

**О НАПРЯЖЕНИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГАЗАХ ВСЛЕДСТВИЕ
НЕОДНОРОДНОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ И КОНЦЕНТРАЦИЙ.
НОВЫЕ ТИПЫ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ**

М. Н. Коган, В. С. Галкин, О. Г. Фридендер

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	111
2. Уравнения и граничные условия медленных неизотермических течений простого газа	112
3. Термострессовая (температурная) конвекция	117
4. Силы, обусловленные температурными напряжениями. Электростатическая аналогия	120
5. «Стоксово» обтекание равномерно нагретой сферы	121
6. Гидродинамика медленных течений смесей газов	122
7. Заключение	123
Цитированная литература	124

1. ВВЕДЕНИЕ

Первая часть заглавия данной статьи повторяет название известной работы Максвелла, опубликованной в 1879 г. ¹. В этой работе впервые был поставлен и исследован вопрос о существовании температурных напряжений в газе и о вызываемом этими напряжениями движении газа.

Анализируя обнаруженный Круксом ² радиометрический эффект, Максвелл высказал предположение, что одной из возможных причин этого эффекта являются температурные напряжения. Найдя при помощи построенной им кинетической теории ³ выражение для температурных напряжений и учтя их в уравнениях движения, Максвелл, однако, пришел к выводу, что эти напряжения не могут вызывать ни движения газа, ни сил, действующих на нагретые тела со стороны газа. Проанализировав же граничные условия для уравнений, описывающих макроскопическое движение газа, он дал теорию температурного скольжения и объяснил им радиометрический эффект (что справедливо для достаточно плотного газа).

Однако вывод о невозможности движения, обусловленного температурными напряжениями, в общем случае оказался неверным. Как будет показано ниже, сделанный вывод объясняется принятым Максвеллом линейризованным выражением для температурных напряжений. По-видимому, именно этот вывод Максвелла явился причиной того, что в течение десятилетий после получения точных выражений для температурных напряжений ^{4,5} не было обращено внимание на возможность конвекции газа, вызываемой этими напряжениями.

Общепринятые для описания течений газа уравнения Навье — Стокса не содержат температурных напряжений. Используемые в равной

степени для газов и жидкостей, эти уравнения получены в предположении линейных связей между тензорами напряжений и скоростей деформаций (закон Ньютона) и векторами потока тепла и градиента температуры (закон Фурье).

Эти линейные связи следуют как из феноменологических рассмотрений, так и из термодинамики необратимых процессов при условии малости отклонения состояния среды от термодинамически равновесного. Однако, чтобы «установить, какие отклонения можно считать малыми» и «фактически определить пределы применимости теории необратимых процессов, необходимо владеть более общей теорией, из которой данная теория получалась бы как частный случай. Для газов такой более общей теорией является кинетическая теория газов»⁶.

Ниже используются уравнения движения, получаемые на основе кинетической теории газов^{7, 8}. Эти уравнения наряду с навье-стоксовским тензором напряжений, пропорциональным коэффициенту вязкости и первым производным от компонентов скорости по координатам, содержат нелинейные члены, пропорциональные квадрату коэффициента вязкости, которые обычно считаются малыми по сравнению с навье-стоксовскими, и ими пренебрегают.

Однако в работах^{9, 10} показано, что для неизотермических течений газа при числах Маха $M \ll 1$ в числах Рейнольдса $Re \sim 1$ («медленные» течения) уравнения Навье — Стокса оказываются недостаточными и необходимо учитывать некоторые из упомянутых нелинейных членов. Цель настоящего обзора — осветить некоторые результаты, полученные в этой новой «не навье-стоксовской» газодинамике. В частности, будет рассмотрен новый тип конвекции газа в отсутствие внешних сил, обусловленный температурными напряжениями (термострессовская конвекция). В разделе 6 будут освещены аналогичные явления, возникающие в смесях газов.

2. УРАВНЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ МЕДЛЕННЫХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ ПРОСТОГО ГАЗА

Ниже рассматриваются течения газа в режиме «сплошной среды», т. е. такие течения, когда число Кнудсена мало:

$$Kn = \frac{\lambda_*}{L_*} = \frac{\mu_*}{\rho_* L_*} \left(\frac{k}{m} T_* \right)^{-1/2} \approx \frac{M}{Re} \ll 1, \quad (2.1)$$

где $M = u_*/a_*$, $Re = \rho_* u_* L_*/\mu_*$ — числа Маха и Рейнольдса, а λ_* , L_* , μ_* , ρ_* , T_* , u_* , a_* — характерные значения средней длины свободного пробега молекул, размера течения, коэффициента сдвиговой вязкости, плотности, температуры, скоростей газа и звука.

Уравнения неразрывности, состояния, импульса, энергии простого газа имеют соответственно вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} &= 0, & p &= \frac{k}{m} \rho T, \\ \rho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j} &= 0, & P_{ij} &= p_{ij} + p \delta_{ij}, \\ \frac{3}{2} \rho u_i \frac{\partial \ln T}{\partial x_i} + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + P_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где P_{ij} — тензор напряжений, \mathbf{q} — вектор потока тепла, k/m — газовая постоянная, p — давление.

Для замыкания системы (2.2) в феноменологической механике сплошной среды используются законы Ньютона и Фурье для напряжений

и теплового потока

$$p_{ij}^{(1)} = -2\mu \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right], \quad q^{(1)} = -\eta \nabla T, \quad (2.3)$$

где $[A_{ij}] = (1/2)(A_{ij} + A_{ji}) - (1/3)\delta_{ij}A_{kk}$. Такие же линейные выражения даются термодинамикой необратимых процессов. При этом входящие в (2.3) коэффициенты переноса μ, η должны быть взяты из опыта. Аналогичное положение имеет место и в феноменологических теориях, направленных на построение более общих (нелинейных) моделей сплошных сред: для построения обобщенных уравнений и особенно для определения значений входящих в них коэффициентов необходимы дополнительные сведения о свойствах среды, взятые из опыта.

Поскольку нас будут интересовать эффекты, экспериментальные данные о которых пока отсутствуют, то, по-видимому, единственную возможность открывает кинетическая теория. При этом, конечно, требуется знание законов взаимодействия молекул. Однако последние могут быть установлены в независимых опытах (например, с молекулярными пучками), либо получены на базе уже изученных явлений (по вязкости, теплопроводности, из вириальных коэффициентов и т. п.). Во всяком случае, при заданном законе взаимодействия молекул для получения нелинейных членов тензора напряжений и вектора потока тепла не требуется каких-либо дополнительных предположений (или информации) по сравнению с теми, которые делаются при выводе уравнений Навье — Стокса.

В безразмерном виде кинетическое уравнение Больцмана записывается в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \xi_r \frac{\partial f}{\partial x_r} = \frac{1}{Kn} J, \quad (2.4)$$

где J — интеграл столкновений, функция распределения f отнесена к $\rho_* a_*^{-3}$. Известный метод Чепмена — Энскога дает асимптотическое разложение решения этого уравнения в степенной ряд по числу Кнудсена $Kn \rightarrow 0$:

$$f \sim \sum_{h=0}^{\infty} f^{(h)}.$$

Каждому члену этого разложения соответствуют слагаемые выражений для напряжений и теплового потока

$$P_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij}^{(1)} + p_{ij}^{(2)} + \dots, \quad p_{ij}^{(2)} = p_{ij}^{(T)} + p_{ij}^{(*)}, \quad (2.5)$$

$$q_i = 0 + q_i^{(1)} + q_i^{(2)} + \dots, \quad q_i^{(2)} = \alpha_1 \frac{\mu^2}{\rho T} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_i} + \dots$$

Первым членам этих разложений соответствует приближение Эйлера, первым двум — Навье-Стокса, трем — так называемое приближение Барнетта^{7,8} и т. д. В соотношениях (2.5) из барнеттовских напряжений выделены температурные

$$p_{ij}^{(T)} = K_2 \frac{\mu^2}{\rho T} \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \right] + K_3 \frac{\mu^2}{\rho T^2} \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right], \quad (2.6)$$

остальные содержат производные от компонентов скорости и давления

$$p_{ij}^{(*)} = K_1 \frac{\mu^2}{\rho} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] + \dots$$

Коэффициенты K_i, α_i — порядка единицы и зависят от сорта молекул. В частности, для молекул, потенциал взаимодействия которых степенной, имеем: $\mu \sim T^s$, $K_2 = \omega_1$, $K_3 = \omega_1 s - \omega_3$, где ω_1, ω_3 — положительные

числа γ (для максвелловских молекул $s = 1$, $\omega_1 = 3$, $\omega_3 = 0$, для молекул — упругих шаров — $s = 1/2$, $\omega_1 = 2,418$, $\omega_3 = 0,990$).

Поскольку $\mu_* \approx \rho_* a_* \lambda_*$, то имеют место следующие оценки:

$$\left. \begin{aligned} p_{ij}^{(1)} &\sim \text{Kn} \rho_* a_* u_*, & p_{ij}^{(T)} &\sim \text{Kn}^2 \rho_* a_*^2 \theta, \\ p_{ij}^{(*)} &\sim \text{Kn}^2 \rho_* u_*^2, & p_{ij}^{(k \geq 3)} &\leq \text{Kn}^3 \rho_* a_* u_* \theta, \\ q^{(1)} &\sim \text{Kn} \rho_* a_*^3, & q^{(2)} &\sim \text{Kn}^2 \rho_* a_*^2 u_*. \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Здесь величина θ — характерное значение безразмерного перепада температуры в газе

$$\theta = \frac{(\Delta T)_*}{T_*}. \quad (2.8)$$

Полагая в (2.2) $P_{ij} = p\delta_{ij} + p_{ij}^{(1)}p_{ij}^{(2)}$ и $q_i = q_i^{(1)} + q_i^{(2)}$, получаем уравнения Барнетта⁵, которые в течение длительного времени рассматривались как необходимые для описания движения газа при таких числах Кнудсена, когда уравнения Навье — Стокса становятся несправедливыми*). И действительно, в ряде случаев (ультразвуковые колебания¹¹, точные решения уравнения Больцмана для специальных течений типа разлета¹²) уравнения Барнетта позволили продвинуться в сторону больших чисел Кнудсена, т. е. получить совпадение решений макроскопических уравнений с решениями уравнения Больцмана в более широком интервале значений числа Кн. Однако в общем случае рассматриваемые ряды по Кн не сходятся в обычном смысле: можно рассчитывать лишь на асимптотическую сходимость при $\text{Kn} \rightarrow 0$ ^{8, 13}. Поэтому учет следующего члена ряда, вообще говоря, не расширяет область применимости ряда по числам Кнудсена, а барнеттовское приближение лишь несущественно уточняет приближение Навье — Стокса при $\text{Kn} \rightarrow 0$. Поэтому интерес к уравнениям Барнетта был в значительной мере утерян и появились высказывания об их беспольности¹⁴.

В связи с этим в работах^{9, 10} был поставлен вопрос: существуют ли течения газа как сплошной среды (т. е. течения при $\text{Kn} \rightarrow 0$), для описания которых в главном приближении необходимо учитывать некоторые из барнеттовских слагаемых уравнений переноса, т. е. являются ли уравнения Навье — Стокса универсальными уравнениями газодинамики?

Концепция газа как сплошной среды реализуется при $\text{Kn} \approx M/\text{Re} \rightarrow 0$, т. е. для двух основных предельных случаев: 1) число $M = 0$ (1), $\text{Re} \rightarrow \infty$ («быстрые» течения, описываемые уравнениями Эйлера и пограничного слоя Прандтля) и 2) $\text{Re} = 0$ (1), $M \approx \text{KnRe} \rightarrow 0$ («медленные» течения). Настоящая работа посвящена анализу последнего случая.

Характерная скорость медленных течений $u_* \approx a_* M \approx a_* \text{KnRe}$. Если изменения температуры в таком течении обусловлены переходом кинетической энергии газа в тепловую вследствие диссипативных процессов, то характерный перепад температуры $\theta \sim M^2 \sim \text{Kn}^2 \ll 1$. В этом «изотермическом» случае согласно оценкам (2.7) все барнеттовские члены уравнений сохранения малы по сравнению с навье-стоксовскими (их отношение порядка Kn^2) и ими можно пренебречь. Следовательно, для описания изотермических течений справедливы уравнения Навье — Стокса.

Неизотермическими назовем течения при $\theta \sim 1$. Такие течения имеют место, например, если в газ поместить нагретые или охлажденные относи-

*) Решению задач динамики разреженного газа при помощи уравнений Барнетта посвящено довольно много работ, в которых исследуются структура ударной волны, распространение ультразвуковых колебаний, плоское и цилиндрическое течения Куэтта и т. д. Критический обзор основных результатов дан Шерманом и Толботом¹¹.

тельно газа тела. Тогда согласно (2.7) $p_{ij}^{(1)} \sim \text{Kn}^2 \text{Re} \rho_* a_*^2$, $p_{ij}^{(T)} \sim \text{Kn}^2 \rho_* \alpha_*^2$ и температурные напряжения того же порядка величины, что и обычные вязкие напряжения, входящие в уравнения Навье — Стокса, так как $\text{Re} \sim 1$. Остальные слагаемые p_{ij} порядка Kn^2 по сравнению с $p_{ij}^{(T)}$. С той же погрешностью $\mathbf{q} = -\eta \nabla T$.

Итак, в случае медленных неизотермических течений уравнения Навье Стокса несправедливы: в уравнении импульса необходимо учитывать температурные напряжения. Это происходит не потому, что велики барнеттовские напряжения, а потому, что малы скорости: так как $\text{Re} = 0$ (1), то скорости порядка «вязкой» скорости

$$|u_V = \frac{\mu_*}{\rho_* L_*} \sim a_* \text{Re Kn}. \quad (2.9)$$

Из-за этого малы возмущения давления, именно

$$p = p_* (1 + \text{Kn}^2 P)_* \quad (2.10)$$

где $p = 0$ (1) — безразмерная переменная часть давления.

Переходя к безразмерным переменным

$$T^* = \frac{T}{T_*}, \quad \rho^* = \frac{\rho}{\rho_*}, \quad p^* = \frac{p}{p_*}, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\mu_*}, \quad x_i^* = \frac{x_i}{L_*}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{u}}{u_V},$$

опуская в дальнейшем звездочки сверху у безразмерных величин, отбрасывая члены $O(\text{Kn}^2)$ по сравнению с главными, получаем искомые уравнения неизотермических стационарных течений простого газа:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \frac{1}{T}, \\ \nabla \mathbf{v} &= \mathbf{v} \nabla_i \ln T, \\ \frac{1}{T} v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial P}{\partial x_i} &= \\ &= \frac{\rho}{\partial x_j} 2\mu \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] - \frac{\partial}{\partial x_j} \mu^2 \left(K_2 \left[\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \frac{K_3}{T} \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \right), \\ &\frac{2}{3} \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T = \nabla (\mu \nabla T). \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Подчеркнем, что отличие (2.11) от соответствующих уравнений в приближении Навье — Стокса состоит в присутствии двух последних слагаемых правой части уравнения импульса с коэффициентами K_2 , K_3 .

Для наглядности мы ограничиваемся записью уравнений для простого одноатомного газа, когда отношение удельных теплоемкостей $\kappa = 5/3$, число Прандтля $\text{Pr} = C_p \mu_* / \eta_* = 2/3$. В более общем виде уравнения (2.11) записаны в работах ^{10, 15, 28}. В случае многоатомного газа структура уравнений не изменяется, изменяются лишь значения коэффициентов.

Уравнения (2.11) на первый взгляд имеют более высокий порядок, чем система уравнений переноса в приближении Навье — Стокса. Однако на самом деле температурные напряжения не увеличивают порядок системы уравнений и число граничных условий для (2.11) то же, что и для уравнений Навье — Стокса. В этом легко убедиться, если учесть, что старшая производная в $\partial p_{ij}^{(T)} / \partial x_j$ пропорциональна $\partial \nabla^2 T / \partial x_i$, и исключить $\nabla^2 T$ при помощи уравнения энергии (последнего уравнения из (2.11)).

Производя указанные преобразования, приведем уравнение импульса к виду

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{T} (\mathbf{v}\nabla) \mathbf{v} + \nabla\Pi &= \Pi^{(1)} - \omega T^{2s-2} (\nabla T)^2 \nabla T + \frac{4\omega}{3s} (\mathbf{v}\nabla \ln T) \nabla T^s, \\ \Pi_i^{(1)} &= \frac{\partial}{\partial x_j} T^s \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \omega = \frac{1}{2} (s\omega_1 + \omega_3), \\ \Pi &= P + \frac{1}{2} \left(s\omega_1 - \frac{\omega_3}{s} \right) T^{2s-1} (\nabla T)^2 + \frac{2}{3} \left(1 + \frac{2}{3} \omega_1 \right) T^{s-1} (\mathbf{v}\nabla T). \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Важно подчеркнуть, что часть тензора температурных и навье-стоксовских напряжений вошла в величину Π , которую можно рассматривать как обобщенное давление, а ее структуру нужно знать только при вычислении сил. Уравнение (2.12) выписано для частного случая $\mu = \eta = T^s$, когда известна ⁷ структура барнеттовских коэффициентов переноса. Более общий вид уравнений медленных течений, справедливый и для многоатомного газа, дан в работе ¹⁵ *).

Перейдем к граничным условиям. Из кинетической теории имеем граничные условия скольжения ^{8, 16}

$$\left. \begin{aligned} v_n &= O(\text{Kn}^2), \quad v_\tau = \beta_1 \frac{\partial T_w}{\partial x_\tau} + \beta_2 \text{Kn} \frac{\partial v_\tau}{\partial x_n} \Big|_{n=0} + O(\text{Kn}^2), \\ T_{n=0} &= T_w + \beta_3 \text{Kn} \frac{\partial T}{\partial x_n} \Big|_{n=0} + O(\text{Kn}^2), \quad \beta_i = O(1), \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

где n, τ — нормаль и касательная к стенке, предполагается, что $\theta = O(1)$. Из (2.13) следует, что с относительной погрешностью $O(\text{Kn})$ справедливы обычные условия непротекания $v_n = 0$ и равенства температур газа и стенки $T = T_w$; для тангенциальной составляющей скорости основным будет условие температурного скольжения

$$v_\tau = \beta \frac{\partial T_w}{\partial x_\tau} \quad (\text{при } n=0) \quad (2.13a)$$

(если изменение температуры стенки T_w вдоль поверхности тела порядка единицы, т. е. $\theta_w \sim 1$).

По классификации, данной в работе ¹⁷, это граничное условие является сильным, так как может вызывать самостоятельные движения газа, в отличие от остальных, выписанных в (2.13) условий, которые вносят лишь поправки к основному течению, обусловленному другими причинами ¹⁶.

Из (2.13a) следует, что при $\theta_w \sim 1$ температурное скольжение порождает течения со скоростями порядка u_V и должно учитываться наряду с температурными напряжениями, т. е. температурные напряжения и температурное скольжение должны вызывать эффекты одного порядка.

Выписанные выше уравнения справедливы вне пристеночного слоя Кнудсена толщиной порядка λ . Поэтому необходимо оценить изменения тензора напряжений и вектора потока тепла поперек этого слоя. Это нетрудно сделать ⁹, интегрируя полные уравнения сохранения поперек слоя Кнудсена. Оказывается, что указанными изменениями можно пренебречь с относительной погрешностью $O(\text{Kn})$.

Таким образом, приходящие к телу потоки импульса и тепла можно рассчитывать обычным способом, т. е. используя значения напряжений и теплового потока непосредственно на стенке, пренебрегая наличием кнудсеновского слоя. Этим замыкается постановка задачи.

Итак, для описания медленных неизотермических течений газа уравнения Навье-Стокса неприменимы: уравнениями газодинамики таких течений являются уравнения (2.11), (2.12) с граничными условиями $v_n = 0$, $T_{n=0} = T_w$ и температурного скольжения (2.13a) на стенке.

*) Выражение (1.7) для Y_T в этой работе приведено с опечатками: вместо символов $>$ должны стоять знаки минуса.

3. ТЕРМОСТРЕССОВАЯ (ТЕМПЕРАТУРНАЯ) КОНВЕКЦИЯ

Принципиальным является вопрос: вызывают ли температурные напряжения движение газа, т. е. обуславливают ли они новый тип конвекции газа в отсутствие внешних сил.

Для того чтобы газ около нагретых (охлажденных) тел покоился в случае, когда отсутствуют обычные источники вынужденной и свободной конвекции, а поверхности ограничивающих газ стенок S_i являются изотермическими (иначе $v \neq 0$ из-за температурного скольжения), необходимо, чтобы

$$\nabla (\eta \nabla T) = 0, \text{rot} [Y_T (\nabla T)^2 \nabla T] = 0 \quad (3.1)$$

(где Y_T — известная функция от T) с условиями $T = T_{wi}$ на S_i и $T = T_\infty$ при $x \rightarrow \infty$, где T_{wi} — заданные постоянные. Анализ этих условий (состоящий в основном в интегрировании второго уравнения (3.1) по изотермическим поверхностям или вдоль нормалей к ним) показывает⁹, что они выполняются для изотермической сферы, концентрических сфер, соосных круговых цилиндров и параллельных плоскостей, нагретых до различных температур, когда температурные напряжения могут уравновешиваться давлением.

Во всех остальных случаях в газе, ограниченном равномерно нагретыми (охлажденными) до различной температуры стенками, имеет место новый вид конвекции — термострессовая (температурная) конвекция, т. е. движение газа, вызванное температурными напряжениями.

В общем случае скорости термострессовой конвекции порядка u_T и она описывается уравнениями (2.11), (2.12) с условиями прилипания. Система этих уравнений весьма сложна, во всяком случае сложнее уравнений Навье-Стокса. Поэтому пока построены лишь простейшие примеры конвекции^{10, 18}. Опишем некоторые из них.

Если две полубесконечные пластины, образующие угол α (рис. 1), нагреты до разных температур, то согласно классической газодинамике газ между ними должен покоиться, и в нем должно установиться некоторое распределение температуры. Однако вследствие существования температурных напряжений газ между пластинами будет двигаться. Эта задача является аналогом известной задачи Гамеля для вязкой жидкости (см., например,¹⁶, стр. 72). Однако в последней движение обусловлено истечением жидкости из вершины угла (наличием ее расхода), здесь же оно обусловлено температурными напряжениями и имеет место при нулевом расходе. Задача автомодельна; в цилиндрической системе координат переменные ищутся в виде $T = T(\varphi)$, $v_r = \frac{V(\varphi)}{r}$, $v_\varphi = 0$, $\Pi = \pi(\varphi)r^{-2}$.

Для T , V , π получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, аналитическое решение которой найдено при $\theta \ll 1$, или при $\alpha \ll 1$. Численный анализ дан в работе¹⁸. Картина течения показана на рис. 1, где приведен профиль $V(\varphi)$.

Аналогичное автомодельное решение — это решение задачи о термострессовом течении между соосными коническими поверхностями¹⁸.

Определенные сведения о характере течений, обусловленных температурными напряжениями, можно получить методом возмущений^{10, 18}.

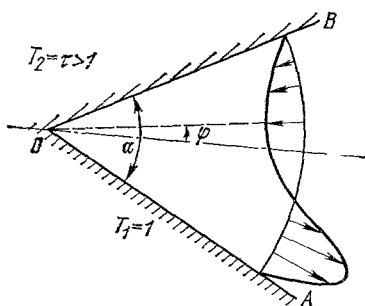


Рис. 1. Термострессовое течение в угле.

Укажем, например, на термострессовую конвекцию между слабо изогнутыми параллельными нагретыми до различных температур пластинами, которая схематично показана на рис. 2. В этом случае термострессовая конвекция вызывает лишь слабые возмущения распределения температуры,

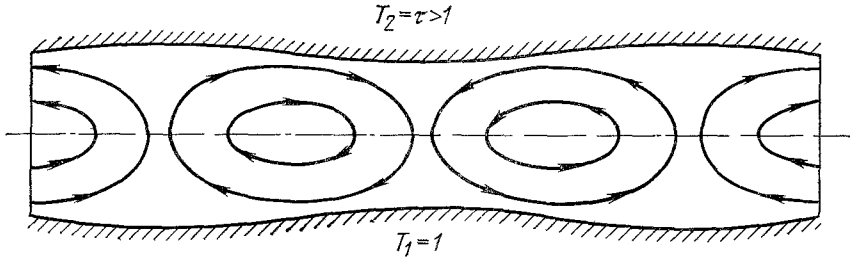


Рис. 2. Термострессовое течение между слабо изогнутыми стенками.

а следовательно, и теплового потока, по сравнению с распределениями, получаемыми в рамках уравнений Навье-Стокса.

Однако если искривления стенок не малы (как, например, при соприкосновении или сближении реальных шероховатых поверхностей тел), то распределение температуры и теплопередача изменяются на свой порядок, что может оказаться существенным для правильного понимания контактной теплопередачи.

Если $\theta \ll 1$, то скорости термострессовой конвекции $u_T \ll u_V$, поэтому и число $Re = u_T/u_V \ll 1$. Следовательно, течение будет «стоксовского» типа и исходные уравнения примут вид

$$\nabla \mathbf{v} = 0, \quad \nabla^2 T = 0, \quad (3.2)$$

$$\nabla \Pi - \nabla v = Y_{T=1} (\nabla T)^2 \nabla T, \quad \Pi = P + X_{T=1} (\nabla T)^2, \quad (3.3)$$

где Y, X — известные функции T , а тензор местных (на стенке) температурных напряжений

$$P_{ij}^T \approx K_2 \mu^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (3.4)$$

Отсюда следует, что при $\theta \ll 1$

$$v \sim \theta^3, \quad P \sim \theta^2. \quad (3.5)$$

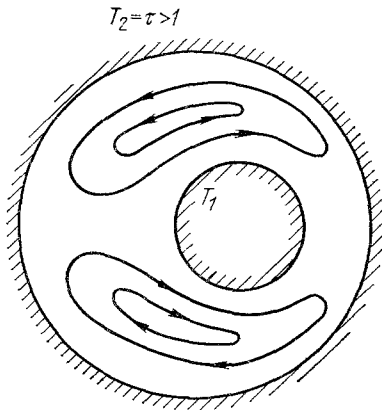


Рис. 3. Пример термострессовой конвекции при $(\tau - 1) \ll 1$.

«Температурная» задача отделилась от «скоростной». После нахождения температуры из уравнения Лапласа, которому она удовлетворяет при $\theta \ll 1$, правая часть уравнения импульса (3.3) известна. Ее можно интерпретировать как внешнюю силу, направление которой противоположно ($Y_T < 0$) направлению градиента температуры, а величина пропорциональна $|\nabla T|^2$; это позволяет довольно просто получать качественную картину линий тока (рис. 3).

В связи с изложенным необходимо сделать два замечания.

Выше течения рассматриваемого класса были названы медленными. Однако скорости в таких течениях необязательно должны быть очень малыми. Действительно, пусть в покоящийся на бесконечности газ помеще-

но тело с температурой $T_* \gg T_\infty$. Вблизи тела число Кнудсена

$$\text{Kn} \approx \text{Kn}_\infty \left(\frac{T_*}{T_\infty} \right)^{s+(1/2)} \ll 1 \quad (\mu \sim T^s).$$

Скорости термострессовой конвекции около тела порядка вязкой скорости и характерное число

$$\text{M}_* = \frac{u_V}{a_*} = \frac{\mu_*}{a_* \rho_* L_*} \approx \text{Kn} \ll 1.$$

В этом смысле течение медленное. Однако число Маха, рассчитанное по скорости звука на бесконечности,

$$\text{M} = \frac{u_V}{a_\infty} = \text{M}_* \frac{a_*}{a_\infty} \approx \text{Kn} \sqrt{\frac{T_*}{T_\infty}}$$

и при $T_*/T_\infty \gg 1$ оно может быть большим. Вместо тела можно рассмотреть объем газа, нагретый до высокой температуры внешним источником тепла, например, излучением. Если $\text{Kn} = 0,1$, $T_\infty = 300^\circ \text{K}$, а температура этого объема газа $T_* = 3 \cdot 10^4 \text{ }^\circ \text{K}$, то $\text{M} = 1$ и скорости термострессовой конвекции порядка 10^3 м/сек .

Вообще, следует заметить, что скорости термострессовой конвекции, когда $\text{Re} = 0$ (1), много больше характерных скоростей известного течения Стокса, соответствующего числам Рейнольдса $\text{Re} \ll 1$.

До сих пор мы не учитывали влияния внешних сил. Возникает вопрос, при каких условиях можно пренебречь влиянием свободной гравитационной конвекции по сравнению с рассматриваемыми здесь эффектами. Характерная скорость этой конвекции $u_g = L_*^2 \rho_* \mu_*^{-1} g$ будет меньше u_V , если

$$L \ll L_*, \quad L_* = \mu_*^{2/3} (g \rho_*^2 \theta)^{-1/3}.$$

Поэтому влияние гравитационной конвекции будет несущественно для частиц малых размеров. При нормальных атмосферных условиях $L_* = 3 \cdot 10^{-3} \text{ см}$, соответствующее число Кнудсена $2 \cdot 10^{-4}$. Нагретые частицы таких размеров широко встречаются на практике. При анализе их движения необходим учет термострессовых явлений. С уменьшением ρ_* величина L_* растет. Так, на высоте $H \approx 50 \text{ км}$, где плотность в 10^3 раз меньше плотности при нормальных условиях, $L_* \approx 1 \text{ см}$, соответствующее число Кнудсена $\text{Kn} \approx 10^{-3}$. Тот факт, что роль термострессовой конвекции растет с уменьшением плотности, может навести на мысль о том, что это явление обусловлено разреженностью, что оно свойственно течениям при $\text{Kn} \rightarrow \infty$. Поэтому важно подчеркнуть, что явление термострессовой конвекции имеет место при $\text{Kn} \rightarrow 0$. Наоборот, при $\text{Kn} \rightarrow \infty$ (т. е. в свободномолекулярном пределе) газ покоится около нагретых (охлажденных) тел произвольной формы (при обычных законах взаимодействия молекул газа с поверхностью).

Как уже отмечалось во введении, впервые на существование температурных напряжений обратил внимание Максвелл¹. Выражения для переносных свойств он получил из уравнений кинетических моментов для газа из максвелловских молекул, неявно положив, что $\theta \ll 1$. В итоге он получил для $p_{ij}^{(T)}$ выражение (3.4). Так как при $\theta \ll 1$ температура удовлетворяет уравнению Лапласа, а $\mu = \text{const}$ и $K_2 = \text{const}$, то

$$\left[\frac{\partial p_{ij}^{(T)}}{\partial x_j} \approx \frac{\partial}{\partial x_j} K_2 \mu^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = K_2 \mu^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla^2 T = 0 \right]$$

и температурные напряжения выпадают из уравнения импульса. Отсюда Максвелл сделал вывод, что эти напряжения не вызывают движения газа. После этого вопрос о существовании термострессовой конвекции, по-видимому, не ставился.

4. СИЛЫ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКАЯ АНАЛОГИЯ

Рассмотрим вопрос о силах, действующих на изотермические тела. В работе ¹⁵ прямым интегрированием по поверхности тела показано, что вклад местных температурных напряжений в действующую на какое-либо изотермическое тело из конечной системы k тел равен

$$F_i^T = \frac{2}{3} \omega_3 T_w^{2s-1} \int (\nabla\tau)^2 (ne_i) dS_k, \quad \tau = T - 1. \quad (4.1)$$

В (4.1), (4.3) силы отнесены к μ_*^2/ρ_* ; при записи коэффициентов (как и в (2.12)) ограничиваемся случаем степенной зависимости μ, η от температуры. При $\theta \ll 1$ в линейном по θ приближении температурные напряжения, как указывалось выше, выпадают из уравнения импульса и, следовательно, $\mathbf{v} = 0, P = 0$. А поскольку выражение для F_i^T квадратично по θ , то и сила, действующая на произвольное тело, равна нулю в линейном по θ приближении. В следующем приближении \mathbf{v} также равна нулю, но согласно (3.3) и (2.12)

$$P = -\frac{1}{2} \left(\omega_1 s - \frac{\omega_3}{3} \right) (\nabla\tau)^2. \quad (4.2)$$

Учитывая (4.1), (4.2), найдем, что действующая на тело при $\theta \ll 1$ сила, обусловленная температурными напряжениями, есть

$$F_i = \frac{1}{2} (s\omega_1 + \omega_3) \int (\nabla\tau)^2 (ne_i) dS_k, \quad (4.3)$$

причем τ является решением следующей задачи:

$$\nabla^2\tau = 0, \quad \tau|_{S_k} = \tau_k, \quad \tau(x \rightarrow \infty) \rightarrow 0, \quad (4.4)$$

где τ_k — заданные константы. Таким же соотношениям подчиняется электростатический потенциал в поле заряженных проводников, а выражение для силы (4.3) лишь численным множителем отличается от выражения для ponderomotorной силы, действующей на проводник.

Таким образом, имеет место электростатическая аналогия. Из этой аналогии следует ряд новых явлений. Так, например, нагретые тела ($T_w > T_\infty$) отталкиваются, если же одно из них охлаждено ($T_{w1} < T_\infty$), а другое нагрето ($T_{w2} > T_\infty$), то они притягиваются (аналог закона Кулона); тело, температура которого отлична от температуры экрана $T_a = T_\infty$, осаждается на него и т. д.

При этом на единичное тело, помещенное в бесконечный объем газа, сила не действует. Этот вывод доказан лишь в квадратичном по θ приближении. На то, что сила, действующая на тело, в линейном приближении по θ равна нулю, указывал еще Максвелл; более строго для единичного тела это утверждение было доказано Эппштейном ¹⁹. Попытку учесть нелинейные по θ члены при определении радиометрической силы, действующей между параллельными пластинами, нагретыми до различных температур, сделала Эйнштейн ²⁰. Хотя к тому времени Энског уже провел точное вычисление p_{ij}^T , Эйнштейн, используя принцип максимальной вероятности, получила не только неверные коэффициенты, но и неточную структуру выражения для тензора напряжений: вместо бездивергентного тензора $[\nabla_i T \nabla_j T]$ она получила тензор $\nabla_i T \nabla_j T - (1/2) \nabla_k T \nabla_k T \delta_{ij}$, который приводит к неверному уравнению состояния. Отметим еще работу ³⁰, где изучалось влияние температурных напряжений на распределение давления между бесконечными параллельными пластинами, нагретыми до разных температур; сделанные выводы справедливы, строго говоря, лишь для случая максвелловских молекул.

Вопрос о том, будет ли на единичное тело действовать сила при произвольном значении температуры поверхности T_w , пока остается открытым. Частичный (причем отрицательный) ответ был получен при рассмотрении поверхностей, близких к сферическим¹⁵. С использованием разложений по сферическим гармоникам решалась система возмущенных уравнений первого по δ приближения, где δ характеризует степень отклонения формы поверхности от сферической.

Наконец, в рамках справедливости электростатической аналогии имеет место новый вид термофореза. Состоит он в том, что на тело бесконечной теплопроводности (следовательно, $T_w = \text{const}$), находящееся в неоднородном температурном поле, и температура поверхности T_w которого не совпадает с местной температурой газа, действует сила, величина которой порядка $\mu_*^2 \theta^2 / \rho_*$, а направление определяется разностью температур тела и газа и градиентом температуры газа.

Обычный термофорез обусловлен температурным скольжением. Если теплопроводность материала частицы конечна, то вследствие температурного скольжения первого порядка появится действующая на частицу сила $F_1' \sim \frac{\mu_*^2}{\rho} \theta$, направленная противоположно градиенту температуры газа (см., например,^{16, 21}). Существует еще один вид термофореза, вызываемый температурным скольжением второго порядка, обнаруженным также еще Максвеллом¹

$$v_\tau = A \text{Kn} \frac{\partial^2 T}{\partial x_\tau \partial x_n}, \quad A = O(1). \quad (4.5)$$

Если тело изотермическое (скольжение первого порядка отсутствует), а $\theta \ll 1$, то скольжение второго порядка приведет к силе $F_2 \sim \frac{\mu_*^2}{\rho_*} \text{Kn} \theta$. Соответствующая теория была развита Соном²², хотя неявно этот эффект присутствовал в работе²³. В зависимости от отношения теплопроводностей газа и частицы преобладает тот или иной вид термофореза.

5. «СТОКСОВО» ОБТЕКАНИЕ РАВНОМЕРНО НАГРЕТОЙ СФЕРЫ

На практике часто приходится сталкиваться с обтеканием нагретых (охлажденных) тел при малых числах $\text{Re}_\infty = \frac{\rho_\infty u_\infty L}{\mu_\infty}$, где L — размер тела, u_∞ — скорость газа относительно тела. Такая ситуация наблюдается, например, при движении взвешенных частиц. Хотя скорости и числа Рейнольдса течения в целом могут быть большими, скорость газа относительно взвешенных частиц оказывается малой, а следовательно, малы и соответствующие числа Re_∞ обтекания частиц. Последние могут нагреваться излучением или реакциями в них или на их поверхности.

Если набегающий на равномерно нагретое или охлажденное тело поток таков, что $\text{Re}_\infty \ll 1$, то поле скоростей около него в общем случае будет определяться термострессовой конвекцией, а набегающий поток оказывает лишь возмущающее действие (число Рейнольдса термострессовой конвекции $\text{Re} = \frac{\rho_\infty u_T L}{\mu_\infty} = O(1)$ и, следовательно, ее скорости $u_T \gg u_\infty$). Исключением является изотермическая сфера, ибо при $u_\infty = 0$ вследствие симметрии температурные напряжения здесь уравновешиваются давлением и $u_T = 0$. Задача обтекания изотермической сферы при $\text{Re}_\infty \ll 1$ решена в работе²⁴. Температуру газа можно представить в виде ряда $T = T^{(0)} + \text{Re}_\infty T^{(1)} + \dots$, где $T^{(0)}$ удовлетворяет уравнению $\nabla^2 T^{(0)2} = 0$ (рассматривался случай $\mu = T$), соответствующие напряжения уравновешиваются давлением, а для вычисления $T^{(1)}$ приходится

прибегать к методу срачиваемых асимптотических разложений. Температурные напряжения, обусловленные $T^{(1)}$, оказываются основными по порядку величины (вызываемые ими скорости порядка u_∞). Выписанные выше уравнения медленных неизотермических течений сводятся разделением переменных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая была решена численно.

Оказалось, что по мере увеличения температуры сферы T_w температурные напряжения все более значительно уменьшают действующую на

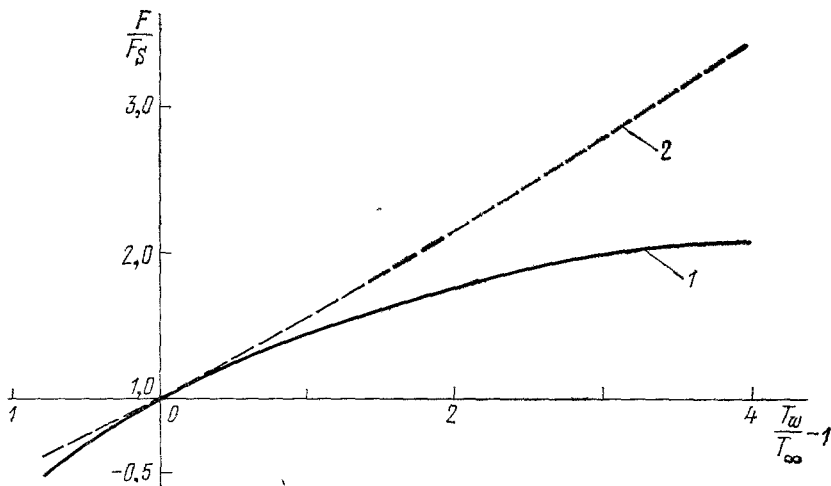


Рис. 4. Зависимость сопротивления сферы от ее температуры при $Re_\infty \ll 1$. 1 — результаты расчетов с учетом температурных напряжений; 2 — при помощи уравнений Навье — Стокса сжимаемой жидкости; F_S — сила сопротивления по закону Стокса.

сферу силу F по сравнению с ее значением, рассчитанным в рамках уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости (пунктирная линия на рис. 4; сплошной кривой даны значения, полученные с учетом температурных напряжений).

Подчеркнем, что до недавнего времени подобного рода задачи решались только в рамках приближения Навье-Стокса ^{25, 26}.

6. ГАЗОДИНАМИКА МЕДЛЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ СМЕСЕЙ ГАЗОВ

Температурные напряжения в простом газе — это «перекрестный» эффект, обусловленный изменениями компонент теплового потока ¹, так как $p_{ij}^T \approx \lambda [\partial q_i / \partial x_j]$ (последнее соотношение является точным для максвелловских молекул). Аналогично этому в барнеттовский тензор напряжений в смесях газов входят суммы по всем компонентам смеси из слагаемых $\lambda [\partial q_{Ni} / \partial x_j]$, а также произведения диффузионных скоростей. Этот результат особенно нагляден, если для вывода $p_{ij}^{(2)}$ применять метод Грэда (см. ^{27, 28}); наиболее общие выражения для переносных свойств барнеттовского приближения в смесях газов методом Чепмена — Энскога получены в работе ²⁹.

В смесях газов парциальные тепловые потоки q_N зависят не только от градиента температуры, но и от градиентов концентраций $y_N = n_N/n$, где n_N — число N -частиц в единице объема, n — суммарная численная плотность. В итоге в $p_{ij}^{(2)}$ смеси газов, кроме «скоростных» и «температурных» членов входят суммы (по N, M) членов, пропорциональных

выражениям

$$\lambda^2 \left[\frac{\partial^2 y_N}{\partial x_i \partial x_j} \right], \quad \lambda^2 \left[\frac{\partial y_N}{\partial x_i} \frac{\partial y_M}{\partial x_j} \right], \quad \lambda^2 \left[\frac{\partial y_N}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right],$$

коэффициенты при которых являются сложными функциями концентраций, отношений масс и сечений столкновений молекул.

Таким образом, в смесях газов имеются концентрационные (диффузионные) напряжения, пропорциональные вторым и произведениям первых производных от концентраций по координатам. Если задаваемые граничными условиями перепады концентраций в смеси порядка единицы, то диффузионные напряжения, аналогично температурным, будут основного порядка величины в случае медленных течений и должны учитываться в уравнении импульса. Влияние на газ этих напряжений аналогично влиянию температурных напряжений, они вызывают эффекты, аналогичные описанным выше. В частности, если концентрации не изменяются по поверхности тел (отсутствует диффузионное скольжение) и отсутствуют указанные выше «стимуляторы» конвекции, то имеет место еще один вид конвекции — концентрационно-стрессовая конвекция, обусловленная указанными напряжениями.

Вызываемые диффузионными напряжениями эффекты выявляются особенно наглядно в случае бинарной изотермической смеси газов^{15, 28}. Если перепады концентраций порядка единицы, т. е. $\theta_c = |\nabla y_1| = O(1)$, то в уравнении импульса необходимо учитывать (помимо навье-стоксовских) напряжения

$$p_{ij}^{(c)} = \alpha \lambda^2 \left[\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j} \right] + \beta \lambda^2 \left[\frac{\partial y_1}{\partial x_i} \frac{\partial y_1}{\partial x_j} \right]. \quad (6.1)$$

После применения аналогичного указанному выше преобразования $\partial p_{ij}^{(c)} / \partial x_j$ структура уравнения импульса оказывается точно такой же, что и структура (2.12). Вместо условия температурного скольжения здесь ставится условие диффузионного скольжения $u_\tau = A \lambda \partial y_{1w} / \partial x_\tau$. При $\theta_c \ll 1$ скорости концентрационно-стрессовой конвекции $u_c = u_\tau O(\theta_c^2)$, имеет место электростатическая аналогия и т. д.¹⁵

Частицы, на поверхности которых происходят химические реакции, широко встречаются в различных технологических процессах и в атмосфере. При описании их поведения необходимо учитывать установленные эффекты, так как вблизи поверхности частиц могут возникать значительные градиенты концентраций. Вообще, при наличии градиентов концентраций наряду с диффузией возникает движение смеси под действием диффузионных напряжений со скоростями того же порядка, что и скорости диффузии. Поэтому эти концентрационно-стрессовые движения необходимо учитывать в технологических процессах и, в частности, в опытах по определению коэффициентов диффузии и т. п.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Описанные явления пока не подтверждены опытом. Трудность постановки «чистых» опытов связана с необходимостью отделения явлений, обусловленных температурными или диффузионными напряжениями, от других эффектов того же порядка.

Чтобы сделать пренебрежимо малым влияние гравитационной конвекции в нормальных условиях, как указано в п. 3, необходимо иметь дело с частицами малых размеров ($\sim 10^{-2}$ см). При этом нужно обеспечить однородность температуры поверхности частиц и резервуара, так как в противном случае температурное скольжение может вызвать течение

газа около нее (или действующую на нее силу) того же порядка величины. Но размеры исследуемых течений L_* могут быть существенно увеличены при понижении давления. Так, при понижении давления до 10^{-1} мм рт. ст. этот размер увеличивается до нескольких сантиметров, а измеряемые скорости термострессовой конвекции до нескольких м/сек при $\theta \sim 1$ (перепад температуры $\sim 300^\circ$ К). Однако и здесь имеются определенные трудности с термостатированием стенок и измерением скоростей потоков газа малой плотности, хотя эти трудности, по-видимому, преодолимы. Весьма заманчивыми и важными представляются опыты на искусственных спутниках, так как в условиях невесомости термострессовая конвекция является единственным видом свободной конвекции.

Аналогичные трудности возникают и при экспериментальной демонстрации концентрационно-стрессовой конвекции в смесях газов.

В то же время теоретическая обоснованность описанных явлений не вызывает сомнений. Действительно, исходные уравнения Барнетта получаются из уравнения Больцмана тем же методом Чепмена-Энскога, что и уравнения Навье-Стокса, без каких-либо дополнительных предположений *).

Выводы, полученные классическими методами кинетической теории, неизменно подтверждались опытом (открытие термодиффузии в газах, зависимости коэффициентов переноса от параметров газов и молекул и т. д.). Подчеркнем, что в смесях газов уже обнаруживались эффекты, обусловленные влиянием некоторых барнеттовских членов выражений для диффузионных скоростей; наиболее интересным является влияние «вязкого переноса импульса» на диффузию: при определенных условиях некоторые «скоростные» барнеттовские слагаемые вектора диффузионной скорости оказываются порядка ее бародиффузионного слагаемого²⁷.

С другой стороны, медленные течения ($Re = O(1)$, $M = KnRe \ll 1$) со значительными градиентами температуры и концентраций столь широко распространены в природе и практике, что необходимость дальнейшего развития описанной выше «не навье-стоксовской» нелинейной газодинамики не вызывает сомнений.

Можно ожидать, вообще говоря, что в некоторых жидкостях также имеются температурные и диффузионные напряжения, а следовательно, и все обусловленные ими явления. Однако кинетическая теория жидкости не дает нам пока столь же надежных сведений о нелинейных свойствах тензора напряжений, как кинетическая теория газов. Поэтому представляется весьма интересной постановка соответствующих экспериментов.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. J. C. Maxwell, Phil. Trans. Roy. Soc. 170, 231 (1879).
2. V. Crooks, ibid. 166, 325 (1876).
3. J. C. Maxwell, ibid. 157, 49 (1867).
4. D. Enskog, Kinetische Theorie der Vorgänge in mässig verdünnten Gasen. Dissertation (Upsala, 1917).
5. D. Burnett, Proc. Lond. Math. Soc. 39, 385; 40, 382 (1935).
6. А. Зоммерфельд, Термодинамика и статистическая физика, М., ИЛ, 1955.
7. С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, М., ИЛ, 1960.

) Уравнения медленных течений найдены выше путем упрощения уравнений Барнетта, с учетом малости характерной скорости $u_ = a_* Kn$, $Kn \ll 1$. Однако последнее обстоятельство можно заранее учесть при построении асимптотического разложения решения системы уравнений Больцмана для смеси газов³¹. В результате искомого уравнения медленных течений получаются сразу же, в главном приближении, и совпадают, естественно, с уравнениями, которые выводятся изложенным здесь способом.

О НАПРЯЖЕНИЯХ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ГАЗАХ

8. М. Н. Коган, Динамика разреженного газа, М., «Наука», 1967.
9. В. С. Галкин, М. Н. Коган, О. Г. Фридлендер, Изв. АН СССР, сер. «Механика жидкости и газа», № 3, 13 (1970).
10. В. С. Галкин, М. Н. Коган, О. Г. Фридлендер, *ibid.*, № 3, 98 (1971).
11. Ф. С. Шерман, Л. Толбот, в кн. Газодинамика разреженных газов, М., ИЛ, 1963, стр. 266.
12. В. С. Галкин, ПММ, № 1, 186 (1964).
13. H. Grad, Phys. Fluids 6, 147 (1963).
14. К. Черчиньяни, Математические методы кинетической теории газов, М., «Мир», 1973.
15. В. С. Галкин, О. Г. Фридлендер, ПММ, № 2, 271 (1974).
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, М.—Л., Гостехиздат, 1944.
17. М. Н. Коган, Ann. Rev. Fluid Mech. 5, 383 (1973).
18. В. С. Галкин, О. Г. Фридлендер, Г. Е. Царькова, Уч. зап. ЦАГИ, № 5, 60 (1972).
19. P. S. Epstein, Zs. Phys. 54, 537 (1929).
20. E. Einstein, Ann. d. Phys. 69, 241 (1922).
21. L. Waldmann, in: Rarefied Gas Dynamics, N.Y.-L., Academic Press, 1961, p. 323.
22. Y. Sone, Phys. Fluids 15, 1418 (1972); Trans. Japan Soc. Aero Space Sci. 17 (No.37) 113 (1974).
23. H. A. Dwyer, Phys. Fluids 10, 976 (1968).
24. В. С. Галкин, М. Н. Коган, О. Г. Фридлендер, ПММ, № 5, 880 (1972).
25. D. R. Cassou, T. C. Adamson, A. F. Messiter, Phys. Fluids 9, 671 (1966).
26. P. E. Hodnett, J. Fluid Mech. 39, 465 (1969).
27. В. Жданов, Ю. Каган, А. Сазыкин, ЖЭТФ 42, 857 (1962).
28. В. С. Галкин, М. Н. Коган, О. Г. Фридлендер, Изв. АН СССР, сер. «Механика жидкости и газа», № 2, 113 (1972).
29. М. Ш. Шавалиев, *ibid.*, № 1, 126 (1974).
30. Ю. И. Яламов, Б. В. Дерягин, ДАН СССР 161, 572 (1965).
31. В. С. Галкин, Уч. зап. ЦАГИ, № 4, 40 (1974).