1976 г. Март *Том 118, вып. 3*

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУК

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

538.312(018)

О ВЫРАЖЕНИЯХ ДЛЯ ПЛОТНОСТИ ЭНЕРГИИ И ВЫДЕЛЯЮЩЕГОСЯ ТЕПЛА В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ ДИСПЕРГИРУЮЩЕЙ И ПОГЛОЩАЮЩЕЙ СРЕДЫ

Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург

До сравнительно недавнего времени в курсах электродинамики и оптики при обсуждении энергетических соотношений среда считалась недиспергирующей. В этом случае, и при отсутствии поглощения, все члены, входящие в соотношение Пойнтинга, однозначно интерпретируются, и мы можем считать известными выражения для плотности энергии электромагнитного поля W и для потока энергии $\mathbf{S}$. Фактически, однако, все среды обладают дисперсией и если пространственной дисперсией в низкочастотной области, а частично и в оптике, обычно можно пренебречь, то учет частотной дисперсии часто совершенно необходим. При наличии дисперсии вопрос об энергетических соотношениях в макроскопической электродинамике в некоторых отношениях не так-то прост, в особенности при учете поглощения (в то же время диспергирующая среда, как это следует из дисперсионных соотношений, всегда является поглощающей, хотя поглощение и дисперсия могут проявляться преимущественно в различных спектральных областях).

Энергетические соотношения в диспергирующей среде уже не раз рассматривались и, в частности, освещены в монографиях [1] (§ 22) и [2] (§ 3), где указана также другая литература. Тем не менее при наличии поглощения вопрос остается, видимо, недостаточно ясным (или, по крайней мере, недостаточно известным), о чем свидетельствует, например, появление в 1975 г. статьи [3], являющейся неверной. Последнее обстоятельство побудило авторов опубликовать критическую заметку [4] и несколько подробнее, чем в [1,2], разобрать некоторые вопросы. Как мы надеемся, изложение соответствующего материала в настоящей статье оправдано и окажется полезным.

1. Запишем уравнения для поля в среде в виде

$$\begin{gathered}\operatorname{rot}\mathbf{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ext}},\quad \operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\\ \operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho_{\text{ext}},\quad \operatorname{div}\mathbf{B}=0.\end{gathered}\tag{1}$$

При такой форме записи свойства среды, очевидно, отражаются лишь на связи между обобщенной индукцией $\mathbf{D}$ и электрическим полем $\mathbf{E}$ (подробнее см., например, [2]). Из (1) хорошо известным путем приходим

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Успехи физических наук», 1976 г.

к теореме Пойнтинга

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}+\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{B}\right)+\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}\mathbf{E}=-\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{EB}]. \tag{2}$$

Ниже будет рассматриваться лишь неизменная во времени покоящаяся линейная среда. Если, кроме того, среда изотропна, немагнитна, не поглощающая и не обладает дисперсией, то $\mathbf{D}=\varepsilon'\mathbf{E}$, $\mathbf{B}=\mathbf{H}$, причем $\varepsilon'=\varepsilon$ — вещественная величина. Тогда соотношение (2) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon' E^2+H^2}{8\pi}\right)+\mathbf{j}_{\mathrm{ext}}\mathbf{E}=-\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{EH}]. \tag{3}$$

В этом простейшем случае, о котором мы уже упоминали, величина $W=(\varepsilon' E^2+H^2)/8\pi$ сразу отождествляется с плотностью энергии, а вектор $\mathbf{S}=(c/4\pi)[\mathbf{EH}]$ имеет смысл полного потока энергии через единицу поверхности. Обобщения, касающиеся учета магнитной проницаемости μ или анизотропии, очевидны и не связаны с принципиальными затруднениями. То же можно сказать о переходе к движущейся среде (пока ее скорость $\mathbf{u}$ может считаться постоянной величиной) *). Соотношение (2) справедливо во всех этих случаях, причем при отсутствии дисперсии между собой связаны значения $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$, взятые в одной и той же точке $\mathbf{r}$ и в один и тот же момент времени t (в линейной электродинамике, которую мы имеем здесь в виду, эта связь является линейной). Впрочем, уравнения (1) и соотношение (2) справедливы и в диспергирующей поглощающей среде, но при этом $\mathbf{D}$ представляет собой линейный функционал от $\mathbf{E}$, а более конкретно значение $\mathbf{D}(\mathbf{r},\ t)$ определяется полем $\mathbf{E}(\mathbf{r}',\ t')$ в моменты $t'\leqslant t$ и в точках $\mathbf{r}'$, находящихся в некоторой окрестности точки $\mathbf{r}$. Для линейной неподвижной среды, однородной в пространстве и неизменной во времени, дисперсия и поглощение учитываются при использовании связи

$$D_i(\omega,\ \mathbf{k})=\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{k})\,E_j(\omega,\ \mathbf{k}),$$

причем

$$\mathbf{E}(\omega,\ \mathbf{k})=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \mathbf{E}(\mathbf{r},\ t)\,e^{-i(\mathbf{kr}-\omega t)}\,d\mathbf{r}\,dt$$

и аналогично для $\mathbf{D}$, где $\varepsilon_{ij}(\omega,\ \mathbf{k})$ есть тензор комплексной проницаемости. Зависимость ε_{ij} от ω отвечает частотной дисперсии, а зависимость от $\mathbf{k}$ — пространственной дисперсии.

При наличии пространственной дисперсии, помимо потока энергии $\mathbf{S}=(c/4\pi)[\mathbf{EH}]$ появляется, вообще говоря, еще дополнительный поток энергии $\mathbf{S}^{(1)}$ (см. [2]). Мы не будем, однако, рассматривать среды с пространственной дисперсией и ограничимся простейшим классом диспергирующих сред — изотропной и немагнитной средой с частотной дисперсией, описываемой проницаемостью $\varepsilon(\omega)=\varepsilon'+i\varepsilon''$, $\varepsilon'=\operatorname{Re}\varepsilon$, $\varepsilon''=\operatorname{Im}\varepsilon$. Как и при отсутствии дисперсии, обобщение на магнитную и анизотропную среду тоже лишь с частотной дисперсией не составляет труда и только привело бы к более громоздким выражениям (однако для удобства некоторые такие выражения приведены в приложении).

---

*) Движущаяся среда обладает, правда, той спецификой, что при переходе от (2) к соотношению типа (3) появляется член, соответствующий работе силы, действующей на среду (см., например, [5]).

2. Для только что указанной среды, характеризуемой комплексной проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, соотношение Пойнтинга (2) можно записать в виде

$$\frac{\partial(W_E+W_M)}{\partial t}+Q=-\mathbf{j}_{\text{ext}}\mathbf{E}-\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}[\mathbf{EH}],$$
$$\frac{\partial W_E}{\partial t}+Q=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E},\quad W_M=\frac{H^2}{8\pi},\tag{4}$$

$$\mathbf{D}(t,\mathbf{r})=\int_{-\infty}^{+\infty}\varepsilon(\omega,\mathbf{r})\,\mathbf{E}(\omega,\mathbf{r})\,e^{-i\omega t}\,d\omega,$$
$$\mathbf{E}(t,\mathbf{r})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathbf{E}(\omega,\mathbf{r})\,e^{-i\omega t}\,d\omega,\quad \mathbf{E}(-\omega,\mathbf{r})=\mathbf{E}^*(\omega,\mathbf{r}),\tag{5}$$

где аргумент $\mathbf{r}$ будем в дальнейшем опускать, так как при предполагаемом отсутствии пространственной дисперсии он входит лишь как параметр. Связь $\mathbf{E}(-\omega)=\mathbf{E}^*(\omega)$ отражает тот факт, что поле $\mathbf{E}$ вещественно; из вещественности $\mathbf{D}$ следует далее, что

$$\varepsilon(-\omega)=\varepsilon^*(\omega),\ \operatorname{Re}\varepsilon(-\omega)\equiv\varepsilon'(-\omega)=\varepsilon'(\omega),$$
$$\operatorname{Im}\varepsilon(-\omega)\equiv\varepsilon''(-\omega)=-\varepsilon''(\omega).\tag{6}$$

В случае поля, произвольным образом зависящего от времени, выражение $[\partial(W_E+W_M)/\partial t]+Q$ можно записать в виде интеграла по частотам, но нельзя затем провести в общем виде интегрирование по времени. Последнее, однако, можно сделать для непоглощающей среды (см. приложение). Для поглощающей же среды некоторые общие результаты удается получить, лишь конкретизируя зависимость поля $\mathbf{E}$ от времени. Важнейшим таким случаем является квазимонохроматическое поле

$$\mathbf{E}(t)=\frac{1}{2}[\mathbf{E}_0(t)\,e^{-i\omega t}+\mathbf{E}_0^*(t)\,e^{i\omega t}],$$
$$\mathbf{H}(t)=\frac{1}{2}[\mathbf{H}_0(t)\,e^{-i\omega t}+\mathbf{H}_0^*(t)\,e^{i\omega t}],\tag{7}$$

где квазимонохроматический характер поля проявляется в том, что функции $\mathbf{E}_0(t)$ и $\mathbf{H}_0(t)$ очень медленно изменяются за время $T=2\pi/\omega$. Ниже будет предполагаться также, что $\mathbf{E}_0(-\infty)=0$ и $\mathbf{H}_0(-\infty)=0$. Именно этому условию не удовлетворяет, очевидно, монохроматическое поле, что мешает его неограниченному использованию.

Подставим поля (7) в (4) и произведем усреднение по высокой частоте ω, что эквивалентно пренебрежению членами, содержащими множители $e^{\pm 2i\omega t}$ (такие средние отмечаются ниже чертой сверху). Тогда получается следующий результат (см. [6] и приложение)

$$\frac{1}{4\pi}\overline{\frac{\partial\mathbf{D}(t)}{\partial t}\mathbf{E}(t)}=\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon'(\omega))}{d\omega}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}_0(t)\,\mathbf{E}_0^*(t)]+\frac{\omega\varepsilon''(\omega)}{8\pi}\mathbf{E}_0(t)\,\mathbf{E}_0^*(t)+$$
$$+\frac{i}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon''(\omega))}{d\omega}\left(\frac{\partial\mathbf{E}_0(t)}{\partial t}\mathbf{E}_0^*(t)-\frac{\partial\mathbf{E}_0^*(t)}{\partial t}\mathbf{E}_0(t)\right),\tag{8}$$

где, как и ниже, производные по частоте берутся на «несущей частоте» ω, фигурирующей в (7) (в приложении эта частота обозначается через ω_0).

При отсутствии поглощения, когда $\varepsilon''(\omega)=0$ и $\varepsilon'(\omega)=\varepsilon(\omega)$, очевидно,

$$\overline{\frac{\partial W_E(t)}{\partial t}}=\frac{1}{4\pi}\overline{\frac{\partial\mathbf{D}(t)}{\partial t}\mathbf{E}(t)}=\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon(\omega))}{d\omega}\frac{\partial|\mathbf{E}_0(t)|^2}{\partial t},$$
$$\overline{W}_E=\frac{d(\omega\varepsilon(\omega))}{d\omega}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}.\tag{9}$$

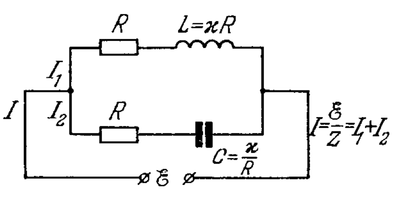
Это широко известное выражение приводится в большом числе учебников и монографий (см., например, [1, 2, 7, 8]), причем получается разными способами. В приложении мы приводим еще один вывод соотношения (9).

Если нет поглощения, то интерпретация величины $\overline{W}_E$ как средней плотности энергии электрического поля, как это ясно из (4) и (9), не вызывает никаких сомнений. Но как обстоит дело в поглощающей среде?

На первый взгляд кажется, что в поглощающей среде средняя плотность энергии имеет вид

$$\overline{\overline{W}}_E = \frac{d(\omega\varepsilon'(\omega))}{d\omega}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}, \tag{10}$$

поскольку именно такое выражение фигурирует в (8), где остальные члены зависят от $\varepsilon''(\omega)$, исчезают при отсутствии поглощения и их естественно связать с выделяющимся теплом Q. Для такого заключения нет, однако, достаточных оснований, так как разделение заданной суммы на неизвестные слагаемые явно неоднозначно. Более того, выражение (10) в общем случае безусловно не является плотностью энергии электрического поля. Ниже это будет показано на примерах, свидетельствующих одновременно и о том, что плотности W_E, $\overline{W}_E$ и Q вообще непосредственно не выражаются в общем случае *) через проницаемость $\varepsilon(\omega)$. Такой вывод естествен уже из весьма общих соображений. Проницаемость $\varepsilon(\omega)$ определяет линейный «отклик» среды — индукцию $\mathbf{D}$, возникающую под влиянием поля $\mathbf{E}$. Нет никаких оснований, чтобы для достаточно сложной поглощающей среды этот «отклик» однозначно определял также квадратичную по полю величину — плотность энергии. Особенно выпукло неоднозначное соответствие между линейным «откликом» и запасенной в системе энергией демонстрируется на примере дискретных электрических цепей. Рассмотрим, например, известную из литературы цепь, изображенную на рисунке.



Если к такой цепи — двухполюснику приложено напряжение $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{-i\omega t}$, то ток будет равен $I = I_0 e^{-i\omega t} = \mathscr{E}/Z(\omega)$, причем $Z = R$ при любых значениях параметра $\varkappa$, если самоиндукция $L = \varkappa R$ и емкость $C = \varkappa/R$ **). В то же время энергия, сосредоточенная в цепи, равна

$$\frac{L\overline{I_1^2}}{2} + \frac{\overline{\left(\int I_2\,dt\right)^2}}{2C}$$

и, разумеется, зависит от значений L и C.

Из приведенных рассуждений, конечно, совсем не следует, что для поглощающей среды вообще невозможно получить никакие выражения отдельно для энергии или для диссипации. Простейший пример подобного рода — выражение для среднего по периоду количества тепла в случае

*) В состоянии термодинамического равновесия средние потери отсутствуют, и поэтому и в поглощающей среде средняя плотность электромагнитной энергии, являющаяся термодинамической величиной, в известном смысле (см. [9]) выражается через диэлектрическую проницаемость среды.

**) Как ясно из рисунка, $\mathscr{E} = I_1 R - i\omega L I_1 \equiv Z_1 I_1 = I_2 R - (I_2/i\omega C) \equiv Z_2 I_2 = Z(I_1 + I_2) = ZI$. Отсюда следует известное соотношение для параллельных цепей: $1/Z = (1/Z_1) + (1/Z_2)$. Для рассматриваемой цепи действительно $1/Z = [1/(R - i\omega L)] + \{1/[R - (1/i\omega C)]\} = 1/R$ при любых $\varkappa$. Отметим, что эта же цепь недавно фигурировала на страницах УФН в статье [10]. Весьма небольшое перекрытие, имеющееся между настоящей статьей и статьей [10], представляется нам тем более оправданным, что статьи в целом посвящены совершенно разным вопросам.

монохроматического поля. Для строго монохроматического поля, очевидно, $\mathbf{E}_0 = \mathrm{const}$ (см. (7)). Далее ясно, что в этом случае усредненная по периоду энергия $\overline{W_E}(t)$ неизменна во времени; поэтому из (4), (8) получаем

$$\frac{\partial \overline{W_E}}{\partial t} + \overline{Q} = \overline{Q} = \frac{1}{4\pi} \overline{\frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} \mathbf{E}(t)} = \frac{\omega \varepsilon''(\omega)}{8\pi} |\mathbf{E}_0|^2. \tag{11}$$

Рассмотрим теперь довольно поучительный случай поглощающей среды, называемой «средой без дисперсии», когда

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon' \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\sigma\mathbf{E},$$

где ε' и σ — вещественные и не зависящие от частоты величины. Диэлектрическая проницаемость такой среды $\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i(4\pi\sigma/\omega)$, разумеется, обладает очевидной частотной дисперсией, но тем не менее с физической точки зрения используемый термин «поглощающая среда без дисперсии» представляется разумным и после сказанного вполне ясным. Соотношение (2) в данном случае принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon' \mathbf{E}^2(t) + \mathbf{H}^2(t)}{8\pi}\right) + \sigma \mathbf{E}^2 + \mathbf{j}_{ext}\mathbf{E} = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div}[\mathbf{EH}]. \tag{12}$$

На первый взгляд из (12) и (4) следует, что величины $W'(t) = (\varepsilon' E^2 + H^2)/8\pi$ и $Q(t) = \sigma E^2(t)$ однозначно отождествляются с плотностями энергии и потерь, но на самом деле это неверно. Лишь в случае поля, изменяющегося со временем достаточно медленно, выражение для тепла (и в общем случае только оно) принимает выписанный выше вид $Q = \sigma E^2$.

Действительно, при наличии дисперсии проницаемости $\varepsilon(\omega)$, т. е. для нелокальной во времени связи между рассматриваемыми величинами и полем, слагаемые $\partial W_E/\partial t$ и Q в соотношении (4)

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} + Q = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{E} \tag{4'}$$

можно представить в виде рядов типа

$$a_1 \mathbf{E}^2(t) + a_2 \mathbf{E}(t) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + a_{31} \mathbf{E}(t) \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + a_{32} \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right)^2 + \ldots$$

В случае среды с $\varepsilon' = \mathrm{const}$ и $\sigma = \mathrm{const}$ в правую часть (4′) будут входить лишь слагаемые, содержащие $\mathbf{E}^2(t)$ или $\partial \mathbf{E}^2(t)/\partial t$. Поэтому из (4) видим, что выражения для энергии и теплоты в среде без дисперсии величин ε' и σ, при произвольной зависимости поля от времени, вообще говоря, имеют вид

$$W_E(t) = a \frac{\mathbf{E}^2(t)}{8\pi} + \ldots, \tag{13}$$

$$Q(t) = \sigma \mathbf{E}^2(t) + c \frac{1}{8\pi} \frac{\partial \mathbf{E}^2(t)}{\partial t} + \ldots, \tag{14}$$

причем

$$a + c = \varepsilon', \tag{15}$$

но по отдельности a и c через диэлектрическую проницаемость, вообще говоря, не выражаются, а коэффициенты при невыписанных членах так согласованы, что в выражении $(\partial W_E/\partial t) + Q$ все такие члены, содержащие производные выше первой степени от поля по времени, сокращаются. Если электрическое поле изменяется со временем достаточно медленно, так что $|c|/T \ll \sigma$, где T — характерное время для изменения поля, то выражение для выделяющегося тепла, как видно из (14), принимает вид

$$Q(t) = \sigma \mathbf{E}^2(t). \qquad (16)$$

Что же касается выражения для энергии поля в «поглощающей среде без дисперсии», т. е. при $\varepsilon'(\omega) = \text{const}$ и $\sigma(\omega) = \text{const}$, то лишь при условии $|a| \gg |c|$ оно принимает вид $W_E(t) = [\varepsilon' E^2(t)/8\pi] = W_E'(t)$. Однако выполнение указанного условия $|a| \gg |c|$ совсем не обязательно и вполне может быть, что $|a| \lesssim |c|$; в этом мы еще убедимся ниже на конкретном примере (см. (29), (30)). Разумеется, возможность появления в (13), (14) членов, содержащих производные поля по времени, обусловлена тем, что рассматриваемая среда обладает частотной дисперсией проницаемости ($\varepsilon(\omega) = \varepsilon' + i(4\pi\sigma/\omega)$, $\varepsilon' = \text{const}$, $\sigma = \text{const}$).

3. Поскольку выразить W_E и Q через ε в общем случае нельзя, для нахождения этих величин нужно обратиться к рассмотрению тех или иных конкретных сред или моделей среды. То же естественно сделать и для прояснения ситуации в целом. Как известно, весьма общей моделью среды является модель, сводящаяся к совокупности осцилляторов с массами m_k, собственными частотами ω_k (речь идет о частотах при отсутствии поглощения) и эффективными числами соударений ν_k ($m_k\nu_k$ — коэффициент при силе трения). Уравнение движения для такого осциллятора типа k имеет вид

$$\ddot{\mathbf{r}}_k + \nu_k \dot{\mathbf{r}}_k + \omega_k^2 \mathbf{r}_k = \frac{e_k}{m_k}\mathbf{E}, \qquad (17)$$

где e_k — заряд ($e_k\mathbf{r}_k$ — дипольный момент осциллятора) и $\mathbf{E}$ — действующее на осциллятор поле. Ниже, чтобы не усложнять модель без особой на то нужды, поле $\mathbf{E}$ будет отождествляться со средним макроскопическим полем. Такое предположение является, вообще говоря, частным или приближенным. Но, например, для плазмы (в этом случае $\omega_k = 0$), оно практически полностью оправдано (см. [1], § 3). Применение уравнения (17) с $\omega_k = 0$ к плазме имеет весьма широкую область применимости, как это ясно из более общего анализа на основе кинетического уравнения [1,6]. Что же касается применения классической модели осцилляторов к атомарным или молекулярным газам и некоторым другим средам, то оно находит обоснование на базе квантовой теории (в обсуждаемом ниже плане осцилляторная модель упоминалась в [1, 6] и подробнее рассматривалась в [11]).

В поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$ вынужденное решение уравнения (17) имеет вид

$$\mathbf{r}_k = -\frac{e_k}{m_k}\frac{\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}}{(\omega^2 - \omega_k^2) + i\omega\nu_k}. \qquad (17')$$

Поскольку поляризация среды $\mathbf{P} = \sum_k e_k N_k \mathbf{r}_k$ и, по определению, для рассматриваемого поля $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}$, то *)

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \sum_k \frac{\Omega_k^2}{(\omega^2 - \omega_k^2) + i\omega\nu_k}, \quad \Omega_k^2 = \frac{4\pi e_k^2 N_k}{m_k}, \qquad (18)$$

где N_k — концентрация осцилляторов сорта k. Для плазмы, когда $\omega_k = 0$,

$$\begin{gathered} \varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 + i\omega\nu}, \quad \varepsilon'(\omega) = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2 + \nu^2}, \\ \varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\sigma(\omega)}{\omega} = \frac{\nu\Omega^2}{\omega(\omega^2 + \nu^2)}, \quad \Omega^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \end{gathered} \qquad (19)$$

*) Напомним, что при выборе временной зависимости в виде $e^{-i\omega t}$, по определению, $\mathbf{D}_0 e^{-i\omega t} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$.

где, для простоты, плазма считается однокомпонентной и индекс k опущен (мы не касаемся вопроса о фоне, скажем, из положительных ионов, обеспечивающих квазинейтральность среды).

Закон сохранения энергии для осциллятора сорта k имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_k\dot{\mathbf{r}}_k^2}{2}+\frac{m_k\omega_k^2\mathbf{r}_k^2}{2}\right)=-m_k\nu_k\dot{\mathbf{r}}_k^2+e_k\dot{\mathbf{r}}_k\mathbf{E}. \tag{20}$$

Отсюда ясно, что для рассматриваемой модели среды

$$K=\sum_k\frac{N_km_k\dot{\mathbf{r}}_k^2}{2},\qquad U=\sum_k\frac{N_km_k\omega_k^2\mathbf{r}_k^2}{2},\qquad Q=\sum_k N_km_k\nu_k\dot{\mathbf{r}}_k^2, \tag{21}$$

где K — связанная с полем кинетическая энергия, U — потенциальная энергия и Q — выделяющееся в единицу времени в единице объема тепло (точнее, Q есть работа сил трения, которую мы считаем переходящей в тепло).

Плотность энергии поля и вызванного полем движения зарядов (осцилляторов) в среде $W_E=(E^2/8\pi)+K+U$. Поскольку речь идет о квадратичных величинах, удобно теперь рассмотреть вещественное поле $\mathbf{E}=\mathbf{E}_0\operatorname{Re}e^{-i\omega t}=\mathbf{E}_0\cos\omega t$, $\mathbf{E}_0=\mathbf{E}_0^*=\text{const}$ и найти W_E и Q, а затем средние по периоду значения $\overline{W}_E$ и $\overline{Q}$ (это означает практически, что отбрасываются все члены, содержащие множители $e^{\pm 2i\omega t}$). Результат элементарного расчета таков:

$$\overline{W}_E=\left[1+\sum_k\frac{\Omega_k^2(\omega^2+\omega_k^2)}{(\omega^2-\omega_k^2)^2+\omega^2\nu_k^2}\right]\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}, \tag{22}$$

$$\overline{Q}_E=\sum_k\frac{\Omega_k^2\nu_k\omega^2}{(\omega^2-\omega_k^2)^2+\omega^2\nu_k^2}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{8\pi}=\omega\varepsilon''(\omega)\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{8\pi}, \tag{23}$$

поскольку, согласно (18),

$$\varepsilon''(\omega)=\sum_k\frac{\omega\nu_k\Omega_k^2}{(\omega^2-\omega_k^2)^2+\omega^2\nu_k^2}. \tag{24}$$

В то же время

$$\varepsilon'(\omega)=1-\sum_k\frac{\Omega_k^2(\omega^2-\omega_k^2)}{(\omega^2-\omega_k^2)^2+\omega^2\nu_k^2}, \tag{24'}$$

и поэтому $\overline{W}_E$ через $\varepsilon'(\omega)$ не выражается (см. также ниже). В частном случае уже упомянутой модели плазмы (19)

$$\begin{gathered}\overline{W}_E=\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\right)\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}=(2-\varepsilon'(\omega))\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi},\\ \overline{Q}_E=\frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{8\pi}=\omega\varepsilon''(\omega)\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{8\pi},\end{gathered} \tag{25}$$

т. е. не только $\overline{Q}_E$, но и $\overline{W}_E$ выражается через $\varepsilon(\omega)$ или, конкретно, через $\varepsilon'(\omega)=\operatorname{Re}\varepsilon(\omega)$. Этот случай, однако, явно является частным. К тому же сами значения $W_E(t)$ и $Q(t)$, а не соответствующие средние, даже для плазмы непосредственно через $\varepsilon(\omega)$ не выражаются — они имеют вид

$$W_E(t)=\left\{\left[1-\frac{\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right]\cos^2\omega t+\frac{\nu\omega\Omega^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t+\frac{\omega^2\Omega^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right\}\frac{E_0^2}{8\pi}, \tag{26}$$

$$Q(t)=\nu\Omega^2\left[\frac{1}{\omega^2+\nu^2}-\frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\cos 2\omega t+2\frac{\nu\omega}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t\right]\frac{E_0^2}{8\pi}. \tag{26'}$$

Для системы осцилляторов определенная, согласно (10), величина

$$\tilde{\tilde{W}}_E=\frac{d(\omega\varepsilon'(\omega))}{d\omega}\frac{|E_0|^2}{16\pi}=\left\{1+\sum_k\frac{\Omega_k^2(\omega^2+\omega_k^2)[(\omega^2-\omega_k^2)^2-\omega^2\nu_k^2]}{[(\omega^2-\omega_k^2)^2+\omega^2\nu_k^2]^2}\right\}\frac{|E_0|^2}{16\pi} \tag{27}$$

и для плазмы

$$\tilde{\tilde{W}}_E=\frac{d(\omega\varepsilon'(\omega))}{d\omega}\frac{|E_0|^2}{16\pi}=\left[1+\frac{\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right]\frac{|E_0|^2}{16\pi}. \tag{28}$$

Очевидно, в обоих случаях при наличии поглощения $\overline{W}_E\neq\tilde{\tilde{W}}_E$, (см. (22), (25), (27) и (28)) и только при отсутствии поглощения (т. е. при $\nu_k=0$) $\overline{W}_E=\tilde{\tilde{W}}_E$, т. е. средняя плотность энергии $\overline{W}_E$ правильно определяется формулой (10), переходящей в этом случае в (9). Иначе и не могло быть, поскольку при отсутствии поглощения

$$\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}=\frac{\partial W_E}{\partial t}$$

и не приходится как-то разделять величину $(1/4\pi)(\partial\mathbf{D}/\partial t)\,\mathbf{E}$ на части $\partial W_E/\partial t$ и Q (см. (4)).

Приведенные примеры (носящие, кстати сказать, весьма общий характер) не оставляют сомнений в том, что величина

$$\tilde{\tilde{W}}_E=\frac{d(\omega\,\mathrm{Re}\,\varepsilon(\omega))}{d\omega}\frac{|E_0|^2}{16\pi}$$

(см. (10)) не является, вообще говоря, плотностью энергии электрического поля в среде. Из (27), (28) ясно также, что $\tilde{\tilde{W}}_E$ может быть отрицательной (например, в (28) $\tilde{\tilde{W}}_E<0$, если $\Omega^2\nu^2>\Omega^2\omega^2+(\omega^2+\nu^2)^2$; в предельном случае $\nu^2\gg\omega^2$ это сводится к условию $\Omega^2>\nu^2$). Величина же $\overline{W}_E$, как ясно из (22) или (25), всегда положительна, как это и должно быть для величины $\overline{W}_E=\overline{(\mathbf{E}^2/8\pi)+K}$. Отметим, что в уже упоминавшейся статье [3] именно величина $\tilde{\tilde{W}}_E$ необоснованно считается средней плотностью энергии, что лишь завуалировано обозначениями (подробнее см. [4]).

Для области частот $\omega^2\ll\nu^2$, согласно (19), $\varepsilon'=1-(\Omega^2/\nu^2)$, $\sigma=\Omega^2/4\pi\nu$, а значит, в данном случае плазма представляет собой пример уже обсуждавшейся выше поглощающей среды без дисперсии *). Из (26), (26′) при этом в полном соответствии с (13) — (15) имеем (напомним, что в (26), (26′) $\mathbf{E}(t)=\mathbf{E}_0\cos\omega t$)

$$W_E(t)=\left(1+\frac{\Omega^2}{\nu^2}\right)\frac{\mathbf{E}^2(t)}{8\pi}, \tag{29}$$

$$Q(t)=\frac{\Omega^2}{4\pi\nu}\mathbf{E}^2(t)-2\frac{\Omega^2}{\nu^2}\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\mathbf{E}^2(t)}{\partial t}, \tag{30}$$

*) Заметим, что при $\sigma>0$ и $\varepsilon'<0$ такая среда в отсутствие внешних источников неустойчива [6], в силу чего случай плазмы с $\omega^2\ll\nu^2$ и $\Omega^2>\nu^2$ нужно рассматривать с известной осторожностью (нужно опираться на общие выражения (19), свидетельствующие об устойчивости соответствующей модели плазмы). В этой связи отметим, что мы, по существу, нигде и не опираемся на неравенство $\omega^2\ll\nu^2$.

так что $a = 1 + \Omega^2/\nu^2$, $c = -2\Omega^2/\nu^2$, $a + c = 1 - \Omega^2/\nu^2 = \varepsilon'$. Соотношение между a и $|c|$ определяется, как видно из формул, параметром Ω^2/ν^2, и при $\Omega^2/\nu^2 > 1$ имеем $|c| > |a|$.

4. Хотя величины $W_E(t)$ и $Q(t)$ в общем виде, вообще говоря, не выражаются через $\varepsilon(\omega)$, для суммы

$$\frac{\partial W_E(t)}{\partial t} + Q(t) = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}$$

это, конечно, возможно. Отсюда ясно, что вклад в члены с $\varepsilon'(\omega)$ и с $\varepsilon''(\omega)$, входящие в выражение $(1/4\pi)(\partial \mathbf{D}/\partial t)\,\mathbf{E}$, вносит как член $\partial W_E(t)/\partial t$, так и член $Q(t)$. Тем не менее довольно поучительно убедиться в сказанном на конкретном примере. Разумеется, для этого годится и среда, состоящая из осцилляторов, но мы ограничимся рассматривавшейся выше моделью плазмы.

Заметим, что в этом случае особенно легко также проверить справедливость самого соотношения

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} + Q = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}, \tag{4'}$$

выписанного ранее, можно сказать из общих соображений. В самом деле, для обсуждаемой модели плазмы

$$eN\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(\mathbf{D}-\mathbf{E})}{\partial t},$$

где $\mathbf{P}$ — полная поляризация среды (если отдельно вводятся ток проводимости $\mathbf{j}$ и поляризация $\mathbf{P}$, то используется запись $eN\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{j} + \partial\mathbf{P}/\partial t$; см., например, [6]). С другой стороны, согласно уравнению движения, $m\ddot{\mathbf{r}} + m\nu\dot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}$ и значит,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(Nm\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2}\right) + Nm\nu\dot{\mathbf{r}}^2 = Ne\dot{\mathbf{r}}\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\mathbf{E}.$$

Отсюда

$$\frac{\partial W_E}{\partial t} + Q = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E},\quad W_E = K + \frac{\mathbf{E}^2}{8\pi},\quad K = \frac{Nm\dot{\mathbf{r}}^2}{2},\quad Q = mN\nu\dot{\mathbf{r}}^2,$$

как это и должно быть.

Для монохроматического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0\cos\omega t$ значения W_E и Q уже были выписаны (см. (26), (26')) и, таким образом,

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_E}{\partial t} + Q &= \left\{-\omega\sin 2\omega t + \frac{\omega\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t + 2\frac{\omega^2\Omega^2\nu}{(\omega^2+\nu^2)^2}\cos 2\omega t\right\}\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi} + \\ &+ \left[\frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2} - \frac{\nu\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\cos 2\omega t + 2\frac{\Omega^2\nu^2\omega}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t\right]\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi} = \\ &= \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E} = [-\omega\varepsilon'(\omega)\sin 2\omega t + \omega\varepsilon''(\omega) + \omega\varepsilon''(\omega)\cos 2\omega t]\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi} = \\ &= \left(-\omega\sin 2\omega t + \frac{\omega\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\sin 2\omega t + \frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2} + \frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\cos 2\omega t\right)\frac{\mathbf{E}_0^2}{8\pi},\end{aligned} \tag{31}$$

где последнее выражение получено путем подстановки выражений (19) для $\varepsilon'(\omega)$ и $\varepsilon''(\omega)$; что же касается предпоследнего выражения в (31), то оно сразу же получается при учете связи поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})/2$ с индукцией $\mathbf{D} = (\mathbf{E}_0/2)(\varepsilon(-\omega)e^{i\omega t} + \varepsilon(\omega)e^{-i\omega t})$, так как при учете соотношения (6) получаем тогда $\mathbf{D} = \varepsilon'(\omega)\mathbf{E}_0\cos\omega t + \varepsilon''(\omega)\mathbf{E}_0\sin\omega t$.

Из сравнения различных членов в (31) ясно, например, что член

$$-\omega\varepsilon'(\omega)\sin 2\omega t = -\omega\sin 2\omega t + \frac{\Omega^2\omega}{\omega^2+\nu^2}\sin 2\omega t$$

образуется или, если угодно, формируется и из $\partial W_E/\partial t$, и из Q. Это, очевидно, относится и к члену

$$\omega\varepsilon''(\omega)\cos 2\omega t=\frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\cos 2\omega t.$$

И лишь постоянный во времени член

$$\frac{\nu\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\frac{E_0^2}{8\pi}$$

обусловлен только диссипацией. Последнее не удивительно, если учесть, что рассматривается монохроматическое поле. Совершенно очевидно, что аналогичные заключения сохраняются и после интегрирования по времени. Заметим здесь, что при интегрировании (31) по времени и определении таким образом величины $W_E(t)+\int Q(t)\,dt$ нужно проявить некоторую осторожность и, по сути дела, вернуться сначала к выражениям (26), (26′). Действительно, из (31) получаем

$$W_E(t)+\int Q(t)\,dt=\varepsilon'(\omega)\frac{E_0^2\cos 2\omega t}{16\pi}+\omega\varepsilon''(\omega)\frac{E_0^2}{8\pi}t+$$
$$+\omega\varepsilon''(\omega)\frac{E_0^2}{8\pi}\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}+\mathrm{const}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t}\mathbf{E}(t)\,dt. \qquad (32)$$

Как ясно из обсуждения в разделах 2 и 3 и нижеследующих замечаний, входящую в (32) постоянную интегрирования в общем случае, вообще говоря, выразить через ε нельзя. При отсутствии же поглощения из сравнения (32) с (9) видно, что

$$\mathrm{const}=\frac{d(\omega\varepsilon(\omega))}{d\omega}\frac{|\mathbf{E}_0|^2}{16\pi}.$$

С другой стороны, для модели среды и конкретно для модели плазмы определить величину $W_E(t)+\int Q(t)\,dt$ не составляет труда и при наличии поглощения. В самом деле, выражение для $W_E(t)$ в случае плазмы нам уже известно (см. (26)), и здесь его удобно записать, учитывая, что $\cos^2\omega t=(1+\cos 2\omega t)/2$, в виде

$$W_E(t)=\left\{\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\right)+\frac{2\omega\Omega^2\nu}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t+\right.$$
$$\left.+\left[1-\frac{\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right]\cos 2\omega t\right\}\frac{E_0^2}{16\pi}. \qquad (33)$$

Далее, интегрируя по времени (26′), находим

$$\int Q(t)\,dt=\nu\Omega^2\left[\frac{t}{\omega^2+\nu^2}-\frac{\omega^2-\nu^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}-\frac{\nu\cos 2\omega t}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right]\frac{E_0^2}{8\pi}, \qquad (34)$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы для усредненной по периоду диссипации энергии за промежуток времени t при монохроматическом поведении поля было $\overline{\int Q(t)\,dt}=\int\overline{Q(t)}\,dt\sim t$. Таким образом, складывая (33) и (34) и приравнивая с (32), получаем

$$W_E(t)+\int Q(t)\,dt=$$
$$=\left[\frac{\cos 2\omega t}{2}-\frac{\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\frac{\cos 2\omega t}{2}+\frac{\nu\omega\Omega^2}{(\omega^2+\nu^2)^2}\sin 2\omega t+\frac{1}{2}\left(1+\frac{\Omega^2}{\omega^2+\nu^2}\right)\right]\frac{E_0^2}{8\pi}+$$
$$+\left[\frac{\nu\Omega^2 t}{\omega^2+\nu^2}-\frac{\nu\Omega^2(\omega^2-\nu^2)}{(\omega^2+\nu^2)^2}\frac{\sin 2\omega t}{2\omega}-\frac{\nu^2\Omega^2\cos 2\omega t}{(\omega^2+\nu^2)^2}\right]\frac{E_0^2}{8\pi}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}\,dt=$$
$$=\left[\varepsilon'(\omega)\frac{\cos 2\omega t}{2}+\omega\varepsilon''(\omega)\,t+\varepsilon''(\omega)\frac{\sin 2\omega t}{2}+\mathrm{const}\right]\frac{E_0^2}{8\pi}=$$
$$=\left[\frac{\cos 2\omega t}{2}-\frac{\Omega^2\cos 2\omega t}{2(\omega^2+\nu^2)}+\frac{\nu\Omega^2 t}{\omega^2+\nu^2}+\frac{\nu\Omega^2\sin 2\omega t}{2\omega(\omega^2+\nu^2)}+\mathrm{const}\right]\frac{E_0^2}{8\pi}, \qquad (35)$$

где все выражения записаны в полной аналогии с (31). Ясно, что и при наличии поглощения постоянная интегрирования как раз и определяет выражение для $\overline{W}_E(t)$ (см. (33), (35) и (19)).

Подчеркнем здесь также, что в общем виде и даже для квазимонохроматического поля невозможно проинтегрировать соотношение Пойнтинга для поглощающей среды по времени, и использование начальных условий $\mathbf{E}(-\infty) = 0$, $\mathbf{H}(-\infty) = 0$ в этом смысле не приводит к решению вопроса. В самом деле, уже из (8) видно, что слагаемые, содержащие $\varepsilon''(\omega)$, нельзя представить в виде полных производных по времени от некоторых выражений. Последнее и не удивительно, ибо, как известно, выделяющееся тепло не является функцией состояния системы и δQ, как и в обычной термодинамике, не представляет собой, таким образом, полного дифференциала. Поэтому в зависимости от того, каким именно способом изменяется с течением времени поле $\mathbf{E}_0(t)$ от $\mathbf{E}_0(-\infty) = 0$ до величины $\mathbf{E}_0$, при интегрировании соотношения (8) по времени для поглощающей среды мы можем получить различные ответы.

Мотивы, в силу которых мы сочли уместным подробно останавливаться на столь простых расчетах, уже были упомянуты во введении. Нам остается лишь отметить, что обсуждение энергетических соотношений в поглощающей среде, находящейся в электромагнитном поле, не только полезно для понимания механизма и характера поглощения и релаксации, но и используется при вычислении «энергетической скорости»— скорости переноса энергии в электромагнитных волнах, распространяющихся в поглощающей среде (см. [1, 2, 8, 10, 11]).

Авторы признательны Л. А. Вайнштейну за замечания, сделанные им при чтении рукописи.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Используем фурье-разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega t} \mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}), \\ D_i(t, \mathbf{r}) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{r}) E_j(\omega, \mathbf{r})\, e^{-i\omega t}. \end{aligned} \tag{П.1}$$

Для изотропной среды (П.1) переходит, разумеется, в (5). Подставляя (П.1) в выражение $\frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}$ (см. (4)) и интегрируя по времени, получаем

$$\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}(t, \mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{D}(t, \mathbf{r})}{\partial t}\, dt = \\ = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_2 e^{-i(\omega_1-\omega_2)t} \frac{\omega_1}{\omega_1-\omega_2} E_i^*(\omega_2, \mathbf{r})\, \varepsilon_{ij}(\omega_1, \mathbf{r})\, E_j(\omega_1, \mathbf{r}) + \mathrm{const}. \tag{П.2}$$

В непоглощающей среде, как известно (см., например, [2]),

$$\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon_{ji}^*(\omega) \tag{П.3}$$

и, кроме того, в силу вещественности полей $\mathbf{E}(t, \mathbf{r})$ и $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ в любой среде имеем аналогично (6)

$$\varepsilon_{ij}(-\omega) = \varepsilon_{ij}^*(\omega). \tag{П.4}$$

С помощью (П.3), (П.4) нетрудно убедиться, что для непоглощающей среды особенность подынтегрального выражения в (П.2) при $\omega_1=\omega_2$ носит «фиктивный» характер, т. е. ее вклад сокращается при интегрировании благодаря соответствующей симметрии подынтегрального выражения. В самом деле, сделаем в (П.2) замену переменных интегрирования: $\omega_1\to-\omega_2$, $\omega_2\to-\omega_1$. Используя (П.3), (П.4) и учитывая, что $\mathbf{E}(-\omega,\mathbf{r})=\mathbf{E}^*(\omega,\mathbf{r})$, получаем выражение, полусумма которого с (П.2) дает

$$\frac{1}{4\pi}\int dt\mathbf{E}(t,\mathbf{r})\frac{\partial\mathbf{D}(t,\mathbf{r})}{\partial t}=W_E(t,\mathbf{r})=$$
$$=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega_2e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}E_i^*(\omega_2,\mathbf{r})\frac{\omega_1\varepsilon_{ij}(\omega_1,\mathbf{r})-\omega_2\varepsilon_{ij}(\omega_2,\mathbf{r})}{\omega_1-\omega_2}E_j(\omega_1,\mathbf{r})+\text{const}. \tag{П.5}$$

Пусть $\mathbf{E}(t,\mathbf{r})\to0$ при $t\to-\infty$; это накладывает определенные ограничения на $\mathbf{E}(\omega,\mathbf{r})$. Поскольку величина

$$\lim_{\omega_2\to\omega_1}\frac{\omega_1\varepsilon_{ij}(\omega_1,\mathbf{r})-\omega_2\varepsilon_{ij}(\omega_2,\mathbf{r})}{\omega_1-\omega_2}=\frac{d(\omega_1\varepsilon_{ij}(\omega_1,\mathbf{r}))}{d\omega_1} \tag{П.6}$$

конечна, то ясно, что требование

$$\lim_{t\to-\infty}\frac{1}{4\pi}\int dt\mathbf{E}(t,\mathbf{r})\frac{\partial\mathbf{D}(t,\mathbf{r})}{\partial t}=0 \tag{П.7}$$

приводит к определению постоянной интегрирования: const = 0. Таким образом, в непоглощающей среде выражение для плотности энергии электромагнитного поля при произвольной зависимости поля от времени имеет вид

$$W_E(t,\mathbf{r})=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega_1\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega_2e^{-i(\omega_1-\omega_2)t}\frac{\omega_1\varepsilon_{ij}(\omega_1,\mathbf{r})-\omega_2\varepsilon_{ij}(\omega_2,\mathbf{r})}{\omega_1-\omega_2}E_i^*(\omega_2,\mathbf{r})E_j(\omega_1,\mathbf{r}). \tag{П.8}$$

Для реальной среды с поглощением, разумеется, для применимости (П.8) требуется, чтобы спектральные компоненты поля были существенно отличны от нуля только в тех областях спектра, где поглощением можно пренебречь.

Рассмотрим теперь в качестве частного случая монохроматическую зависимость поля от времени (см. (7), где считаем $\mathbf{E}_0=\text{const}$), когда

$$\mathbf{E}(\omega,\mathbf{r})=\frac{1}{2}[\mathbf{E}_0(\mathbf{r})\,\delta(\omega-\Omega)+\mathbf{E}_0^*(\mathbf{r})\,\delta(\omega+\Omega)]. \tag{П.9}$$

Отклонения от монохроматичности, связанные с условием $E(t\to-\infty)=0$, при использовании формулы (П.8) будут учтены автоматически.

Подставляя (П.9) в (П.8) и учитывая (П.3), (П.4), (П.6), получаем

$$W_E(t,\mathbf{r})=\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{r}))}{d\omega}E_{0i}^*(\mathbf{r})E_{0j}(\mathbf{r})+$$
$$+\frac{1}{16\pi}\operatorname{Re}[E_{0i}(\mathbf{r})E_{0j}(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{r})e^{-2i\omega t}], \tag{П.10}$$

а для усредненной по периоду величины имеем

$$\overline{W_E(t,\mathbf{r})}=\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega\varepsilon_{ij}(\omega,\mathbf{r}))}{d\omega}E_{0i}^*(\mathbf{r})E_{0j}(\mathbf{r}). \tag{П.11}$$

Для изотропной среды мы получаем, таким образом, из (П.11) формулу (9).

Воспроизведем теперь вывод формулы (8). Разложим для этого поле (7) в интеграл Фурье

$$\mathbf{E}(t)=\frac{1}{2}[\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0t}+\mathbf{E}_0^*(t)e^{i\omega_0t}]=\int\limits_0^{\infty}[\mathbf{g}(\omega)e^{-i\omega t}+\mathbf{g}^*(\omega)e^{i\omega t}]\,d\omega. \tag{П.12}$$

На языке спектральных величин $\mathbf{g}(\omega)$ квазимонохроматический характер поля означает, что при $\omega=\pm\omega_0$ функция $\mathbf{g}(\omega)$ имеет острые и весьма большие (но конечные, ср. (П.9)) максимумы, а при удалении от этих точек $\mathbf{g}(\omega)$ достаточно быстро стремится к нулю. Для электрической индукции имеем

$$\mathbf{D}(t)=\int_0^\infty \varepsilon'(\omega)\,[\mathbf{g}(\omega)\,e^{-i\omega t}+\mathbf{g}^*(\omega)\,e^{i\omega t}]\,d\omega+$$
$$+i\int_0^\infty \varepsilon''(\omega)\,[\mathbf{g}(\omega)\,g^{-i\omega t}-\mathbf{g}^*(\omega)\,e^{i\omega t}]\,d\omega. \qquad (\text{П.13})$$

Таким образом,

$$\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\!\!\int(-i\omega)\,\varepsilon'(\omega)\,[\mathbf{g}(\omega)\,\mathbf{g}(\omega')\,e^{-i(\omega+\omega')t}+$$
$$+\mathbf{g}(\omega)\,\mathbf{g}^*(\omega')\,e^{-i(\omega-\omega')t}-\mathbf{g}^*(\omega)\,\mathbf{g}(\omega')\,e^{i(\omega-\omega')t}-\mathbf{g}^*(\omega)\,\mathbf{g}^*(\omega')\,e^{i(\omega+\omega')t}]\,d\omega\,d\omega'+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty\!\!\int\omega\varepsilon''(\omega)\,[\mathbf{g}(\omega)\,\mathbf{g}(\omega')\,e^{-i(\omega+\omega')t}+\mathbf{g}(\omega)\,\mathbf{g}^*(\omega')\,e^{-i(\omega-\omega')t}+$$
$$+\mathbf{g}^*(\omega)\,\mathbf{g}(\omega')\,e^{i(\omega-\omega')t}+\mathbf{g}^*(\omega)\,\mathbf{g}^*(\omega')\,e^{i(\omega+\omega')t}]\,d\omega\,d\omega'. \qquad (\text{П.14})$$

Усредним теперь выражение (П.14) по высокой частоте, т. е. за время, большее чем $2\pi/\omega_0$, но малое по сравнению с характерным временем изменения амплитуды $\mathbf{E}_0(t)$. Это усреднение, как нетрудно убедиться, эквивалентно отбрасыванию членов с $e^{\pm i(\omega+\omega')t}$ по сравнению с членами, содержащими $e^{\pm i(\omega-\omega')t}$. Проведя такое усреднение, учтем далее указанный выше характер поведения величин $\mathbf{g}(\omega)$, вследствие чего в первом приближении в (П.14) положим

$$\begin{aligned}\omega\varepsilon'(\omega)&=\omega_0\varepsilon'(\omega_0)+\frac{d(\omega_0\varepsilon'(\omega_0))}{d\omega_0}(\omega-\omega_0),\\ \omega\varepsilon''(\omega)&=\omega_0\varepsilon''(\omega_0)+\frac{d(\omega_0\varepsilon''(\omega_0))}{d\omega_0}(\omega-\omega_0).\end{aligned} \qquad (\text{П.15})$$

Воспользовавшись далее симметрией некоторых подынтегральных выражений в (П.14) относительно замены переменных интегрирования $\omega\to\omega'$, $\omega'\to\omega$, после весьма простых выкладок приходим к выражению

$$\overline{\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}(t)\frac{\partial\mathbf{D}(t)}{\partial t}}=\frac{1}{4\pi}\frac{d(\omega_0\varepsilon'(\omega_0))}{d\omega_0}\int_0^\infty\!\!\int(-i)(\omega-\omega')\,\mathbf{g}(\omega)\,\mathbf{g}^*(\omega')\,e^{-i(\omega-\omega')t}\,d\omega\,d\omega'+$$
$$+2\sigma(\omega_0)\int_0^\infty\!\!\int\mathbf{g}(\omega)\,\mathbf{g}^*(\omega')\,e^{-i(\omega-\omega')t}\,d\omega\,d\omega'+$$
$$+\frac{d\sigma(\omega_0)}{d\omega_0}\int_0^\infty\!\!\int[(\omega-\omega_0)+(\omega'-\omega_0)]\,\mathbf{g}(\omega)\,\mathbf{g}(\omega')\,e^{-i(\omega-\omega_0)t}e^{-i(\omega'-\omega_0)t}d\omega\,d\omega'. \qquad (\text{П.16})$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_0(t)&=2\int_0^\infty d\omega\,\mathbf{g}(\omega)\,e^{-i(\omega-\omega_0)t},\\ \overline{\mathbf{E}^2(t)}&=\frac{\mathbf{E}_0(t)\,\mathbf{E}_0^*(t)}{2}=2\int_0^\infty\!\!\int\mathbf{g}(\omega)\,\mathbf{g}^*(\omega')\,e^{-i(\omega-\omega')t}\,d\omega\,d\omega',\end{aligned} \qquad (\text{П.17})$$

из (П.16) приходим к формуле (8). При учете анизотропии и магнитных свойств выкладки, вполне аналогичные изложенным, но дополнительно учитывающие эрмитовость величин $\varepsilon'_{ij}(\omega)$, $\varepsilon''_{ij}(\omega)$, $\mu'_{ij}(\omega)$, $\mu''_{ij}(\omega)$, где $\varepsilon_{ij}(\omega)=\varepsilon'_{ij}(\omega)+i\varepsilon''_{ij}(\omega)$, $\mu_{ij}(\omega)=$ $=\mu'_{ij}(\omega)+i\mu''_{ij}(\omega)$, приводят к соотношению [6].

$$\frac{1}{4\pi}\overline{\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\mathbf{E}(t)}+\frac{1}{4\pi}\overline{\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\mathbf{H}}=$$

$$=\frac{1}{16\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{d(\omega_0\varepsilon'_{ij}(\omega_0))}{d\omega_0}E^*_{0i}(t)E_{0j}(t)+\frac{d(\omega_0\mu'_{ij}(\omega_0))}{d\omega_0}H^*_{0i}(t)H_{0j}(t)\right]+$$
$$+\frac{\omega_0\varepsilon''_{ij}(\omega_0)}{8\pi}E^*_{0i}(t)E_{0j}(t)+\frac{\omega_0\mu''_{ij}(\omega_0)}{8\pi}H^*_{0i}(t)H_{0j}(t)+$$
$$+\frac{i}{16\pi}\frac{d(\omega_0\varepsilon''_{ij}(\omega_0))}{d\omega_0}\left(\frac{\partial E_{0j}}{\partial t}E^*_{0i}-\frac{\partial E^*_{0j}}{\partial t}E_{0i}\right)+$$
$$+\frac{i}{16\pi}\frac{d(\omega_0\mu''_{ij}(\omega_0))}{d\omega_0}\left(\frac{\partial H_{0j}}{\partial t}H^*_{0i}-\frac{\partial H^*_{0j}}{\partial t}H_{0i}\right). \qquad (\text{П.18})$$

В заключение рассмотрим случай, когда в непоглощающей среде (т. е. при $\varepsilon'_{ij}=$ $=\varepsilon_{ij}$) квазимонохроматическое поле (пакет) имеет все же такую ширину линии $\Delta\omega$, что необходимо учесть поправки к формуле (П.11). Для нахождения поправочных членов обратимся к общей формуле (П.8). Используя разложения

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\omega_1\varepsilon_{ij}(\omega_1,\mathbf{r})-\omega_2\varepsilon_{ij}(\omega_2,\mathbf{r})}{\omega_1-\omega_2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d^{n+1}(\omega_2\varepsilon_{ij}(\omega_2,\mathbf{r}))}{d\omega_2^{n+1}}\frac{(\omega_1-\omega_2)^n}{(n+1)!},\\&\frac{d^n(\omega_2\varepsilon_{ij}(\omega_2,\mathbf{r}))}{d\omega_2^n}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{d^{n+k}(\omega_0\varepsilon_{ij}(\omega_0,\mathbf{r}))}{d\omega_0^{n+k}}\frac{(\omega_2-\omega_0)^k}{k!},\end{aligned}\right\} \qquad (\text{П.19})$$

для усредненной по высокой частоте плотности энергии из (П.8) получаем

$$\overline{W_E(t,\mathbf{r})}=\frac{1}{16\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i)^{n+k}(-1)^k}{(n+1)!\,k!}\times$$
$$\times\frac{d^{n+k+1}(\omega_0\varepsilon_{ij}(\omega_0,\mathbf{r}))}{d\omega_0^{n+k+1}}\frac{d^n}{dt^n}\left[E_{0j}(t,\mathbf{r})\frac{d^kE^*_{0i}(t,\mathbf{r})}{dt^k}\right], \qquad (\text{П.20})$$

где ω_0 и $\mathbf{E}_0(t)$ определяются в (П.12), (П.17). Используя формулу (П.20), выпишем теперь выражение, аналогичное (П.11), но с учетом двух первых поправок, соответствующих немонохроматическому характеру зависимости поля (П.12) от времени

$$\overline{W_E(t,\mathbf{r})}=\frac{1}{16\pi}\frac{d(\omega_0\varepsilon_{ij}(\omega_0,\mathbf{r}))}{d\omega_0}E_{0j}(t,\mathbf{r})E^*_{0i}(t,\mathbf{r})+$$
$$+\frac{i}{32\pi}\frac{d^2(\omega_0\varepsilon_{ij}(\omega_0,\mathbf{r}))}{d\omega_0^2}\left[\frac{dE_{0j}(t,\mathbf{r})}{dt}E^*_{0i}(t,\mathbf{r})-E_{0j}(t,\mathbf{r})\frac{dE^*_{0i}(t,\mathbf{r})}{dt}\right]-$$
$$-\frac{1}{96\pi}\frac{d^3(\omega_0\varepsilon_{ij}(\omega_0,\mathbf{r}))}{d\omega_0^3}\left[\frac{d^2}{dt^2}(E_{0j}(t,\mathbf{r})E^*_{0i}(t,\mathbf{r}))-3\frac{dE_{0j}(t,\mathbf{r})}{dt}\frac{dE^*_{0i}(t,\mathbf{r})}{dt}\right]. \qquad (\text{П.21})$$

Отметим, что вещественность поправок каждого порядка малости в (П.21), так же как и в (П.20), обеспечена при учете условия (П.3) для диэлектрической проницаемости в непоглощающей среде. Для изотропной среды формула (П.21) была получена другим способом в работе [12].

Физический институт им. П. Н. Лебедева
АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., «Наука», 1967; англ. издание: Pergamon Press, 1970.
2. В. М. Агранович, В. Л. Гинзбург, Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов, М., «Наука», 1965; английское издание: Interscience Publishers, 1966.
3. С. И. Пекар, ЖЭТФ **68**, 866 (1975).
4. Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург, ЖЭТФ **69**, 1179 (1975).
5. В. Л. Гинзбург, В. А. Угаров, УФН **118**, 175 (1975).
6. В. Л. Гинзбург, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» **4**, 74 (1961).
7. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, М., Гостехиздат, 1957.
8. Л. А. Вайнштейн, Электромагнитные волны, М., «Сов. радио», 1957.
9. Ю. С. Бараш, В. Л. Гинзбург, УФН **116**, 5 (1975).
10. Л. А. Вайнштейн, УФН **118**, 339 (1976).
11. R. Loudon, J. Phys. **A3**, 233 (1970).
12. D. Anderson, Zs. Naturforsch. **27a**, 1094 (1972).