

ИЗ ТЕКУЩЕЙ ЛИТЕРАТУРЫ

535.42

**ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
В ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ***Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов*

СОДЕРЖАНИЕ

1. Характеристика метода	709
а) Основная идея (709). б) Сопоставление ОМСК с методом собственных частот (710). в) Задачи, к которым целесообразно применять ОМСК (711).	
2. Введение спектрального параметра в уравнение	712
а) Диэлектрическое тело из однородного материала (712). б) Вариационный метод (713). в) Резонатор из полупрозрачной стенки с диэлектрическим телом (714). г) Закрытый резонатор сложной формы с диэлектрическим телом (716). д) Диэлектрическое тело из неоднородного материала (717). е) Квантовомеханическая задача об упругом рассеянии на квазистационарном уровне (717).	
3. Введение спектрального параметра в граничные условия	721
а) Импедансный метод (721). б) Условия сопряжения (721). в) Резонатор из пары зеркал (724). г) Двумерная задача дифракции на произвольном цилиндре с продольной щелью (725). д) Резонатор произвольной формы из материала с $\varepsilon \gg 1$ (728). е) Спектральный параметр в условиях на бесконечности (728). ж) Двумерная задача дифракции на полупрозрачном цилиндре (730). з) Расчет скорости и затухания вытекающих E -волн в волноводах произвольного сечения с полупрозрачной стенкой или со щелью (732).	
Цитированная литература	736

1. ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДА

а) Основная идея

Обобщенный метод собственных колебаний (ОМСК) состоит в разложении дифрагированного поля в ряд по собственным функциям однородной задачи, в которой собственным значением выбирается не обязательно частота. Формулировка однородной задачи зависит от характера задачи дифракции, а собственным значением в ней (спектральным параметром λ) является величина, в различных вариантах метода вводимая либо в уравнение, либо в граничное условие на поверхности тела или на бесконечности. Например, для скалярной задачи дифракции на поверхности S

$$\Delta u + k^2 u = f, \quad u|_S = 0 \quad (1.1)$$

с условием излучения на бесконечности решение u представляется в виде

$$u = u^0 + \sum_n^{\infty} A_n u_n. \quad (1.2)$$

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1976 г.

Здесь u^0 — поле тех же источников f в пустоте (падающее поле) или поле при дифракции на каком-либо другом теле, а u_n — собственные функции однородной задачи для поверхности S . В различных вариантах метода формулировка этой однородной задачи различна, но всегда u_n вещественно-ортогональны, и для A_n находятся явные выражения. Коэффициенты A_n имеют резонансные множители

$$A_n \sim \frac{1}{\lambda^0 - \lambda_n}, \quad (1.3)$$

где λ_n — собственные значения, а λ^0 — значение, которое спектральный параметр имеет в задаче дифракции. Это может быть диэлектрическая проницаемость тела (гл. 2), импеданс стенки (н.а) гл. 2), ее прозрачность (п.б) гл. 3), величина, имеющая смысл коэффициента отражения для сходящейся волны (п.е) гл. 3), и т. д. Для высокочастотных резонаторов в ряде (1.2) вблизи резонанса одно из слагаемых много больше остальных, и поле имеет вид

$$u \approx u^0 + A_m u_m. \quad (1.4)$$

§ 6) Сопоставление ОМСК с методом собственных частот

В теории резонаторов применяется метод собственных частот (МСЧ), который состоит в том, что решение неоднородной задачи ищется в виде ряда по ортогональной системе собственных функций вспомогательной однородной задачи, собственным значением в которой является частота. В теории резонаторов МСЧ перешел из теории колебаний систем с конечным числом степеней свободы. МСЧ может рассматриваться как один из вариантов ОМСК. В нем спектральным параметром λ является частота (точнее, квадрат волнового числа k^2 ; k отличается от частоты множителем $1/c$, где c — скорость света в пустоте). Как и в МСЧ, в ОМСК в первую очередь решается не задача дифракции, а однородная задача, и определяются собственные элементы (собственные значения и функции) тела. Они не зависят от возбуждения, т. е. от правой стороны неоднородной задачи типа (1.4). Зная собственные элементы, можно затем решить задачу о дифракции на этом теле любого поля. В статье рассматриваются те варианты ОМСК, в которых собственным λ является не частота (исключение — п. з) гл. 3). В рассматриваемых вариантах есть еще одно отличие от МСЧ — выделение слагаемого u^0 . Эти отличия приводят к определенным преимуществам излагаемых методов. Отметим те из них, которые реализованы в решениях конкретных задач, приведенных ниже.

В этих вариантах функции u_n , по которым разлагается дифрагированное поле, удовлетворяют на бесконечности условию излучения. В МСЧ (для всех тел, кроме закрытых резонаторов) собственные функции возрастают (экспоненциально) при уходе на бесконечность; это вызывает ряд принципиальных и вычислительных трудностей и, кроме того, приводит к появлению непрерывного спектра. В описываемых вариантах спектр всегда дискретен, т. е. в (1.2) не участвует интеграл. Поведение собственных функций на бесконечности позволяет для определения λ_n и u_n применить простые стационарные функционалы рэлеевского типа (п. б) и е) гл. 2). Открытые и закрытые резонаторы исследуются одним и тем же аппаратом.

Выбирая соответствующим образом поле u^0 , можно упростить коэффициенты ряда в (1.2) (п. в.) и е) гл. 2). Выделение u^0 улучшает сходимость в (1.2) (п. б) гл. 3). Алгоритмы для вычисления λ_n обычно существенно проще, чем для вычисления собственных частот (п. в.) и е) гл. 3). В тех

вариантах ОМСК, в которых λ_n введено в граничное условие (гл. 3), размерность рядов на единицу меньше, чем в МСЧ. Если все потери сосредоточены только в одном месте (только в диэлектрике (п. г) гл. 2), только в стенках (п. а) гл. 3), только на излучение (п. е) и ж) гл. 3), то возможно использовать вариант ОМСК, в котором собственные элементы λ_n и u_n будут вещественными. При этом комплексность в решении задачи дифракции войдет в коэффициенты A_n , причем не через λ_n , а через комплексную в этих условиях величину λ^0 .

С другой стороны, преимущество МСЧ перед другими вариантами ОМСК проявляется в тех задачах о высокодобротных резонаторах, в которых надо проследить зависимость поля от частоты. В МСЧ (1.3) имеет вид

$$A_n \sim \frac{1}{k - k_n}, \quad (1.5)$$

где k_n — собственная частота, k — частота в задаче дифракции, и, зная одно комплексное число k_n , можно сразу определить частотную зависимость. В ОМСК для этого надо найти функцию $\lambda_n(k)$. Если, однако, надо проанализировать зависимость поля не от частоты, а от λ^0 , то (1.3) дает непосредственный ответ, а МСЧ требует вычисления функции $k_n(\lambda^0)$. В ряде физических задач (например, при исследовании резонансных свойств в зависимости от параметров материала в измерительной технике) возникает именно такая постановка.

в) Задачи, к которым целесообразно применять ОМСК

Описываемые варианты метода формально применимы, вообще говоря, к любым задачам дифракции в акустике, электродинамике, к задачам об упругом рассеянии в нерелятивистской квантовой механике и т. д. В первую очередь они применимы, как и МСЧ, к высокодобротным резонаторам, так как для них решение имеет вид (1.4). Они позволяют исследовать и открытые, и закрытые резонаторы; особенно удобны они для резонаторов типа ловушек. Применив их к двумерным резонаторам, можно найти комплексные постоянные распространения вытекающих волн в открытых волноводах.

Ниже приведено решение задач, иллюстрирующих применение некоторых вариантов обобщенного метода, и описаны эти варианты. Цель статьи — на примерах показать возможности метода собственных колебаний, возникающие при отказе от введения собственных частот, и доказать эффективность этого направления. В статье не изложены те варианты ОМСК, эффективность которых в настоящее время не проиллюстрирована на нетривиальных примерах (исключение — п. а) гл. 3), даже если формальный аппарат этих методов подробно разработан (например, методы гл. 2 для векторных задач, тела со сложными граничными условиями, вариационный аппарат для методов гл. 3 и т. д.). По-видимому, ОМСК может быть применен в теории упругости, в теории цепей, в теории колебаний систем с конечным числом степеней свободы.

Ссылки на работы, близкие к теме настоящей статьи, и сопоставление с известными результатами даны в конце статьи в обзоре литературы. Там же даны ссылки на работы, содержащие частичное математическое обоснование производимых ниже формальных процедур. В начале каждого пункта указаны работы, в которых соответствующие результаты изложены подробнее.

2. ВВЕДЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В УРАВНЕНИЕ

а) Диэлектрическое тело из однородного материала¹

Сформулируем задачу о дифракции поля, создаваемого источниками f_s на теле, занимающем объем V^+ и ограниченном поверхностью S :

$$\Delta u + k^2 \varepsilon^0 u = f \quad \text{в } V^+, \quad \Delta u + k^2 u = f \quad \text{в } V^-, \quad (2.1)$$

$$u^+ - u^-|_S = 0, \quad (2.2a)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \Big|_S = 0. \quad (2.2b)$$

Кроме того, u должно удовлетворять условию излучения. Во всех рассматриваемых ниже однородных и неоднородных задачах (кроме задачи о закрытом резонаторе (п. г.) гл. 2) и однородной вспомогательной задачи (п. в) гл. 3)) поля должны будут удовлетворять этому условию, и мы далее будем его подразумевать.

В (2.1), (2.2) знаки «+» и «-» относятся к области внутри и вне тела. Условно будем называть (2.1) — (2.2) задачей о дифракции на диэлектрическом теле, хотя, строго говоря, (2.1) — (2.2) описывает такую дифракцию только для двумерной задачи и E -поляризации. Уже для двумерной задачи и H -поляризации условие (2.2b) должно быть заменено условием

$$\frac{1}{\varepsilon^0} \frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \Big|_S = 0, \quad (2.3)$$

а в трехмерном случае электромагнитная задача дифракции вообще не сводится к скалярной, и удобнее оперировать не с волновыми уравнениями, а непосредственно с уравнениями Максвелла. Однако принципиальные особенности этого варианта ОМСК можно изложить на простой задаче (2.1) — (2.2).

Спектральный параметр λ в однородную задачу введем вместо ε^0 в (2.1). Значение λ в задаче дифракции, т. е. λ^0 , есть ε^0 . Собственное значение λ_n обозначим ε_n . Однородная задача есть

$$\Delta u_n + k^2 \varepsilon_n u_n = 0 \quad \text{в } V^+, \quad \Delta u_n + k^2 u_n = 0 \quad \text{в } V^-, \\ u_n^+ - u_n^-|_S = 0, \quad \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \Big|_S = 0. \quad (2.4)$$

Она имеет самостоятельный физический смысл — описывает свободные незатухающие колебания тела (той же формы V^+) с диэлектрической проницаемостью ε_n , происходящие на заданной частоте k . В V^- , в отличие от МСЧ, спектральный параметр в уравнении отсутствует, u_n в V^- удовлетворяет тому же уравнению, что и дифрагированное поле.

Как и во всех методах гл. 2, n — тройной индекс, и в (1.2) стоит тройная сумма.

Легко получить физически очевидное свойство собственных значений

$$\operatorname{Im} \varepsilon_n > 0 \quad (2.5)$$

(при выбранной временной зависимости $\exp(i\omega t)$) — незатухающие колебания в отсутствие источников возможны только для тела, которое выделяет энергию при помещении в электрическое поле. Собственные функции u_n вещественно-ортогональны, т. е.

$$\int_{V^+} u_n u_m dV = 0, \quad n \neq m. \quad (2.6)$$

Примем в качестве u^0 поле, созданное теми же источниками f в отсутствие тела, т. е. в пустоте. Ряд (1.2) удовлетворяет всем граничным условиям и уравнению в V^- почленно. Именно там, где это не имеет места — в V^+ , — собственные функции ортогональны, и для A_n получаем

$$A_n = \frac{1 - \varepsilon^0}{\varepsilon^0 - \varepsilon_n} \frac{\int_{V^+} u^0 u_n dV}{\int_{V^+} u_n^2 dV}. \quad (2.7a)$$

Можно исключить из (2.7a) функцию u^0 и выразить A_n непосредственно через f :

$$A_n = \frac{1 - \varepsilon^0}{\varepsilon^0 - \varepsilon_n} \frac{1}{k^2 (1 - \varepsilon_n)} \frac{\int_{V^+ + V^-} u_n f dV}{\int_{V^+} u_n^2 dV}. \quad (2.7б)$$

Для полного поля в V^- выделение u^0 в (1.2) необходимо (его можно не производить, только если все источники расположены в V^+), функция u^0 , вообще говоря, неразложима в V^- по u_n . В V^+ такое разложение существует, и можно вместо (1.2) писать

$$u = \sum_n \frac{1 - \varepsilon_n}{1 - \varepsilon^0} A_n u_n, \quad (2.7в)$$

Формулы (2.7) дают решение задачи (2.1), (2.2).

В п. в) и г) этой главы будут рассмотрены задачи, в которых диэлектрическое тело расположено не в пустоте, а в открытом (п. в)) или закрытом (п. г)) резонаторе. Все полученные выше формулы при этом сохраняются, только u^0 и u_n должны будут удовлетворять тем же дополнительным условиям на поверхности резонатора, что и полное поле. В закрытом резонаторе без потерь в стенках вместо (2.5) будет $\text{Im } \varepsilon_n = 0$.

Эффективность всего аппарата определяется в первую очередь тем, как фактически находятся ε_n из (2.4). В следующем пункте мы опишем вариационный метод вычисления ε_n , а в п. в—г) применим его к двум конкретным задачам.

б) Вариационный метод

Вариационный метод определения собственного значения ε_n задачи (2.4) мы сначала сформулируем, полагая, что диэлектрическое тело помещено в закрытый резонатор, так что на некоторой поверхности S_0 , окружающей S , поле u_n обращается в нуль. В МСЧ для закрытого резонатора с диэлектрическим включением широко используются стационарные функционалы рэлеевского типа (т. е. не содержащие, в отличие от функционалов швингеровского типа, двукратных интегралов от ядер соответствующих интегральных уравнений). Для (2.4) мы воспользуемся функционалом

$$L(u) = \int_{V^+ + V^-} (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_{V^-} u^2 dV - \varepsilon k^2 \int_{V^+} u^2 dV. \quad (2.8)$$

Он стационарен на решениях (2.4), т. е. при подстановке в него вместо u_n близкой функции $u_n + \mu\varphi$ имеет место равенство

$$L(u_n + \mu\varphi) = L(u_n) + O(\mu^2). \quad (2.9)$$

Функционал (2.8), используемый обычно для определения k_n , непосредственно применим и для определения ε_n из (2.4), Ситуация оказалась

столь простой потому, что стационарность, т. е. свойство (2.9), требует только непрерывности φ , и в условии для допустимых функций не входит значение ε . Если бы условия для допустимых функций сами содержали ε , то соответствующий функционал нельзя было бы применить для нахождения ε_n . Например, функционал (2.8) стационарен на решениях однородной задачи с граничным условием (2.3) вместо (2.2б), только если допустимые функции сами удовлетворяют (2.3). Для задачи с условием (2.3) для определения ε_n надо было бы использовать функционал

$$L(u) = \frac{1}{\varepsilon} \int_{V^+} (\nabla u)^2 dV + \int_{V^-} (\nabla u)^2 dV - k^2 \int_{V^+ \cup V^-} u^2 dV, \quad (2.10)$$

для которого условие (2.3) является естественным, т. е. не должно накладываться на допустимые функции. Существует регулярный способ построения стационарных функционалов для определения λ_n также и для однородных уравнений гл. 3.

Для ОМСК перенесение результата (2.9) на бесконечную область производится автоматически. Так как собственные функции удовлетворяют на бесконечности условиям излучения, то и допустимые функции должны ему удовлетворять (а часть из них может убывать быстрее). Поэтому для того, чтобы интегралы в (2.8) в V^- сходились также и для бесконечной области, достаточно при их вычислении принимать $\text{Im } k = -0$. Эта процедура может быть строго обоснована.

Хотя $L(u)$ в (2.8) не обладает, разумеется, свойством экстремальности (L — комплекснозначный функционал), но, согласно (2.9), к нему можно формально применить метод Ритца. Этот метод, как известно, состоит в том, что u ищется в виде ряда по некоторым базисным функциям v_n , L становится квадратичной формой от коэффициентов этого ряда, производные L по ним приравниваются нулю, возникает однородная система линейных уравнений, и равенство нулю ее детерминанта представляет собой искомого уравнение для вычисления ε_n .

в) Резонатор из полупрозрачной оболочки с диэлектрическим телом³

Найдем собственные значения ε_n однородной задачи (2.1) — (2.2), дополненной условиями

$$u_n^+ - u_n^- |_{S_1} = 0, \quad \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} - \frac{1}{\rho} u_n = 0 |_{S_1} \quad (2.11)$$

на некоторой поверхности S_1 , охватывающей поверхность тела S . Число ρ характеризует прозрачность оболочки S_1 , в которую помещено диэлектрическое тело. Если ρ мало ($k\rho \ll 1$), то система представляет собой высокочастотный открытый резонатор. При $\rho = 0$ резонатор становится закрытым, при $\rho = \infty$ оболочка отсутствует.

Можно было бы дополнить $L(u)$ в (2.8) поверхностным интегралом по S_1 таким образом, чтобы условия (2.11) стали естественными, т. е. их не надо было бы накладывать на базисные функции. Мы ограничимся, однако, простым видом контура S_1 (окружность) и базисные функции выберем в виде

$$v_{nm} = H_n^{(2)}(kr) \cos n\varphi \quad (r \geq a), \quad (2.12)$$

$$v_{nm} = \left[A_{nm} J_n \left(\mu_{nm} \frac{r}{a} \right) + B_n J_n \left(v_{n0} \frac{r}{a} \right) \right] \cos n\varphi \quad (r < a),$$

где $J_n(\mu_{nm}) = 0$, $J_n'(v_{n0}) = 0$, a — радиус S_1 , а A_{nm} и B_n найдены так, чтобы для v_{nm} удовлетворялось (2.11). Поверхность S будет эллипсом.

Таким образом, исследуется диэлектрический эллипс в круговой полупрозрачной оболочке. Такая задача не решается методом разделения переменных.

На рис. 1 представлены вещественная и мнимая части первого собственного значения $\epsilon_1 = \epsilon'_1 + \epsilon''_1$ в функции от прозрачности оболочки kr . Полуоси эллипса обозначены a_0, b_0 ; для всех кривых $ka = 1, kb_0 = 1/2$. Вычисления проделаны для четырех значений отношения большой оси эллипса к радиусу оболочки: $a_0/a = 0,5; 0,6; 0,8$ и $1,0$. На рис. 2 ϵ'_1 представлено в функции от радиуса оболочки.

Зависимость поля от ϵ^0 определяется согласно (2.7) (ср. (1.3)) в основном множителе $1/(\epsilon^0 - \epsilon_1)$. График функции $F(\epsilon^0) = |\epsilon^0 - \epsilon_1|^{-1}$ дает

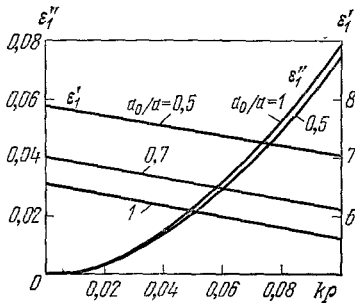


Рис. 1. Зависимость ϵ'_1 и ϵ''_1 от kr для резонатора из полупрозрачной круговой оболочки с диэлектрическим эллипсом.

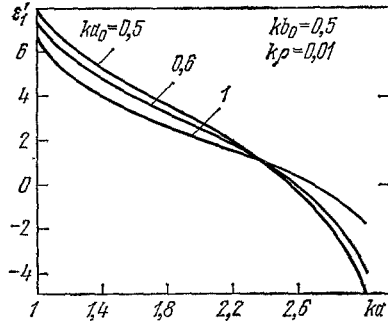


Рис. 2. Зависимость ϵ'_1 [от радиуса оболочки].

резонансную кривую. Максимум ее лежит при $\epsilon^0 = \epsilon'_1$, а полуширина равна сумме двух величин — мнимой части ϵ_1 (т. е. ϵ''_1), описывающей потери на излучение, и $-\text{Im } \epsilon^0$, описывающей потери в диэлектрике. Если $\text{Im } \epsilon^0 = 0$, то смещение ϵ^0 относительно ϵ'_1 , при котором амплитуда поля падает вдвое, равно ϵ''_1 . Можно определить добротность по диэлектрической проницаемости Q_ϵ как отношение $\text{Re } \epsilon^0$, при которой достигается максимум резонансной кривой, к ее полуширине. При $\text{Im } \epsilon^0 = 0$

$$Q_\epsilon = \frac{\epsilon'_1}{\epsilon''_1} \cdot \frac{1}{2} \tag{2.13}$$

Если $\text{Im } \epsilon^0 \neq 0$, то $1/Q_\epsilon$ равна сумме двух обратных добротностей, обязанных обоим типам потерь.

Например, в рассмотренном примере при $kr = 0,05, ka = 1, ka_0 = 1$ (эллипс касается оболочки), $b_0/a_0 = 1/2$, согласно рис. 1, $\epsilon'_1 = 6,1, \epsilon''_1 = 0,0224$, т. е. $Q_\epsilon = 280$. С уменьшением прозрачности Q_ϵ растет примерно как $1/\rho^2$.

Величина (2.13) отлична от добротности по частоте Q_k , которая вводится в МСЧ, так как Q_ϵ описывает опыт, в котором $k = \text{const}$, а Q_k — опыт, в котором $\epsilon^0 = \text{const}$. Величины Q_k и Q_ϵ связаны соотношением

$$\frac{Q_k}{Q_\epsilon} = \frac{k'_n}{\epsilon'_n} \frac{d\epsilon'_n}{dk} \Big|_{k=k'_n} \tag{2.14}$$

где $k_n = k'_n + ik''_n$ — комплексная собственная частота, т. е. комплексный корень уравнения $\epsilon_n(k) = \epsilon^0$.

г) З а к р ы т ы й р е з о н а т о р с л о ж н о й ф о р м ы
с д и э л е к т р и ч е с к и м т е л о м ³

В резонаторе, форма которого изображена на рис. 3, помещено диэлектрическое тело в виде прямоугольника $2l \times 2a$. На границе диэлектрика должны выполняться условия (2.4), на границе резонатора — условие $u = 0$. Задача состоит в нахождении ϵ_n .

Так как для такой сложной фигуры трудно найти базисную систему функций, удовлетворяющих всем граничным условиям, то мы дополним функционал (2.8) контурными интегралами таким образом, чтобы эти

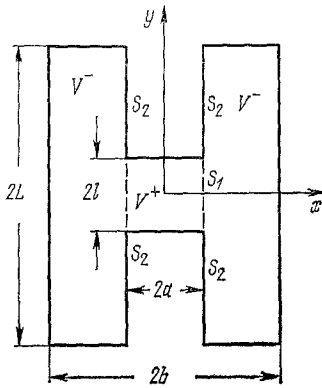


Рис. 3. Закрытый резонатор сложной формы с диэлектрическим включением.

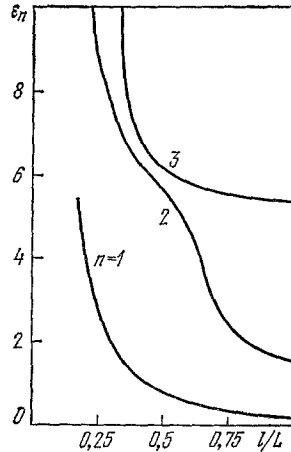


Рис. 4. Зависимость собственных значений ϵ_n ($n = 1, 2, 3$) от размера l .

условия стали естественными и их не надо было бы налагать на допустимые функции. Функционал, обладающий этим свойством, которым мы будем пользоваться в этой задаче, есть сумма функционала (2.8) и интегралов

$$\int_{S_1} (u^+ - u^-) \left(\frac{\partial u^+}{\partial N} + \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) dS - 2 \int_{S_2} u \frac{\partial u}{\partial N} dS. \quad (2.15)$$

Базисные функции были взяты в виде

$$\begin{aligned} v_{nm} &= \cos \frac{\pi n x}{2a} \cos \frac{\pi (m+1/2) y}{l} \quad (\text{в } V^+), \\ v_{nm} &= \sin \frac{\pi n (b-x)}{2(b-a)} \cos \frac{\pi (m+1/2) y}{L} \quad (\text{в } V^-). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Для них граничные условия нарушаются на линиях $|x| = a$, и по этим линиям берутся интегралы (2.15).

На рис. 4 представлены зависимости ϵ_n ($n = 1, 2$ и 3) от l . Процесс последовательного обрубаания детерминанта, возникающего в методе Рунца, можно было считать установившимся, когда в V^+ было взято 10 функций, и в V^- — 15 функций.

Все ϵ_n в этой задаче вещественны, независимо от того, будет ли ϵ^0 вещественно или комплексно. Величины ϵ_n вообще не зависят от ϵ^0 . Комплексность поля, связанная с потерями в диэлектрике, возникает в задаче дифракции только при подстановке в A_n (в основном в множитель $1/(\epsilon^0 - \epsilon_n)$) комплексного ϵ^0 .

д) Диэлектрическое тело из неоднородного материала^{1, 4}

Рассмотрим задачу о решении уравнения

$$\Delta u + k^2 \varepsilon^0(\mathbf{r}) u = f, \quad (2.17)$$

где $\varepsilon^0(\mathbf{r})$ — функция координат. Ее можно считать непрерывной, и случай с разрывными функциями (т. е. когда есть границы раздела) получать предельным переходом. Вне некоторой конечной области $\varepsilon^0 = 1$. Так же условно, как в п. 3, мы назовем (2.17) задачей о дифракции на теле из неоднородного диэлектрика. Именно эта форма уравнения понадобится нам в следующем пункте. Те же соображения, которые развиты ниже для (2.17), могут быть использованы для решения векторной электромагнитной задачи о дифракции на неоднородном теле ($\varepsilon = \varepsilon(\mathbf{r})$ и $\mu = \mu(\mathbf{r})$) или для скалярного уравнения «второй поляризации»

$$\nabla \left(\frac{1}{\varepsilon} \nabla u \right) + k^2 u = f. \quad (2.18)$$

Для задачи (2.1) — (2.2) спектральный параметр был введен вместо числа ε^0 . В (2.17) спектральный параметр должен быть введен в функцию $\varepsilon^0(\mathbf{r})$. Можно доказать, что существует два способа такого введения, при котором сохраняются основные особенности аппарата, в частности, ортогональность собственных функций. Мы воспользуемся одним из этих способов.

Рассмотрим однородную задачу

$$\Delta u + k^2 \{ \alpha(\mathbf{r}) + \lambda [\varepsilon^0(\mathbf{r}) - \alpha(\mathbf{r})] \} u = 0, \quad (2.19)$$

где $\alpha(\mathbf{r})$ — вообще говоря, произвольная функция, отличная от $\varepsilon^0(\mathbf{r})$ и равная единице в области, в которой $\varepsilon^0(\mathbf{r}) = 1$. Собственное значение в (2.19) есть λ ; в задаче дифракции $\lambda^0 = 1$. Задачу (2.19) можно трактовать как задачу о собственных колебаниях тела с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon_n(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r}) + \lambda_n [\varepsilon^0(\mathbf{r}) - \alpha(\mathbf{r})], \quad (2.20)$$

происходящих с заданной частотой. Если есть потери (например, на излучение), то ε_n должно быть комплексно, и $\text{Im } \lambda_n > 0$. Собственные функции (2.19) ортогональны с весом $\varepsilon^0 - \alpha$:

$$\int (\varepsilon^0 - \alpha) u_n u_m dV = 0 \quad \text{при } |n \neq m|. \quad (2.21)$$

Две последние формулы составляют основной результат этого пункта. Мы не будем приводить формул, подобных (2.7), для коэффициентов в (1.2) — их легко получить подстановкой (1.2) и (2.17) с использованием (2.21). Разумеется, эти коэффициенты имеют знаменатель $1 - \lambda_n$. Для λ_n можно написать стационарный функционал; мы ограничимся в следующем пункте его записью в одномерном случае.

е) Квантовомеханическая задача об упругом рассеянии на квазистационарном уровне⁴

Представим себе сферически-симметричный потенциал $V(r)$, образующий барьер, т. е. малый (или равный нулю) при малых r , достигающий максимального значения V_{max} при некотором конечном $r = r_{\text{max}}$ и затем обращающийся в нуль или стремящийся к нулю при $r \rightarrow \infty$. На такой потенциальный барьер падает поток частиц с энергией k^2 , меньшей V_{max} . Потенциал образует ловушку. Почти при всех k лишь немногие частицы

проникают внутрь, остальные отражаются от внешней части барьера. Однако при некоторых энергиях слабое туннельное просачивание через барьер вызывает не малый эффект, возникает резонанс.

Явление это давно и подробно изучено, и разработаны методы вычисления матрицы рассеяния S_l по ее комплексным полюсам в плоскости k . Аппарат этот представляет собой применение МСЧ. Мы применим к сформулированной задаче развитый выше вариант ОМСК, который, по-видимому, позволяет наиболее просто находить S_l для любых барьеров; можно было бы использовать и метод п. е) гл. 3. Математически задача решения уравнения Шрёдингера при падении потока частиц с энергией k^2 на потенциал $V(\mathbf{r})$ тождественна задаче решения уравнения Гельмгольца при дифракции плоской волны на теле с диэлектрической проницаемостью, являющейся функцией координат:

$$\varepsilon^0(\mathbf{r}) = 1 - \frac{V(\mathbf{r})}{k^2}. \quad (2.22)$$

В симметричном случае это тело представляет собой шаровой слой с переменной по радиусу диэлектрической проницаемостью, отрицательной в части слоя и равной единице вне тела. Поле падающей плоской волны разлагается по сферическим гармоникам, и задача сводится к ряду одномерных задач дифракции. Они, как известно, формулируются следующим образом: определить числа S_l ($|S_l| = 1$), $l = 0, 1, 2, \dots$, из уравнений

$$\frac{d^2 u^l}{dr^2} + \left\{ k^2 - \left[V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\} u^l = 0 \quad (2.23)$$

с граничными условиями

$$u^l(0) = 0, \quad (2.24a)$$

$$u^l(r) = \frac{-i^{l-1}}{2} [e^{-ikr} - (-1)^l S_l e^{ikr}]. \quad (2.24b)$$

Временная зависимость в этом пункте имеет вид $\exp(-i\omega t)$.

Применим для решения этой неоднородной задачи аппарат предыдущего пункта. Положим $l = 0$ и не будем выписывать этот индекс; обозначение на $l \neq 0$ производится элементарно.

В рассматриваемой задаче о внешнем возбуждении высокодобротного резонатора удобно воспользоваться отмеченной выше возможностью различным образом вводить u^0 в (1.2). Определим вспомогательный потенциал $V^0(r)$, равный $V(r)$ при $r > r_{\max}$ и равный V_{\max} при $r < r_{\max}$. Слагаемое u^0 , возникающее при падении плоской волны на барьер $V^0(r)$, не имеет резонансного характера. Соответствующее ему значение коэффициента S обозначим S^0 ; S^0 медленно меняется с изменением k . Функцию α , участвующую в основных формулах предыдущего пункта, тоже свяжем с V^0 , т. е. положим $\alpha = 1 - V^0/k^2$. Иными словами, введем аналогично (2.19) систему собственных функций u_n уравнением

$$\frac{d^2 u_n}{dr^2} + [k^2 - \lambda_n V(r) - (1 - \lambda_n) V^0(r)] u_n = 0 \quad (2.25)$$

с однородными граничными условиями

$$u_n(0) = 0, \quad (2.26a)$$

$$u_n(r) = \exp(ikr); \quad (2.26b)$$

здесь λ_n — собственное значение; в задаче дифракции (т. е. в неоднородной задаче (2.23) — (2.24)) $\lambda = 1$.

Функции u_n и u^0 связаны двумя соотношениями; первое есть условие ортогональности (2.21), второе легко вывести из уравнений для u_n и u^0 ,

используя то обстоятельство, что в этом методе все условия на бесконечности содержат одно и то же вещественное число k :

$$\int_0^{r_{\max}} (V - V^0) u_n u_m dr = 0 \quad \text{при } n \neq m, \quad (2.27a)$$

$$\int_0^{r_{\max}} (V - V^0) u_n u^0 dr = -\frac{\lambda_n''}{\lambda_n} \int_0^{r_{\max}} (V - V^0) |u_n|^2 dr. \quad (2.27b)$$

Теперь легко найти требуемое выражение для S . Подставляя (1.2) в (2.24б) и в (2.23), получаем

$$S = S^0 + 2i \sum_n A_n, \quad (2.28a)$$

$$A_n = \frac{\lambda_n''}{1 - \lambda_n} \frac{\int_0^{r_{\max}} (V - V^0) |u_n|^2 dr}{\lambda_n \int_0^{r_{\max}} (V - V^0) u_n^2 dr}. \quad (2.28b)$$

Для получения второй из этих формул использовано (2.27б).

Резонансный характер рассеяния проявляется в том, что в некотором интервале значений k есть одно собственное значение (назовем его λ_m), для которого $|1 - \lambda_m'| \ll |\lambda_m''|$. Вблизи резонанса второй множитель в (2.28б) примерно равен S^0 . Для всех членов ряда (2.28а) $|A_n| \ll 1$ при $n \neq m$; в ряде надо сохранить только слагаемое $A_m = [\lambda_m'' / (1 - \lambda_m)] S^0$, и

$$S = S^0 \frac{1 - \lambda_m''}{1 - \lambda_m}. \quad (2.29)$$

Это и есть окончательная формула для вычисления матрицы рассеяния. Если обозначить $S/S^0 = \exp(2i\delta)$, то зависимость δ от k является резонансной кривой, а корень \bar{k} уравнения $\delta = \pi/2$ (т. е. $\lambda_m' = 1$) — квази-стационарным уровнем (вещественным). Ширина резонанса $2\delta k$ (полоса значений k , где δ сильно меняется) определяется корнями уравнения $|1 - \lambda_m'| = |\lambda_m''|$ (т. е. $\delta = \pi/2 \pm \pi/4$).

Фактическое определение $\lambda_m(k)$ из (2.25) — (2.26) производилось по методу Ритца, который применялся к стационарному функционалу

$$L(u) = \int_0^\infty \left(\frac{du}{dr}\right)^2 dr - \int_0^\infty (k^2 - V) u^2 dr + \lambda \int_0^{r_{\max}} (V - V^0) u^2 dr. \quad (2.30)$$

Этот функционал получается из (2.8), если в нем считать ε переменной величиной, внести ее под знак интеграла, заменить по (2.20), вместо функций $\varepsilon(r)$ и $\alpha(r)$ подставить $1 - (V/k^2)$ и $1 - (V^0/k^2)$. Стационарность (2.30) на решениях задачи (2.25) — (2.26) может быть, разумеется, доказана и непосредственно.

При вычислениях, результаты которых приведены ниже, использовались базисные функции

$$v_n = \left(\frac{r}{b}\right)^{2n-1} e^{ikb} \quad (r < b), \quad v_n = e^{ikr} \quad (r > b),$$

где b — внешняя граница потенциала ($V(r) = 0$ при $r > b$). Условие,

что такая граница существует, не является необходимым для применения метода.

Таблица I

	N				Точное значение
	3	4	5	6	
$\bar{k}_1 a$	2,499	2,499	2,498	2,4961	2,4952
$2\hat{\delta}k_1 a$	0,224	0,2276	0,2275	0,2286	0,2289

В табл. I приведены результаты для прямоугольного барьера, занимающего отрезок от $r = a$ до $r = b$ ($b/a = 3/2$) и высотой $V_{\max} = 20/a^2$,

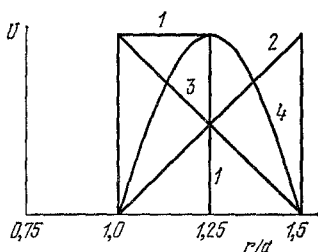


Рис. 5. Формы потенциальных барьеров.

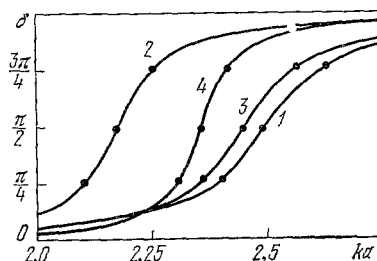


Рис. 6. Резонансные кривые для потенциальных барьеров на рис. 5.

в зависимости от числа N взятых при расчете базисных функций. В последнем столбце указаны точные значения $\bar{k}a$ и $2\hat{\delta}ka$, которые для этой формы барьера можно найти из трансцендентного уравнения. Таблица иллюстрирует сходимость метода.

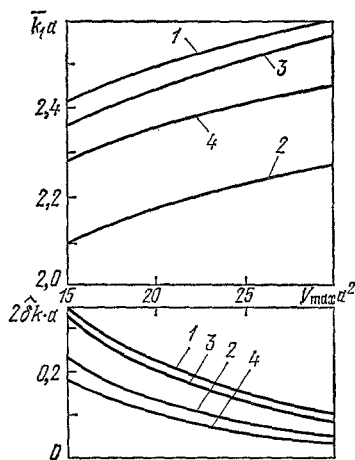


Рис. 7. Зависимость резонансных характеристик от высоты барьеров.

На рис. 5 изображены три формы барьера (2, 3, 4), начинающиеся при $r = a$ и оканчивающиеся при $r = b$, $b/a = 3/2$, и прямоугольный барьер (1), для которого $b/a = 5/4$. Для прямоугольного барьера задача, как известно, решается точно. На рис. 6 представлены резонансные кривые для этих барьеров при $V_{\max} a^2 = 20$. Точками отмечены границы областей ($\delta = \pi/4$ и $\delta = 3\pi/4$) и квазистационарный уровень $\bar{k} = \pi/2$ ($\delta = \pi/2$). На рис. 7 для тех же форм барьера представлена зависимость резонансных характеристик от высоты барьера. С ростом высоты резонанс достигается при ббльших энергиях падающих частиц, но относительная высота квазистационарного уровня (\bar{k}^2/V_{\max}) убывает, а потому уменьшается прозрачность барьера для резонансной энергии, и резонанс становится более узким.

Расчет одной резонансной кривой занимает около 2 минут машинного времени на ЭВМ типа «Минск-32».

3. ВВЕДЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОГО ПАРАМЕТРА В ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

а) Импедансный метод ⁵

Его мы проиллюстрируем на примере векторной задачи о дифракции на замкнутой поверхности S . Поля \mathbf{E} , \mathbf{H} должны удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - ik\mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(e)}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + ik\mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^{(m)}, \quad (3.1a)$$

где $\mathbf{j}^{(e)}$, $\mathbf{j}^{(m)}$ — заданные токи, на поверхности S должны выполняться условия

$$E_t - iw^0 H_\tau = 0; \quad E_\tau + iw^0 H_t = 0. \quad (3.1б)$$

Кроме того, должны выполняться условия излучения. В соотношениях (3.1б) t , τ — два касательных к S орта, w^0 — заданное число, импеданс поверхности. Для идеального металла $w^0 = 0$. Мы примем $w^0 = \text{const}$; обобщение для переменного импеданса производится примерно так же, как в предыдущем параграфе для переменного ε (r).

Определим собственные функции e_n , h_n как решения однородных уравнений

$$\operatorname{rot} h_n - ike_n = 0, \quad \operatorname{rot} e_n + ikh_n = 0, \quad (3.2a)$$

удовлетворяющие на S условиям

$$e_{nt} - iw_n h_{n\tau} = 0, \quad e_{n\tau} + iw_n h_{nt} = 0 \quad (3.2б)$$

и условиям излучения. Индекс n имеет размерность на единицу меньше, чем задача дифракции. Это присуще всем методам гл. 3. Число w_n есть спектральный параметр однородной задачи (3.2). Из закона сохранения энергии легко получить, что $\operatorname{Im} w_n \geq 0$; знак равенства имеет место для закрытых резонаторов. Поля e_n , h_n ортогональны на S :

$$\int_S (h_{nt} h_{mt} + h_{n\tau} h_{m\tau}) dS = 0, \quad n \neq m. \quad (3.3)$$

Решение задачи (3.1) записывается в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^0 + \sum_n A_n e_n, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \sum_n A_n h_n, \quad (3.4)$$

где \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0 — поле тех же источников в пустоте. Коэффициенты A_n имеют структуру (1.3) и равны

$$A_n = \frac{-i}{w^0 - w_n} \frac{\int_S [E_t^0 h_{n\tau} - E_\tau^0 h_{nt} - iw^0 (H_t^0 h_{n\tau} + H_\tau^0 h_{nt})] dS}{\int_S (h_{nt}^2 + h_{n\tau}^2) dS}. \quad (3.5)$$

Подчеркнем, что решение представлено двойным, а не тройным рядом, в суммах отсутствуют градиентные слагаемые (они автоматически включены в \mathbf{E}^0 , \mathbf{H}^0) и коэффициенты разложений для \mathbf{E} и \mathbf{H} одинаковы. Таковы отличия намеченного здесь аппарата от общепринятого.

б) Условия сопряжения ⁶

Рассмотрим на примере скалярных задач особенности метода в случае, когда спектральный параметр λ вводится в граничные условия, имеющие смысл условий сопряжения на границе областей.

Способ применим к закрытым и открытым задачам дифракции на металлических и диэлектрических телах, а также на бесконечно тонких поверхностях, которые могут быть, в частности, полупрозрачными.

Рассмотрим здесь построение решения двумерной задачи дифракции на незамкнутом бесконечно тонком экране. Дополнение \bar{S} (щель) составляет вместе с экраном S полный контур, который разбивает все пространство на внутреннюю (V^+) и внешнюю (V^-) области. Нужно найти решение уравнения

$$\Delta u + k^2 u = f, \quad (3.6)$$

удовлетворяющее на экране S либо условию

$$u|_S = 0 \quad (E\text{-поляризация, } u = E_z), \quad (3.7)$$

либо условию

$$\frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = 0 \quad (H\text{-поляризация, } u = H_z). \quad (3.8)$$

Решение должно также удовлетворять соответствующим условиям вблизи острых кромок и условию излучения; на дополнении \bar{S} полное поле и его нормальная производная должны быть непрерывны:

$$u^+ - u^- \Big|_{\bar{S}} = 0, \quad (3.9a)$$

$$\frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \Big|_{\bar{S}} = 0. \quad (3.9b)$$

Собственные функции, по которым будем разлагать дифрагированное поле задач (3.6) — (3.9), должны удовлетворять однородному уравнению

$$\Delta u_n + k^2 u_n = 0, \quad (3.10)$$

условию излучения и условию конечности энергии вблизи кромок. На границе областей V^+ и V^- собственные функции подчиним условиям сопряжения, в которые введен спектральный параметр $\lambda = \rho_n$: для E -поляризации

$$u_n^+ - u_n^- = 0, \quad \frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} - \frac{u_n}{\alpha \rho_n} = 0; \quad (3.11)$$

для H -поляризации

$$\frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} = 0, \quad u_n^+ - u_n^- + \frac{\alpha}{\rho_n} \frac{\partial u_n}{\partial N} = 0. \quad (3.12)$$

Здесь α — некоторая функция координаты на контуре, которая выбирается при решении конкретной задачи.

Эти условия могут быть поставлены как на контуре S (экран в задаче дифракции): (3.11) вместо (3.7) или (3.12) вместо (3.8) (при этом на дополнении \bar{S} должны быть сохранены условия (3.9)), так и на дополнении \bar{S} , и тогда для собственных функций сохраняются соответствующие условия на экране S (3.7) или (3.8).

На той части контура, где введено собственное значение (на S или на \bar{S}), имеют место условия ортогональности: для E -поляризации

$$\int \frac{1}{\alpha} u_n u_m dS = 0 \quad (n \neq m), \quad (3.13)$$

для H -поляризации

$$\int \alpha \frac{\partial u_n}{\partial N} \frac{\partial u_m}{\partial N} dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (3.14)$$

Физическая трактовка вспомогательных однородных задач состоит в том, что они описывают незатухающие (происходящие на вещественной частоте k) собственные колебания. Условия сопряжения (3.11), (3.12) описывают активную полупрозрачную пленку, на которой выделяется энергия, компенсирующая потери на излучение ($\text{Im } \rho_n > 0$).

Формальное решение исходных задач дифракции во всех случаях представляется рядом (1.2). Система собственных функций в (1.2) и выделенное слагаемое определяются поляризацией и зависят от того, в какой части контура устанавливаются условия сопряжения, содержащие спектральный параметр. Поле u^0 является решением неоднородного уравнения (3.6). При введении собственного значения на S u^0 можно сделать совсем простым — полем источников f в свободном пространстве. Однако в ряде случаев u^0 целесообразно усложнить. Например, в задаче о возбуждении резонатора из пары зеркал к полю источников f в свободном пространстве следует добавить сумму дифрагированных полей от каждого отдельно взятого зеркала. Такое u^0 содержит весь нерезонансный фон, и явление резонанса будет хорошо описываться во всем пространстве одним слагаемым ряда по u_n , существенно превосходящим остальные.

Вводить спектральный параметр на дополнении \bar{S} удобно, если оно составляет малую часть полного контура (экран почти замкнут). В этом случае u^0 — поле дифракции источников f на заматризованном полном контуре, т. е. также включает в себе весь нерезонансный фон, а резонанс передается одним слагаемым из суммы. Такой подход использован (п. г) в задаче о возбуждении резонаторов с малым отверстием.

Если спектральный параметр введен на экране S , то представление (1.2) с любыми коэффициентами A_n не удовлетворяет лишь граничным условиям на экране S ((3.7) или (3.8)). Потребовав их выполнения всем рядом, получим с помощью соответствующих условий ортогональности выражения для этих коэффициентов: для E -поляризации

$$A_n = -\frac{1}{\rho_n} \frac{\int_S u^0 v_n dS}{\int_S \alpha v_n^2 dS}, \quad v_n = \left(\frac{\partial u_n^+}{\partial N} - \frac{\partial u_n^-}{\partial N} \right) \Big|_S, \quad (3.15)$$

в случае H -поляризации

$$A_n = \frac{1}{\rho_n} \frac{\int_S (\partial u^0 / \partial N) v_n dS}{\int_S (1/\alpha) v_n^2 dS}, \quad v_n = (u_n^+ - u_n^-) \Big|_S. \quad (3.16)$$

В резонансных условиях одно из собственных значений становится малым по модулю, и соответствующий член ряда преобладает.

Если же спектральный параметр введен на дополнении \bar{S} , то (1.2) при любых A_n не удовлетворяет лишь одному из условий (3.9) (в зависимости от поляризации — (3.9а) или (3.9б)). Удовлетворяя это условием всем рядом, находим, используя ортогональность: в случае E -поляризации

$$A_n = \rho_n \frac{\int_{\bar{S}} (\partial u^0 / \partial N) u_n dS}{\int_{\bar{S}} (1/\alpha) u_n^2 dS}, \quad (3.17)$$

для H -поляризации

$$A_n = -\rho_n \frac{\int_{\bar{S}} u^0 (\partial u_n / \partial N) dS}{\int_{\bar{S}} \alpha (\partial u_n / \partial N)^2 dS}. \quad (3.18)$$

При резонансе собственное значение по модулю возрастает.

Формулами (1.2), (3.15) — (3.18) задача дифракции сведена к нахождению поля u^0 и собственных элементов однородных задач. В следующих

двух пунктах приводятся и иллюстрируются на конкретных примерах способы нахождения этих собственных элементов.

Формальное применение метода к построению решения задачи дифракции на диэлектрическом теле не встречает принципиальных затруднений и проводится по аналогичной схеме (п. д)) с небольшими изменениями.

в) Резонатор из пары зеркал ⁶

При введении спектрального параметра на экране S однородная задача E -поляризации легко сводится к простому интегральному уравнению:

$$-\rho_n u_n = \int_S u_n \frac{1}{\alpha} G_n^+ dS; \quad (3.19)$$

здесь G — функция Грина свободного пространства для уравнения Гельмгольца; в двумерной задаче $G = (i/4) H_0^{(2)}(kR)$, R — расстояние между точками наблюдения и интегрирования.

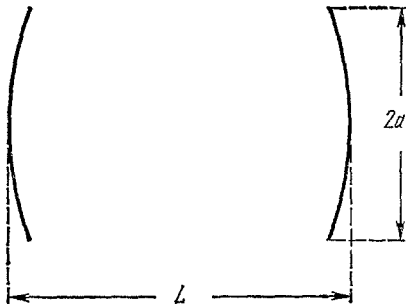


Рис. 8. Двухзеркальный резонатор.

Уравнение (3.19) представляет собой эффективный алгоритм расчета открытых резонаторов произвольной формы. Оно было использовано для исследования резонансных свойств резонаторов из пары зеркал (рис. 8), играющих важную роль в технике СВЧ. Известная асимптотическая (квазиоптическая) теория таких резонаторов ⁷ предполагает выполнение условий $ka \gg 1$, $L/a \gg 1$. Изложенный выше аппарат позволяет строго рассчитать эти резонаторы и, в частности, определить границы применимости квазиоптической теории.

Уравнение (3.19) (в котором функция α была принята равной единице) решалось численно для резонаторов с плоскими и конфокальными зеркалами. На рис. 9 приведена частотная зависимость модуля первого собственного значения, которая дает резонансные частоты, а также позволяет вычислить добротность резонаторов по простой формуле

$$Q = \frac{kL}{2\delta(kL)}, \quad (3.20)$$

где $\delta(kL)$ — полуширина резонансного пика. Например, для резонатора с плоскими зеркалами при $L/a = 2$, $kL = 40,89$ величина добротности составляет $Q = 680$. В табл. II приведены резонансные частоты и ширина

Таблица II

Плоские зеркала, $ka^2/L = 1,2\pi$			Конфокальные зеркала, $ka^2/L = 1,2$		
L/a	kL	$2\delta(kL)$	L/a	kL	$2\delta(kL)$
1,58	9,58	0,210	2,74	16,49	0,122
2,04	15,86	0,192	3,22	22,77	0,110
2,42	22,15	0,186	3,63	29,05	0,122
2,74	28,43	0,179	4,67	49,70	0,115
3,03	34,70	0,175	5,24	60,47	0,123
3,98	59,85	0,164	5,76	73,03	0,117
Асимптотика:		0,147			0,110

резонансных пиков первого (основного) собственного колебания при фиксированном значении квазиоптического параметра ka^2/L и различных значениях L/a . Из этих результатов следует, что квазиоптическая теория дает удовлетворительную точность при $L/a \geq 4$ (в определении резонансной частоты порядка 1%, а в определении ширины резонансов порядка 10%).

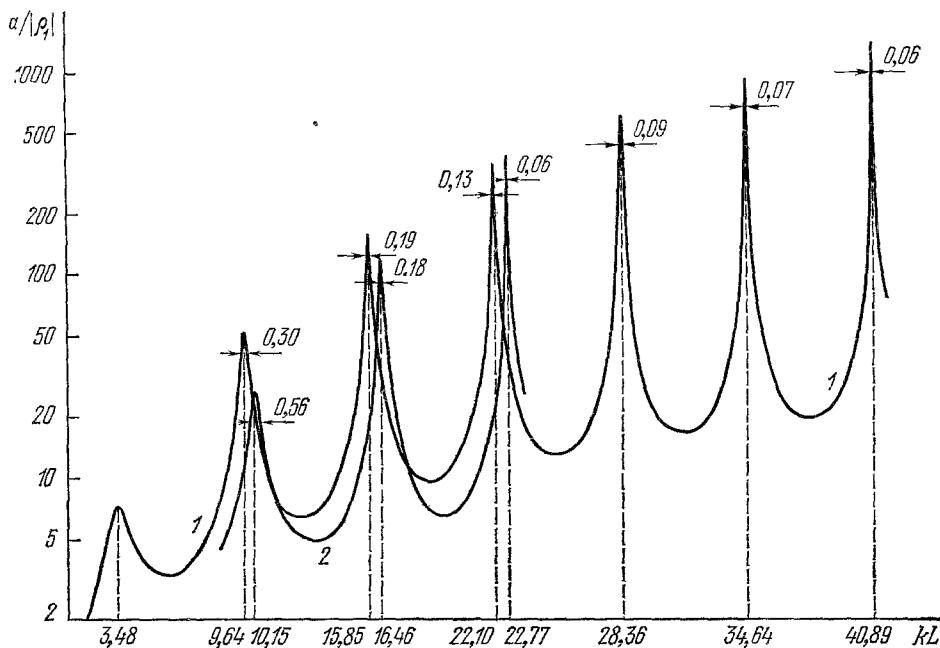


Рис. 9. Частотная зависимость $|\rho_1|$.

Кривая 1 — плоские зеркала при $L/a = 1$; кривая 2 — конфокальные зеркала при $L/a = 3$.

Отметим, что те же собственные значения ρ_n описывают одновременно и резонаторы с полупрозрачными зеркалами (например, из частой решетки). В этом случае достаточно построить кривую $1/|\rho^0 - \rho_n|$, где ρ^0 — прозрачность зеркал (см. также п. е)). Для зеркал, выполненных из частой решетки, составленной из металлических лент, $\rho^0 = (p/2\pi) \ln \sin(\pi q/2)$, где p — период, а q — коэффициент заполнения решетки⁸.

г) Двумерная задача дифракции на произвольном цилиндре с продольной щелью⁹

Рассмотрим задачу возбуждения открытого резонатора, представляющего собой цилиндр произвольного поперечного сечения с прорезанной в нем продольной щелью (рис. 10). Ширину щели $2l$ будем считать малой по сравнению с длиной волны, а стенку бесконечно тонкой. В математической постановке это есть задача (3.6) — (3.9) в случае малой щели \bar{S} .

Введем спектральный параметр на щели \bar{S} . В этой случае соответствующие однородные задачи оказывается возможным решить аналитически, и тем самым согласно формальному аппарату п. б) выписать решение исходной задачи возбуждения резонатора в замкнутом виде.

Метод решения однородных задач состоит в сведении их к уравнениям по щели \bar{S} (интегральному для H -поляризации и интегро-дифференциальному в случае E -поляризации). Если принять входящую в условия

сопряжения (3.11), (3.12) функцию α равной

$$\alpha = \sqrt{l^2 - s^2} \quad (3.21)$$

(s — координата, отсчитываемая от середины щели), то собственные значения и собственные функции этих уравнений выписываются в явном виде. При этом оказывается, что в полном поле помимо u^0 достаточно сохранить лишь одно резонансное слагаемое, соответствующее первому собственному значению; все остальные члены не носят резонансного характера и пренебрежимо малы.

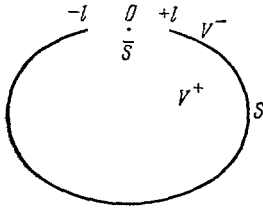


Рис. 10. Поперечное сечение цилиндра с продольной щелью.

Так как щель мала, очевидно, что резонансные частоты открытого резонатора близки к собственным частотам k_{nm} соответствующего закрытого резонатора. Поэтому для исследования резонансных явлений достаточно знать структуру решения вблизи частот k_{nm} . Можно показать, что в этих областях частот в случае H -поляризации, например, при в нем возбуждении ток на стенке резонатора вдали от щели (если считать ее экспоненциально узкой) имеет следующую структуру:

$$\begin{aligned} u^-(s) &\approx u^0(s) + \frac{2Lu^0(0)G^-(0,s)}{[1/(k-k_{nm})A] + (1/\bar{\rho}_0) + iB}, \\ u^+(s) &\approx -\frac{2Lu^0(0)G^+(0,s)}{[1/(k-k_{nm})A] + (1/\bar{\rho}_0) + iB}; \end{aligned} \quad (3.22)$$

здесь $2L$ — длина полного контура поперечного сечения ($S + \bar{S}$), G^+ и G^- — функции Грина для внутренней (V^+) и внешней (V^-) областей резонатора с условием $\partial G^\pm / \partial N|_{S+\bar{S}} = 0$;

$$\bar{\rho}^0 = \frac{\pi}{4L} \frac{1}{\ln(\pi l/2L)} \quad (3.23)$$

— параметр, характеризующий связь через щель (эквивалентная прозрачность),

$$B = 2L \operatorname{Im} G^-(0,0), \quad (3.24)$$

$$A = k_{nm} \int_{V^+} v_{nm}^2 dV / Lv_{nm}^2(0); \quad (3.25)$$

v_{nm} — собственные функции, соответствующие собственным частотам k_{nm} закрытого резонатора с условием $\partial v_{nm} / \partial N = 0$.

Мы ограничились для простоты резонаторами с симметричной относительно щели формой и четными по координате s решениями.

Согласно полученным результатам, поле внутри резонатора, а также дополнительное к u^0 слагаемое вне его почти всегда малы (пропорциональны $1/\ln(\pi l/2L)$). Резонанс проявляется в том, что на отдельных частотах первые два (большие) слагаемые в знаменателях (3.22) компенсируют друг друга. При этом рассеянное поле вне резонатора претерпевает конечное возмущение (дополнительное к u^0 слагаемое имеет порядок единицы), а поле внутри становится большим, пропорциональным $\ln(\pi l/2L)$. Из этих формул также следует, что на собственных частотах k_{nm} закрытого резонатора поле внутри уже невелико (порядка единицы), а во вне равно u^0 , так как второе слагаемое в (3.22) при этом обращается в нуль.

Из условия резонанса (обращение в нуль вещественной части знаменателя (3.22)) получается простая формула для смещения резонансных частот, обязанного прорезанию щели:

$$\Delta k_{nm} \approx -\frac{\bar{\rho}^0}{A}. \quad (3.26)$$

Полуширина резонансной кривой много меньше, она имеет порядок $B(\bar{\rho}^0)^2$. В отличие от Δk_{nm} , полуширина зависит от того, какие тела находятся вблизи резонатора.

В случае E -поляризации резонансный знаменатель в выражении для полного поля имеет тот же вид, что и в (3.22), и смещение резонансных частот дается той же формулой (3.26), только величины $A, \bar{\rho}^0, B$ определяются в этом случае формулами

$$\bar{\rho}^0 = \frac{\pi l^2}{8L}, \tag{3.27a}$$

$$A = \frac{k_{nm} \int v_{nm}^2 dV}{L [\partial v_{nm}(0)/\partial N]^2}, \tag{3.27б}$$

$$B = 2L \operatorname{Im} \frac{\partial^2 G^-(0, 0)}{\partial N_S \partial N_{S'}}, \tag{3.27в}$$

где k_{nm} и v_{nm} — собственные частоты и соответствующие им собственные функции закрытого резонатора с условием $v_{nm}|_{S+S'} = 0$; G^- — функция Грина для внешности резонатора с таким же граничным условием. Фактическое вычисление B (а для сложных сечений и A) производится не по (3.24), (3.25), (3.27), а по методу п. з).

Согласно этим формулам решения для обеих поляризаций обладают аналогичными резонансными свойствами, только для E -поляризации характерным малым параметром является не $1/\ln(\pi l/2L)$, а $(l/L)^2$.

Соответствующий анализ в н у т р е н н е г о возбуждения для обеих поляризаций показывает, что в резонансе поле велико как внутри резонатора (порядка $1/(\bar{\rho}^0)^2$), так и вне его (порядка $1/\bar{\rho}^0$). Вдали от резонансных частот полное поле во внешней области и дополнительное к u^0 слабое внутри одинаково малы (порядка $\bar{\rho}^0$).

Изложенный аппарат тривиальным образом переносится для расчета закрытых резонаторов, связанных через малую щель, с очевидными изменениями в постановках задач (отпадает условие излучения). В табл. III для случая H -поляризации приведены смещения Δk_{nm} резонансных частот для нескольких конкретных форм связанных резонаторов.

Таблица III

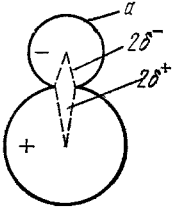
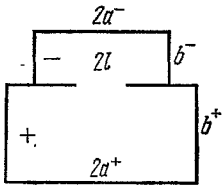
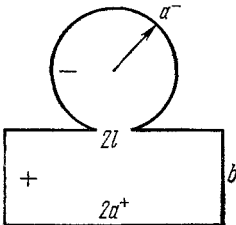
	k	Δk
	k_{0m} $J_1(k_{0m}a) = 0$	$\frac{-1}{2a^2 k_{0m} \ln(\delta^+ \delta^- / 4)}$
	$\frac{\pi}{b^-}$	$\frac{-1}{2a^- \ln(\pi^2 l^2 / 4a^+ a^-)}$

Таблица III (продолжение)

	k	Δk
	$J_1(k_{0m}a^-) = 0$ k_{0m} $\frac{\pi}{b}$	$\frac{-1}{2a^{-2} k_{0m} \ln(\pi l^2 / 4a^+ a^-)}$ $\frac{-1}{2a^+ \ln(\pi l^2 / 4a^+ a^-)}$

д) Резонатор произвольной формы из материала с $\epsilon \gg 1$ ^{6, 10}

В этом пункте мы коротко опишем основные физические явления, возникающие при дифракции на открытом резонаторе в виде тела с $\epsilon \gg 1$. Это тоже «ловушка», и применение аппарата п.б) к этой задаче также позволяет изучить качественную сторону явления резонанса. Приведем лишь результаты этого исследования, не выписывая формулы ни для самой задачи дифракции (скалярное волновое уравнение внутри тела, однородное, а волны — неоднородное; в случае E -поляризации, например, непрерывность поля и его нормальной производной на границе тела S , условие излучения), ни для собственных функций.

Поле u^0 по-прежнему является результатом дифракции тех же источников на металлическом резонаторе той же формы (с граничным условием $u|_S = 0$). Полное поле записывается в виде ряда (1.2); коэффициенты A_n пропорциональны собственным значениям ρ_n . Эти величины малы (порядка $1/\sqrt{\epsilon}$) при всех частотах, кроме окрестностей резонансных частот. Эти последние близки к собственным частотам k_{nm} внутренней задачи (экранированный объем, заполненный диэлектриком) с граничным условием $\partial v_{nm} / \partial N_S = 0$ (отличным от условия для $u^0|_S$). Смещение центра резонансной кривой и ее ширина имеют в этом случае один и тот же порядок ($\sim 1/\epsilon$), обе эти характеристики зависят от того, какие тела расположены вблизи резонатора. Даже в максимуме резонансной кривой поле внутри не становится большим, а остается конечным (однако запасенная внутри тела энергия, пропорциональная ϵ , велика). Фактическое вычисление всех параметров, определяющих $\rho_n(k)$, требует (как и в задаче п.з)) решения граничной задачи в V^- (определение u_n^- в V^- по $u_n^-|_S = v_{nm}|_S$), поэтому количественные результаты и здесь легче извлекать из интегральных уравнений, аналогичных уравнениям, приведенным в следующем пункте.

е) Спектральный параметр
в условиях на бесконечности ^{11, 12}

Излагаемый в этом пункте метод решения задач дифракции является, по существу, вариантом граничного метода. Его преимущество по сравнению с уже рассмотренными вариантами ОМСК проявляется при решении открытых задач с потерями только на излучение. Оно состоит в том, что однородная задача этого метода вещественна и сводится к простому интегральному уравнению с вещественными собственными функциями и собственными значениями. Это преимущество обязано, как уже отмеча-

лось в гл. 1, тому обстоятельству, что здесь спектральный параметр вводится именно в той части пространства, в которой имеют место потери, т. е. на бесконечности. Источником энергии во вспомогательной однородной задаче является сходящаяся из бесконечности собственная волна; решение однородной задачи содержит также рассеянную рассматриваемым телом собственную волну. Угловые зависимости сходящейся и расходящейся волн, определяемые формой и свойствами тела, совпадают с точностью до комплексного сопряжения. Спектральным параметром является амплитуда рассеянной собственной волны.

Этот метод применим для решения задач дифракции на телах и поверхностях с самыми различными свойствами. Здесь мы его изложим на примере двумерной скалярной задачи о дифракции на некоторой полупрозрачной поверхности (рис. 11) S для случая E -поляризации. Поверхность S может быть, в частности, незамкнутой.

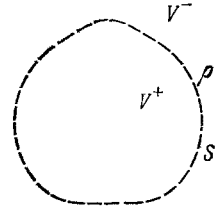


Рис. 11. Поперечное сечение цилиндра с полупрозрачной стенкой.

Пусть нужно найти решение уравнения

$$\Delta u + k^2 u = f, \tag{3.28}$$

удовлетворяющее условиям излучения и граничным условиям на S :

$$u^+ - u^- = 0, \tag{3.29a}$$

$$\rho^0 \left(\frac{\partial u^+}{\partial N} - \frac{\partial u^-}{\partial N} \right) - u = 0. \tag{3.29b}$$

Параметр ρ^0 характеризует прозрачность поверхности S (см. конец п. в.). Для металлической поверхности $\rho^0 = 0$ и $u|_S = 0$.

Для решения поставленной задачи введем собственные функции u_n вспомогательной однородной задачи, удовлетворяющие уравнению (3.10), граничным условиям (3.29) на S и следующему условию на бесконечности (в которое введен спектральный параметр $\lambda = s_n$):

$$u_n \approx_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{1+s_n} \left(\Phi_n^*(\theta) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} + s_n \Phi_n(\theta) \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} \right) \tag{3.30}$$

с требованием на $\Phi_n(\theta)$

$$\Phi_n^*(\theta) = i\Phi_n(\pi + \theta). \tag{3.31}$$

При отсутствии потерь на поверхности S $|s_n| = 1$. Совокупность чисел s_n образует матрицу рассеяния.

Эта однородная задача стандартным способом сводится к вещественному интегральному уравнению по границе S :

$$4\rho^0 u_n = \int_S u_n [N_0(kR) - \kappa_n J_0(kR)] dS, \tag{3.32}$$

где R — расстояние между точками интегрирования и наблюдения; вещественный спектральный параметр κ_n этого уравнения просто связан со спектральным параметром s_n :

$$\kappa_n = i \frac{1-s_n}{1+s_n}. \tag{3.33}$$

Если точка наблюдения находится вне S , то (3.32) определяет u_n во всем пространстве по ее значениям на S .

Формальное решение исходной задачи дифракции представляется в виде

$$u = u^0 + \sum_n A_n u_n^s, \tag{3.34}$$

где u_n^s определяется по формуле

$$u_n^s = \frac{-i}{4} \int_S u_n H_0^{(2)}(kR) dS. \quad (3.35)$$

(Заметим, что в этом варианте ОМСК разложение производится не по u_n .) Согласно этому определению функции u_n^s удовлетворяют уравнению (3.10), условию излучения, граничному условию (3.29а) (по свойству непрерывности потенциала простого слоя). Сравнивая (3.32) и (3.35), получаем соотношение, справедливое в любой точке пространства:

$$-\rho^0 u_n = \operatorname{Re} u_n^s - \kappa_n \operatorname{Im} u_n^s. \quad (3.36)$$

Отсюда, в частности, следует условие биортогональности:

$$\int_S u_m \operatorname{Im} u_n^s dS = 0 \quad (n \neq m). \quad (3.37)$$

Выделяемое в (3.14) поле u^0 можно выбирать по-разному; от этого выбора зависят коэффициенты A_n . Здесь мы рассмотрим два способа, в одном из которых u^0 есть наиболее простое поле — поле тех же источников f в пустоте, а в другом, эффективном при анализе высокодобротных резонаторов с замкнутой границей, u^0 — поле дифракции на полностью заматаллизованном резонаторе. В обоих случаях (3.34) почленно удовлетворяет всем условиям исходной задачи дифракции, кроме (3.29б). Требование этого условия дает с использованием ортогональности (3.27) выражение для коэффициентов A_n . Если u^0 — поле источников f в пустоте, то

$$A_n = -\frac{1}{i + \kappa_n} \frac{\int_S u^0 u_n dS}{\int_S u_n \operatorname{Im} u_n^s dS}, \quad (3.38a)$$

а если u^0 — поле дифракции на заматаллизованном резонаторе, то

$$A_n = -\frac{\rho^0}{i + \kappa_n} \frac{\int_S (\partial u^0 / \partial N) u_n dS}{\int_S u_n \operatorname{Im} u_n^s dS}. \quad (3.38б)$$

Таким образом, исходная задача дифракции сведена к решению интегрального уравнения (3.32) и вычислению поля u^0 .

В следующем пункте изложенный метод применяется для анализа резонансных свойств резонатора с замкнутой полупрозрачной границей S .

ж) Двумерная задача дифракции на полупрозрачном цилиндре^{10, 12}

Пусть прозрачность стенки резонатора мала ($k\rho^0 \ll 1$), и возбуждение — внешнее. Для такого открытого резонатора (типа «ловушки»), так и для цилиндра с малой щелью, рассмотренного в п. г), резонансные частоты близки к собственным частотам k_{nm} соответствующего закрытого резонатора, и нужно найти структуру собственных значений κ_n и коэффициентов A_n вблизи этих частот.

Можно показать, что в этих частотных областях

$$\kappa_n(k) \approx -\frac{\rho^0 + (k - k_{nm})A}{(k - k_{nm})^2 A^2 B}. \quad (3.39)$$

Участвующая здесь величина A выражается через k_{nm} и соответствующие им собственные функции v_{nm} закрытого резонатора с условием $v_{nm}|_S=0$;

$$A = 2k_{nm} \int_{V^+} v_{nm}^2 dV \int_S (\partial v_{nm} / \partial N)^2 dS. \tag{3.40}$$

Величина B также не зависит от частоты и от прозрачности. Она характеризует добротность резонатора и подобно (3.27) может быть выражена через функцию Грина внешней к резонатору области. В тех же частотных областях имеют место формулы:

$$\begin{aligned} u_n^2(k) &\approx -v_{nm} + (k - k_{nm}) \frac{\partial u_n^2}{\partial k}(k_{nm}) \text{ в } V^+, \\ u_n^2(k) &\approx (k - k_{nm}) \frac{\partial u_n^2}{\partial k}(k_{nm}) \text{ в } V^-. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Для рассматриваемой задачи целесообразно в качестве u^0 взять поле дифракции на заматаллизированном резонаторе.

Подставляя (3.39) в (3.38б), после простых преобразований получим

$$A_n \approx - \frac{1/(k - k_{nm})}{[1/(k - k_{nm})A] + (1/\rho^0) + iB} \frac{\int_S (\partial u^0 / \partial N) (\partial v_{nm} / \partial N) dS}{2k_{nm} \int_{V^+} v_{nm}^2 dV}. \tag{3.42}$$

Отсюда следует такая же по виду, как и в п. г), формула для смещения резонансной частоты k^* относительно k_{nm} : $\Delta k_{nm} = -\rho^0/A$.

Согласно (3.39) на этой частоте собственное значение κ_n обращается в нуль:

$$\kappa_n(k^*) = 0. \tag{3.43}$$

Из полученных формул следует что резонансные свойства рассматри

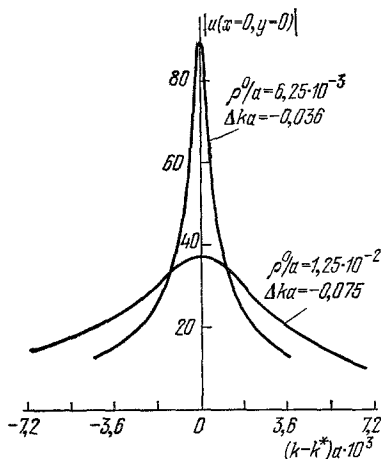


Рис. 12. Зависимость от частоты поля в центре прямоугольного резонатора с полупрозрачной стенкой. Резонанс а 1-м собственном колебании.

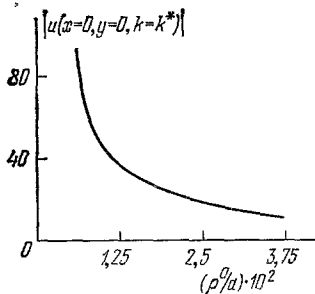


Рис. 13. Зависимость поля в резонансе от прозрачности стенок.

ваемого резонатора аналогичны свойствам резонатора с малой щелью (п. г)). Поле в V^+ и все дополнительные к u^0 слагаемые в V^- вдали от резонансов малы (порядка ρ^0). В резонансе полное поле в V^- претерпевает конечное возмущение (порядка единицы), а поле внутри становится большим, пропорциональным $1/\rho^0$. На рис. 12 представлено поле в центре прямоугольного резонатора с полупрозрачными стенками ($a/b=2$) при возбуждении его плоской волной, падающей со стороны широкой стенки. Рис. 13 иллюстрирует зависимость этого поля на резонансной частоте k^* от величины прозрачности стенок. Расчет выполнен с помощью интегрального уравнения (3.32) и формул (3.39), (3.42).

з) Расчет скорости и затухания вытекающих E -волн в волноводах произвольного сечения с полупрозрачной стенкой или со щелью^{9, 10, 12-14}

Как известно, вдоль открытых волноводов рассматриваемого типа могут распространяться только так называемые вытекающие волны. По ним можно разлагать в ряд полное поле в задаче возбуждения¹⁵. Эти волны обладают комплексными постоянными распространения. Связь внутренней и внешней областей (щель или прозрачность стенки) обуславливает затухание волн и отличие их фазовой скорости от скорости в соответствующем закрытом волноводе.

Постоянные распространения $\hat{h}_{nm} = \hat{h}'_{nm} + i\hat{h}''_{nm}$ выражаются через поперечное волновое число — комплексную собственную частоту \hat{k}_{nm} соответствующего двумерного резонатора в поперечном сечении:

$$\hat{h}_{nm}^2 = k^2 - \hat{k}_{nm}^2. \quad (3.44)$$

Здесь k — заданная вещественная частота генератора.

Таким образом, задача сводится к нахождению собственных значений однородной задачи:

$$\left. \begin{array}{l} \text{а) } \Delta u_{nm} + \hat{k}_{nm}^2 u_{nm} = 0, \\ \text{б) } u_{nm}^+ - u_{nm}^- |_S = 0, \\ \text{в) } \frac{\partial u_{nm}^+}{\partial N} - \frac{\partial u_{nm}^-}{\partial N} - \frac{u_{nm}}{\rho^0} \Big|_S = 0. \end{array} \right\} \quad (3.45)$$

На радиальной бесконечности u_{nm} должно представлять собой уходящую и экспоненциально нарастающую волну. S — контур поперечного сечения волновода. В случае металлического волновода со щелью $\rho^0 = 0$ и S — незамкнутый контур.

Сравним задачу (3.45) с однородной задачей (3.10), (3.30), (3.31). Если обобщить последнюю на область комплексных частот (при этом, разумеется, уже $|s_n| \neq 1$ и κ_n комплексно), то на частотах, на которых $s_n = \infty$, условие (3.30) переходит в условие на бесконечности задачи (3.45), а условие (3.31) отпадает из-за отсутствия приходящей волны. Так как уравнение и граничные условия на S этих задачах одинаковы, то на этих частотах обе постановки полностью идентичны, и мы получаем обычный результат, что комплексная собственная частота есть полюс функции $s_n(k)$, т. е. $s_n(\hat{k}_{nm}) = \infty$, или, что то же,

$$\kappa_n(\hat{k}_{nm}) = -i. \quad (3.46)$$

Полагая κ_n аналитической функцией k и разлагая ее в ряд Тейлора в окрестности резонансной частоты k^* , имеем с учетом (3.43):

$$\kappa_n(k) \approx (k - k^*) \frac{d\kappa_n}{dk}(k^*). \quad (3.47)$$

Для высокодобротных резонаторов ($\text{Im } \hat{k}_{nm}$ мала) (3.46) — (3.47) дают простую формулу для \hat{k}_{nm} :

$$\hat{k}_{nm} \approx k^* - \frac{i}{d\kappa_n/dk(k^*)}. \quad (3.48)$$

Таким образом, комплексная собственная частота выражается только через вещественные величины k^* и $d\kappa_n/dk(k^*)$, определяемые из решения вещественного интегрального уравнения (3.32). Формула (3.48) носит общий характер и оказывается справедливой для любых высокодобротных

резонаторов или волноводов со слабовытекающими волнами, в том числе и для не близких к закрытым.

Для резонаторов и волноводов с полупрозрачной стенкой (или с малой щелью) расчет входящих в (3.48) величин существенно упрощается, если воспользоваться структурой $\kappa_n(k)$ (3.39) (или аналогичной структурой для резонатора со щелью), справедливой в более широкой частотной области*). Формула (3.48) превращается тогда в

$$\hat{k}_{nm} \approx k_{nm} - \frac{\rho^0}{A} + i \frac{(\rho^0)^2}{A} B. \quad (3.49)$$

Величины ρ^0 , A , B для волноводов с продольной щелью (см. п. г) и с полупрозрачной стенкой (см. п. ж) различны. Соответственно для затухания и фазовой скорости вытекающих волн вдали от критических частот волновода получаем

$$\begin{aligned} \hat{h}_{nm}'' &= -(\rho^0)^2 \frac{B}{A} \frac{k_{nm}}{h_{nm}}, \\ \hat{h}_{nm}' &= h_{nm} + \frac{\rho^0}{A} \frac{k_{nm}}{h_{nm}}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

где $h_{nm} = \sqrt{k^2 - k_{nm}^2}$ — постоянная распространения в закрытом волноводе. Для волновода со щелью эквивалентная прозрачность определяется формулой (3.27а).

Неизвестные величины A , B и k_{nm} находятся с помощью (3.39) (или ей эквивалентной для волновода со щелью) из кривой $\kappa_n(k)$, получающейся при численном решении соответствующего интегрального уравнения. Эта кривая

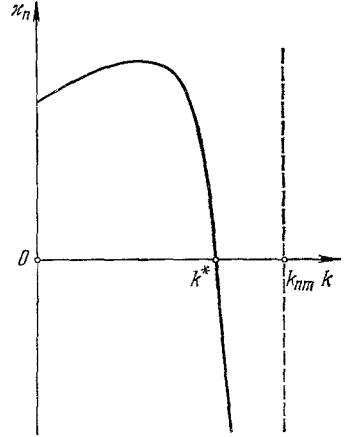


Рис. 14. Характерная зависимость собственного значения κ_n от частоты вблизи спектра закрытой задачи.

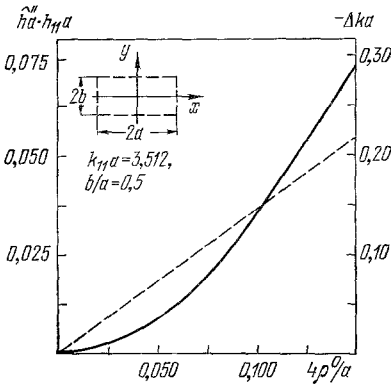


Рис. 15. Характеристики полупрозрачного волновода прямоугольного сечения

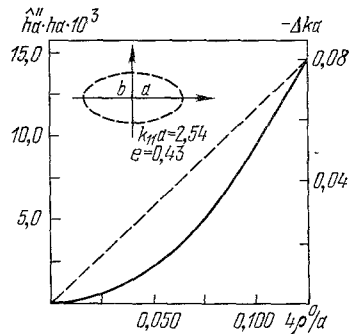


Рис. 16. Характеристики полупрозрачного волновода эллиптического сечения.

в интересующей нас области частот имеет стандартный вид. Для волновода с замкнутой полупрозрачной границей он изображен на рис. 14.

На рис. 15—19 изображены величины, пропорциональные затуханию (сплошные кривые) и поправке к фазовой скорости (штриховые) первой

*) Положив в (3.32) $\kappa_n = -i$, мы получим уравнение для комплексной собственной частоты k_{nm} , входящей в аргумент ядра интегрального уравнения. Применение описанного метода позволяет, таким образом, решить это уравнение, оставаясь в области вещественных k , и дает обоснование формулы (3.48) и, что особенно важно в вычислительном плане, — формулу (3.49).

вытекающей E -волны в волноводах различных сечений с полупрозрачной стенкой и со щелями, рассчитанные описанным выше способом. Этот спо-

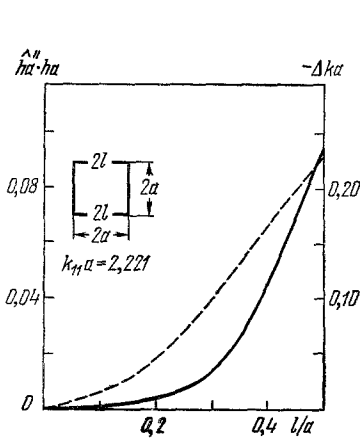


Рис. 17. Характеристики прямоугольного волновода с продольными щелями. Щели в центре стенок.

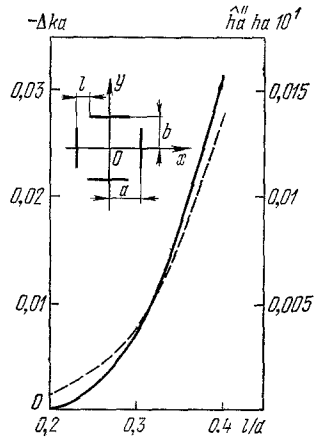


Рис. 18. Характеристики прямоугольного волновода со щелями в углах.

соб не требует, согласно предыдущему, знания функции Грина внешней области для заматриализованного волновода, поэтому искомые величины находятся без обычного предположения о том, что щель дополнена бесконечным фланцем.

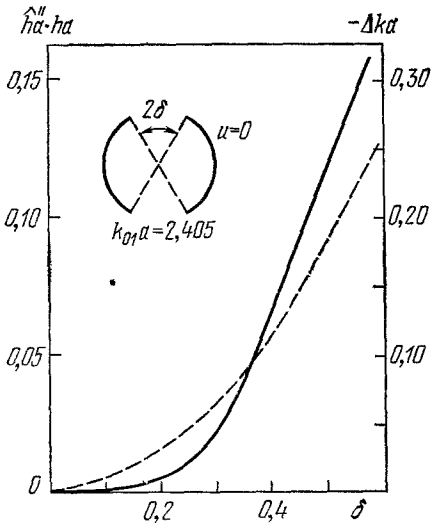


Рис. 19. Характеристики круглого волновода с продольными щелями.

методу приведена в ¹⁷. В работе ¹⁸ принято $k > 0$, и собственные функции, как и в ОМСК, подчинены на бесконечности тому же условию уходящих волн, что и рассеянное поле.

Выше мы формулировали все задачи в дифференциальной постановке. Введением функции Грина их можно привести к интегральным уравнениям. Постоянная связи является собственным значением уравнения Липпмана — Швингера, а функции Штурма — собственными функциями

* * *

Одной из первых работ, в которой поле представлено в виде дискретного ряда, без привлечения непрерывного спектра, является статья ¹⁶. В ней разложение решения уравнения Шрёдингера производится по собственным функциям самосопряженной задачи (функции Штурма), соответствующей отрицательной полной энергии. Эти функции убывают на бесконечности. В наших обозначениях это означает, что в (2.25) и (2.266) $k^2 < 0$. Собственным значением является множитель при потенциальной энергии (постоянная связи). Более поздняя литература по этому

этого уравнения; подробно это уравнение для комплексных k , не лежащих на полуоси $k > 0$, и ряд Неймана для него исследованы в работе¹⁹. Используемые выше в разложениях функции являются собственными функциями другого уравнения — уравнения Липпмана — Швингера в так называемом методе искаженных волн²⁰. В нем ядром является не функция Грина пустоты (как в обычном уравнении Липпмана — Швингера), а функция Грина вспомогательного диэлектрического тела или вспомогательного потенциала $V^0(r)$. Кроме того, в отличие от указанных работ, в описанном выше методе в ряд разлагается не полное рассеянное поле, а разность между ним и полем, возникающим при рассеянии на том же потенциале V^0 . Это разложение справедливо во всем пространстве, а резонансное рассеяние, как и резонанс в закрытых резонаторах, описывается одним слагаемым.

МСЧ изложен во многих учебниках (см., например,²¹). Обычная квантовомеханическая теория рассеяния с непрерывным спектром энергии и собственными функциями, которые для значения энергии, соответствующей полюсам матрицы рассеяния, растут на бесконечности, представляет собой пример ее применения для открытых систем. К открытым электродинамическим системам она применена в работе²². Вариационные методы в теории закрытых резонаторов рассмотрены в работе²³.

Скалярная задача со спектральным параметром в виде множителя в граничном условии третьего рода для внутренней области подробно изучалась В. А. Стекловым и другими авторами (см., например,²⁴). Неоднородное интегральное уравнение первого рода с тем же простым ядром, что и в (3.19) (при $\alpha \equiv 1$) часто используется в задачах дифракции. Асимптотическое граничное условие, аналогичное (3.30), введено в²², затем оно использовалось в²⁵ и независимо в²⁶. Асимптотическая теория открытых резонаторов, в которых отсутствует ограничение $L/a \gg 1$, предложена в работе^{27, 28}. Теория резонаторов и волноводов с узкими щелями (но обязательно с фланцем) развита, например, в²⁹. Другие разложения для поля на поверхности металлических тел предложены и исследованы в работе³⁰.

Сходимость бесконечных рядов типа (1.2) и законность формальных процедур, производимых над ними, исследовались в работах³¹. Функции u_n и числа λ_n являются для задачи о бесконечных областях собственными элементами несамосопряженных операторов. Спектральные свойства таких операторов, сложнее, чем для самосопряженных операторов, возникающих в задачах о закрытых резонаторах (в частности, в МСЧ). Операторы теории дифракции во многих отношениях все же близки к самосопряженным. Для всех основных задач, используя теоремы из³², удалось доказать полноту системы их собственных функций (суммируемость соответствующих рядов*), найти асимптотику собственных значений и т. д. Однако для самых общих задач дифракции полного математического обоснования законности всех произведенных выше процедур еще нет. Вопрос же о сходимости прямых вариационных методов (например, метода Ритца), применяемых к комплекснозначным функционалам типа (2.8), порождаемых этими операторами, по-видимому, теоретически не исследовался.

* Точнее, собственных и присоединенных. Построены примеры, в которых существуют присоединенные функции. Для простоты записи мы предполагали, что их нет, так что, в частности, интегралы типа (2.6) при $n = m$ отличны от нуля. Если присоединенные функции есть, то число их для каждого собственного значения конечно. Их надо включать в ряды типа (1.2). Коэффициенты A_n , соответствующие таким собственным значениям, будут определяться из конечной системы линейных алгебраических уравнений.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехн. и электрон. 13, 586 (1968).
2. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, *ibid.* 17, 261 (1972).
3. Н. Н. Войтович, Н. П. Санталов, *ibid.* 19, 2625 (1974).
4. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Препринт ИРЭ АН СССР № 28 (143), Москва, 1973.
5. Б. З. Каценеленбаум, Радиотехн. и электрон. 14, 25 (1969).
6. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, *ibid.* 15, 685 (1970).
7. Квазиоптика. Избранные доклады на международном симпозиуме, М., «Мир», 1966.
8. А. Н. Сивов, Радиотехн. и электрон. 6, 483 (1961).
9. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, *ibid.* 19, 2458 (1974).
10. Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, *ibid.*, стр. 2449.
11. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, А. Н. Сивов, Препринт ИРЭ АН СССР № 29 (144), Москва, 1973.
12. Н. Н. Войтович, Б. З. Каценеленбаум, Е. Н. Коршунова, А. Н. Сивов, Радиотехн. и электрон. 20, 1029 (1975).
13. Е. Н. Коршунова, А. Н. Сивов, *ibid.*, стр. 1038.
14. Б. З. Каценеленбаум, Е. Н. Коршунова, А. Н. Сивов, Акуст. ж. 21, 493 (1975).
15. А. Д. Шатров, Радиотехн. и электрон. 15, 1806 (1970).
16. M. R o t e n b e r g, *Ann. Phys. (N.Y.)* 19, 262 (1962).
17. В. П. Жигунов, Б. Н. Захарьев, Методы сильной связи каналов в квантовой теории рассеяния, М., Атомиздат, 1974.
18. И. М. Народецкый, ЯФ 9, 1066 (1969); Препринт ИТЭФ № 621, Москва, 1968.
19. S. W e i n b e r g, *Phys. Rev.* 131, 440 (1962).
20. Дж. Тейлор, Теория рассеяния, М., «Мир», 1975.
21. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, М., «Сов. радио», 1957.
22. Л. А. Вайнштейн, Открытые резонаторы и открытые волноводы, М., «Сов. радио», 1966.
23. В. В. Никольский, Вариационные методы для внутренних задач электродинамики, М., «Наука», 1967.
24. S. F. S h a t s h a, *J. Appl. Math. and Phys.* 20(8)(1971).
25. В. В. Карнишин, В. В. Акиндинов, В. В. Вишин, Радиотехн. и электрон. 15 (1970).
26. R. J. G a r b a s z, *Proc. IEEE* 53(8)(1965).
27. Е. И. Нефёдов, А. Т. Фиалковский, Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах, М., «Наука», 1972.
28. Е. П. Курушин, Е. И. Нефёдов, А. Т. Фиалковский, Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах, М., «Наука», 1975.
29. Х. Л. Гарб, П. Ш. Фридберг, Радиотехн. и электрон. 19, 1 (1974).
30. Я. Н. Фельд, *ibid.* 20, 28 (1975).
31. А. Г. Рамм, *ibid.* 18, 496 (1973).
М. С. Агранович, в кн. VI Всесоюзный симпозиум по дифракции и распространению волн. Краткие тексты докладов, ч. I, Москва—Ереван, ВНИИРИ, 1973, стр. 30; Радиотехн. и электрон. 19, 970 (1974); 20, 39, 1370 (1975). З. Н. Голубева, *ibid.* 21, 219 (1976).
32. М. В. Келдыш, ДАН СССР 77, 11(1951). И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовых пространствах, М., «Наука», 1965. А. С. Маркус, ДАН СССР 142, 538 (1962); Матем. сб. 70(112), 526 (1966).