1976 г. Июнь Том 119, вып. 2
УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

## МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.3(018

# ОБ ОДНОМ «ПАРАДОКСЕ» ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

*Б. М. Болотовский, В. А. Угаров*

1. Применение теоремы Гаусса к нестационарному сферически-симметричному распределению зарядов ведет к неожиданному результату. Пусть заряд ограничен сферой радиуса $R$, а плотность заряда внутри сферы определяется функцией $\rho$ ($\mathbf{r}$, $t$). По теореме Гаусса, если искать поле вне заряженной сферы, получим

$$4\pi r^2 \varepsilon E\ (r,\ t) = 4\pi Q\ (t), \tag{1}$$

где $Q\ (t)$ — полный заряд сферы в момент $t$. Из (1) сразу же следует, что

$$E\,(r,\ t) = \frac{Q\ (t)}{r^2}, \tag{2}$$

а для потенциала $\varphi$ ($\mathbf{E} = -\nabla\varphi$)

$$\varphi\,(r,\ t) = -\frac{Q\ (t)}{r} \qquad (r > R). \tag{3}$$

Результаты (2) и (3), конечно, удивительны. Теорема Гаусса — это, по-существу, уравнение Максвелла $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho$, а в теории Максвелла скорость распространения взаимодействий (скорость распространения поля) конечна и равна скорости света $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Из (2) и (3) можно заключить, что поле распространяется мгновенно. Мгновенное распространение поля явно противоречит специальной теории относительности.

То, что выражение (3) соответствует бесконечно быстрому распространению взаимодействия, видно, в частности, и из того, что уравнение Даламбера (для вакуума)

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho\,(\mathbf{r},\,t) \tag{4}$$

переходит в уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho\ (\mathbf{r},\ t) \tag{5}$$

при $c \to \infty$. Выражение (3) как раз является частным решением уравнения Пуассона. Аналогичное же решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi\,(r,\ t) = \frac{Q\,(t-(r/c))}{r} \qquad (r \gg R), \tag{6}$$

который соответствует распространению взаимодействия со скоростью $c$. Может быть, теорема Гаусса справедлива не всегда? Но ответ гораздо проще. Всякое изменение плотности заряда должно подчиняться закону сохранения заряда

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\mathbf{j}=0, \tag{7}$$

где $\mathbf{j}$ — плотность тока.

По условию задачи вне сферы радиуса $R$ зарядов нет, т. е. $\rho=0$. Поэтому для любой сферической поверхности, проведенной вне сферы радиуса $R$, мы получим, что $\mathbf{j}\equiv\rho\mathbf{v}=0$. Следовательно, полный заряд внутри такой сферы остается постоянным:

$$Q=\int\rho(t)\,dV=\text{const}. \tag{8}$$

Но в этом случае разницы между (4) и (6) нет. Ответ оказался достаточно неожиданным: закон сохранения заряда не позволяет получить переменный суммарный заряд внутри некоторой сферической области, если вне ее $\rho=0$. Для этого вывода, конечно, сферическая симметрия несущественна.

2. Результат (2) следует, разумеется, не только из теоремы Гаусса, но также и из точного решения уравнений поля. Если исходить из системы уравнений Даламбера для потенциалов

$$\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=-4\pi\rho(\mathbf{r},t),\qquad \Delta A-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}(\mathbf{r},t), \tag{9}$$

то проще всего разложить поля, заряды и токи $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{A}$, $\varphi$, $\rho$ и $\mathbf{j}$ в интегралы Фурье, например,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t)=\int\mathbf{A}_{\mathbf{k},\omega}e^{i\mathbf{kr}-i\omega t}\,d\mathbf{k}\,d\omega,$$

и т. д. Как известно, дифференциальные соотношения между интересующими нас величинами в этом случае переходят в алгебраические соотношения между компонентами Фурье. Например, (7) переходит в

$$\mathbf{kj}_{\mathbf{k},\omega}-\omega_{\mathbf{k},\omega}=0. \tag{10}$$

Отсюда

$$\rho_{\mathbf{k},\omega}=\frac{1}{\omega}\mathbf{kj}_{\mathbf{k},\omega}=\frac{k}{\omega}\,j_{\mathbf{k},\omega}. \tag{11}$$

Последнее равенство написано с учетом сферической симметрии задачи: $\mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega}$ может быть направлено только по $\mathbf{k}$. Очевидно, можно также написать

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega}=\frac{\mathbf{k}}{k^2}\rho_{\mathbf{k},\omega}. \tag{12}$$

Уравнения (9) запишутся через компоненты Фурье так:

$$\begin{aligned}\left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi_{\mathbf{k},\omega}&=4\pi\rho_{\mathbf{k},\omega},\\ \left(k^2-\frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{A}_{\mathbf{k},\omega}&=\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega},\end{aligned} \tag{13}$$

откуда непосредственно следует

$$\varphi_{\mathbf{k},\omega}=\frac{4\pi\rho_{\mathbf{k},\omega}}{k^2-(\omega^2/c^2)},\qquad \mathbf{A}_{\mathbf{k},\omega}=\frac{4\pi}{c}\frac{\mathbf{j}_{\mathbf{k},\omega}}{k^2-(\omega^2/c^2)}. \tag{14}$$

Выражения (14) для $\varphi_{\mathbf{k},\omega}$ и $\mathbf{A}_{\mathbf{k},\omega}$ имеют полюсы при $k^2=(\omega^2/c^2)$. Обычно наличие полюса приводит к излучению электромагнитных волн, однако в рассматриваемом случае никакого излучения нет. Это сразу видно после перехода от потенциалов к полям. Воспользовавшись соотношениями $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - (1/c)\dot{\mathbf{A}}$, $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k},\,\omega} &= -i\mathbf{k}\varphi_{\mathbf{k},\,\omega} + \frac{i\omega}{c}\mathbf{A}_{\mathbf{k},\,\omega}, \\ \mathbf{H}_{\mathbf{k},\,\omega} &= i\,[k\mathbf{A}_{\mathbf{k},\,\omega}]. \end{aligned} \tag{15}$$

Из (14) видно, что $\mathbf{A}_{\mathbf{k},\omega}$ направлен по $\mathbf{j}_{\mathbf{k},\,\omega}$, а $\mathbf{j}_{\mathbf{k},\,\omega}$, как это видно из (12),— по вектору $\mathbf{k}$. Поэтому из (15) следует, что $\mathbf{H}_{\mathbf{k},\omega} = 0$. Сферическая симметрия задачи привела к исчезновению магнитного поля. Отсюда очевидно отсутствие излучения.

Найдем теперь электрическое поле. Из (15)

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\,\omega} = -4\pi i\frac{\mathbf{k}\rho_{\mathbf{k},\,\omega} - (\omega/c^2)\,\mathbf{j}_{\mathbf{k},\,\omega}}{k^2 - (\omega^2/c^2)}. \tag{16}$$

Преобразуем числитель (16) с помощью (11) и (12):

$$\mathbf{k}\rho_{\mathbf{k},\,\omega} - \frac{\omega}{c^2}\mathbf{j}_{\mathbf{k},\,\omega} = \frac{\mathbf{k}}{k^2}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\rho_{\mathbf{k},\,\omega} = \frac{1}{\omega}\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{j}_{\mathbf{k},\,\omega}. \tag{17}$$

Подставляя (17) в (16), видим, что полюс, имеющийся в выражении для потенциалов, в выражении для электрического поля исчезает. В результате имеем из (16)

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k},\,\omega} = -4\pi i\frac{\mathbf{k}}{k^2}\rho_{\mathbf{k},\,\omega} = \frac{4\pi i}{\omega}\mathbf{j}_{\mathbf{k},\,\omega}. \tag{18}$$

Если подставить это значение фурье-компоненты в выражение

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},\ t) = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k},\,\omega}\, e^{i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega t}\, d\mathbf{k}\, d\omega$$

и провести интегрирование, то и получим формулу (2). Заметим в заключение только, что отсутствие излучения в случае сферически-симметричного распределения зарядов следует также и из того, что в этом случае все мультипольные моменты постоянны.

3. Можно указать еще один случай, когда, на первый взгляд, появляется бесконечно быстрый сигнал [1]. Рассмотрим сферу, материал которой обладает проводимостью $\sigma$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon$. Из уравнений Максвелла следует зависимость для изменения объемной плотности заряда в любой точке

$$\rho\,(t) = \rho\,(0)\, e^{-\sigma t/\varepsilon} \tag{19}$$

Из (19) видно, что в любой точке, где $\rho\,(0) = 0$, плотность заряда появиться не может. Допустим теперь, что в момент $t = 0$ внутри очень малой сферы, концентрической с исходной, создана объемная (или даже поверхностная) плотность заряда. Этот заряд сразу же начнет согласно (19) убывать; нигде внутри сферы, опять же согласно (19), он появиться не может, следовательно, по закону сохранения заряда он должен сразу же появиться на поверхности шара в виде поверхностного заряда, причем вне зависимости от радиуса шара. Появление заряда на поверхности шара могло бы служить сигналом, и, как мы видим, бесконечно быстрым.

Но такой сигнал послать просто нельзя. Во-первых, как мы убедились, рассматривая предыдущий случай, мгновенно создать во внутренней области заряд невозможно: тем самым был бы нарушен закон сохранения заряда. Однако можно выдвинуть еще одно предположение. Пусть внутрь очень малой сферы, концентрической с исходной, когда-то давно был внесен заряд. Чтобы он не растекался, заключим его в тонкую оболочку из идеального диэлектрика. Эта ситуация стационарная; затем в некоторый момент уберем изолирующую оболочку. Тогда, на основе наших рассуждений, на поверхности большой сферы как будто должен возникнуть без промедления заряд. Нетрудно найти ошибку в этом рассуждении. Заряд, находящийся внутри исходной сферы и отделенный от нее изолирующей оболочкой, вызовет электростатическую индукцию в материале сферы. На границе с изолирующей оболочкой в диэлектрике появятся свободные заряды. Такие же заряды будут и на внешней границе диэлектрической сферы. Устранение изолирующей оболочки внутри сферы вызовет лишь компенсацию «привнесенного» заряда и свободного заряда на внутренней границе исходной сферы (эти заряды равны по абсолютной величине). Что же касается заряда на внешней границе сферы, то он просто останется неизменным.

*Примечание при корректуре.* Как это нередко бывает, то, что оказалось «парадоксом» для одних, у других не вызывает вопроса. Как отметили ознакомившиеся с заметкой Я. Б. Зельдович и И. А. Яковлев, закон сохранения заряда запрещает саму постановку задачи. Но именно это и составляет содержание приведенного в заметке объяснения.

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР
Московский государственный педагогический
институт им. В. И. Ленина

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Абрагам — Беккер, Теория электричества, М.— Л., ГОНТИ, 1939.