphi_{1q_2} \rangle = \begin{cases} \frac{\delta(q_1+q_2)}{q^2} & (\lambda q_0 < q < q_0), \\ 0 & (q \leq \lambda q_0). \end{cases} \quad (7.7)$$

Спаривание будем обозначать линией, соединяющей спариваемые величины φ (см. гл. 2). Например, в первом порядке по g_0 получим

$$\begin{aligned} -g_0 \int \langle \varphi_{q_1}\varphi_{q_2}\varphi_{q_3}\varphi_{q_4} \rangle \delta(q_1+q_2+q_3+q_4) \frac{dq_1}{(2\pi)^d} \dots \frac{dq_4}{(2\pi)^d} = \\ = -g_0 \int_{q_i \leq \lambda q_0} \varphi_{0q_1}\varphi_{0q_2}\varphi_{0q_3}\varphi_{0q_4} \delta(q_1+q_2+q_3+q_4) \frac{dq_1}{(2\pi)^d} \dots \frac{dq_4}{(2\pi)^d} - \\ - 6g_0 \int_{q \leq \lambda q_0} \varphi_{0q}\varphi_{0-q} \frac{dq}{(2\pi)^d} \int_{q_0 > q' > \lambda q_0} \overline{\varphi_{1q'}\varphi_{1-q'}} \frac{dq'}{(2\pi)^d} - \\ - 3g_0 \int_{q_0 > q, q' > \lambda q_0} \overline{\varphi_{1q}\varphi_{1-q}} \overline{\varphi_{1q'}\varphi_{1-q'}} \frac{dq}{(2\pi)^d} \frac{dq'}{(2\pi)^d}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Вычисление удобно представить в графической форме. Сопоставим каждой g_0 точку (вершину), из которой выходят четыре линии, изображающие величины φ_q . Спаривание величин φ_{q_1} , φ_{q_2} изображается линией, объединяющей линии φ_{q_1} и φ_{q_2} . По всем волновым векторам q производится интегрирование. Сумма волновых векторов линий, входящих в каждую вершину, равна нулю. Напомним, что интегрирование по импульсам линий спаривания происходит в пределах $\lambda q_0 < q < q_0$. Линии, оставшиеся неспаренными, соответствуют φ_0 и, следовательно, имеют волновые векторы $q \leq \lambda q_0$. Трем слагаемым выражения (7.8) соответствуют графики:



Каждый график входит с множителем, равным числу комбинаторных возможностей его осуществления.

Таким образом, согласно (7.3) в первом порядке по g_0 находим

$$S(\lambda) \mathcal{H}_L = \mathcal{H}_L + \delta \mathcal{H}, \quad (7.10)$$

где $\delta \mathcal{H}$ представлено суммой графиков

$$\text{Figure-eight} + \text{Loop} \quad (7.11)$$

Мы воспользовались тем, что $\ln(1+x) \approx x$, если $x \ll 1$. Первое слагаемое в (7.11) соответствует изменению τ :

$$\tau \rightarrow \tau_R = \tau_0 + \delta\tau, \quad \delta\tau = 6g_0 \int \overline{\Phi_{1q}\Phi_{1-q}} \frac{dq}{(2\pi)^d}. \quad (7.12)$$

Выберем τ_0 таким образом, чтобы ренормированное τ_R обратилось в нуль. Дальнейшие члены разложения по g_0 внесут изменения более высокого порядка малости в τ_R . Полагая $\tau_R = 0$, найдем значение τ_0^* , соответствующее неподвижной точке. Можно убедиться, что для любой размерности пространства $d > 2$ интегралы по q , определяющие поправки к τ_0 , формально расходятся при $q_0 \rightarrow \infty$. Это означает, что основной вклад в них вносят $q \sim q_0$, и потому τ_0^* действительно является постоянной величиной, не зависящей от l . Будем теперь считать $\tau_0 = \tau_0^*$ и на некоторое время забудем о возмущениях, связанных с отличным от нуля τ_R .

Второе слагаемое в (7.11) не зависит от φ_0 , изменяя гамильтониан на несущественную постоянную. Графики такого рода мы в дальнейшем учитывать не будем.

Нам остается следить лишь за графиками с четырьмя выходящими линиями. Во втором порядке теории возмущений по g_0 единственный график, который необходимо учитывать, имеет вид



Ему соответствует вклад в g вида

$$-36g_0^2 \int_{\lambda q_0 < q < q_0} \frac{d^d q}{(2\pi)^d q^4}. \quad (7.13)$$

Нас интересует случай, когда волновые векторы внешних линий гораздо меньше внутренних ($\lambda \ll 1$). Поэтому мы положили внешние q равными нулю. Интеграл в (7.13) легко вычисляется:

$$\int_{\lambda q_0 < q < q_0} \frac{d^d q}{(2\pi)^d q^4} = \frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_{\lambda q_0}^{q_0} q^{d-5} dq = K_d \frac{q_0^{-\varepsilon} (\lambda^{-\varepsilon} - 1)}{\varepsilon}, \quad K_d = \frac{S_d}{(2\pi)^d}, \quad (7.14)$$

где S_d — поверхность сферы единичного радиуса в d -мерном пространстве:

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}. \quad (7.15)$$

Считая ε малой величиной, положим в наинизшем приближении в (7.14), (7.15) $\varepsilon = 0$ ($d = 4$). В этом приближении

$$g = g_0 + \frac{9}{2\pi^2} g_0^2 \ln \lambda = g_0^2 - \frac{9}{2\pi^2} g_0^2 \xi. \quad (7.16)$$

Дифференцируя по ξ , находим

$$\frac{dg}{d\xi} = -\frac{9}{2\pi^2} g_0^2. \quad (7.17)$$

Теперь заменим в (7.17) g_0 на g . Тем самым, согласно общей идеологии (см. гл. 6) получим уравнение группы ренормировок в 4-мерном пространстве с точностью до малого g^2 :

$$\frac{dg}{d\xi} = -\frac{9}{2\pi^2} g^2 = -36K_4 g^2. \quad (7.18)$$

В пространстве размерности $4 - \varepsilon$, как было показано в предыдущем параграфе, это уравнение следует заменить уравнением (6.7) с известным коэффициентом b :

$$\frac{dg}{d\xi} = \varepsilon g - 36K_d g^2. \quad (7.19)$$

Уравнение (7.19) имеет устойчивую неподвижную точку

$$K_d g^* = \frac{\varepsilon}{36}, \quad (7.20)$$

близкую к гауссовой. В этой точке размерность g в первом порядке по ε согласно (5.7) равна $-\varepsilon$. Величина g^* в негауссовой неподвижной точке оказалась малой величиной порядка ε . Поэтому разложение по степеням g есть в то же время разложение по степеням ε .

Найдем размерность величины $h_2 = \tau$ вблизи устойчивой неподвижной точки. Для этого необходимо выписать величину τ с точностью до первого порядка по ε . Графически поле τ можно представить точкой, из которой выходит две линии, соответствующие величинам φ_q , φ_{-q} . Поправка первого порядка к τ изображается графиком:



Эта поправка соответствует второму члену в уравнении (4.10).

Простой расчет по сформулированным выше правилам дает

$$\tau = \tau_0 (1 - g_0 \cdot 12K_d \xi). \quad (7.21)$$

Дифференцируя $\ln \tau$ по ξ , находим

$$\frac{d \ln \tau}{d\xi} = \frac{d \ln \tau_0}{d\xi} - 12K_d g_0. \quad (7.22)$$

Размерность $\Delta_\tau^0 = d \ln \tau_0 / d\xi$ величины τ_0 в гауссовой неподвижной точке известна: $\Delta_\tau^0 = 2$ (см. (6.3)). В уравнениях группы ренормировок с точностью до величин первого порядка по g нужно заменить g_0 на g :

$$\frac{d \ln \tau}{d\xi} = 2 - 12K_d g \quad (7.23)$$

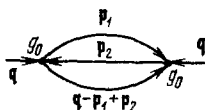
Наконец, полагая $g = g^*$, найдем размерность величины τ в устойчивой неподвижной точке:

$$\Delta_\tau = \Delta_\tau^0 - \frac{3}{2\pi^2} g^* = 2 - \frac{\varepsilon}{3}. \quad (7.24)$$

Последовательная процедура ε -разложения предложена Вильсоном³¹.

8. ВТОРОЕ ε -ПРИБЛИЖЕНИЕ

В первом приближении по g (или ε) коэффициент при $q^2 \varphi_q \varphi_{-q}$ после сглаживания $S(\lambda)$ не меняется. Однако уже во втором приближении возникают изменения. Во втором порядке по g_0 изменение коэффициентов при $\varphi_0 q \varphi_{0-q}$ описывается графиком вида:



При $q_0 \rightarrow \infty$ интеграл расходится в области больших q . При конечных q_0 и при $q \ll q_0$ величина $\Sigma_2(q)$ есть в основном константа $\Sigma_2(0)$, пере-

нормирующая величину τ_0 . Нам нужно вычислить поэтому не саму $\Sigma_2(q)$, а разность

$$\Sigma_2(q) - \Sigma_2(0),$$

пропорциональную q^2 при малых q . Вычисление проще всего выглядит в x -представлении:

$$\Sigma_2(q) - \Sigma_2(0) = -48g_0^2 \int_0^1 dx G^3(x) (e^{iqx} - 1), \quad (8.1)$$

где

$$G(x) = \int \frac{e^{ipx}}{p^2} \frac{dp}{(2\pi)^d}. \quad (8.2)$$

Коэффициент $48 = 4 \cdot 4 \cdot 6/2$ перед интегралом представляет половину числа комбинаторных возможностей осуществления необходимых спариваний.

При малых q можно разложить экспоненту e^{iqx} в (8.1) в ряд и удерживать лишь квадратичные члены:

$$\Sigma_2(q) - \Sigma_2(0) \approx \frac{48q^2g_0^2}{2d} \int dx G^3(x) x^2. \quad (8.3)$$

В наинишем ε -приближении в интегралах (8.2), (8.3) достаточно положить $\varepsilon = 0$ ($d = 4$). Тогда

$$G(x) = \frac{1}{4\pi^2 x^2}. \quad (8.4)$$

Интеграл (8.3) логарифмически расходится. Поэтому

$$\Sigma_2(q) - \Sigma_2(0) = \frac{48}{2 \cdot 4} q^2 S_4 \frac{g_0^2}{64\pi^6} \xi. \quad (8.5)$$

Измененный коэффициент при $q^2 \varphi_q \varphi_{-q}$ равен

$$\frac{1}{2} \left(1 + \frac{3g_0^2}{8\pi^4} \xi \right). \quad (8.6)$$

Чтобы коэффициент при $q^2 \varphi_q \varphi_{-q}$ остался неизменным, мы должны произвести операцию растяжения и перенормировки поля:

$$q \rightarrow \lambda^{-1} q, \quad \varphi_q = Z_\lambda \varphi' \lambda^{-1} q, \quad (8.7)$$

где

$$Z_\lambda = \lambda^{-(d+2)/2} \left(1 - \frac{3g_0^2}{16\pi^4} \xi \right). \quad (8.8)$$

Величина Z_λ связана с масштабным изменением поля h , сопряженного φ . Именно, преобразование ренормировки $R(\lambda)$ в применении к h имеет вид

$$R(\lambda) h = Z_\lambda h. \quad (8.9)$$

Согласно общей теории можно написать уравнение группы ренормировок:

$$\frac{d \ln h}{d \xi} = f_h^*(g). \quad (8.10)$$

Мы видим, что в разложении $f_h(g)$ по степеням g отсутствует линейный член. Согласно (8.8)

$$\frac{d \ln h}{d \xi} = \Delta_h^0 - 12 (K_4 g)^2, \quad (8.11)$$

где $\Delta_h^0 = (d+2)/2$. Изменение размерности h дается вторым слагаемым в (8.11) при $K_4 g = K_4 g^* = \varepsilon/36$:

$$\Delta_h = \Delta_h^0 - \frac{\varepsilon^2}{108}. \quad (8.12)$$

Размерность Δ_φ равна

$$\Delta_\varphi = d - \Delta_h = \Delta_\varphi^0 + \frac{\varepsilon^2}{108}. \quad (8.13)$$

В этом приближении индекс аномальной размерности $\eta = 2(\Delta_\varphi - \Delta_\varphi^0) = \varepsilon^2/54$. Вычислим размерность τ во втором приближении по ε . Для этого при сглаживании достаточно учесть график *)

$$S(I)\tau_0 = \tau_0 \left\langle \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \tau_0 \end{array} \right\rangle + \tau_0 \left\langle \begin{array}{c} \text{fish diagram} \\ 12 \end{array} \right\rangle + \tau_0 \left\langle \begin{array}{c} \text{fish diagram} \\ 144 \end{array} \right\rangle + \tau_0 \left\langle \begin{array}{c} \text{fish diagram} \\ 288 \end{array} \right\rangle \quad (8.14)$$

Числа под графиками указывают число комбинаторных возможностей спариваний. Проводя затем операцию растяжения, получим окончательно:

$$\tau = R(\lambda)\tau_0 = \lambda^{-d} Z_\lambda^2 (1 - 12I g_0 + 144I^2 g_0^2 + 288J g_0^2) \tau_0, \quad (8.15)$$

где Z_λ определено формулой (8.8),

$$I = \int_{\lambda < q < 1} \frac{d^4 q}{(2\pi)^d q^4}, \quad J = \int_{\lambda < p < 1, |p+q| < 1} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{d^d q}{(2\pi)^d} \frac{1}{p^4 q^2 (p+q)^2}. \quad (8.16)$$

Из (8.15) находим

$$\frac{d \ln \tau}{d\xi} = 2 - 12 \frac{dI}{d\xi} (g_0 - 36g_0^2 I) + g_0^2 \left[288 \frac{d}{d\xi} \left(J - \frac{1}{2} I^2 \right) - 24K_4^2 \right]. \quad (8.17)$$

Комбинация $g_0 - 36g_0^2 I$ есть не что иное, как вершина g во втором приближении. Итак, с точностью до g^2 уравнение ренорм-группы для $\ln \tau$ выглядит так:

$$\frac{d \ln \tau}{d\xi} = 2 - 12K_d g + \left[288 \frac{d}{d\xi} \left(J - \frac{1}{2} I^2 \right) - 24K_4^2 \right] g^2. \quad (8.18)$$

Вычисление интегралов $J - (1/2) I^2$ проводится элементарно. Главный вклад, пропорциональный ξ^2 , в комбинации $J - (1/2) I^2$ сокращается:

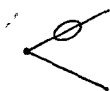
$$J - \frac{1}{2} I^2 \approx \frac{1}{2} K_4^2 \xi. \quad (8.19)$$

Подставляя (8.19) в (8.18), находим

$$\frac{d \ln \tau}{d\xi} = 2 - 12K_d g + 120K_d^2 g^2. \quad (8.20)$$

Необходимо найти величину $K_d g^*$ с точностью до ε^2 и подставить в (8.20).

*) Мы не рассматриваем графики вида

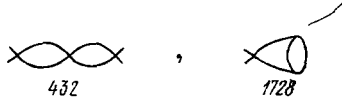


здесь и в дальнейшем, так как они компенсируются графиками вида



где крест означает соответствующую добавку к τ_0 .

Для этого нужно выписать уравнение ренорм-группы для g с точностью до g^3 . При сглаживании нужно добавить графики третьего порядка



и учесть изменение Z_λ во втором порядке по g_0 . Далее вычисления, подобные приведенным выше, дают

$$\frac{dg}{d\bar{\xi}} = \varepsilon g - 36K_d g^2 + 816K_d^2 g^3. \quad (8.21)$$

С точностью до второго порядка по ε находим

$$K_d g^* = \frac{\varepsilon}{36} + \frac{17\varepsilon^2}{972}. \quad (8.22)$$

Наконец, подставляя $g = g^*$ в (8.20), получим

$$\Delta_\tau = 2 - \frac{\varepsilon}{3} - \frac{19\varepsilon^2}{162}. \quad (8.23)$$

С той же точностью найдем индекс ν :

$$\nu = \frac{1}{\Delta_\tau} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{7\varepsilon^2}{162}. \quad (8.24)$$

Предоставляем читателю в качестве упражнения получить индексы во втором ε -приближении для вырожденной n -компонентной системы.

Метод ренорм-группы позволяет найти не только индексы, но и уравнение состояния вблизи точки фазового перехода. Вычисления, выполненные Г. М. Авдеевой и А. А. Мигдалом³³ и Брезаном, Уоллесом и Вильсоном³³, подтвердили с точностью до второго порядка по ε правильность феноменологического уравнения состояния, предложенного А. А. Мигдалом³⁴. Уравнение состояния многокомпонентной системы имеет ряд особенностей, рассмотренных в работах^{35, 36}.

9. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ

Согласно теории Ландау, фазовый переход можно описать как спонтанное нарушение симметрии. Система, обладавшая группой симметрии G выше точки перехода, ниже этой точки имеет более низкую симметрию, которой соответствует группа G_1 , являющаяся подгруппой G . Если число Гинзбурга Gi мало и есть область применимости теории Ландау, то ее выводы относительно возможных правил отбора по симметрии при фазовом переходе второго рода¹ остаются в силе. Действительно, единственное, что требуется для вывода этих правил, — единая форма термодинамического потенциала в виде, предложенном Ландау, как выше, так и ниже точки фазового перехода. Более того, очевидно, что правила отбора Ландау сохраняются и до некоторого критического значения числа Gi порядка единицы. Вопрос о том, сменяются ли правила отбора Ландау при некотором конечном Gi другими, остается открытым.

Флуктуации приводят к интересному явлению: симметрия в точке фазового перехода может оказаться выше, чем симметрия исходной фазы G . Это явление мы называем асимптотической симметрией. Подчеркнем, что речь идет не о группах масштабных и конформных преобразований, которые также характеризуют дополнительную симметрию, возникающую в точке перехода. Речь идет о дополнительных поворотных элементах сим-

метрии, которых нет в группе G . Более того, группа асимптотической симметрии может оказаться непрерывной даже в том случае, когда исходная симметрия дискретна. Явление асимптотической симметрии возникает только в том случае, если в системе есть несколько полей (зарядов) одинаковой размерности.

Рассмотрим простейший пример, впервые исследованный Вильсоном и Фишером¹⁰, — два связанных скалярных поля φ_1 , φ_2 , описываемых гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \tau (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_2)^2 + g_1 (\varphi_1^4 + \varphi_2^4) + g_2 \varphi_1^2 \varphi_2^2 \right]. \quad (9.1)$$

Модель двух связанных скалярных полей с гамильтонианом (9.1) не является чисто академической. Можно указать по крайней мере два ее применения

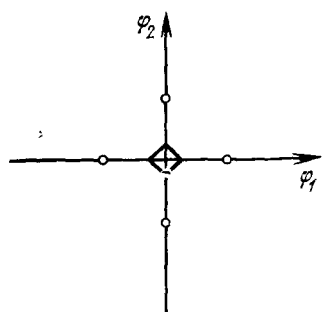


Рис. 2.

к структурным переходам в кристаллах. Пусть одним из элементов исходной группы G была ось четвертого порядка C_4 (тетрагональная симметрия). При переходе атомы, находящиеся на оси C_4 смещаются в несимметричное положение. Такие фазовые переходы типа смещения хорошо изучены в сегнетоэлектриках. Очевидно, что существуют четыре эквивалентных смещенных положения атома. Они отличаются друг от друга поворотом вокруг C_4 (рис. 2). Тогда φ_1 описывает смещение по оси 1, а φ_2 — по оси 2.

Гамильтониан (9.1) описывает поведение двухкомпонентного поля смещений в случае, когда, кроме оси C_4 , в группу симметрии входит плоскость, проходящая через ось C_4 (группа C_{4v}). Другой пример, приводящий к гамильтониану (9.1), — упорядочение двухкомпонентного сплава, в неупорядоченном состоянии имеющего объемноцентрированную кубическую решетку^(1, § 139). Если образуется сверхструктура с симметрией T_d с векторами обратной решетки $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ и $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$, то изменение плотности компонент описывается функциями $\varphi_1 = \cos \pi x \cdot \cos \pi y \times \cos \pi z$ и $\varphi_2 = \sin \pi x \cdot \sin \pi y \cdot \sin \pi z$. Из них можно составить два независимых инварианта четвертого порядка $\varphi_1^4 + \varphi_2^4$ и $\varphi_1^2 \varphi_2^2$.

Гамильтониан (6.1) инвариантен относительно преобразования

$$\varphi_{1,2} \rightarrow \frac{\varphi_1 \pm \varphi_2}{\sqrt{2}}, \quad g_1 \rightarrow \frac{g_1}{2} + \frac{g_2}{4}, \quad g_2 \rightarrow 3g_1 - \frac{g_2}{2}. \quad (9.2)$$

Обозначим через y отношение $y = g_2/g_1$. Преобразование (9.2) приводит к изменению y :

$$y \rightarrow \frac{6-y}{1+(y/2)}. \quad (9.3)$$

Неподвижной точкой преобразования (7.3) является $y = 2$. В этом случае члены четвертого порядка в гамильтониане (9.1) могут быть записаны в форме $(\varphi_1^2 + \varphi_2^2)^2$, и следовательно, гамильтониан (9.1) становится инвариантным относительно вращений в плоскости $\varphi_1 - \varphi_2$. При других значениях y такой симметрии нет. Она, однако, появляется в области сильно развитых флуктуаций. Исследованию этого вопроса предположим краткий анализ фазовой диаграммы рассматриваемой системы с точки зрения теории Ландау. Простой анализ показывает, что на плоскости $\tau \div y$

область $\tau > 0$, $y > -2$ соответствует симметричной фазе (фаза I), в области $\tau < 0$, $-2 < y < 2$ осуществляется фаза $\varphi_1 = \pm \varphi_2 \neq 0$ (фаза II), в области $\tau < 0$, $y > 2$ осуществляется фаза $\varphi_1 \neq 0$, $\varphi_2 = 0$ или $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 \neq 0$ (фаза III). Преобразование (9.2), (9.3) переводит фазу II в фазу III. В частности, отрезок $-2 < y < 2$ это преобразование переводит в $2 < y < \infty$. Линия $y = 2$ является линией фазовых переходов I рода между фазами II и III. Область положительной определенности гамильтониана (9.1), соответствующая границам термодинамической устойчивости, определяется неравенствами

$$g_1 > 0, y > -2. \quad (9.4)$$

Перейдем теперь к области сильноразвитых флуктуаций. Мы по-прежнему будем пользоваться методом ε -разложения Вильсона — Фишера, имея

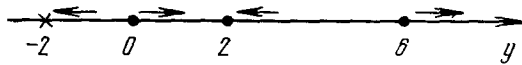


Рис. 3.

в виду приложение к обычным трехмерным системам. Однако интересное нас явление асимптотической симметрии возникает уже в нулевом приближении по ε . Поэтому мы начнем с анализа ситуации в 4-мерном пространстве.

Уравнения ренорм-группы для рассматриваемой модели с точностью до квадратичных членов имеют вид

$$\frac{dg_1}{d\xi} = -36g_1^2 - g_2^2, \quad \frac{dg_2}{d\xi} = -24g_1g_2 - 8g_2^2. \quad (9.5)$$

Перейдем к переменным $y = g_2/g_1$ и $t = -\ln g_1$. Поскольку производная $dg_1/d\xi$ всюду отрицательна, то t является монотонно растущей функцией ξ . Уравнение ренорм-группы в этих переменных имеет вид

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(y-2)(y-6)}{y^2+36}. \quad (9.6)$$

Уравнение (9.6) имеет 3 неподвижные точки: $y = 0$, $y = 2$, $y = 6$. Нарисуем «фазовую линию» этого уравнения (рис. 3). Стрелками показаны знаки производной, т. е. направление движения по прямой в разных областях. Точки 0 и 6 являются отталкивающими центрами, точка 2 — притягивающий центр. Это означает, что если в силу начальных условий $0 < y < 6$, то в асимптотической области больших расстояний y стремится к 2. Возникает асимптотическая группа вращений O_2 в плоскости $\varphi_1 \div \varphi_2$. Заметим, что если начальные значения y лежат в области $-2 < y < 0$ или $y > 6$, то в асимптотической области в силу уравнений (9.6) нарушаются условия термодинамической устойчивости (9.4). Поэтому следует ожидать, что раньше произойдет фазовый переход I рода. Этому явлению посвящен следующий раздел.

Точка $y = 0$ соответствует двум невзаимодействующим скалярным полям φ_1 , φ_2 , точка $y = 6$ — невзаимодействующим полям $(\varphi_1 \pm \varphi_2)/\sqrt{2}$.

Покажем, что асимптотическая симметрия не исчезает в любом порядке по ε . Уравнения ренорм-группы при малых ε имеют вид

$$\frac{dg_1}{d\xi} = f_1(g_1, g_2), \quad \frac{dg_2}{d\xi} = f_2(g_1, g_2). \quad (9.7)$$

Среди неподвижных точек уравнений (9.7) несомненно должна быть точка, соответствующая симметрии O_2 , в которой $g_2 = 2g_1$. Действительно, если исходный гамильтониан (9.1) инвариантен относительно O_2 , то в точке

перехода симметрия не может быть ниже. Единственный вопрос, который может возникнуть, — является ли симметричная точка устойчивой. Но при малых ε уравнение для y , которое возникает из (9.7), должно иметь вид

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(y-2)(y-6)}{y^2+36} + (y-2)O(\varepsilon). \quad (9.8)$$

Поэтому знак производной вблизи симметричной точки $y = 2$ при малых ε не меняется.

Точки $y = 2$ и $y = 6$ также остаются неподвижными точками уравнений (4.8) в любом приближении по ε , так как они соответствуют отсутствию взаимодействия между скалярными полями. Поэтому расстановка стрелок на «фазовой прямой» остается такой же, как на рис. 3 в любом приближении по ε . Разумеется, это вовсе не означает, что при $\varepsilon = 1$ все должно остаться неизменным. Однако «фазовая прямая» может измениться лишь скачком при конечном значении ε . Успешное вычисление индексов с помощью ε -приближения внушает надежду, что это произойдет при $\varepsilon > 1$.

Выше мы следовали работе Люксютова и Покровского³⁷.

Рассмотрим несколько более сложный пример полей, описываемых гамильтонианом:

$$\mathcal{H} = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} (\tau_1 \varphi_1^2 + \tau_2 \varphi_2^2) + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi_2)^2 + g_1 (\varphi_1^2)^2 + g_2 (\varphi_2^2)^2 + g_{12} \varphi_1^2 \varphi_2^2 \right], \quad (9.9)$$

причем поле φ_1 будем считать m -компонентным, а поле φ_2 — n -компонентным. Такая ситуация возникает в том случае, когда в системе могут совершаться два различных по своей природе фазовых перехода, например, ферро- и антиферромагнитный, магнитный и структурный, переход в сверхпроводящее состояние и магнитный. Если линии фазовых переходов $\tau_1 = 0$ и $\tau_2 = 0$ пересекаются, то в точке пересечения в принципе может возникнуть асимптотическая симметрия O_{n+m} ($g_{12} = 2g_1 = 2g_2$). Как и в предыдущем случае, такая точка всегда является неподвижной точкой уравнений ренорм-группы. Но она далеко не всегда устойчива. Можно убедиться в этом, исследуя уравнения ренорм-группы в 4-мерном пространстве

$$\begin{aligned} \frac{dg_1}{d\xi} &= -4(m+8)g_1^2 - ng_{12}^2, & \frac{dg_2}{d\xi} &= -4(n+8)g_2^2 - mg_{12}^2, \\ \frac{dg_{12}}{d\xi} &= -4g_{12}[(m+2)g_1 + (n+2)g_2] - 8g_{12}^2. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Линеаризуем уравнения для двух отношений $x = g_2/g_1$ и $y = g_{12}/g_1$ вблизи симметричной точки. Элементарный анализ показывает, что эта точка устойчива лишь при условии $m+n < 4$. Случай $m+n = 4$ выделен: одно из собственных значений обращается в нуль. Поэтому необходим более тщательный анализ во втором ε -приближении. Он показывает, что уже при $n+m = 4$ точка с симметрией O_4 неустойчива. Наивысшей возможной асимптотической симметрией является O_3 .

В каких физических явлениях скажется асимптотическая симметрия? Наиболее простое из них состоит в том, что критические индексы определяются не симметрией исходной системы, а асимптотической симметрией. Наиболее резко отличаются критические индексы теплоемкости α . К сожалению, точность определения индекса α , особенно в твердых телах, невелика.

Более интересным представляется поведение корреляторов типа $\langle\langle \varphi_\alpha(\mathbf{x}) \varphi_\beta(\mathbf{x}') \rangle\rangle$ вблизи точки перехода, которое в ряде случаев может

быть установлено по данным о критическом рассеянии. Например, в случае пересечения кривых фазовых переходов II рода корреляторы $\langle\langle\varphi_1(x)\varphi_1(x')\rangle\rangle$ и $\langle\langle\varphi_2(x)\varphi_2(x')\rangle\rangle$ оказываются равными. Рассмотренный здесь пример был проанализирован в работах Люксютова, Покровского и Хмельницкого³⁸. Менее общая ситуация ($m=1$) была рассмотрена ранее Нельсоном, Костерлицем, Фишером³⁹. Различные аспекты явления асимптотической симметрии рассмотрены в работах Фишера и Аарони (см. обзор¹⁴) и в работе Брезэна, Ле-Гайо и Зинн-Жюстана⁶⁵.

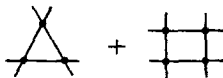
Разумеется, возможны фазовые переходы без повышения симметрии. Интересный с физической точки зрения пример такого перехода приведен Мукамелем⁴⁰; это структурный переход в кристаллах с тетрагональной симметрией (например, NbO_2). Он описывается 4-компонентным параметром порядка, роль которого играют компоненты плотности с волновыми векторами $(1/4, 1/4, 1/2)$, $(\bar{1}/4, \bar{1}/4, \bar{1}/2)$, $(1/4, \bar{1}/4, 1/2)$, $(\bar{1}/4, 1/4, \bar{1}/2)$. В этом случае инварианты четвертого порядка суть

$$I_1 = \varphi_1^4 + \varphi_2^4 + \varphi_3^4 + \varphi_4^4, \quad I_2 = \sum_{i \neq k}^4 \varphi_i^2 \varphi_k^2, \quad I_3 = \varphi_1^2 \varphi_2^2 + \varphi_3^2 \varphi_4^2.$$

Критические индексы иные, чем в симметричном случае ($\nu = (1/2) + (\varepsilon/8) + (7\varepsilon^2/96)$, $\eta = \varepsilon^2/48$).

10. НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ I РОДА

Что происходит в системе двух связанных скалярных полей, если начальное значение $y = y_0$ лежит в интервале $(-2, 0)$ или $(6, 0)$ ³⁷? Инвариантность относительно преобразования (9.3) позволяет ограничиться одним из интервалов, например, $(-2, 0)$. Начнем снова со случая 4-мерного пространства. Уравнения группы ренормировок (9.5), (9.6) остаются справедливыми и при конечном $\tau > 0$, но под ξ нужно в этом случае понимать меньшую из двух величин $-\ln \lambda$ и $-(1/2) \ln \tau$. Было показано, что при y_0 функция $y(\xi)$ монотонно убывает и достигает границы устойчивости $y = -2$ при некотором конечном значении ξ . В рассматриваемом случае слабой связи граница устойчивости $\xi(y_0)$ мало отличается от кривой равновесия фаз. При $y = -2$ гамильтониан (9.1) становится нестабильным, и необходимо учитывать в гамильтониане ангармонизмы более высокого порядка по конденсату, чем четвертый². Ангармонизму n -го порядка соответствует неразрезаемая по одной линии вершинная часть T_n . Нас интересуют лишь те графики, у которых все внешние импульсы равны нулю. Наибольший вклад дают графики, содержащие при заданном числе вершин наименьшее число интегрирований. Таким свойством обладают кольцевые диаграммы



Суммирование этих графиков облегчается тем соображением, что при $y_0 < 0$ в равновесии могут находиться симметричная фаза I и фаза II ($\varphi_1 = \pm \varphi_2 \neq 0$). Переходя к переменным $\psi_{1,2} = (\varphi_1 \pm \varphi_2)/\sqrt{2}$, найдем, что все внешние линии соответствуют одному из полей ψ , скажем ψ_1 , а внутренние — другому (ψ_2). Суммирование сводится по сути дела к вычислению суммы членов геометрической прогрессии и последующему интегрирова-

нию *). Отбрасывая градиентные члены и подставляя ренормированные значения τ , g_1 , находим термодинамический потенциал конденсата

$$\Phi = 2\tau\varphi^2 + (2+y)g_1\varphi^4 + \frac{g_1^2}{32\pi^2}\varphi^4 \ln \frac{4g_1\varphi^2}{\tau}, \quad (10.1)$$

где $\varphi = \varphi_1 = \pm\varphi_2$. При выводе (10.1) мы предполагали выполнение неравенства $4g_1\varphi^2 \gg \tau$. Равновесное значение φ находится из условия минимума Φ . На кривой равновесия $\Phi = 0$. Уравнения $\Phi = 0$ и $\partial\Phi/\partial\varphi = 0$ определяют равновесные значения $\varphi(\xi)$ и $y_0(\xi)$ и, следовательно, кривую в плоскости $y_0 - \tau$. Уравнение этой кривой при малых y_0 имеет вид

$$\tau \sim \exp\left(-\frac{2}{|y_0|^3}\right). \quad (10.2)$$

Кривая равновесия имеет существенную особенность в точке слияния с линией фазовых переходов II рода $y_0 = 0$. Выпишем также формулу для величины φ^2 на кривой равновесия:

$$\varphi^2 \sim \tau |y_0|^{-6} \sim |y_0|^{-6} e^{-2/|y_0|^3}. \quad (10.3)$$

Полученные результаты легко продолжить и на пространство размерности $4 - \varepsilon$. Для этого в первом порядке по ε достаточно заменить логарифмические интегралы степенными, т. е. считать, что

$$\xi = \min\left(\frac{\lambda^{-\varepsilon}-1}{\varepsilon}, \frac{\tau^{-\varepsilon/2}-1}{\varepsilon}\right). \quad (10.4)$$

Уравнение кривой равновесия принимает вид

$$\tau = \left(1 + \frac{\varepsilon}{|y_0|^3}\right)^{-2/\varepsilon}, \quad (10.5)$$

а значение параметра порядка на кривой равновесия

$$\varphi^2 \sim \tau^{(1/2)+(e/4)} |y_0|^{-3-(3/4)\varepsilon}. \quad (10.6)$$

Рис. 4.

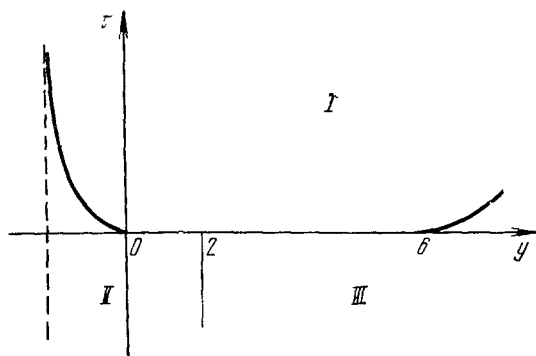


Диаграмма состояния в плоскости $y_0 - \tau$ схематически показана на рис. 4. На ней имеется три точки, в которых сходятся кривые фазовых переходов I и II рода. Подчеркнем, что появление двух из трех линий фазовых переходов I рода связано только с флуктуациями. В теории Ландау эти линии отсутствуют. Гамильтониан Ландау вполне устойчив, например в области $-2 < y < 0$, и только развитые флуктуации приводят к неустойчивости симметричного состояния.

Физическую причину неустойчивости лучше всего можно понять на примере двух взаимодействующих полей с различными точками перехода (гамильтониан (9.9))^{38, 42}. Пусть система близка к одной из точек перехода. Это означает, что, например, поле φ_1 уже сильно флуктуирует. Если исключить поле φ_1 , то для поля φ_2 возникает новый гамильтониан \mathcal{H}_2 . Покажем, что коэффициент при φ_2^4 в этом гамильтониане, описывающий самодействие поля φ_2 , отрицателен и велик по модулю. В самом деле, по определению,

$$\mathcal{H}_2 = -\ln \int e^{-\mathcal{H}} \prod_{\mathbf{q}} d\varphi_{1\mathbf{q}}. \quad (10.7)$$

*) Аналогичное суммирование для случая скалярной электродинамики см. в работе⁴¹.

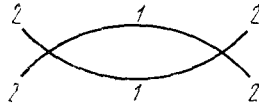
С точностью до второго порядка по g_{12} находим

$$\mathcal{H}_2 = \int \left[\frac{1}{2} (\tau_2 \varphi_2^2 + (\nabla \varphi_2)^2) + g_2 \varphi_2^4 \right] dx - \\ - g_{12}^2 \int \langle \langle \varphi_1^2(\mathbf{x}) \varphi_1^2(\mathbf{y}) \rangle \rangle \varphi_2^2(\mathbf{x}) \varphi_2^2(\mathbf{y}) dx dy. \quad (10.8)$$

Знак усреднения здесь относится только к полю φ_1 . Пренебрежем теперь флуктуациями поля φ_2 , т. е. будем считать его не зависящим от координат. Тогда взаимодействие описывается двумя слагаемыми:

$$g_2 \varphi_2^4 - g_{12}^2 \varphi_2^4 \int \langle \langle \varepsilon_1(\mathbf{x}) \varepsilon_1(0) \rangle \rangle dx, \quad (10.9)$$

где $\varepsilon_1(\mathbf{x}) = \varphi_{1j}^2(\mathbf{x})$. Второе слагаемое пропорционально теплоемкости поля φ_1 и отрицательно. Если теплоемкость расходится ($\alpha > 0$), то оно играет главную роль. График, соответствующий второму слагаемому (10.8), имеет вид



Обмен флуктуациями во втором порядке теории возмущений приводит к притяжению. Линии 1 могут относиться к произвольному флуктуирующему полю, например, к акустическим фононам⁴³.

Необходимо учесть и ангармонизмы более высоких порядков по φ_2 , так как коэффициенты при них растут по мере приближения к кривой перехода $\tau_1 = 0$. Это легко сделать, если флуктуациями поля φ_2 можно пренебречь. В этом случае взаимодействие полей φ_1 и φ_2 приводит к простой замене $\tau_1 \rightarrow \tau_1 + g_{12} \varphi_2^2$. Сингулярная часть термодинамического потенциала в этом случае пропорциональна величине $(\tau_1 + g_{12} \varphi_2^2)^{2-\alpha}$. Исключение поля φ_1 в этом случае дает следующий термодинамический потенциал в переменных φ_2 :

$$\Phi = -A (\tau_1 + g_{12} \varphi_2^2)^{2-\alpha} + \frac{1}{2} \tau_2 \varphi_2^2 + g_2 \varphi_2^4. \quad (10.10)$$

Постоянная A положительна, по порядку величины равна $g_1^{-1+2\alpha}$. Порядок величины A определен условием сшивки термодинамического потенциала, вычисленного по теории Ландау, и сингулярной части $\Phi_{\text{sing}} = A \tau^{2-\alpha}$ на границе области применимости теории Ландау $\tau \propto Gi \propto g_1^2$. В частности, прежний результат (10.9) легко получить из (10.10) разложением сингулярной части по степеням φ_2^2 . Значение φ_2 может быть найдено из условия

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_2} = 2\varphi_2 [- (2-\alpha) A g_{12} (\tau_1 + g_{12} \varphi_2^2)^{1-\alpha} + \tau_2 + 2g_2 \varphi_2^2] = 0. \quad (10.11)$$

Уравнение (8.11) имеет ненулевое решение $\varphi_2 \neq 0$ ($\tau_1 = 0$) при условии, что $g_{12}^{2-\alpha} > g_2/A \propto g_1^{1-2\alpha} g_2$. Пренебрегая малым α , получим $g_{12}^2 > g_1 g_2$. Таким образом, вблизи кривой фазового перехода II рода по φ_1 может появиться область, в которой выпадает конденсат φ_2 .

В точке пересечения линий фазового перехода $\tau_1 = \tau_2 = 0$ оба поля сильно флуктуируют. Анализ реальной трехмерной ситуации возможен лишь в ε -приближении. Введем отношения $x = (g_1 - g_2)/(g_1 + g_2)$, $y = g_{12}/(g_1 + g_2)$. Топологическая структура фазовой плоскости уравнений ренорм-группы

в 4-мерном случае показана на рис. 5. При всех m и n имеется пять неподвижных точек. Одна из них — притягивающий центр (1), остальные — отталкивающие центры или седла.

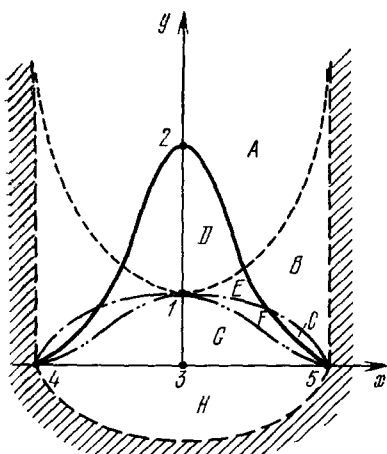


Рис. 5.

В области, ограниченной сепаратрисами (2—4), (2—5), (4—5), точки движутся к притягивающему центру. Вне этой области по мере увеличения масштаба ($\xi \rightarrow \infty$) точки уходят на бесконечность. Штриховой линией отмечена граница устойчивости ($x^2 + y^2 = 1$, $x = \pm 1$). Притягивающий центр соответствует либо асимптотической симметрии O_{n+m} ($n + m < 4$), либо исходной симметрии $O_n \times O_m$. В зависимости от того, в каком участке фазовой плоскости находятся начальные значения g_1, g_2, g_{12} , возможны различные диаграммы состояний. Некоторые из них приведены на рис. 6. Подробный анализ см. в работе Люксютова, Покровского и Хмельницкого³⁸. Общая тенденция, по-видимому, состоит в том, что увеличение числа независимых полей, имеющих размерность нуль, приводит к исчезновению устойчивости. Например, в интересном с точки

зрения физики случае, когда число полей равно четырем, можно составить три кубических инварианта четвертого порядка:

$$I_1 = \sum_{i=1}^4 \varphi_i^4, \quad I_2 = \sum_{i \pm k} \varphi_i^2 \varphi_k^2, \quad I_3 = \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4. \quad (10.12)$$

В этом случае, как нетрудно выяснить, анализируя уравнения ренорм-группы, ни одна из неподвижных точек не является устойчивой (Бразов-

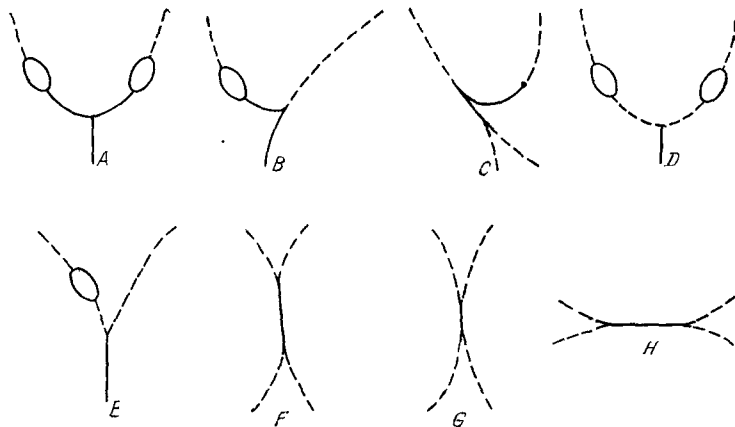


Рис. 6.

ский и Дзялошинский⁴⁴). Поэтому следует ожидать, что в этом случае все переходы являются переходами первого рода, разумеется, с оговоркой о возможной неприменимости ε -разложения при $\varepsilon = 1$. Физически модель с четырехкомпонентным параметром порядка соответствует магнитному фазовому переходу в кристаллах с кубической гранецентрированной решеткой. Роль параметров φ_1, φ_2 играют проекции спинов, нахо-

дящихся в вершинах куба и центрах его граней, на его диагонали. В качестве примера вещества, в котором обнаружен магнитный фазовый переход I рода, назовем MnO ⁴⁵.

По-видимому, впервые анализ неустойчивости в сверхпроводниках и жидких кристаллах был дан в работе Хальперина, Любенского и Ма ⁴⁶. Применения в теории жидких кристаллов и теории поля анализировались в работах Вигмана, Ларкина и Филева ^{47, 48}.

Более сложные магнитные системы анализировались в работах Мукамея, Бака, Кринского ⁴⁹ и Бразовского, Дзялошинского и Кухаренко ⁵⁰.

11. ДИНАМИКА ВБЛИЗИ ТОЧКИ ФАЗОВОГО ПЕРЕХОДА

Вместе с радиусом корреляции растет характерное время релаксации флуктуаций. Это приводит к ряду особенностей в динамических явлениях: аномальному поведению кинетических коэффициентов, связанных с сильно флуктуирующими величинами (см. ⁵¹), сужению линии рэлеевского рассеяния света вблизи критической точки смещения ⁵², аномалиям в поглощении звука и другим колебаний. Важнейшим вопросом теории является зависимость времени (частоты) релаксации флуктуаций от безразмерной температуры.

Было развито два теоретических подхода к динамике вблизи фазового перехода. Один из них рассматривает взаимодействие различных гидродинамических движений (звуков, теплопроводности, диффузии) с флуктуационными степенями свободы и между собой (Кавасаки ⁵³, Каданов и Свифт ⁵⁴, Поляков ⁵⁵). Другой (Хальперин и Хоэнберг ⁵⁶) основан на простых феноменологических соображениях. Считается, что флуктуационные движения переходят в гидродинамические при длине порядка корреляционного радиуса. Так как спектр колебательных движений (звука, спиновых волн) связан только с термодинамическими величинами, частота релаксации флуктуаций определяется при таких предположениях только статическими индексами. Например, в случае сверхтекучего гелия частоту релаксации ω_r разумно отождествить с частотой второго звука $\omega = u_2 q$ при $q \sim r_c^{-1}$ (u_2 — скорость второго звука). Это дает

$$\omega_r \sim u_2 r_c^{-1} \propto \left(\frac{\rho_s}{C} \right)^{1/2} r_c^{-1} \propto r_c^{-3/2} C^{-1} \propto \tau^{-1}.$$

Выше точки перехода гидродинамическое движение, связанное с флуктуациями сверхтекучей компоненты, — теплопроводность. Для нее характерна дисперсия $\omega = i(\lambda/C) q^2$, где λ — коэффициент теплопроводности. Из соображений размерности находим $\lambda \propto r_c^{1/2} \propto \tau^{-1/3}$, что находится в хорошем согласии с экспериментом.

С другой стороны, точный микроскопический анализ (Поляков ⁵⁵) показывает, что для перехода флуктуационных движений в гидродинамические при $q \propto r_c^{-1}$ а priori нет причин. Поэтому вопрос о том, определяется ли зависимость ω_r от τ только статическими индексами, является для теории важным. Обычно вводят динамический индекс z : $\omega_r \propto r_c^{-z}$. Для вычисления индекса z нужно было бы исходить из точных уравнений динамики системы. Но такая программа не реалистична. Ясно, что взаимодействие флуктуационных степеней свободы с остальными лишает нас возможности рассматривать флуктуации как замкнутую динамическую систему. Для статики это было несущественно, так как исключая лишние степени свободы, всегда можно свести первоначальную проблему к универсальной проблеме флуктуирующего поля. В случае динамики такой универсальности нет. Можно рассматривать чисто релаксационные движения параметра порядка, но в принципе возможны и колебательные (второй

звук, мягкие оптические моды в кристалле). Чтобы исключить эту возможность, условимся рассматривать систему выше точки перехода. Естественно исходить из простейшего кинетического уравнения типа

$$\frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi}. \quad (11.1)$$

Вблизи равновесного значения φ_0 производная $\delta \mathcal{H}/\delta \varphi$ мала. В линейном приближении можно представить уравнение (1) в виде

$$\frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \left. \frac{\delta^2 \mathcal{H}}{\delta \varphi^2} \right|_{\varphi_0} \delta \varphi = - \frac{1}{\chi} \delta \varphi, \quad (11.2)$$

где χ — статическая восприимчивость. Если предположить, что Γ_0 регулярно в точке перехода, то масштабная размерность ω_r совпадает с размерностью χ^{-1}

$$z \equiv \Delta_\omega = -\Delta_\chi = 2 - \eta. \quad (11.3)$$

Пусть релаксация энергии описывается аналогичным уравнением

$$\frac{1}{\lambda_0} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varepsilon}. \quad (11.4)$$

Этому процессу следует приписать другую частоту $\omega_\varepsilon \sim \lambda_0 (\delta^2 \mathcal{H}/\delta \varepsilon^2) \sim \sim \lambda_0/C$ с размерностью C^{-1} , т. е. $\Delta_\omega = \alpha/\nu$.

Если параметр порядка является сохраняющейся величиной, как, например, магнитный момент ферромагнетика, то при однородном отклонении от равновесия релаксация не происходит. Простейшее изотропное обобщение кинетического уравнения (11.1), обладающее этим свойством, имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \Delta \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi}; \quad (11.5)$$

здесь Δ — лапласиан. Рассуждения, полностью аналогичные предыдущим, показывают, что в этом случае $\Delta_\omega = 4 - \eta$. Если энергию флуктуаций можно считать сохраняющейся величиной, то $\Delta_\omega = 2 + (\alpha/\nu)$. Естественно, что релаксация в системе определяется самым медленным процессом. Например, если параметр порядка не сохраняется, а энергия сохраняется и $\alpha > 0$, то $\Delta_\omega^e > \Delta_\omega^p$. В этом случае самым медленным является процесс релаксации энергии (температуры).

Но насколько законно считать кинетические коэффициенты Γ_0 , λ_0 несингулярными величинами? Ответ на этот вопрос дается в следующих параграфах.

12. КРИТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ГРУППЫ РЕНОРМИРОВОК

Преобразования группы ренормировок могут быть применены и к уравнениям динамики критических флуктуаций. В простейшем случае эти уравнения имеют вид (см. гл. 11)

$$\frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = - \frac{\delta \mathcal{H}}{\delta \varphi} + \hbar. \quad (12.1)$$

Здесь мы обозначили термодинамический потенциал буквой \mathcal{H} для сохранения единства обозначений. В общем случае это уравнение имеет вид

$$L \{ \varphi(\mathbf{x}, t) \} = \hbar. \quad (12.2)$$

Поле $\varphi(\mathbf{x}, t)$ является уже сглаженным, оно содержит лишь фурье-гармоники $\varphi_q(t)$ с волновыми векторами q , меньшими q_0 . Представим $\varphi(\mathbf{x}, t)$

в виде суммы

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad (12.3)$$

где «медленно» меняющееся поле φ_0 содержит гармоники с волновыми векторами $q \leq \lambda q_0$, а «быстро» меняющееся φ_1 содержит гармоники φ_q в интервале $\lambda q_0 < q < q_0$. В принципе, можно решить уравнения для поля φ_1 , считая φ_0 заданной величиной. Результат зависит от начальных условий для поля φ_1 . Будем считать, что в начальный момент поля φ_1 являлось случайной величиной, распределенной по Гиббсу. Подставим решение φ_1 в уравнение для φ_0 . Тогда уравнение для φ_0 зависит от начальных условий для φ_1 как от параметров. Усредним по этим начальным условиям. Полученное уравнение можно записать в виде

$$L' \{ \varphi_0(x, t) \} = S(\lambda) L \{ \varphi(x, t) \} = S(\lambda) h. \quad (12.4)$$

Таким образом, мы определили операцию сглаживания над нелинейным оператором L . Произведем теперь операцию масштабного преобразования $x \rightarrow \lambda x$ ($q \rightarrow \lambda^{-1}q$), $\varphi_q \rightarrow Z(\lambda) \varphi_q$.

Одновременно сглаживается и гамильтониан \mathcal{H} способом, указанным в гл. 3. Произведем теперь растяжение $D(\lambda)$ (см. гл. 3), так, чтобы по-прежнему коэффициент при $q^2 \varphi_q \varphi_{-q}$ оставался равным $1/2$. Тем самым выбор ренормировочного множителя $Z(\lambda)$ однозначно закрепляется. Остается еще возможность умножить обе части динамического уравнения на произвольный множитель Z' . Мы выберем Z' таким образом, чтобы в правой части ренормированного уравнения (12.2) возникло ренормированное поле $h' = R(\lambda) h$. Таким образом, $Z' = Z(\lambda)$. Теперь все преобразования стали однозначными, и кинетические коэффициенты Γ_i приобрели свойства инвариантных зарядов. Одновременно изменяется и гамильтониан \mathcal{H} способом, указанным в гл. 3. Напомним, что при следующем ренормировочном шаге гамильтониан $R(\lambda) \mathcal{H}$ определяет начальные условия или способ усреднения по φ_1 .

Перейдем к дифференциальной формулировке. При бесконечно малом изменении $\lambda = e^{-\xi}$ ренормированный оператор L отличается от первоначального величиной, пропорциональной $\delta\xi$. Однако на этот раз производная $\partial L / \partial \xi$ зависит не только от L , но и от \mathcal{H} , определяющего начальные условия. Поэтому вместо одного уравнения возникает система уравнений группы ренормировок:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \xi} &= F(L, \mathcal{H}), \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi} &= f(\mathcal{H}). \end{aligned} \quad (12.5)$$

Второе уравнение системы (12.5) является чисто статическим. Его «корни» \mathcal{H}^* определяют неподвижные точки группы ренормировок. Очевидно, что неподвижная точка системы (12.5) L^*, \mathcal{H}^* (динамическая неподвижная точка) автоматически является неподвижной точкой статики. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. Будем предполагать, что \mathcal{H}^* , соответствующее критической точке, одновременно является компонентой динамической неподвижной точки L^*, \mathcal{H}^* . Это и есть гипотеза динамического подобия.

Пусть L и \mathcal{H} близки к неподвижной точке L^*, \mathcal{H}^* :

$$L = L^* + \delta L, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}^* + \delta \mathcal{H}. \quad (12.6)$$

Отклонения δL и $\delta \mathcal{H}$ подчиняются линейным уравнениям

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \xi} = \hat{M} \delta L + \hat{N} \delta \mathcal{H}, \quad \frac{\partial \delta \mathcal{H}}{\partial \xi} = \hat{K} \delta \mathcal{H}, \quad (12.7)$$

где \hat{M} , \hat{N} , \hat{K} — производные функционалов F и f . Как и в статическом случае, система уравнений (12.7) определяет размерности различных величин вблизи критической точки. Положим $\delta\mathcal{H} = 0$ ($\mathcal{H} = \mathcal{H}^*$). Оставшееся уравнение

$$\frac{d\delta L}{d\xi} = \hat{M}\delta L \quad (12.8)$$

определяет динамические размерности.

13. ДИНАМИКА В ОКРЕСТНОСТИ ГАУССОВОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Если одно из собственных значений матрицы K мало, то повторяя почти дословно аргументацию, приведшую к уравнениям (12.2), (12.3), получим и в случае динамики уравнения того же вида. В динамическом случае в число полей h_i надо включить коэффициенты Γ_i при различных производных по времени от величины φ . Уравнения для них имеют вид

$$\frac{d \ln \Gamma_i}{d\xi} = F_i(h_0), \quad (13.1)$$

где h_0 — величина, имеющая малую размерность.

В пространстве размерности $4 - \varepsilon$ величиной, имеющей малую размерность, является инвариантный заряд g -коэффициент при $\int \varphi^4 dx$ в гамильтониане. Дальнейшая задача состоит в выяснении вида функций F_i . Как и в статическом случае, получим эту функцию методом теории возмущений. Здесь необходимо перейти к конкретной задаче. Мы рассмотрим три разных случая.

а) Параметр порядка и энергия не сохраняются

В этом случае (см. также ², гл. 6) динамическое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -(\tau_0 \varphi - \Delta \varphi + 4g_0 \varphi^3) + h. \quad (13.2)$$

Уравнение (13.2) будем решать методом итераций по малой величине g_0 . В наинизшем приближении по g_0 φ_1 не зависит от φ_0 и подчиняется линейному уравнению

$$\frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -(\tau_0 \varphi_1 - \Delta \varphi_1) + h_1; \quad (13.3)$$

здесь h_1 — сторонние случайные силы, нормированные условием (см. ¹):

$$\langle h_1(x, t) h_1(x', t') \rangle = 2\Gamma_0 \delta(x - x') \delta(t - t'). \quad (13.4)$$

Перейдем к фурье-представлению $\varphi_{1q\omega}$ по координатам и времени. Флуктуационно-диссипативная теорема (см. ¹) устанавливает соотношение между средними значениями $\langle \varphi_{q\omega} \varphi_{-q-\omega} \rangle$ и функцией линейного отклика $G_0(q, \omega)$:

$$G(q, \omega) = \langle \varphi_{1-q\omega} \varphi_{1-q-\omega} \rangle = \frac{2T}{\omega} \text{Im } G_0(q, \omega), \quad (13.5)$$

где

$$G_0(q, \omega) = \left(\frac{i\omega}{\Gamma_0} + \tau_0 + q^2 \right)^{-1}. \quad (13.6)$$

Нормировочный коэффициент в (13.5) и (13.6) выбран так, чтобы одновременный коррелятор $\langle \varphi_{1q} \varphi_{1-q} \rangle$ равнялся T/q^2 при $\tau = 0$. Уравнение для

«медленной» функции φ_0 (см. гл. 12) имеет вид

$$\frac{1}{\Gamma_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + \tau_0 \varphi_0 - \Delta \varphi_0 \equiv G_0^{-1} \varphi_0 = -12g_0 \varphi_1^2 \varphi_0 + h_0. \quad (13.7)$$

Итерируя (13.7) до второго порядка по g_0 , находим

$$\varphi_0 = G_0 h_0 - 12g_0 G_0 \varphi_1^2 G_0 h_0 + 144g_0^2 G_0 \varphi_1^2 G_0 \varphi_1^2 G_0 h_0. \quad (13.8)$$

Усредняя по φ_1 , получим

$$\varphi_0 = \hat{G} h_0, \quad (13.9)$$

где

$$\hat{G} = G_0 - 12g_0 G_0 \langle \varphi_1^2 \rangle G_0 + 144g_0^2 G_0 \langle \varphi_1^2 G_0 \varphi_1^2 \rangle_{q, \omega}. \quad (13.10)$$

Переходя в $q - \omega$ -представление, преобразуем (13.10) к виду

$$G^{-1}(q, \omega) = G_0^{-1}(q, \omega) + 12g_0 \langle \varphi_1^2 \rangle - 144g_0^2 \langle \varphi_1^2 G_0 \varphi_1^2 \rangle_{q, \omega}. \quad (13.11)$$

Второе слагаемое в правой части (13.11) приводит к уже известной статической ренормировке τ_0 . Последнее слагаемое, кроме статической ренормировки τ_0 и коэффициента при $q^2 \varphi_{q, \omega}$, приводит также к изменению коэффициента при $\omega \varphi_{q, \omega}$:

$$\omega \delta \left(\frac{1}{\Gamma_0} \right) = -144g_0^2 [\langle \varphi_1^2 G_0 \varphi_1^2 \rangle_{0, \omega} - \langle \varphi_1^2 G_0 \varphi_1^2 \rangle_{0, 0}]. \quad (13.12)$$

Для конкретного вычисления (13.12) необходимо найти величину

$$\begin{aligned} \Sigma_2(q, \omega) &= 144g_0^2 \langle \varphi_1^2 G_0 \varphi_1^2 \rangle_{q, \omega} = \\ &= 144g_0^2 \cdot 2 \int G(p_1, \omega_1) G(p_2, \omega_2) G(p_1 + p_2 + q, \omega_1 + \omega_2 + \omega) \times \\ &\quad \times \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \frac{d\omega_1}{2\pi} \frac{d\omega_2}{2\pi} \end{aligned} \quad (13.13)$$

при $q = 0$ и вычесть из нее $\Sigma_2(0, 0)$. После вычитания, сохраняя линейный по ω член, находим

$$\delta \left(\frac{1}{\Gamma_0} \right) = \frac{1}{\Gamma_0} g_0^2 S_4^2 \cdot 144 \ln \frac{4}{3}. \quad (13.14)$$

Далее, согласно общему рецепту, произведем растяжение $\varphi_q = Z(L) \varphi_{q'}$, где $Z(L) = L^{(d+2-\eta)/2}$. Находим при $g = g^*$

$$\frac{d \ln \Gamma}{d \xi} = 2 - \eta + \frac{1}{9} \varepsilon^2 \ln \frac{4}{3} = 2 + c\eta, \quad (13.15)$$

где $c = 6 \ln(4/3) - 1$. В этом случае возникает новый динамический индекс, не связанный со статическими.

б) Параметр порядка сохраняется, энергия не сохраняется

В этом случае уравнение динамики имеет форму (12.5). Соответствующая функция отклика G_0 при $\tau = 0$ имеет вид

$$G_0 = \frac{1}{(\omega/\Gamma_0 q^2) + q^2}.$$

Необходимо исследовать величину

$$\frac{i\omega}{q^2} \delta \left(\frac{1}{\Gamma_0} \right) = \Sigma_2(\omega, q) - \Sigma_2(0, 0),$$

где Σ_2 определена уравнением (13.13). Исследование показывает, что при ω и q , стремящихся к нулю, эта величина стремится к определенному

пределу. Поэтому $\delta(1/\Gamma_0) = 0$. Кинематический коэффициент Γ_0 не ренормируется и остается конечным в точке перехода. В этом случае, как показано в предыдущем параграфе, $\Delta_\omega = 4 - \eta$.

Такой же результат получается в случае, когда сохраняется и параметр порядка и энергия.

в) Параметр порядка не сохраняется, энергия сохраняется

Здесь удобной является модель с двумя независимыми полями φ и ε , подчиняющимися уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\Gamma_0 \frac{\delta H}{\delta \varphi} + h(x, t), \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -\lambda_0 \Delta \frac{\delta H}{\delta \varepsilon} + \tau(x, t),\end{aligned}\quad (13.16)$$

где h, τ — сторонние случайные поля,

$$\mathcal{H} = \int \left[\frac{1}{2} \tau_0 \varphi^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + g_0 \varphi^4 + \gamma_0 \varepsilon \varphi^2 + \frac{1}{2} C_0 \varepsilon^2 \right] dx. \quad (13.17)$$

В статике интегрирование по полю ε выполняется точно и приводит к гамильтониану Ландау с несколько измененной константой $g_0 \rightarrow g_0 - (C_0 \gamma_0^2 / 2)$. Поэтому сразу очевидно, что величина ε имеет ту же размерность, что и φ^2 . Зачем же понадобилось вводить две независимые величины в теорию? В реальной системе, описываемой истинным гамильтонианом, возникают гидродинамические моды, одной из которых является теплопроводность. Какова бы ни была затравочная константа взаимодействия g_0 , связь между гидродинамической модой и флуктуационными степенями свободы оказывается не малой и к тому же обладающей особенностями при $k = 0$. Поэтому прямой расчет в рамках формализма статистической механики наталкивается на трудности, пока не преодоленные. Вместе с тем есть надежда, подтверждаемая экспериментальными фактами, что в точке фазового перехода связь окажется слабой. Введение переменной ε позволяет начать с малой окрестности гауссовой неподвижной точки и дает феноменологический способ описания сингулярной части взаимодействия, соответствующей гидродинамической моде.

Перейдем к вычислениям. Поле φ будем считать n -компонентным. Как и в статическом случае, вычисления облегчаются, если использовать графический метод. Будем изображать спаривания $\langle \varphi_1 \varphi_1 \rangle$ сплошной прямой линией, спаривания $\langle \varepsilon \varepsilon \rangle$ — сплошной волнистой линией, функции G_0 отклика поля φ (в линейном приближении) — пунктирной прямой, а функции отклика D_0 — штриховой волнистой линией.

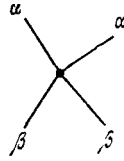
Отклик поля ε в линейном приближении имеет вид

$$D_0(k, \omega) = \left(\frac{i\omega}{\lambda_0 k^2} + C_0^{-1} \right)^{-1}. \quad (13.18)$$

Отклик поля φ в том же приближении

$$G_{0\alpha\beta}(k, \omega) = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{(i\omega/\Gamma_0) + \tau_0 + k^2}. \quad (13.19)$$

Величине g_0 сопоставим точку, в которую входят две пары прямых линий, соответствующих φ_α , φ_β :



Величина γ_0 изображается точкой, в которой встречается одна волнистая линия (ε) и две прямые (φ). Изменение коэффициента λ после сглаживания определяется графиком вида



которому сопоставляется интеграл

$$-\gamma_0^2 \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{1}{(i\omega'/\Gamma) + p^2} \cdot 2T_c \operatorname{Im} \frac{1}{[i(\omega - \omega')/\Gamma] + (\mathbf{k} - \mathbf{p})^2}. \quad (13.20)$$

Интеграл (13.20) при $k \rightarrow 0$ не содержит членов вида $i\omega/k^2$. Поэтому коэффициент λ_0 не меняется при сглаживании. При масштабном растяжении он умножается на L^2 .

Перейдем к сглаживанию величины Γ . В наинизшем порядке оно определяется двумя графиками:



которые в сумме изображают интеграл:

$$\Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2 = -\gamma^2 C \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{1}{p^2} \frac{[\Gamma + (\lambda/c)] p^2}{i\omega + [\Gamma + (\lambda/c)] p^2}. \quad (13.21)$$

Мы уже видели, что величина $\gamma^2 C$ имеет тот же порядок, что и g , т. е. ε . Поэтому график



вносивший главный вклад в случае а), можно не учитывать. Мы всюду писали γ , C , Γ , λ вместо γ_0 , C_0 , Γ_0 , λ_0 , поскольку в наинизшем порядке теории возмущений они совпадают.

После вычитания $\Sigma(\omega) - \Sigma(0)$, последующего вычисления интеграла и масштабного преобразования (как в случае свободного поля) находим

$$-\frac{d \ln \Gamma}{d\xi} = \frac{C\gamma^2 K_4}{1+\mu} + 2, \quad (13.22)$$

где

$$\mu = \frac{\lambda}{\Gamma C}. \quad (13.23)$$

Необходимо вычислить значения величин $C\gamma^2 K_4$ и μ в неподвижной точке. Первая задача является чисто статической. Сглаживание C

в первом ε -приближении определяется графиком

$$\text{---} \bigcirc \text{---} = -\frac{1}{2} n \gamma^2 \int \frac{d^4 p}{p^4} = -\frac{1}{2} n \gamma^2 K_4 \xi. \quad (13.24)$$

Последующее масштабное преобразование и дифференцирование по ξ дает

$$\frac{d \ln C}{d \xi} = -\frac{n}{2} \gamma^2 C K_4. \quad (13.25)$$

Согласно общей теории, C есть не что иное, как теплоемкость, размерность которой равна $\Delta_C = \alpha/\nu$. Отсюда

$$\frac{n}{2} \gamma^2 C^* K_4 = \frac{\alpha}{\nu}. \quad (13.26)$$

Далее из (13.23) и (13.22) находим

$$\frac{d \ln \mu}{d \xi} = -\frac{d \ln \Gamma}{d \xi} - \frac{d \ln C}{d \xi} + \frac{d \ln \lambda}{d \xi} = -\frac{C \gamma^2 K_4}{1 + \mu} + \frac{\alpha}{\nu}. \quad (13.27)$$

Уравнение (13.27) имеет три неподвижные точки $\mu^* = 0$, $\mu^* = \infty$ и $\mu^* = (2/n) - 1$. Последняя устойчива при $0 < n \leq 2$, первая при $2 \leq n < 4$. При $n > 4$ индекс α становится отрицательным, и устойчивой становится только точка $\mu^* = -\infty$. Из (13.22) находим

$$\frac{d \ln \Gamma}{d \xi} = - \begin{cases} 2 + (2\alpha/n\nu), & 0 < n \leq 2, \\ 2 + (\alpha/\nu), & 2 < n < 4, \\ 2, & n \geq 4. \end{cases} \quad (13.28)$$

Второй ответ соответствует ситуации, в которой медленнее всего релаксирует энергия. В этом случае и параметр порядка релаксирует с той же частотой. Третий ответ, если написать его с должной точностью (до ε^2), превратится в $2 + \text{ст.}$ В этом случае параметр порядка релаксирует медленнее, чем энергия, так как при $n > 4$ $\alpha < 0$. Интересен второй случай, когда возникает новое время релаксации, промежуточное между первым и третьим. К сожалению, не ясно, имеет ли этот ответ отношение к реальным системам. Кроме общей проблемы применимости ε -разложения, возникает вопрос об адекватности модели.

Исследование вопроса в пространстве размерности $4 - \varepsilon$ принадлежит Хальперину, Хоэнбергу и Ма⁵¹. Мы считаем это исследование полезным, так как оно поднимает важные вопросы о роли законов сохранения в динамике и показывает, как могут возникнуть динамические индексы, не определяющиеся статическими. Впервые такая возможность была указана Поляковым⁵⁵. К сожалению, модельный характер теории не позволяет однозначно отнести ее варианты к определенным экспериментальным ситуациям.

Недавно Абрахамс и Цунето⁵⁷ и Абрахамс, Грест и Завадовский⁵⁸ предложили теорию динамических явлений в гелии, основанную на применении идей Полякова⁵⁵ в сочетании с ε -разложением. Результаты их можно сформулировать следующим образом: в гидродинамической области правильна теория динамического подобия Хальперина — Хоэнберга, но динамический индекс флуктуаций не определяется статическими.

14. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА С ПОМОЩЬЮ РЕНОРМ-ГРУППЫ

Прямой метод расчета в принципе должен состоять в следующем. Пишем самый общий гамильтониан, например, в виде разложения в интегростепенной ряд. Производим бесконечно малое преобразование ренорм-группы и ищем неподвижные точки этого преобразования g^* (см. гл. 3).

Затем находим собственные значения линеаризованных вблизи g^* уравнений и соответствующие им «поля». Разумеется, все это в реальном трехмерном пространстве. К сожалению, такую программу легче сформулировать, чем выполнить. Необходимы приближенные методы. Прежде всего, нужно ограничить число рассматриваемых компонент вектора g , считая несущественными все, кроме нескольких первых. Далее, удобней осуществлять ренормировку конечными шагами.

Все проводившиеся до сих пор численные расчеты ^{21, 59, 60, 61} использовали операцию ренормировки не в импульсном, а в координатном пространстве, точнее говоря, на решеточных системах.

Пусть дана решеточная система в d -мерном пространстве, определяемая значениями переменных $\varphi_i = \varphi(x_i)$ в узлах x_i . Гамильтониан \mathcal{H} является функцией всех φ_i , инвариантной относительно группы G всех преобразований, не меняющих вида решетки. Поэтому можно представить его в виде ряда

$$\mathcal{H} = \sum g_h I_h(\varphi_i), \quad (14.1)$$

где $I_h(\varphi_i)$ — всевозможные инварианты группы G .

Совершим интегрирование по части переменных φ_μ и перейдем к новым переменным ψ_j , принимающим те же значения, что и φ_i в новой решетке, отличающейся от старой лишь размерами:

$$\mathcal{H}'(\psi_j) = R(\mathcal{H}) = -\ln \int \prod_\mu d\varphi_\mu e^{-\mathcal{H}(\varphi_i)} \quad (14.2)$$

Это преобразование эквивалентно нелинейному преобразованию вектора g :

$$g' = R(g). \quad (14.3)$$

Вид фиксированной точки существенно зависит от выбора переменных ψ_j и φ_μ , но собственные значения Δ_h инвариантны. Оставшийся произвол можно использовать для улучшения сходимости.

Приведем простейшие примеры. В простой «кубической» решетке введем две подрешетки (рис. 7). Произведем интегрирование по «спинам»

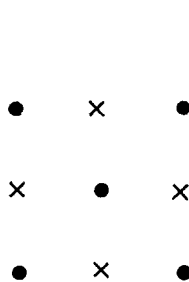


Рис. 7.

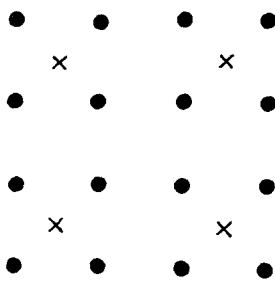


Рис. 8.

одной подрешетки. Тогда получим гамильтониан \mathcal{H}' , зависящий только от «спинов» второй подрешетки. Другой пример выбора переменных показан на рис. 8. Здесь суммирование ведется при фиксированных значениях сумм «спинов», окружающих помеченные крестиками ячейки. Такой расчет был проведен Кадановым и Хафтоном ²¹, проверявшими свой метод на точно решаемой плоской модели Изинга. Из всех инвариантов плоской модели Изинга они оставили небольшое число, соответствующее не слишком далеким и не слишком многочисленным связям спинов (12 в первом варианте), но большинство из них учитывалось лишь как возмущение.

Поразительно, что даже такой грубый метод расчета дал при подходящем выборе начальных условий совпадение с известными значениями индексов (ν , β) с точностью до четвертого знака.

Мы не можем здесь входить в детали расчета. Укажем еще на сформулированный Кадановым⁶² вариационный метод. Предлагается такой приближенный гамильтониан (вместо точного), который дает возможность, с одной стороны, явно провести процедуру ренормировки, а с другой — дает свободную энергию всегда либо больше, либо меньше точной. Известно, что получить свободную энергию больше точной довольно просто. Гораздо сложнее получить нижнюю оценку. Оказывается, достаточно, чтобы разность между точным и приближенным гамильтонианом представлялась суммой слагаемых, каждое из которых меняет знак хотя бы при одном преобразовании группы. Все аппроксимации, дающие завышенную свободную энергию, весьма грубы, а те, которые дают нижнюю границу свободной энергии, приводят к поразительно точным значениям индексов, по крайней мере в двумерной модели Изинга. По-видимому, причина состоит в соблюдении симметрии Крамерса — Ванье на каждом шагу расчета. Каданов, Хафтон и Ялабик⁶¹ нашли также и индексы трехмерной модели Изинга, но пока неясно, являются ли полученные ими значения лучшими по сравнению с результатами расчета с помощью высокотемпературных рядов.

Весьма грубый, но эффективный метод расчета многокомпонентных систем был предложен А. А. Мигдалом⁶³, подтвердившим существование фазового перехода в плоской системе двухкомпонентных классических спинов.

В принципе можно повышать точность численных методов, что невозможно в рамках ε -разложения. К сожалению, точность полученных результатов заранее неизвестна.

Примечание при корректуре. Идея о флуктуационной природе фазовых переходов первого рода в сложных антиферромагнетиках получила экспериментальное подтверждение в работе Блока и др.⁶⁶, измерявших антиферромагнитное упорядочение в образцах MnO , подвергнутых сильному одностороннему сжатию по оси $[111]$. В обычном состоянии MnO имеет кубическую симметрию. Звезда векторов, вдоль которых происходит модуляция плотности, состоит из четырех диагоналей куба. 12 компонент соответствующих 4-х векторов спиновой плотности разбиваются на 2 неприводимых представления. Предшествовавший нейтронографический анализ⁴⁵ показал, что в MnO осуществляется 8-компонентное представление, составленное из компонент векторов спиновой плотности, перпендикулярных соответствующим диагоналям куба. В этом случае теория предсказывает фазовый переход первого рода⁴⁸. Наложение напряжения вдоль оси $[111]$ резко понижает симметрию. Максимальная возможная размерность представления становится равной 3. В этой ситуации при не слишком сильной анизотропии теория дает фазовый переход второго рода⁶⁷, что и наблюдалось экспериментально.

Институт ядерной физики СО АН СССР,
Новосибирск
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау
АН СССР, Черноголовка (Московская обл.)

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, М., «Наука», 1964.
2. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, Флуктуационная теория фазовых переходов, М., «Наука», 1975.
3. W. M. Fairbank, C. Buckingham, C. F. Kellers, in: Proc. of 5th Intern. Conference on Low Temperature Physics, Madison, Wisconsin, 1957.
4. М. Н. Багацкий, А. В. Воронель, В. Г. Гусак, ЖЭТФ 43, 728 (1962).
5. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, ЖЭТФ 50, 439 (1966).
6. L. P. Kadanoff, Physics 2, 263 (1966).
7. В. Л. Покровский, УФН 94, 127 (1968).

8. М. А. Анисимов, УФН **114**, 249 (1974).
9. K. G. Wilson, Phys. Rev. **B4**, 3175, 3184 (1971).
10. K. G. Wilson, M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **28**, 240 (1972).
11. B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, S. K. Ma, *ibid.* **29**, 1548 (1973).
12. M. E. Fisher, A. Aharony, *ibid.* **30**, 559.
A. D. Bruce, A. Aharony, Phys. Rev. **B10**, 2078 (1974).
13. K. G. Wilson, J. Kogut, Phys. Rept. **C12**, 76 (1974).
14. M. E. Fisher, Rev. Mod. Phys. **46**, 597 (1974).
15. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, ЖЭТФ **46**, 994 (1964).
16. А. М. Поляков, ЖЭТФ **55**, 1026 (1968); Письма ЖЭТФ **12**, 538 (1970).
17. А. А. Мигдал, ЖЭТФ **55**, 1964 (1968).
18. B. Widom, J. Phys. Chem. **43**, 3892, 3896 (1965).
19. C. Domb, D. L. Hunter, Proc. Phys. Soc. **86**, 1147 (1965).
20. M. Gell-Mann, F. E. Low, Phys. Rev. **95**, 1300 (1954).
21. L. P. Kadanoff, A. Houghton, *ibid.* **B11**, 377 (1975).
22. А. З. Паташинский, ЖЭТФ **53**, 1987 (1967).
23. А. М. Поляков, ЖЭТФ **57**, 271 (1969).
L. P. Kadanoff, Phys. Rev. Lett. **23**, 1430 (1969).
24. Л. Д. Ландау, А. А. Брикозов, И. М. Халатников, ДАН СССР **95**, 497, 773, 1177 (1954).
В. В. Судаков, ЖЭТФ **30**, 87 (1956).
25. А. И. Ларкин, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ **56**, 2087 (1969).
26. T. Tsuneto, A. Abrahams, Phys. Rev. Lett. **30**, 217 (1969).
27. А. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., «Наука», 1973.
28. Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., «Наука», 1973.
29. F. J. Wegner, Phys. Rev. **B5**, 4529 (1972).
30. А. А. Мигдал, ЖЭТФ **59**, 1015 (1970).
31. K. G. Wilson, Phys. Rev. Lett. **28**, 548 (1972).
32. Г. М. Авдеева, А. А. Мигдал, Письма ЖЭТФ **16**, 253 (1972).
Г. М. Авдеева, ЖЭТФ **64**, 741 (1973).
33. E. Brezin, D. J. Wallace, K. G. Wilson, Phys. Rev. Lett. **29**, 591 (1972);
Phys. Rev. **B7**, 232 (1973).
34. А. А. Мигдал, ЖЭТФ **62**, 1559 (1972).
См. также: P. Schofield, J. D. Litster, J. T. Ho, Phys. Rev. Lett. **23**, 1098 (1969).
35. А. З. Паташинский, В. Л. Покровский, ЖЭТФ **64**, 1445 (1973).
36. E. Brezin, D. J. Wallace, Phys. Rev. **B7**, 1697 (1973).
37. И. Ф. Люксютов, В. Л. Покровский, Письма ЖЭТФ **21**, 22 (1975).
38. П. Ф. Люксютов, В. Л. Покровский, Д. Е. Хмельницкий, ЖЭТФ (1975).
39. D. R. Nelson, J. M. Kosterlitz, M. E. Fisher, Phys. Rev. Lett. **33**, 813 (1974).
40. D. Mukamel, *ibid.* **34**, 481 (1975).
41. S. Coleman, E. Weinberg, Phys. Rev. **D7**, 1889 (1973).
42. I. F. Liuksiuot, Phys. Lett. **A56**, 135 (1976).
43. А. И. Ларкин, С. И. Пикин, ЖЭТФ **56**, 1664 (1969).
44. С. А. Бразовский, И. Е. Дзялошинский, Письма ЖЭТФ **21**, 360 (1975).
45. D. Bloch, R. Maury, C. Vetter, W. B. Yelon, Phys. Lett. **A49**, 354 (1974).
46. B. I. Halperin, T. C. Lubensky, S. K. Ma, Phys. Rev. Lett. **29**, 1548 (1972).
47. П. Б. Вигман, А. И. Ларкин, В. М. Филев, ЖЭТФ **68**, 1883 (1975).
48. П. Б. Вигман, А. И. Ларкин, В. М. Филев, ЯФ **22**, 1225 (1975).
49. D. Mukamel, S. Krinsky, Phys. Rev. **B13**, 5065, 5078 (1975).
P. Bak, D. Mukamel, *ibid.*, p. 586.
50. С. А. Бразовский, И. Е. Дзялошинский, Б. Г. Кухаренко, ЖЭТФ **70**, 2257 (1976).
51. M. Archibald, J. M. Mochel, L. Weaver, Phys. Rev. Lett. **21**, 1156 (1968).
52. G. B. Benedek, in: Polarisation, matiere et rayonnement, P., Presses Universitaires de France, 1969 (имеется перевод: УФН **106**, 481 (1972)).
53. K. Kawasaki, Ann. Phys. (N. Y.) **61**, 1 (1970).
54. L. D. Kadanoff, J. Swift, Phys. Rev. **166**, 89 (1968).
55. А. М. Поляков, ЖЭТФ **57**, 2144 (1969).
56. B. I. Halperin, P. C. Hohenberg, Phys. Rev. **168**, 898 (1969).
57. E. Abrahams, T. Tsuneto, *ibid.* **B11** (1975).

58. E. A b r a h a m s, G. S. G r e s t, A. Z a w a d o w s k y, Preprint Rutgers Univ., 1975.
59. K. G. W i l s o n, in: Proc. of the Cargese Summer School on Field Theory and Critical Phenomena, N. Y., Gordon and Breach, 1973.
60. S. C. H s u, T h. N i e m e j e r, J. D. G o r t o n, Phys. Rev. B11, 2699 (1975).
61. L. P. K a d a n o f f, A. H o u g h t o n, M. C. Y a l a b i k, Preprint Brown University, 1975.
62. L. P. K a d a n o f f, Phys. Rev. Lett. 34, 1005 (1975).
63. А. А. М и г д а л, ЖЭТФ 69, 1457 (1975).
64. а) А. П. Л е в а н ю к, ЖЭТФ 36, 810 (1959).
б) В. Л. Г и н з б у р г, ФТТ 2, 2031 (1960).
65. E. B r e z i n, J. C. d e G u i l l o u, J. Z i n n-J u s t i n, Phys. Rev. B10, 892 (1974).
66. O. B l o c h, R. M a u r i, C. V e t t e r, W. B. Y e l o n, Phys. Rev. Lett. 35, 963 (1975).
67. P. B a k, D. M u k a m e l, S. K r i n s k y, ibid. 36, 829 (1976).