

МЕТОДИЧЕСКИЕ ЗАМЕТКИ

621.371

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИМПУЛЬСОВ

Л. А. Вайнштейн

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	339
1. Закон дисперсии и интеграл Фурье	342
2. Свойства функции $g(z, t)$	344
3. Главная часть высокочастотного импульса при отсутствии затухания и усиления	347
4. Главная часть импульса, распространяющегося с затуханием	352
5. Энергетическая кинематика	356
6. Линейные соотношения для активных систем	359
7. Усиление при прохождении или усиление при отражении?	362
Заключение	366
Цитированная литература	366

«Какие бабочки, букашки,
Козявки, мушки, таракашки!
Одни, как изумруд, другие, как коралл!
Какие крохотны коровки!
Есть, право, менее булавочной головки!»
«А видел ли слона? Каков собой на взгляд!
Я чай, подумал ты, что гору встретил?»
«Да разве там он?»—«Там»
— «Ну, братец, виноват,
Слона-то я и не приметил».

И. А. Крылов («Любопытный»)

ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемый обзор посвящен распространению импульсов — главным образом узкополосных высокочастотных импульсов — в однородных средах или однородных линиях. Мы имеем в виду линейные электромагнитные волны, для которых естественной предельной скоростью является c — скорость света в пустоте, хотя ряд результатов легко переносится на волны другой природы, а некоторые результаты — и на нелинейные волны.

Мы ограничиваемся одномерными волновыми полями, зависящими от одной координаты z и от времени t , рассматривая, таким образом, простейшую кинематику полей. Уточнение и систематическое изложение этой кинематики в настоящее время представляет особый интерес по следующим причинам:

1. Во многих задачах, относящихся к дифракции и распространению волн, нельзя считать волны монохроматическими и нужно учитывать их импульсный характер. Как это сделать, всего яснее показать на примере одномерных волн.

2. В последние годы появился ¹ ряд устройств, в которых передающие линии с дисперсией производят преобразование (в частности, сжатие) импульсов, что позволяет увеличить разрешающую способность радиолокационных станций и более эффективно производить спектральный анализ сигналов. Расширилось применение коротких (в том числе наносекундных) импульсов, распространение которых на сравнительно небольшие расстояния уже может привести к сильной их деформации.

3. Сравнительно недавно возник ряд вопросов (иногда — парадоксальных), относящихся к распространению волн в активных (т. е. неустойчивых, неравновесных) системах, в том числе в мазерах и лазерах, а также в системах с электронными потоками. Многие из этих вопросов легко решаются, если вместо распространения монохроматических волн рассмотреть распространение импульсов, причем некоторые парадоксы являются общими для активных и пассивных сред.

Попытаемся сформулировать отличие данного изложения от того, что можно найти в классических работах Зоммерфельда ² и Бриллюэна ³ и в более поздних работах (см., например, ⁴⁻⁶), их развивающих. В этих работах четкие результаты получены для фронта и предвестника (обусловленных весьма высокими частотами в спектре импульса, $\omega \gg \omega_0$, ω_0 — несущая частота), исследованы другие всплески поля (обусловленные частотами, вообще говоря, отличными от ω_0), кое-что можно найти о медленном «следе» или «хвосте» импульса (обусловленном, как правило, весьма низкими частотами, $\omega \ll \omega_0$). Однако детальное исследование *главной части импульса*, обусловленной частотами $\omega \approx \omega_0$, началось лишь недавно (Блиохом ⁷ и др. авторами ^{8, 9}), в основном при отсутствии затухания и усиления. Когда же есть затухание, зависящее от частоты (а оно, строго говоря, всегда есть), то поведение главной части становится, как мы увидим, далеко не тривиальным, а в активных (усиливающих) системах возникают дополнительные осложнения. В этой связи вспоминается басня Крылова, поставленная эпиграфом. Ниже основное внимание будет уделено «слону» — главной части импульса, о мелких деталях, возникающих при распространении импульсов, будет сказано лишь вкратце (в гл. 2 и 3).

В силу линейности задачи распространение импульсов обычно исследуется с помощью обычного (гл. 1) или модифицированного (гл. 6) интеграла Фурье; таким путем мы получаем волновую кинематику распространяющихся полей, а более простая лучевая кинематика (или пространственно-временная геометрическая оптика), как показано в ряде работ ¹⁰⁻¹², может быть получена из уравнения

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0, \quad (\text{В.1})$$

связывающего две величины τ и ζ , между которыми существует функциональная зависимость: $\tau = \tau(\zeta)$ или $\zeta = \zeta(\tau)$. Уравнение (В.1) допускает решения

$$\zeta = F(z - vt) \text{ и } \zeta = G\left(t - \frac{z}{v}\right) \quad \left(v = \frac{d\zeta}{d\tau}\right), \quad (\text{В.2})$$

где F и G — произвольные дифференцируемые функции, а v (скорость распространения) в общем случае зависит от ζ . Первое решение определяет эволюцию величины ζ , заданной при $t = 0$ и всех z выражением $\zeta = F(z)$; второе решение соответствует заданию $\zeta = G(t)$ при $z = 0$ и всех t . (В дальнейшем нас будут интересовать лишь решения второго типа, поскольку мы ищем поле при $z > 0$, задавая его при $z = 0$).

Решения (В.2) при надлежащем толковании τ и ζ определяют группировку электронов в клистроне ¹³ и формирование ударных волн в га-

зах ^{10, 13} и в транспортных потоках ¹⁰. Применим их к гармонической волне (частота ω_0), модулированной по амплитуде или по частоте достаточно медленным образом, так что ширину $\Delta\omega$ ее спектра можно считать бесконечно малой. При амплитудной модуляции можно положить $\tau = W$ и $\xi = S_z$, где W — плотность энергии, S_z — составляющая вектора Умова — Пойнтинга, которую можно представить в виде $S_z = Wv_e$, где v_e — скорость переноса энергии на частоте ω_0 . В отсутствие потерь W и S_z удовлетворяют уравнению (B.1), которое в данном случае есть закон сохранения энергии в дифференциальной форме, и в формулах (B.2) скорость $v = v_e$ оказывается постоянной. При частотной модуляции можно положить $\tau = h = \partial\Psi/\partial z$ и $\xi = \omega = -\partial\Psi/\partial t$, где Ψ — полная фаза волны, h — мгновенное волновое число волны, ω — мгновенная частота (при постоянстве h и ω мы имеем $\Psi = hz - \omega t$). Уравнение (B.1) выполняется, так как $\partial^2\Psi/\partial z \partial t = \partial^2\Psi/\partial t \partial z$, и второе решение (B.2) принимает вид

$$\omega = G\left(t - \frac{z}{v(\omega)}\right), \quad v(\omega) = \frac{d\omega}{dh}, \quad (B.3)$$

причем при $\Delta\omega \rightarrow 0$ под знаком функции G можно $v(\omega)$ заменить на $v(\omega_0)$, которая будет постоянной скоростью распространения в этом случае (скорости v_e и $v(\omega_0)$ совпадают, см. гл. 3 и 5).

Если же $\Delta\omega$ конечна, то (B.3) есть уравнение, определяющее ¹¹ ω как функцию z и t ; это уравнение нагляднее всего исследовать графически, разбивая его на два соотношения

$$\omega = G(\theta), \quad t = \theta + \frac{z}{v(G(\theta))} \quad (B.4)$$

и строя на плоскости z, t прямые $\theta = \text{const}$ — пространственно-временные лучи. На рис. 1 они построены в предположении, что

$$G(\theta) = \omega_0 + b\theta \quad \text{при} \quad -\theta_0 < \theta < \theta_0 \quad (B.5)$$

и

$$\frac{1}{v(\omega)} = \frac{1}{v_g} - \frac{\theta}{z_0}, \quad v_g = v(\omega_0), \quad z_0 = \frac{v^2(\omega_0)}{v'(\omega_0)} > 0 \quad (-\theta_0 < \theta < \theta_0), \quad (B.6)$$

когда второе соотношение (B.4) принимает вид

$$t = \theta \left(1 - \frac{z}{z_0}\right) + \frac{z}{v_g} \quad (B.7)$$

и показывает, что в этом случае все лучи пересекаются в точке $z = z_0$, $t = z_0/v_g$. Таким образом, в лучевом приближении происходит сжатие импульса, имевшего при $z = 0$ конечную длительность $2\theta_0$, до нулевой длительности при $z = z_0$: образуется пространственно-временной фокус (см. рис. 1).

Формулы (B.4) можно дополнить ¹¹ выражением для плотности энергии поля $W = W(z, t)$, которая выражается через плотность энергии $W_0(\theta)$ при $z = 0$ так:

$$W = W_0(\theta) \frac{\partial\theta}{\partial t} \Big|_{z=\text{const}}. \quad (B.8)$$

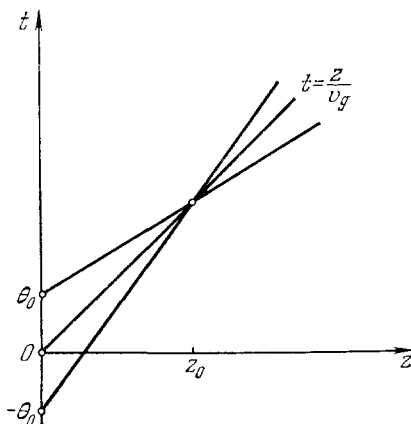


Рис. 1. Лучевая кинематика: образование фокуса и сжатие импульса.

Это — закон сохранения энергии в пространственно-временных лучевых трубках: по мере их сужения плотность энергии должна расти.

Лучевой подход, как всегда, дает лишь «скелет» волнового поля и должен быть дополнен волновым подходом, к которому мы и приступаем.

1. ЗАКОН ДИСПЕРСИИ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

При исследовании плоских волн в бесконечной однородной среде обычно рассматривают сначала *монохроматические* волны, зависимость составляющих поля для которых (т. е. для электромагнитной волны составляющих E_x , E_y , H_x или H_y) от координаты z и времени t имеет (в комплексной записи) вид $e^{i[h(\omega)z - \omega t]}$. Если мы имеем волновод, однородный в направлении оси z , то для каждой монохроматической волны в нем зависимость от z и t — такая же, но добавляется еще зависимость от поперечных координат x и y , которая обычно на зависимость от z и t не влияет.

Функция $h(\omega)$ определяет закон дисперсии и затухания волн в данной среде или линии, мы будем называть эту функцию просто законом дисперсии. Свойства функции $h(\omega)$ проще всего пояснить на примерах. Первый пример

$$h(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \frac{2i\alpha}{\omega}}, \quad \alpha = \text{const} > 0, \quad c = \text{const} > 0 \quad (1.1)$$

соответствует проводящей среде с проводимостью $\sigma = \alpha/2\pi$, не зависящей от частоты, или же длинной линии в пустоте, сопротивление проводов которой не зависит от частоты. Второй пример

$$h(\omega) = \frac{\omega + i\alpha}{c} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{(\omega + i\alpha)^2}} \quad (\alpha \geq \beta \geq 0) \quad (1.2)$$

соответствует длинной линии при наличии потерь как в проводах, так и в среде между проводами; при $\alpha = \beta$ формула (1.2) переходит в формулу (1.1). Третий пример

$$h(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\nu)}} \quad (\omega_p = \text{const} > 0, \quad \nu = \text{const} > 0) \quad (1.3)$$

соответствует холодной плазме с плазменной частотой ω_p и частотой соударений ν или же (при $\nu = 0$) — идеальному волноводу с критической частотой ω_p ; при $\nu > 0$ та же формула приближенно передает свойства волны в волновде с потерями по крайней мере в достаточно узкой полосе частот. Четвертый пример

$$h(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\nu\omega - \omega_r^2}} \quad (\omega_r = \text{const} > 0) \quad (1.4)$$

соответствует среде с упруго связанными электронами, имеющими собственную частоту ω_r и полосу не пропускания $\omega_r < \omega < \sqrt{\omega_r^2 + \omega_p^2}$ (или, как еще говорят, полосу аномальной дисперсии); та же формула приближенно соответствует линиям передачи вблизи изолированной полосы не пропускания или же в этой полосе. Если же имеется набор резонансных частот ω_{rj} , то

$$h(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \sum_j \frac{\omega_{pj}^2}{\omega^2 + i\nu_j\omega - \omega_{rj}^2}}. \quad (1.5)$$

Шестой пример

$$h(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega^2}} \quad (1.6)$$

принадлежит Эренфесту¹⁴ и соответствует неустойчивой (активной) системе: закон дисперсии (1.6) получается из (1.2) при $\alpha = 0$, когда один вид потерь отрицателен и полностью компенсирует потери другого вида.

В первых пяти примерах, соответствующих *пассивным* системам, функция $h(\omega)$ при вещественных ω имеет положительную мнимую часть (волна затухает при увеличении z), допускает аналитическое продолжение на комплексные значения ω и в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega \geq 0$ является голоморфной (аналитической) функцией ω ; ее асимптотическое разложение (при $|\omega| \rightarrow \infty$) имеет вид

$$h(\omega) = \frac{\omega}{c} + b_0 - \frac{b_1}{\omega + iv} + \dots, \quad (1.7)$$

где b_0 и b_1 — постоянные, а в примерах (1.4) и (1.6) $v = 0$. Величина c во всех примерах есть положительная предельная скорость

$$c = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{\omega}{h(\omega)} = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \frac{1}{h'(\omega)}; \quad (1.8)$$

для электромагнитных волн это, как правило, скорость света в пустоте, которая вообще является предельной скоростью передачи сигналов и движения материальных частиц. Конечно, для волн иной природы скорость света в пустоте также является предельной скоростью, однако обычно закон дисперсии этих волн берется в таком виде, что предельная скорость (1.8) для этих волн существует и оказывается меньше скорости света.

Переход к импульсам получается с помощью интеграла Фурье

$$f(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{i[h(\omega)z - \omega t]} d\omega, \quad (1.9)$$

который можно рассматривать как суперпозицию монохроматических волн, о которых говорилось выше. Функция $A(\omega)$ есть спектральная амплитуда соответствующей волны, она в общем случае комплексна; для высокочастотных импульсов с несущей частотой ω_0 функция $A(\omega)$ имеет наибольшее значение при $\omega = \omega_0$, при удалении ω от ω_0 ее абсолютная величина убывает. Функция $f(z, t)$ в выражении (1.9) в общем случае комплексна, физический смысл (например, составляющей электрического поля при некоторых z и t) имеет величина $\text{Re } f(z, t)$ или $\text{Im } f(z, t)$.

Интеграл (1.9) соответствует такой постановке задачи: задана функция f при $z = 0$ и $-\infty < t < \infty$. Иначе говоря, в начальном сечении $z = 0$ расположен некоторый излучатель, который и определяет

$$f(0, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad \text{и} \quad A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(0, t) e^{i\omega t} dt. \quad (1.10)$$

Примем, что функция $h(\omega)$ имеет перечисленные выше свойства. Тогда из интеграла (1.9) следует, что фронт импульса перемещается с предельной скоростью c : иначе говоря,

$$\text{если } f(0, t) = 0 \text{ при } t < 0, \text{ то } f(z, t) = 0 \text{ при } t < \frac{z}{c}. \quad (1.11)$$

Доказательство соотношения (1.11) и общий анализ распространения импульсов облегчается, если ввести функцию

$$g(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[h(\omega)z - \omega t]} d\omega, \quad (1.12)$$

которая удовлетворяет начальному условию

$$g(0, t) = \delta(t), \quad (1.13)$$

где $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака, формально представимая в виде интеграла Фурье

$$\delta(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega t} d\omega. \quad (1.14)$$

С помощью функции $g(z, t)$ формула (1.9) преобразуется к виду

$$f(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z, t - \tilde{t}) f(0, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (1.15)$$

что достигается подстановкой второго выражения (1.10) в интеграл (1.9) и переменной порядка интегрирования. Функцию g можно назвать пространственно-временной функцией Грина, а при данном z — реакцией или откликом данной системы на дельта-импульс (1.13). Поскольку любую функцию $f(0, t)$ можно представить как наложение дельта-импульсов, выражение (1.15) становится самоочевидным.

2. СВОЙСТВА ФУНКЦИИ $g(z, t)$

Уже в первых работах ^{2, 3} исследовался интеграл, отличавшийся от интеграла (1.12) дополнительным множителем $1/(\omega - \omega_0)$ под знаком интеграла (появившимся из-за того, что вместо дельта-импульса бралась полубесконечная синусоида). Интеграл (1.12) исследуется аналогично; в частности, мы имеем

$$g(z, t) = 0 \quad \text{при} \quad t < \frac{z}{c}, \quad (2.1)$$

и выражение (1.15) сразу дает соотношение (1.14). Что же касается самого соотношения (2.1), то оно следует из голоморфности функции $h(\omega)$ выше пути интегрирования (1.9) и из асимптотического разложения (1.7), в силу которого подынтегральная функция (1.12) при $\text{Im } \omega \rightarrow \infty$ и $t < z/c$ стремится к нулю: мы сдвигаем путь интегрирования вверх и доказываем (2.1).

При $t \geq \frac{z}{c}$ функция $g(z, t)$ отлична от нуля и в некоторых случаях вычисляется в явном виде. Для закона дисперсии (1.2)

$$g(z, t) = \left[\delta\left(t - \frac{z}{c}\right) + \frac{\beta z}{c \sqrt{t^2 - (z^2/c^2)}} I_1\left(\beta \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}}\right) \right] e^{-\alpha t}, \quad (2.2)$$

отсюда, полагая $\alpha = \beta$ и $\alpha = 0$, получаем $g(z, t)$ для законов дисперсии (1.1) и (1.6); $I_1(x)$ — модифицированная функция Бесселя, экспоненциально возрастающая при $x \rightarrow \infty$, поэтому при $\alpha = 0$ и $t \rightarrow \infty$ мы имеем $g(z, t) \rightarrow \infty$, что свидетельствует о неустойчивости системы с законом дисперсии (1.6). При $\beta = 0$ мы имеем

$$h(\omega) = \frac{\omega + i\alpha}{c}, \quad g(z, t) = \delta\left(t - \frac{z}{c}\right) e^{-\alpha t} \quad (2.3)$$

и тогда

$$f(z, t) = f\left(0, t - \frac{z}{c}\right) e^{-(\alpha/c)z}, \quad (2.4)$$

т. е. импульс любой формы распространяется без искажения со скоростью c , испытывая при этом затухание, не зависящее от формы импульса.

При $\beta > 0$ распространение импульса по длинной линии происходит более сложным образом, как это видно из формулы (2.2): на неискаженный импульс (2.4) накладывается «хвост» или «след», который, как видно из формулы (2.2), затухает медленнее, чем $e^{-\alpha t}$. При передаче сигналов по линии это приводит к их искажению и наложению, поэтому уже в прошлом веке пришли к выводу о том, что потери в телеграфных кабелях наименее вредны при $\beta = 0$.

Для закона дисперсии (1.3) при $v = 0$ получаем, полагая в формуле (2.2) $\beta = i\omega_p$ и $\alpha = 0$, выражение

$$g(z, t) = \delta\left(t - \frac{z}{c}\right) - \frac{\omega_p z}{c \sqrt{t^2 - (z^2/c^2)}} J_1\left(\omega_p \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}}\right). \quad (2.5)$$

След, определяемый функцией Бесселя J_1 , в данном случае имеет осциллирующий характер.

В других случаях интеграл (1.12) не выражается через известные функции, но может быть приближенно вычислен при больших z и различных отношениях $z/t \leq c$. Так, из асимптотического разложения (1.7) можно получить приближенное выражение

$$g(z, t) = \left[\delta\left(t - \frac{z}{c}\right) - \sqrt{\frac{b_1 z}{t - (z/c)}} J_1\left(2 \sqrt{b_1 z \left(t - \frac{z}{c}\right)}\right) e^{-v[t - (z/c)]} \right] e^{ib_0 z}, \quad (2.6)$$

применимое при малых неотрицательных $t - z/c$ таких, что аргумент функции Бесселя J_1 мал или конечен. При $z = 0$ выражение (2.6) согласуется с начальным условием (1.13), при любых z — с точными выражениями (2.2) и (2.5).

Выражения (2.2), (2.5) и (2.6) всего проще выводятся, если ввести функции

$$\Gamma_n(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\sigma - \infty}^{i\sigma + \infty} e^{i[h(\omega)z - \omega t]} \frac{d\omega}{(-i\omega)^{n+1}},$$

$$\Gamma(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{i\sigma - \infty}^{i\sigma + \infty} e^{i[h(\omega)z - \omega t]} \frac{d\omega}{ih(\omega)},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ и $\sigma > 0$ (ср. гл. 6). Как легко показать, мы имеем тождества

$$g(z, t) = -\frac{\partial^{n+1}}{\partial t^{n+1}} \Gamma_n(z, t) \quad \text{и} \quad g(z, t) = \frac{\partial}{\partial z} \Gamma(z, t). \quad (2.7)$$

Последнее тождество позволяет сразу получить выражение (2.2) при $z < ct$: для этого путь интегрирования надо перенести вниз, он приведет к интегралу по разрезу, и мы получаем

$$\Gamma(z, t) = -cI_0\left(\beta \sqrt{t^2 - \frac{z^2}{c^2}}\right) e^{-\alpha t}.$$

Дифференцирование по z наряду с функцией I_1 дает дельта-функцию, поскольку $\Gamma(z, t) = 0$ при $z > ct$ и при $z = ct$ имеется скачок. Функции $\Gamma_n(z, t)$ при $z > ct$ также равны нулю, а при $z < ct$ могут быть сведены к интегралу по окружности

$$\omega + iv = i\Omega e^{-i\varphi}, \quad -\pi < \varphi < \pi, \quad \Omega = \sqrt{\frac{b_1 z}{t - (z/c)}},$$

на которой при больших z и малых $t - \frac{z}{c}$ функцию $h(\omega)$ можно заменить выписанными членами разложения (1.7). Мы получаем

$$\Gamma_n(z, t) = \left[\frac{t - (z/c)}{b_1 z} \right]^{n/2} J_n\left(2 \sqrt{b_1 z \left(t - \frac{z}{c}\right)}\right) e^{ib_0 z - v[t - (z/c)]}, \quad (2.8)$$

откуда при $n = 0$ сразу следует выражение (2.6), которое определяет ту часть поля, возбуждаемого дельта-импульсом, которая движется с предельной скоростью c .

За полем, движущимся со скоростью c , движутся остальные части поля, скорость которых меньше c . Их можно вычислить методом перевала, деформируя первоначальный путь интегрирования (вещественную ось) в путь, проходящий в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega \gg 0$ через одну или несколько точек перевала $\bar{\omega}$, определяемых уравнением

$$h'(\bar{\omega}) = \frac{1}{v} \quad (0 < v < c), \quad (2.9)$$

где штрихом обозначено дифференцирование по ω . В окрестности каждой точки $\bar{\omega}$ можно написать разложение Тейлора

$$h(\omega) = h(\bar{\omega}) + h'(\bar{\omega})(\omega - \bar{\omega}) + \frac{1}{2} h''(\bar{\omega})(\omega - \bar{\omega})^2 + \frac{1}{6} h'''(\bar{\omega})(\omega - \bar{\omega})^3 + \dots \quad (2.10)$$

Асимптотическое выражение для функции Грина

$$g(z, t) = \sum_{\omega} G(z, t, \bar{\omega}) e^{i[h(\bar{\omega})z - \bar{\omega}t]} \quad (2.11)$$

распадается на сумму вкладов каждой точки $\bar{\omega}$. Если вблизи точки $\bar{\omega}$ ограничиться тремя первыми членами разложения (2.10), то для G получим выражение

$$G(z, t, \bar{\omega}) = \frac{1}{\sqrt{-2i\pi h''(\bar{\omega})z}} e^{-i\tau^2/2}, \quad \tau = \frac{t - (z/v)}{\sqrt{h''(\bar{\omega})z}}, \quad (2.12)$$

применимое при $t \approx z/v$, а точнее при $\tau \sim 1$. Если только $h''(\bar{\omega})$ не слишком мало, это выражение является хорошей аппроксимацией $G(z, t, \bar{\omega})$ при больших z , точнее, при $z \gg [h''(\bar{\omega})]^2/[h'''(\bar{\omega})]^3$ (это есть условие малости первого отброшенного члена на главном участке интегрирования). Если же $h''(\bar{\omega})$ мало, то можно слегка сместить $\bar{\omega}$ так, что станет точно $h''(\bar{\omega}) = 0$, и учесть следующий (кубический) член в разложении (2.10). Таким образом, мы приходим к выражению

$$G(z, t, \bar{\omega}) = \frac{V(-\tau)}{\sqrt{\pi} \sqrt[3]{h'''(\bar{\omega})z/2}}, \quad \tau = \frac{t - (z/v)}{\sqrt[3]{h'''(\bar{\omega})z/2}}, \quad (2.13)$$

где

$$V(s) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[(x^3/3) + sx]} dx \quad (2.14)$$

есть функция Эйри¹⁵, экспоненциально убывающая при $s > 0$ и осциллирующая при $s < 0$.

Как легко показать, для законов дисперсии (1.1) и (1.2) будет лишь одна точка перевала $\bar{\omega}$ на мнимой оси, что приведет к одночленному асимптотическому выражению для G , согласующемуся с (2.2) при $\beta\sqrt{t^2 - (z^2/c^2)} \gg 1$. Для закона дисперсии (1.3) будут две точки $\bar{\omega}$, симметрично расположенные на вещественной оси и дающие осциллирующую зависимость для G , согласующуюся с (2.5) при $\omega_p \sqrt{t^2 - (z^2/c^2)} \gg 1$. Для законов дисперсии (1.4) и (1.5) существует большее число точек $\bar{\omega}$, соответствующие перевальные контуры и вклады детально рассмотрены в статьях Бервальда⁴. Здесь мы проведем лишь общий анализ функции $g(z, t)$. В то время как при $z = 0$ имеется дельта-импульс (1.13), при $z > 0$ наблюдается сложный импульс $g(z, t)$. Рассматривая $g(z, t)$ при $z = \text{const}$, сначала будем иметь $g = 0$ (заштрихованный сектор на рис. 2). В момент $t = z/c$ и последующие моменты (т. е. выше граничной прямой $t = z/c$

на рис. 2) справедливо выражение (2.6); если в нем аргумент функции J_1 велик, то следует перейти к выражениям (2.11) и (2.12). Если далее для одной из точек $\bar{\omega}$ при некотором v величина $h''(\bar{\omega})$ обращается в нуль, то это значит⁴, что при меньших v точка $\bar{\omega}$ раздваивается. В этой ситуации применимо выражение (2.13), которым следует пользоваться при $\tau \sim 1$: соответствующая прямая $t = h'(\bar{\omega})z$ при $h''(\bar{\omega}) = 0$ является пространственно-временной каустикой.

Сравнивая рис. 2 с рис. 1, мы видим, что дельта-импульс, содержащий в себе согласно (1.14) все частоты в равной мере, порождает пучок лучей, в то время как медленная частотная модуляция порождает при $z = 0$ в каждый момент только один луч. Надо однако, отметить, что в волновом приближении при распространении происходит деформация поля, которая учитывается выражениями (2.6), (2.11), (2.12) и (2.13). Рассмотрим сначала импульс, для которого $f(0, t) = 0$ при $t < 0$, причем функция $f(0, t)$ и все ее производные по t непрерывны при всех t , за исключением $t = 0$. Тогда поле $f(z, t)$ непосредственно за фронтом — так называемый предвестник — можно получить из формулы (1.15) и первого тождества (2.7) с помощью интегрирования по частям в виде

$$f(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma_n(z, t) \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(0, +0), \quad (2.15)$$

в котором функции $\Gamma_n(z, t)$ определяются формулой (2.8). Они определяют закон распространения скачков функции $f(0, t)$ и ее производных. Как мы видим, эти скачки распространяются с предельной скоростью (1.8), причем в отсутствие потерь (при $\text{Im } b_0 = 0$) абсолютные величины этих скачков сохраняются.

Однако структура поля, следующего за скачком, при $z = 0$ и $z \rightarrow \infty$ совершенно иная. Возьмем в качестве примера полубесконечное гармоническое колебание

$$f(0, t) = e^{-i\omega_0 t} \quad \text{при } t > 0, \quad f(0, t) = 0 \quad \text{при } t < 0, \quad (2.16)$$

для которого ряд (2.15) принимает вид

$$f(z, t) = \Gamma_0(z, t) - i\omega_0 \Gamma_1(z, t) - \omega_0^2 \Gamma_2(z, t) + \dots, \quad (2.17)$$

причем ничего похожего на (2.16) нет: главная часть поля, которая приводит к установлению гармонического колебания, движется со скоростью $v_g < c$ (см. гл. 3).

В поле, движущемся за предвестником (2.15), наряду с главной частью поля имеются части, движущиеся со всеми возможными скоростями v ($0 < v < c$); среди них следует отметить всплески поля, обусловленные «каустическими» значениями v (см. выше). Их иногда также называют предвестниками (вторым, третьим и т. д.), хотя их скорость в некоторых случаях может быть меньше v_g — скорости главной части; они могут быть вычислены с помощью выражения (2.13), как показано в конце гл. 3.

3. ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ИМПУЛЬСА ПРИ ОТСУТСТВИИ ЗАТУХАНИЯ И УСИЛЕНИЯ

Обычно представляет интерес не распространение дельта-импульса, а распространение высокочастотного импульса с несущей частотой ω_0 , для которого функция $A(\omega)$ в интеграле (1.9) имеет острый максимум в точке $\omega = \omega_0$, причем $|A(\omega)| \sim |A(\omega_0)|$ при $|\omega - \omega_0| \lesssim \Delta\omega$. Закон распространения главной части высокочастотного импульса (при

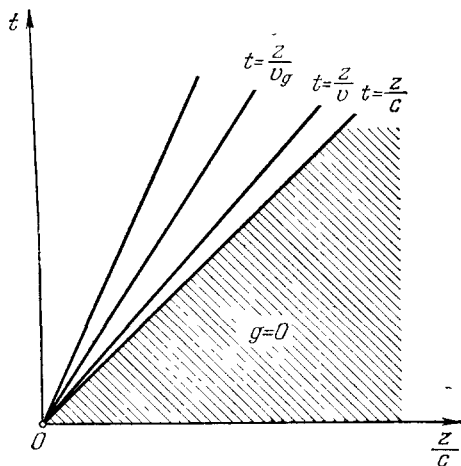


Рис. 2. Функция g на плоскости z, t .

достаточно малой $\Delta\omega$ мы получим, раскладывая функцию $h(\omega)$ в интеграле (1.9) в ряд Тейлора, аналогичный ряду (2.10). Считая волновое число $h(\omega)$ вещественным в окрестности точки ω_0 и представляя $f(0, t)$ в виде

$$f(0, t) = F(0, t) e^{-i\omega_0 t}, \quad (3.1)$$

где $F(0, t)$ есть медленно меняющаяся функция t — комплексная огибающая импульса при $z = 0$, мы получаем, ограничиваясь двумя первыми членами в разложении Тейлора, $f(z, t)$ в виде

$$f(z, t) = F(z, t) e^{i[h(\omega_0)z - \omega_0 t]}, \quad (3.2)$$

где комплексная огибающая $F(z, t)$ выражается через $F(0, t)$ следующим образом:

$$F(z, t) = F(0, t - h'(\omega_0)z). \quad (3.3)$$

Таким образом, в этом приближении комплексная огибающая F (т. е. обычная огибающая $|F|$, вызванная амплитудной модуляцией, и дополнительная фаза $\arg F$, связанная с частотной или фазовой модуляцией) перемещается с так называемой групповой скоростью

$$v_g = \frac{1}{h'(\omega_0)} = \frac{d\omega}{dh} \Big|_{\omega=\omega_0}, \quad (3.4)$$

в то время как высокочастотное заполнение импульса перемещается, как видно из формулы (3.2), с фазовой скоростью $\omega_0/h(\omega_0)$: оно определяется множителем $e^{i[h(\omega_0)z - \omega_0 t]}$ таким же, как и для монохроматической волны с частотой ω_0 .

С помощью интеграла Фурье легко уточнить формулу (3.3) и выяснить пределы ее применимости. Для этого достаточно в разложении Тейлора учесть еще один — третий член, а при $h''(\omega_0) = 0$ — четвертый член. Получающиеся при этом выражения, равно как и простую формулу (3.3), можно записать в единообразном виде

$$F(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z, t - \tilde{t}, \omega_0) F(0, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad (3.5)$$

связывающем непосредственно комплексные огибающие $F(0, t)$ и $F(z, t)$. При этом формула (3.3) получается, если положить

$$G(z, t - \tilde{t}, \omega_0) = \delta(\tilde{t} - t + h'(\omega_0)z); \quad (3.6)$$

при учете третьего члена в разложении Тейлора мы имеем

$$G(z, t - \tilde{t}, \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{-2i\pi\Delta}} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\frac{\tilde{t} - t + h'(\omega_0)z}{\Delta} \right)^2 \right], \quad (3.7)$$

$$\Delta = \sqrt{h''(\omega_0)z},$$

а при $h''(\omega_0) = 0$ и учете четвертого члена

$$G(z, t - \tilde{t}, \omega_0) = \frac{1}{\sqrt{\pi\Delta}} V \left(\frac{\tilde{t} - t + h'(\omega_0)z}{\Delta} \right), \quad \Delta = \sqrt[3]{\frac{h'''(\omega_0)z}{2}}. \quad (3.8)$$

Формула (3.5) определяет распространение *главной* части высокочастотного импульса — точнее, распространение ее *комплексной* огибающей F . Заметим, что выражения (3.7) и (3.8) являются точными аналогами выражений (2.12) и (2.13); однако выражения (2.12) и (2.13) являются асимптотическими (они пригодны лишь при достаточно больших z), в то время как выражения (3.7) и (3.8) пригодны при *любой* z , в том числе

и при $z \rightarrow 0$, когда они переходят в дельта-функцию (3.6), которую для данной цели можно определить соотношениями

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 0 \quad \text{при} \quad t_1 < 0, \quad t_2 < 0 \quad \text{и} \quad t_1 > 0, \quad t_2 > 0,$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(t) dt = 1 \quad \text{при} \quad t_1 < 0, \quad t_2 > 0,$$

тогда она приведет к выражению (3.3).

Функция G определяет деформацию комплексной огибающей F по мере увеличения z . Эта деформация определяется второй производной $h''(\omega_0)$, а при $h''(\omega_0) = 0$ — третьей производной $h'''(\omega_0)$, т. е. *непостоянством групповой скорости* $v(\omega) = 1/h'(\omega)$ *в пределах полосы частот* $|\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega$, *занятой импульсом*. Если выполняется условие

$$\frac{1}{2} h''(\omega_0) \Delta\omega^2 z \ll 1, \quad (3.9)$$

а при $h''(\omega_0) = 0$ — условие

$$\frac{1}{6} h'''(\omega_0) \Delta\omega^3 z \ll 1, \quad (3.10)$$

то деформацией F можно пренебречь и пользоваться формулой (3.3). Таким образом, чем уже полоса частот, занятая импульсом, тем большее расстояние он проходит без заметного искажения. Иначе говоря: чем медленнее изменяется во времени комплексная огибающая, тем медленнее она деформируется в пространстве.

Следует отметить^{7, 8}, что закон деформации комплексной огибающей согласно формулам (3.6) и (3.7) совпадает с законом распространения двумерных волновых пучков параксиального типа. Пусть мы имеем монохроматическое волновое поле (частота ω_0 , зависимость от времени $e^{-i\omega_0 t}$), комплексная амплитуда $u(z, x)$ которого удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_0^2 u = 0 \quad \left(k_0 = \frac{\omega_0}{c} \right). \quad (3.11)$$

В том случае, когда волновое поле имеет характер квазиплоской волны, распространяющейся в направлении оси z (т. е. мы имеем параксиальный волновой пучок), функцию u можно представить в виде

$$u = U(z, x) e^{ik_0 z}, \quad (3.12)$$

где медленно меняющаяся функция $U(z, x)$ связана с $U(0, x)$ так же, как $F(z, t)$ с $F(0, t)$, если заменить величину $t - h'(\omega_0)z$ на x/c и $h''(\omega_0)$ на $-1/k_0 c^2$. Иначе говоря, $F(z, t)$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{ih''(\omega_0)}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \theta = t - h'(\omega_0)z = t - \frac{z}{v_g}, \quad (3.13)$$

а при замене (3.7) на (3.8) — более сложному уравнению

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\frac{h'''(\omega_0)}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial \theta^3}. \quad (3.14)$$

Эти уравнения на плоскости z, t определяют F вблизи «главного луча» $t = z/v_g$ (рис. 2).

Аналогия между параксиальными пучками и высокочастотными импульсами позволяет для последних различать ближнюю, дальнюю и

промежуточную зоны. В ближней зоне применима формула (3.3), она определяется условием (3.9) или (3.10). Если эти условия заменены противоположными, то мы имеем дело с *дальней* зоной, в которой

$$F(z, t) = 2\pi A(\omega_0) G(z, t, \omega_0). \quad (3.15)$$

В дальней зоне импульс деформирован так, что его поле пропорционально $1/\sqrt{z}$ или $1/\sqrt[3]{z}$ и определяется спектральной амплитудой $A(\omega)$ подобно тому, как дальнее поле антенны определяется не распределением поля на излучающем отверстии, а преобразованием Фурье от этого распределения. В *промежуточной* зоне, соединяющей ближнюю и дальнюю зоны, происходит постепенная деформация импульса и, в частности, его сжатие (фокусировка).

Если начальный импульс является полубесконечным гармоническим колебанием (2.16), то выражение (3.7) для функции G в этом случае дает ⁴

$$F(z, t) = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\theta/\Delta} e^{-i\tau^2/2} d\tau, \quad (3.16)$$

$$\Delta = \sqrt{h''(\omega_0)z},$$

а выражение (3.8)

$$F(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\theta/\Delta} V(-\tau) d\tau, \quad (3.17)$$

$$\Delta = \sqrt[3]{\frac{h'''(\omega_0)z}{2}},$$

Рис. 3. Фронт главной части полубесконечного гармонического колебания по формулам (3.16) (1) и (3.17) (2).

причем в обоих выражениях $\theta = t - h'(\omega_0)z$. На рис. 3 нанесены значения $|F|$, вычисленные по этим формулам. Мы видим, что фронт волны, вначале бесконечно крутой, по мере увеличения z становится все более пологим; в данном случае мы говорим не о фронте импульса, структура поля вблизи которого исследована в конце гл. 2, а о фронте его главной части, перемещающейся со скоростью $v_g < c$. Формулы (3.16) и (3.17) остаются в силе и при $\omega_0 = 0$, т. е. для импульса без высокочастотного заполнения. Они определяют тогда установление *постоянного* поля, приложенного в момент $t = 0$ к точке $z = 0$. После того как через точку со скоростью $v_g = v(0)$ прошел фронт *главной части*, в ней согласно рис. 3 устанавливается постоянное поле.

В качестве второго примера возьмем гауссов импульс с квадратичной фазовой модуляцией [или линейной частотной, см. формулу (B.5)], когда

$$F(0, t) = e^{-(a+ib)t^2/2}, \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(a+ib)}} \exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2(a+ib)}\right] \quad (a > 0). \quad (3.18)$$

Для такого импульса получаются простые выражения. В частности, вместо формулы (3.16) мы имеем выражение

$$F(z, t) = \frac{1}{\sqrt{1-i(a+ib)h''(\omega_0)z}} \exp\left\{-\frac{(a+ib)[t-h'(\omega_0)z]^2}{2[1-i(a+ib)h''(\omega_0)z]}\right\}, \quad (3.19)$$

позволяющее легко проследить за деформацией главной части импульса при выходе из ближней зоны (где $(a + ib) h''(\omega_0) z \ll 1$). Мы видим, в частности, что длительность импульса минимальна в точке

$$z_0 = -\frac{b}{(a^2 + b^2) h''(\omega_0)}, \quad (3.20)$$

причем

$$F(z_0, t) = \sqrt{-i \frac{b}{a}} \exp \left\{ -\frac{(a^2 + b^2) [t - h'(\omega_0) z]^2}{2a} \right\}.$$

Если $z_0 > 0$, то при $0 < z < z_0$ импульс сжимается, а при $z > z_0$ — расширяется. Как легко видеть, при $a \ll |b|$ величины z_0 по формулам (В.6) и (3.20) совпадают, причем эффективная длительность импульса $\Delta t = \sqrt{a/(a^2 + b^2)}$ в точке z_0 существенно меньше первоначальной, равной $1/\sqrt{a}$. Так с помощью волновой трактовки уточняется процесс сжатия импульсов, изображенный на рис. 1.

При достаточно больших z побочную часть импульса, движущуюся со скоростью v , можно вычислить с помощью выражения (2.11) для функции g . Мы получаем формулу

$$f(z, t) = \sum_{\bar{\omega}} F(z, t, \bar{\omega}) e^{i[h(\bar{\omega})z - \bar{\omega}t]}, \quad (3.21)$$

где медленно меняющаяся функция

$$F(z, t, \bar{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} G(z, t - \tilde{t}, \bar{\omega}) F(0, \tilde{t}) e^{i(\bar{\omega} - \omega_0)\tilde{t}} d\tilde{t} \quad (3.22)$$

при $\bar{\omega} = \omega_0$ превращается в $F(z, t)$. Если $\bar{\omega}$ сильно отличается от ω_0 , то благодаря сильно осциллирующему множителю $e^{i(\bar{\omega} - \omega_0)t}$ мы будем иметь $|F(z, t, \bar{\omega})| \ll |F(z, t)|$. В дальней зоне интеграл (3.22) приводит к выражению

$$F(z, t, \bar{\omega}) = 2\pi A(\bar{\omega}) G(z, t, \bar{\omega}), \quad (3.23)$$

также свидетельствующему о сравнительной малости побочных частей при вещественных $\bar{\omega}$, сильно отличающихся от ω_0 . При комплексных $\bar{\omega}$ малость побочных частей следует из малости экспонент в формуле (3.21).

Сказанное выше можно дополнить в нескольких отношениях. Во-первых, формула (3.5) применялась для учета дисперсионной деформации многими авторами ^{1, 16, 17}, также и в более сложных случаях, например, при отражении импульсов от неоднородной ионосферы ¹⁸, так что число примеров можно было бы увеличить. Во-вторых, в некоторых работах ^{9, 19} формула (3.5) уточняется путем учета дополнительных членов в разложении Тейлора для функции $h(\omega)$ при $\omega \approx \omega_0$. Это позволяет не столько уточнить функцию G , сколько оценить пределы применимости простых выражений (3.7) и (3.8); здесь дело обстоит так же, как в параксиальной физической оптике, где применяется принцип Гюйгенса — Френеля, ведущий к интегралам Френеля типа (3.16) и в дифференциальной формулировке соответствующий параболическому уравнению типа (3.13): если этот принцип непригоден, то обычно его не уточняют, а обращаются к более строгим методам.

В-третьих, метод перевала можно применять ²⁰ не только к интегралу (1.12), но и к интегралу (1.9), предварительно конкретизировав вид функции $A(\omega)$, например, по формуле (3.18); тогда точка перевала $\bar{\omega}$

определяется эквивалентными уравнениями

$$\bar{\omega} = \omega_0 + i(a + ib)[h'(\bar{\omega})z - t], \quad h'(\bar{\omega}) = \frac{1}{z} \left(t + i \frac{\bar{\omega} - \omega_0}{a + ib} \right), \quad (3.24)$$

которые при $a + ib \rightarrow 0$ дают $\bar{\omega} \rightarrow \omega_0$, а при $a + ib \rightarrow \infty$ переходят в уравнение (2.9). Последнее оказывается справедливым также и для больших t — для хвоста импульса, который хорошо передается ^{21а} формулой (3.23). При $a = 0$ точка перевала получается вещественной, а метод перевала приводит ^{20а} к лучевой кинематике (см. Введение) и ее волновым уточнениям. При $a > 0$ точка $\bar{\omega}$ комплексна, и результаты интерпретируются ^{20б} с помощью комплексных лучей (см. ниже).

Кроме того, для полубесконечного гармонического колебания (2.16) выражение (3.23) определяет при достаточно больших значениях z так называемый предвестник Бриллюэна ³

$$f(z, t) = \frac{iV(-\tau)}{\sqrt{\pi} \sqrt[3]{h'''(\bar{\omega})z/2(\bar{\omega} - \omega_0)}} e^{i[h(\bar{\omega})z - \bar{\omega}t]},$$

$$\tau = \frac{t - h'(\bar{\omega})z}{\sqrt[3]{h'''(\bar{\omega})z/2}}, \quad (3.25)$$

соответствующий каустическим значениям частоты $\bar{\omega}$ и скорости $v = 1/h'(\bar{\omega})$; $0 < v < c$, $h''(\bar{\omega}) = 0$. Об этих предвестниках (втором, третьем и т. д.) говорилось в конце § 2. Тот же результат получается путем интегрирования по частям формулы (3.22) и отбрасывания интеграла, пропорционального $z^{-2/3}$, или же путем асимптотического вычисления первоначального интеграла (1.9). Первый предвестник, определяемый формулой (2.17), называют также предвестником Зоммерфельда ².

Согласно выражению (3.25) поле при больших отрицательных τ экспоненциально мало, поскольку

$$V(s) = \frac{1}{2} s^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3} s^{3/2}\right) \quad (s \gg 1)$$

при $\tau \sim 1$ происходит его нарастание, а при больших положительных τ функция $V(-\tau)$ осциллирует, медленно убывая, поскольку

$$V(-\tau) = \tau^{-1/4} \sin\left(\frac{2}{3} \tau^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \quad (\tau \gg 1).$$

Это поведение похоже (правда, лишь качественно) на поведение первого предвестника.

Предвестники исследовались экспериментально ²² при законе дисперсии (1.4) и несущей частоте, соответствующей дециметровому и сантиметровому диапазону волн. Подобные исследования позволяют судить ²³ о законе дисперсии на частотах, сильно отличающихся от несущей; однако чем больше $|\omega - \omega_0|$, тем точнее должна совпадать огибающая, реализуемая в эксперименте, с теоретической.

4. ГЛАВНАЯ ЧАСТЬ ИМПУЛЬСА, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕГОСЯ С ЗАТУХАНИЕМ

Формулы (3.1) — (3.3) применимы при условии (3.9) или (3.10) и тогда, когда $\text{Im } h(\omega) > 0$ в пределах полосы частот, занятой высокочастотным импульсом. Однако при этом групповая скорость (3.4) получается комплексной — это значит, что огибающая перемещается без искажения только тогда, когда

$$t = h'(\omega_0)z + \theta, \quad (4.1)$$

где θ — вещественная величина. При комплексности $h'(\omega_0)$ соотношение (2.4) может выполняться лишь при комплексных z или t , т. е. на комплексном луче. К чему это приводит при вещественных z и t ? Можно показать, что комплексность v_g вызывает сильную дополнительную деформацию импульса ^{17, 24}, различную для различных комплексных огибающих $\mathcal{F}(0, t)$.

В качестве примера возьмем импульс (3.18) и, обозначая

$$h'(\omega_0) = \xi + i\eta, \quad (4.2)$$

образуем

$$F(0, t - h'(\omega_0)z) = e^{-(1/2)(a+ib)(\xi+i\eta)^2 z^2} e^{-[(1/2)at^2 - (a\xi - b\eta)zt]} \times \\ \times e^{-i[(1/2)bt^2 - (a\eta + b\xi)zt]}. \quad (4.3)$$

При данном z первый множитель правой части постоянен, второй показывает, что максимум амплитуды (амплитудный центр импульса) перемещается со скоростью

$$v_1 = \frac{a}{a\xi - b\eta}, \quad (4.4)$$

а третий — что точка, в которой мгновенная частота равна ω_0 (фазовый центр), перемещается со скоростью

$$v_2 = \frac{b}{b\xi + a\eta}. \quad (4.5)$$

Скорости v_1 и v_2 различны (в этом и проявляется деформация данного импульса) и зависят от параметров a и b . Лишь при $\eta = 0$ они совпадают друг с другом и с групповой скоростью $1/\xi$, но тогда мы возвращаемся к распространению без затухания или же с затуханием, не зависящим от частоты. Скорости v_1 и v_2 могут быть сколь угодно велики или отрицательны; в частности, возможны значения $v_1 > c$ и $v_1 < 0$ даже без частотной модуляции, т. е. при $b = 0$ (примеры, основанные на законах дисперсии (1.1) и (1.3), рассмотрены в наших работах ²¹). В литературе можно найти ²⁵ примеры расчетов по формулам (3.5), (3.19) и (4.3) при наличии затухания и сопоставление результатов с тем, что получается с помощью точного вычисления интеграла (1.9); согласие получается удовлетворительным для умеренных z и при увеличении z ухудшается. Такое же сопоставление было проведено ²¹ для «экзотических» значений $v_1 = 1/\xi$ (при $b = 0$), т. е. для $v_1 > c$ и $v_1 < 0$, со следующим выводом: чем экзотичнее скорость v_1 , тем она нестабильнее, т. е. тем меньше расстояние, на котором импульс движется с этой скоростью. Дальнейшее распространение приводит либо к изменению v_1 до «нормальных» значений ($0 < v_1 < c$), либо к искажению импульса до неузнаваемости.

При отсутствии затухания, как мы видели в гл. 3, основной причиной деформации импульса являются фазовые искажения, вызванные непостоянством групповой скорости в пределах полосы частот $|\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega$, занятой импульсом. При наличии затухания $\text{Im } h(\omega)$, зависящего от частоты, возникает новое явление: искажение энергетического спектра импульса по мере распространения. Действительно, при $z = 0$ спектр пропорционален $|A(\omega)|^2$, а при $z > 0$ уже $|A(\omega)|^2 e^{-2\text{Im } h(\omega)z}$: он, во-первых, испытывает ослабление, определяемое множителем $e^{-2\text{Im } h(\omega_0)z}$, и, во-вторых, изменяется его форма, определяемая функцией

$$S(\omega, z) = |A_-(\omega)|^2 e^{-2\text{Im}[h(\omega) - h(\omega_0)]z}, \quad (4.6)$$

и, в частности, изменяется эффективная несущая частота ω_m , соответствующая максимуму $S(\omega, z)$: ω_m смещается от ω_0 в сторону, соответствующую большим значениям экспоненты, т. е. меньшему коэффициенту затухания. Поскольку ω_m определяет частоту заполнения, изменяется скорость движения импульса и, как нетрудно видеть, уменьшается его ослабление (по сравнению с монохроматической волной, имеющей частоту ω_0). Начало этого процесса можно проследить по формуле (4.3). Пусть, например, $b = 0$, тогда при $z = 0$ импульс с несущей частотой ω_0

модулирован только по амплитуде. При $z > 0$ частота заполнения равна

$$\omega_m = \omega_0 - a\eta z, \quad \eta = \text{Im } h'(\omega_0), \quad (4.7)$$

т. е. при $\eta > 0$ она меньше, а при $\eta < 0$ — больше ω_0 , в соответствии со сказанным выше. Дальнейшее смещение несущей происходит уже не по линейному закону, как в формуле (4.7); оно может привести к тому, что высокочастотный импульс превратится в импульс без заполнения²¹ — так будет, если минимальное затухание соответствует частоте $\omega = 0$.

Конечно, при значительном смещении несущей сам импульс, распространяющийся с затуханием, претерпевает сильное ослабление и значительную деформацию. Однако и при ослаблении в 40—70 дБ импульс может быть принят и как-то использован (правда, при слишком большой деформации это сделать трудно, см. ниже).

Изменение формы спектра с расстоянием приводит к тому, что формулы (3.5) и (3.19) действительно дают нам ту часть импульса, которая имеет частоту ω_0 , но эта часть является главной лишь для умеренных z , при которых форма спектра еще мало отличается от начальной формы $S(\omega, 0) = |A(\omega)|^2$, и, в частности, эффективная несущая частота мало отличается от ω_0 (скажем, $|\omega_m - \omega_0| \leq \Delta\omega$). С практической точки зрения обычно важны лишь такие z , при которых импульс похож на первоначальный и воспринимается приемным устройством, работающим в полосе частот исходного импульса. Наблюдая (с помощью широкополосного приемника) наш импульс на больших расстояниях z , где форма его спектра совершенно иная, мы столкнемся со следующим явлением: то, что мы принимаем, совершенно не похоже на то, что было послано, поскольку принимаемый импульс определяется такими свойствами излучаемого импульса (его спектром при $|\omega - \omega_0| \gg \Delta\omega$), которые при излучении не контролируются.

Изменение формы спектра и деформация импульса происходят с ростом z тем медленнее, чем меньше $\Delta\omega$ (это видно, в частности, из формулы (4.7), где $a \sim \Delta\omega^2$), т. е. чем медленнее изменяется комплексная огибающая $F(0, t)$ во времени (ср. гл. 3). Однако и за пределами полосы $|\omega - \omega_0| \leq \Delta\omega$ всегда имеется некоторая мощность, дающая начало побочным частям поля (гл. 3). Если затухание зависит от частоты, то эти побочные части могут стать преобладающими. Используя наш эпиграф, мы скажем: «слон» может стать меньше «мушки», а в усиливающих системах (гл. 6) «мушка» может стать больше «слона». Заметим, что непостоянство скорости импульса обусловлено изменением эффективной несущей частоты: каждый элементарный спектральный интервал ω , $\omega + d\omega$ характеризуется своей скоростью, а при данном z реализуется такая скорость (отношение z к времени распространения), которая соответствует доминирующей частоте ω_m .

В связи со сказанным выше естественно поставить вопрос: что такое сигнал и какова его скорость? До сих пор мы слова сигнал (переносчик информации!) не употребляли; для импульса (3.18) это слово не подходит: он не имеет ни начала, ни конца, подобно бесконечной гармонической волне. Неудивительно, что скорости v_1 и v_2 для такого импульса могут быть сверхсветовыми или отрицательными, подобно фазовой скорости $\omega_0/\text{Re } h(\omega_0)$ гармонической волны. Вообще же следует признать, что импульс с голоморфной (аналитической) комплексной огибающей $F(0, t)$ не есть сигнал в собственном смысле этого слова, поскольку такой импульс бесконечен во времени и лишен элемента внезапности: если мы его наблюдаем в малом интервале Δt , то дальше все определено однозначно. Сигналом может быть, например, прямоугольный импульс или же импульс, огибающая которого определена формулой (3.18) при $-T < t < T$ и рав-

на нулю при $t < -T$ и $t > T$: как бы не было велико T и мало $e^{-(1/2) \alpha T^2}$, такой импульс не является голоморфной функцией t и до момента $t = -T$ нельзя предсказать, будет ли импульс или нет. Таким образом, для сигнала выражение (3.3) с комплексной групповой скоростью (3.4) не имеет смысла, и для него основное значение имеет предельная скорость c , с которой движется фронт импульса (или же любое его внезапное изменение, см. конец гл. 2). За фронтом движутся остальные части импульса — каждая со своей скоростью. Главная часть импульса рассчитывается по формулам (3.5) и (3.7), которые определяют волновое поле в окрестности главного комплексного луча (4.1). На конечном интервале расстояний некоторые характерные признаки — например, максимум огибающей

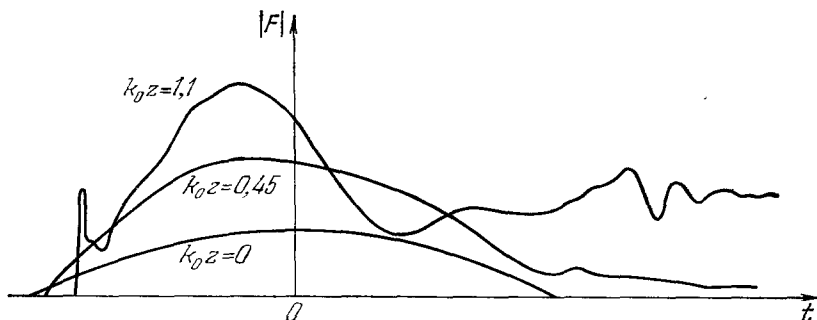


Рис. 4. Распространение косинусоидального импульса с отрицательной скоростью v_1 : $F(0, t) = \cos\left(\frac{2T}{\pi t}\right)$ при $|t| \leq T$, $F(0, t) = 0$ при $|t| \geq T$ закон дисперсии (1.3); $\omega_0 = 0,2 \omega_p$, $\nu = 0,18 \omega_p$, $v_1 = -1,7 c$, $\omega_0 T = 2\pi$.

$|F(z, t)|$, могут перемещаться со сверхсветовой или даже отрицательной скоростью, но ни к каким противоречиям с релятивистской причинностью или со здравым смыслом это не приводит *). Так, если скорость максимума $v_1 > c$, то это значит, что максимум приближается к фронту (что похоже на процесс сжатия импульса), однако неограниченное сближение невозможно, поскольку изменяется спектр (4.6) и вместе с ним скорость v_1 . Труднее представить себе случай $v_1 < 0$, поэтому на рис. 4 приведены результаты, полученные путем вычисления ²¹в интеграла (1.9) для импульса с косинусоидальной огибающей: по мере увеличения z фронт приходит позже, максимум — раньше, однако уже при небольших z импульс полностью разваливается.

Заметим, что говорить о голоморфности или неголоморфности огибающей имеет смысл лишь при игнорировании шумов в системе и в приемнике; однако учет шумов — это сложная статистическая задача, которая требует отдельного рассмотрения.

Во введении распространение импульсов исследовалось в рамках лучевой кинематики, которая затем была дополнена комплексными лучами. Дальнейшее рассмотрение велось в рамках волновой кинематики, причем следует различать строгую волновую трактовку, например, формулы (1.9), (1.12), (1.15), (2.1) — (2.5) и приближенные соотношения (3.1) — (3.8) для главной части импульса, аналогичные параксиальной

*) Надо сказать, что передача информации с фазовой скоростью невозможна главным образом потому, что это — скорость *внутреннего* движения в импульсе, фронт которого движется со скоростью c , а главная часть — со скоростью $v_g < c$ (если затухания нет). Что же касается скорости максимума при наличии затухания, то это тоже скорость внутреннего движения, причем более или менее кратковременная.

волновой оптике. Возможен и третий подход, который естественно назвать *энергетической кинематикой*; она позволяет составить более четкое физическое представление о распространении импульсов с *амплитудной модуляцией*.

5. ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ КИНЕМАТИКА

Бриллюэн ²⁶ впервые указал связь между распространением электромагнитных импульсов и скоростью переноса энергии на несущей частоте

$$v_e = \frac{S_z}{W}. \quad (5.1)$$

Как показано выше (см. Введение), эта скорость в лучевом приближении является скоростью перемещения импульсов (при чисто амплитудной модуляции и достаточно узкой полосе частот $\Delta\omega$) и поэтому должна совпадать с групповой скоростью (3.4); прямое доказательство равенства $v_g = v_e$ для непоглощающих сред дано Рытовым ²⁷ (см. также ²⁸). Интересно, что в гидродинамике равенство скорости группы волн и скорости переноса энергии было отмечено еще в 1877 г. ²⁹.

Если же рассматривать системы с потерями, то окажется, что для реальных сред или линий мы всегда получаем ^{26, 28} v_e в пределах $0 \leq v_e \leq c$; поэтому естественно думать, что «истинная скорость движения импульса равна v_e ». Автор ранее придерживался ²⁸ этой точки зрения, она как будто подкрепляется тем, что импульс есть сгусток энергии, энергия эквивалентна массе, а масса не может перемещаться со сверхсветовой скоростью. Однако эта точка зрения неверна по следующим соображениям:

а) В гл. 4 показано, что скорость v_1 импульса (3.18) может быть любой ($v_1 > c$ и $v_1 < 0$), поэтому $v_1 \neq v_e$ и между v_1 и v_e существует более сложная связь (см. ниже). В частности, в активных системах возможен случай, когда $v_e < 0$ для импульса, распространяющегося в положительном направлении (гл. 6). Все это показывает, что при наличии затухания или усиления уподоблять импульс материальному телу нельзя. Если затухание имеет чисто реактивный характер и $h(\omega)$ при $\omega \approx \omega_0$ — чисто мнимое, то при $b = 0$ по формуле (4.4) получаем $v_1 = 1/\xi = \infty$, а по формуле (5.1) $v_e = 0$, поскольку поток энергии отсутствует.

б) При наличии потерь для вычисления плотности энергии W недостаточно знать макроскопические характеристики среды, например, комплексные проницаемости $\epsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$, а нужно иметь некоторые сведения о ее микроскопических свойствах: надо знать «уравнение движения» для нее ³⁰ или же располагать дополнительными экспериментальными сведениями. Таким образом, для заданного закона дисперсии $h(\omega)$, однозначно определяющего распространение импульса, могут быть разные значения W и v_e .

в) Вообще вопрос о скорости импульсов нельзя решать с помощью определения. Так, недавно была введена ³⁰ скорость по формуле (5.1), где W означает *вакуумную* часть электромагнитной энергии: эта скорость имеет определенный смысл, но к распространению импульсов никакого отношения не имеет *).

Поясним сказанное в пункте б). Плотность энергии W , плотность потока энергии S_z (составляющая вектора Умова — Пойнтинга) и плотность мощности потерь P связаны соотношением

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial S_z}{\partial z} + P = 0. \quad (5.2)$$

*) То же можно сказать об определениях, данных в более старых работах ^{3, 4} см. также обзор ⁵).

Если под W , S_z и P понимать величины, усредненные по времени (например, по периоду $2\pi/\omega_0$ несущей частоты), то для пассивных сред $W \geq 0$, $S_z \geq 0$ и $P \geq 0$, для активных сред W , S_z и P могут быть отрицательными. Если же мы рассматриваем не плоскую волну в однородной среде, а волну в линии передачи, то соотношение (5.2) справедливо для величин W , S_z и P , усредненных еще по поперечному сечению линии.

Для идеальной среды $P \equiv 0$ и плотность энергии W вычисляется по макроскопическим характеристикам без дополнительных сведений. В теории электрических цепей^{31, 32} это соответствует тому обстоятельству, что энергия реактивного двухполюсника, имеющего при временной зависимости $e^{-i\omega t}$ импеданс $Z(\omega) = -iX(\omega)$, определяется однозначно, а именно, пропорциональна производной $X'(\omega)$. Это позволяет сразу же получить выражения для электрической и магнитной энергии в среде без потерь, заполняя этой средой емкость C и индуктивность L и получая в первом случае $X(\omega) = -1/\omega\epsilon(\omega)C$, а во втором $X(\omega) = \omega\mu(\omega)L$.

Формулу для энергии всего проще вывести, рассматривая колебания с частотами $\omega \pm \Delta\omega$, когда ток и напряжение на клеммах двухполюсника определяются выражениями

$$I(t) = \operatorname{Re} (I_0 e^{-i\omega t} \cos \Delta\omega t) = \operatorname{Re} \left[\frac{I_0}{2} (e^{-i(\omega+\Delta\omega)t} + e^{-i(\omega-\Delta\omega)t}) \right], \quad I_0 = \text{const},$$

$$U(t) = \operatorname{Re} \left\{ -i \frac{I_0}{2} [X(\omega+\Delta\omega) e^{-i(\omega+\Delta\omega)t} + X(\omega-\Delta\omega) e^{-i(\omega-\Delta\omega)t}] \right\} = \\ = \operatorname{Im} (X(\omega) I_0 e^{-i\omega t} \cos \Delta\omega t) - \Delta\omega \operatorname{Re} (X'(\omega) I_0 e^{-i\omega t} \sin \Delta\omega t) \quad \text{при } \Delta\omega \rightarrow 0.$$

Энергия двухполюсника в момент $t = 0$, очевидно, равна

$$W_0 = - \lim_{\Delta\omega \rightarrow 0} \int_0^{\pi/2\Delta\omega} I(t) U(t) dt,$$

т. е. энергии, выделяемой при $0 < t < \pi/2\Delta\omega$ во внешней нагрузке (при $t \approx \pi/2\Delta\omega$ и $\Delta\omega \rightarrow 0$ мы имеем практически $I(t) = 0$ и $U(t) = 0$). Полагая $I_0 = |I_0| e^{i\Phi}$ и усредняя еще по фазе Φ , получаем искомую формулу

$$W = \frac{1}{4} X'(\omega) |I_0|^2.$$

Тот же результат получится, если рассмотреть слегка затухающее гармоническое колебание, т. е. колебание с комплексной частотой $\omega - i\gamma$.

При наличии потерь трудно отличить энергию, еще сохранившую свою электромагнитную природу, от энергии, находящейся в других формах, т. е. различить слагаемые $\partial W/\partial t$ и P в уравнении (5.2). В теории цепей это соответствует тому, что энергия произвольного двухполюсника с импедансом $Z(\omega) = R(\omega) - iX(\omega)$ не определяется функциями $R(\omega)$ и $X(\omega)$: для ее вычисления нужно знать внутреннюю структуру двухполюсника. Сказанное иллюстрируется классическим примером³³ двухполюсника, у которого $Z(\omega) = R = \text{const}$; это может быть либо чистое сопротивление R (рис. 5, а), у которого $W = 0$, либо более сложная схема (рис. 5, б), в которой энергия накапливается в элементах C и L и после выключения напряжения на клеммах диссипирует в элементах R за время порядка τ ; чем больше τ , тем больше энергия, накапливаемая в цепи. В литературе^{17, 26, 28, 30} для законов дисперсии (1.1) — (1.7) приведены формулы, определяющие минимальное значение W и максимальное значение ν_e .

Из рис. 5 можно сделать два дополнительных вывода³³. Во-первых, видно, что закон Джоуля — Ленца, согласно которому тепловая мощность, выделяемая током I в сопротивлении R , равна RI^2 , не является тривиальным следствием закона Ома,

а содержательным экспериментальным результатом, поскольку закон Ома допускает и схему на рис. 5, б, в которой эта мощность не равна RI^2 . Во-вторых, элементы R на рис. 5, б можно заменить такими же сложными схемами, в этих схемах произвести такую же замену и т. д. — таким путем мы получим бесконечную чисто реактивную

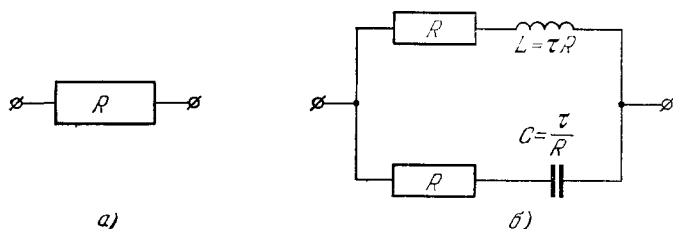


Рис. 5. Двухполюсники, имеющие один и тот же импеданс $Z(\omega) = R = \text{const.}$

систему, обладающую диссипативными свойствами — подобно тому, как в кинетической теории газов диссипативными свойствами обладает консервативная система.

Вернемся к распространению импульсов. Поставим задачу так, как раньше: при некотором $z > 0$ мы наблюдаем импульс, посланный из точки $z = 0$. Импульс приносит с собой поток энергии S_z и выделяет в окрестности точки z мощность, пропорциональную P и имеющую импульсный характер. Если ввести t_0 и t_1 с помощью соотношений^{28, 34}

$$t_0 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t S_z dt}{\int_{-\infty}^{\infty} S_z dt}, \quad t_1 = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t P dt}{\int_{-\infty}^{\infty} P dt}, \quad (5.3)$$

то t_0 будет определять момент, когда в точку z приходит центр импульсного потока энергии, а t_1 — аналогичный момент, соответствующий мощности потерь. Из соотношения (5.2) вытекает тождество

$$\frac{dt_0}{dz} = \frac{1 + \gamma(t_0 - t_1)}{v_e}, \quad (5.4)$$

где

$$v_e = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} S_z dt}{\int_{-\infty}^{\infty} W dt}, \quad \gamma = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} P dt}{\int_{-\infty}^{\infty} W dt}. \quad (5.5)$$

При достаточно медленной модуляции по амплитуде v_e совпадает с величиной (5.1), а γ равно отношению P/W при $\omega = \omega_0$.

Формула (5.4) еще раз показывает, что в отсутствие затухания v_e совпадает с групповой скоростью (3.4). Действительно, в этом случае $P = 0$ и $\gamma = 0$, следовательно, $dt_0/dz = 1/v_e$, а согласно гл. 3 в ближней зоне $dt_0/dz = 1/v_g$, поэтому $v_e = v_g$. Но формула (5.4) при $\gamma = 0$ сообщает нам нечто большее, чем формула (3.4): в промежуточной и дальней зонах, где импульс деформирован, его центр продолжает двигаться с той же скоростью, что и в ближней зоне.

Теперь перейдем к распространению с затуханием, вызванным потерями, и рассмотрим импульс, определяемый в ближней зоне формулой (4.3) при $b = 0$. Мы имеем, очевидно, $\frac{dt_0}{dz} = \frac{1}{v_1}$, поэтому

$$v_1 = \frac{v_e}{1 + \gamma(t_0 - t_1)}, \quad (5.6)$$

и мы видим, что при $\gamma \neq 0$ энергетический центр импульса может перемещаться со скоростью, отличной от v_e и зависящей от формы импульса (поскольку она определяет разность $t_0 - t_1$): $v_1 > v_e$ при $0 < \gamma (t_1 - t_0) < 1$ и $v_1 < 0$ при $\gamma (t_1 - t_0) > 1$. В поглощающей среде $\gamma > 0$ и оба неравенства означают, что импульс потока энергии опережает импульс мощности потерь (рис. 6, а); потери «выедают» преимущественно заднюю часть импульса, что либо увеличивает скорость движения его максимума, как бы подталкивая импульс, либо (при больших значениях $\gamma (t_1 - t_0)$) заставляют его двигаться в отрицательном направлении.

Аналогичный процесс происходит^{35, 36} при распространении светового импульса в усиливающей (лазерной) среде: передняя часть мощного

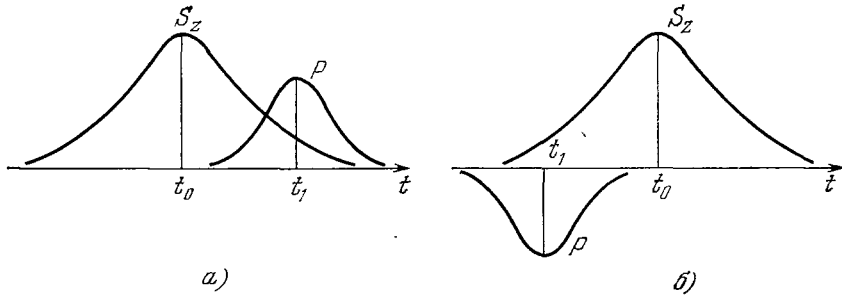


Рис. 6. Импульс потока энергии и импульс мощности потерь при $v_1 > v_e$ в пассивной (поглощающей) среде (а) и в активной среде (б).

импульса проходит в среде с наибольшей инверсной населенностью и усиливается, в то время как задняя часть проходит по обедненной среде и поэтому почти не усиливается ($\gamma < 0$, $t_1 < t_0$; см. рис. 6, б), вследствие этого максимум импульса перемещается со сверхсветовой скоростью. Для этого нелинейного волнового процесса формула (5.4) остается в силе: сверхсветовое распространение импульса в поглощающей линейной среде и усиливающей нелинейной вызвано аналогичными причинами.

Энергетическая интерпретация сверхсветового распространения импульсов показывает еще раз, что оно обусловлено деформацией импульсов и не может быть использовано для передачи сигнала со скоростью, превышающей скорость света в пустоте, точно так же, как отрицательные значения v_1 не могут быть использованы для обхода принципа причинности.

6. ЛИНЕЙНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ АКТИВНЫХ СИСТЕМ

В гл. 4 и 5 показано, что наличие затухания сильно усложняет процесс распространения импульсов. Еще более запутанные явления возникают, когда мы рассматриваем активные (неустойчивые, усиливающие) системы или среды. Для них $\text{Im } h(\omega) < 0$ при некоторых вещественных ω или же $h(\omega)$ не является голоморфной функцией ω при $\text{Im } \omega \geq 0$, как, например, $h(\omega)$ по формуле (1.6).

Однако и для усиливающих систем должен выполняться принцип релятивистской причинности (1.11), в силу чего интеграл Фурье (1.9) следует видоизменить следующим образом:

$$f(z, t) = \int_{i\sigma - \infty}^{i\sigma + \infty} A(\omega) e^{i[h(\omega)z - \omega t]} d\omega, \quad (6.1)$$

где положительный параметр σ выбирается так, чтобы при $\text{Im } \omega \geq \sigma$ функция $h(\omega)$ была голоморфной, в частности, для закона дисперсии (1.6) надо брать $\sigma > \beta$. Поскольку нас интересует главная часть импульса, мы можем деформировать путь интегрирования и провести его через точку ω_0 на вещественной оси. К окрестности этой точки мы можем опять применить формулы (3.1)–(3.4) и для закона дисперсии (1.6) получаем групповую скорость

$$v_g = c \sqrt{1 + \frac{\beta^2}{\omega_0^2}} > c, \quad (6.2)$$

в то время как фазовая скорость меньше c .

Этот результат был отмечен Эренфестом¹⁴ как парадоксальный, но на основании гл. 4 легко дать надлежащие разъяснения. Конечно, главная часть, соответствующая частоте ω_0 , движется со сверхсветовой скоростью (6.2), однако для импульса с фронтом — а только такой импульс может быть сигналом — она не может обогнать фронта и, кроме того, постепенно сходит на нет, теряясь в экспоненциально нарастающей побочной части, получающейся из формулы (2.2) при $\alpha = 0$.

В теории активных систем иногда трудно различить затухающие волны от усиливаемых. Когда в результате теоретического анализа получается волна, для которой $\text{Im } h(\omega_0) < 0$, то возникает вопрос: соответствует ли это усилению волны, бегущей в сторону возрастания z , или затуханию волны, бегущей в сторону убывания z ? В пассивных системах никаких трудностей нет, при $\text{Im } h(\omega_0) > 0$ мы всегда имеем волну, распространяющуюся в положительном направлении, при $\text{Im } h(\omega_0) < 0$ в отрицательном, при $\text{Im } h(\omega_0) = 0$ все определяется знаком групповой скорости (3.4) или предельной скорости (1.8). Для активных систем был предложен^{37–39} ряд критериев, позволяющих ответить на этот вопрос, однако наиболее простой и физически естественный ответ связан с рассмотрением интеграла (6.1) для высокочастотного импульса с несущей частотой ω_0 . Этот путь является тем более естественным, что монохроматическая волна является абстракцией, а на практике мы всегда имеем дело с импульсами, более или менее длинными. Ниже будут рассмотрены конкретные примеры, в которых определить направление распространения не так-то просто.

Для активных систем, как и для пассивных, распространение волн определяется функцией $h(\omega)$, причем не имеет смысла развивать теорию для произвольной функции $h(\omega)$, а нужно иметь в виду реальные среды и линии и те ограничения, которые естественным образом накладываются на закон дисперсии $h(\omega)$. Если мы имеем плоскую волну в однородной среде с комплексной диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega)$, то при $\mu = 1$ функция $h(\omega)$ определяется формулой

$$h(\omega) = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon(\omega)}, \quad (6.3)$$

причем для пассивных сред $\epsilon(\omega)$ есть функция, голоморфная в верхней полуплоскости $\text{Im } \omega \geq 0$ и стремящаяся при $|\omega| \rightarrow \infty$ к единице. Нетрудно видеть, что для линейных *активных* сред это свойство функции $\epsilon(\omega)$ остается в силе, если под верхней полуплоскостью понимать полуплоскость $\text{Im } \omega \geq \sigma$, где σ — положительный параметр, входящий в интеграл (6.1).

В самом деле, обозначим через $A(\omega)$ комплексную спектральную амплитуду электрического поля в данной точке, а через $E(t)$ и $D(t)$ — само электрическое поле и соответствующую ему электрическую индук-

цию *) в той же точке (мы не различаем токи смещения и токи проводимости, включая их в D). Тогда, представляя $E(t)$ и $D(t)$ в виде

$$E(t) = \int_{i\sigma - \infty}^{i\sigma + \infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad D(t) = \int_{i\sigma - \infty}^{i\sigma + \infty} \varepsilon(\omega) A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega, \quad (6.4)$$

мы не можем пользоваться обычными интегралами Фурье, а должны, как в формуле (6.4), сместить путь интегрирования, поскольку обычные интегралы Фурье, взятые по вещественной оси ω , могут представлять лишь функции $E(t)$ и $D(t)$, исчезающие при $t \rightarrow \pm \infty$, а модифицированные интегралы Фурье (6.4), как легко показать путем замены переменной $\omega = \omega' + i\sigma$, требуют лишь исчезания произведений $E(t)e^{-\sigma t}$ и $D(t)e^{-\sigma t}$ при $t \rightarrow \pm \infty$. В активной среде возмущения могут нарастать во времени после прекращения внешних воздействий, поэтому беря σ достаточно большим, мы можем написать выражения (6.4); обращение первого из них имеет вид

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(t) e^{i\omega t} dt, \quad \text{Im } \omega \geq \sigma. \quad (6.5)$$

Принцип причинности требует выполнения условия

$$\text{если } E(t) = 0 \text{ при } t < 0, \text{ то } D(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad (6.6)$$

тогда из выражения (6.5) следует голоморфность функции $A(\omega)$ в полуплоскости $\text{Im } \omega \geq \sigma$, а условие (6.6) будет выполняться только при голоморфности $\varepsilon(\omega)$ в этой полуплоскости.

Законам дисперсии (1.4) и (1.5) соответствует диэлектрическая проницаемость

$$\varepsilon(\omega) = \bar{\varepsilon} - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\nu\omega - \omega_r^2}, \quad (6.7)$$

в которой слагаемое $\bar{\varepsilon}$ при $\omega \approx \pm \omega_r$ можно считать постоянным положительным числом, если все другие резонансные частоты достаточно далеки от ω_r . Инверсия населенностей приводит ⁴⁰ к отрицательному значению $\omega_p^2 = -\beta^2$ и к функции $\varepsilon(\omega)$, голоморфной в полуплоскости $\text{Im } \omega \geq 0$; лишь в предельном случае $\nu = \omega_r = 0$ мы приходим к закону дисперсии (1.6), для которого голоморфность будет лишь при $\text{Im } \omega > \beta$. С точки зрения условия (6.6) была бы возможна активная среда с проницаемостью (6.7), в которой $\omega_p^2 > 0$, но зато $\nu < 0$. Такие среды неизвестны и, вероятно, не существуют, однако законы дисперсии (1.3) и (1.4) при $\omega_p^2 > 0$ и $\nu < 0$ приближенно соответствуют ⁴¹ квантовому парамагнитному усилителю (мазеру) с бегущей волной, состоящему из передающей линии с полосой непрозрачности $0 < \omega < \omega_p$ или $\omega_r < \omega < \sqrt{\omega_r^2 + \omega_p^2}$ и активных элементов, отрицательные потери в которых превосходят положительные потери в линии. При $\omega_p^2 > 0$ и $\nu < 0$ функция $h(\omega)$ голоморфна лишь при $\text{Im } \omega \geq \sigma > |\nu|/2$ и разрез функции $h(\omega)$ расположен выше вещественной оси.

В первом же случае, т. е. при $\omega_p^2 < 0$ и $\nu > 0$, разрез функции $h(\omega)$ находится ниже вещественной оси, интеграл (6.1) берется по вещественной оси, и главная часть импульса усиливается. Во втором случае интеграл (6.4) берется по пути, расположенному выше разреза, который соединяет точки

$$\omega_1 = \omega_r - i\frac{\nu}{2} \quad \text{и} \quad \omega_2 = \omega_r + \frac{\omega_p^2}{2\omega_r} - i\frac{\nu}{2} \quad (\nu < 0, \quad \omega_p^2 \ll \omega_r^2),$$

*) Под E и D мы понимаем одну из декартовых составляющих напряженности и индукции.

и усиление будет только в том случае, когда ω_0 не лежит под разрезом: тогда интеграл можно провести через точку ω_0 , вычислить главную часть и убедиться, что для нее $\text{Im } h(\omega_0) < 0$. Если же точка ω_0 лежит под разрезом (рис. 7), то ситуация иная: мы можем деформировать исходный путь интегрирования в путь, проходящий через точку ω_0 , только переместив разрез L в положение L' . Поэтому в формуле (3.2) для главной части мы будем иметь $\text{Im } h(\omega_0) > 0$, поскольку между кривыми L и L' значение $h(\omega_0)$ берется с иным знаком, чем в точке ω_0 под разрезом L . Иначе говоря, при $\nu < 0$ происходит то же, что и при $\nu = 0$, когда волна затухает, если ее частота попадает в полосу непропускания, и активные элементы не могут «оживить» ее и превратить в нарастающую.

Таким образом, распределение поля в системе будет определяться затухающей экспонентой как при $\nu \geq 0$, так и при $\nu < 0$. Знак ν определяет лишь знак потока энергии в направлении оси z : при $\nu > 0$ этот

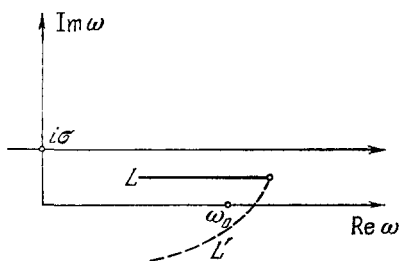


Рис. 7. Вычисление главной части в случае, когда точка ω_0 лежит под разрезом L .

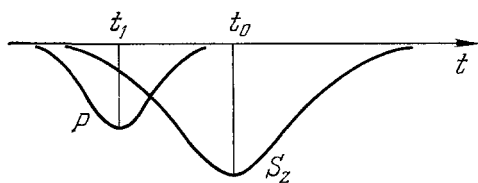


Рис. 8. Импульс потока энергии и импульс мощности потерь в активной системе при экспоненциально затухающем поле.

поток положителен, а при $\nu < 0$ отрицателен, т. е. энергия при $\nu > 0$ вводится источником поля в систему, а при $\nu < 0$ из активной системы передается источнику поля, так что $S_z < 0$ и по формуле (5.1) $v_e < 0$, поскольку $W > 0$.

Тем не менее импульс в такой системе распространяется, как это и следовало ожидать, в положительном направлении ($v_1 > c$), хотя быстро теряет свою форму вследствие усиления побочных частей и ослабления главной. Согласно формуле (5.4) это объясняется тем, что импульс отрицательных потерь сильно опережает импульс отрицательного (к источнику поля) потока энергии (см. рис. 8).

Этот пример показывает, что знак v_e или S_z (как раньше знак v_1) еще не определяет направления распространения волны. Существуют два признака, позволяющих отличать положительное направление от отрицательного. Первый признак — абсолютный: волна распространяется в положительном направлении при положительности предельной скорости (1.8), т. е. в интеграле (6.1) может фигурировать функция $h(\omega)$ лишь с положительной предельной скоростью. Иногда (см. § 7) к пределу $|\omega| \rightarrow \infty$ перейти нельзя, и приходится пользоваться вторым признаком — относительным: если при каком-то конечном значении ω данное значение $h(\omega)$ соответствует волне положительного направления, то аналитическое продолжение дает такую же волну.

7. УСИЛЕНИЕ ПРИ ПРОХОЖДЕНИИ ИЛИ УСИЛЕНИЕ ПРИ ОТРАЖЕНИИ?

Рассмотрим такую задачу ⁴². На плоскую границу раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями ϵ_0 (при $z < 0$) и ϵ (при $z > 0$) падает под углом φ плоская волна, электрическое поле которой параллельно границе раздела (рис. 9). Коэффициент отражения такой волны

равен

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi - \rho}{\sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi + \rho}, \quad \rho = \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0 \sin^2 \varphi}. \quad (7.1)$$

Будем считать ε_0 вещественным положительным числом, причем $\varepsilon_0 > \operatorname{Re} \varepsilon$. Если $\operatorname{Im} \varepsilon > 0$, то знак ρ выбирается так, чтобы величина

$$h = \frac{\omega}{c} \rho = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon - \varepsilon_0 \sin^2 \varphi}, \quad (7.2)$$

определяющая зависимость волны, прошедшей во вторую среду ($z > 0$), от координаты z , имела положительную мнимую часть. Если же $\operatorname{Im} \varepsilon < 0$, т. е. вторая среда является активной, то, вообще говоря, надо брать $\operatorname{Im} \rho < 0$ и $\operatorname{Im} h < 0$, поскольку прошедшая волна должна в активной среде усиливаться. Однако при

$$\sin^2 \varphi > \frac{\operatorname{Re} \varepsilon}{\varepsilon_0} \quad (7.3)$$

возникают сомнения. С одной стороны, можно считать, что малые отрицательные потери (обычно $-\operatorname{Im} \varepsilon \ll 1$) не могут сильно изменить затухающего распределения поля во второй среде, и выбирать в этом случае ρ так, чтобы было $\operatorname{Im} \rho > 0$. Тогда мы получим

$$\begin{aligned} |R|^2 &= \frac{(\sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi - \operatorname{Re} \rho)^2 + (\operatorname{Im} \rho)^2}{(\sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi + \operatorname{Re} \rho)^2 + (\operatorname{Im} \rho)^2} = \\ &= 1 - \frac{4 \sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi \operatorname{Re} \rho}{(\sqrt{\varepsilon_0} \cos \varphi + \operatorname{Re} \rho)^2 + (\operatorname{Im} \rho)^2}, \end{aligned} \quad (7.4)$$

и так как

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{\operatorname{Re} \varepsilon - \varepsilon_0 \sin^2 \varphi + i \operatorname{Im} \varepsilon} \approx \\ &\approx i \sqrt{\varepsilon_0 \sin^2 \varphi - \operatorname{Re} \varepsilon} + \frac{\operatorname{Im} \varepsilon}{\sqrt{\varepsilon_0 \sin^2 \varphi - \operatorname{Re} \varepsilon}}, \end{aligned} \quad (7.5)$$

то $\operatorname{Re} \rho < 0$ и $|R|^2 > 1$, т. е. если усиление при прохождении отсутствует, то будет усиление при отражении, обусловленное потоком энергии из активной среды к границе раздела (ср. рис. 8).

С другой стороны, предыдущий подход приводит к скачкообразному изменению ρ и $|R|^2$ при переходе через угол $\varphi_0 = \arcsin \sqrt{\operatorname{Re} \varepsilon / \varepsilon_0}$. Такой скачок нуждается в обосновании.

Из предыдущей гл. 6 ясно, что выбор знака ρ или, что то же самое, выбор знака h нельзя правильно сделать, если ограничиться только монохроматическими колебаниями, а надо взять импульс и выяснить, усиливается он или ослабляется, что зависит от поведения функции (7.2) в комплексной плоскости ω . Для активных сред квантовой электроники выражение (6.7) обычно упрощают к виду ⁴⁰

$$\varepsilon(\omega) = \bar{\varepsilon} + \frac{\beta^2}{2\omega_r \left(\omega - \omega_r + i \frac{\nu}{2} \right)} \quad (7.6)$$

и тогда

$$\varepsilon(\omega) - \varepsilon_0 \sin^2 \varphi = \hat{\varepsilon} + \frac{\beta^2}{2\omega_r [\omega - \omega_r + i(\nu/2)]} \quad (\hat{\varepsilon} = \bar{\varepsilon} - \varepsilon_0 \sin^2 \varphi), \quad (7.7)$$

причем $\hat{\varepsilon}$ может принимать как малые значения, сравнимые со вторым слагаемым правой части (7.7), так и конечные (положительные или отри-

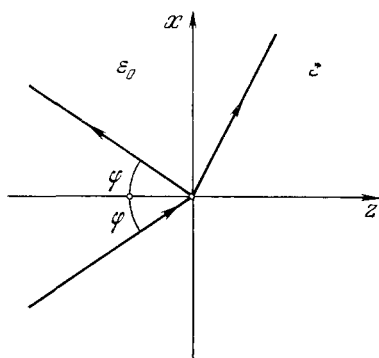


Рис. 9. Падение плоской волны на плоскую границу пассивной ($z < 0$) и активной ($z > 0$) сред.

цательные) значения. Пока $\hat{\varepsilon} > 0$, мы имеем $\text{Im } h(\omega) < 0$, и волна в активной среде усиливается. Знак $\hat{\varepsilon}$ изменяется при переходе через критический угол $\varphi_1 = \arcsin \sqrt{\bar{\varepsilon}/\varepsilon_0}$, слегка отличающийся от φ_0 (впрочем, $\varphi_1 = \varphi_0$ при $\omega = \omega_r$).

Таким образом, при переходе через угол φ_1 свойства функции $h(\omega)$ изменяются скачком: к этому углу и должны быть приурочены скачки ρ и $|R|^2$, а не к углу φ_0 . Правильность выбора значения $\text{Im } h(\omega) > 0$ при $\varphi > \varphi_1$ можно проверить (см. конец гл. 3), беря такие значения $|\omega - \omega_r|$, при которых $\varepsilon(\omega) = \bar{\varepsilon}$: тогда мы имеем полное внутреннее отражение от границы двух обычных диэлектриков, и во второй среде должно быть затухающее распределение поля.

Иногда утверждают^{42, 43а}, что знак ρ можно определить, беря активную среду в виде слоя толщины d , решая задачу для слоя и затем переходя к пределу $d \rightarrow \infty$. Этот путь является иллюзорным, поскольку при $\text{Im } \rho < 0$ волны, возникающие при последовательных отражениях от границ слоя, образуют при достаточно большом d расходящийся ряд и решения просто нет. Тем не менее основные результаты работы⁴² правильны (неточности допущены лишь в отношении угла φ_0 и значения $|R|_{\text{max}}$), работа же^{43а} ошибочна. В работе⁴¹ сделан неправильный вывод (к сожалению, одобренный пишущим эти строки) о том, что в случае, изображенном на рис. 7, значение $\text{Im } h(\omega_0) < 0$ соответствует волне, бегущей в положительном направлении. Этот вывод базировался на положительности S_z и v_e , ошибочность такой аргументации выяснена Стэрроком⁴⁴; на самом деле, как показано в § 6, значение $\text{Im } h(\omega_0) < 0$ для волны, распространяющейся в положительном направлении, не реализуется, причем для окончательного решения вопроса необходимо рассмотреть импульс, т. е. процесс установления.

Максимальный коэффициент усиления в направлении оси z , согласно формулам (7.2) и (7.7) равный

$$-\text{Im } h = \frac{\omega_r}{c} \sqrt{\frac{\beta^2}{\omega_r v}} = \frac{\beta}{c} \sqrt{\frac{\omega_r}{v}}, \quad (7.8)$$

реализуется при $\varphi = \varphi_1 = 0$ и $\omega = \omega_r$. Он существенно превышает коэффициент усиления при нормальном падении: причина в том, что при $\varphi = \varphi_1 = 0$ прошедшая волна распространяется почти перпендикулярно оси z , т. е. перемещается по оси z , пройдя существенно больший путь в активной среде. При $\varphi = \varphi_1 + 0$ и $\omega = \omega_r$ мы имеем $\text{Im } h > 0$ и коэффициент отражения по мощности, равный

$$|R|^2 = \frac{1 + 2\xi + 2\xi^2}{1 - 2\xi + 2\xi^2}, \quad \xi = \frac{\beta}{\sqrt{2\omega_r v (\varepsilon_0 - \bar{\varepsilon})}}, \quad (7.9)$$

принимает максимальное значение⁴⁵

$$|R|_{\text{max}}^2 = (\sqrt{2} + 1)^2 = 5,82 \quad \text{при} \quad \xi = \sqrt{2}. \quad (7.10)$$

Однако на опыте наблюдаются^{45, 46} существенно большие коэффициенты отражения. Поскольку высказывалось мнение^{43б}, что это обусловлено конечной шириной светового пучка, разберем этот вопрос подробнее. Отражение монохроматического (временная зависимость $e^{-i\omega t}$) волнового пучка рассчитывается так же, как распространение импульсов: только вместо интеграла (1.9) по монохроматическим волнам решение уравнения (3.11) с волновым числом $k_0 = (\omega/c) \sqrt{\varepsilon_0}$ представляется в виде интеграла по плоским волнам. Если волновой пучок достаточно узок и падает на плоскость раздела под углом φ , то в интеграле для падающего волнового пучка $u_i(z, x)$ и отраженного волнового пучка $u_r(z, x)$ наиболее существенны плоские волны, углы падения которых близки к φ , и эти интегралы можно вычислить так же, как это сделано в начале гл. 3. Подробности даны в работах Бреховских⁴⁷. Если обозначить коэффициент отражения (7.1) через $R(\varphi) = e^{-i\Omega(\varphi)}$, то получается соотношение

$$u_r(0, x) = R(\varphi) u_i(0, x - \Delta), \quad \Delta = \frac{\Omega'(\varphi)}{k_0 \cos \varphi}, \quad (7.11)$$

аналогичное выражению (3.3) и показывающее, что пучок, падающий на границу под углом φ , отражается с тем же коэффициентом отражения $R(\varphi)$, что и плоская волна, и при отражении испытывает смещение Δ . В обычном случае полного внутреннего отражения $|R(\varphi)| = 1$ и смещение Δ вещественно⁴⁷, при $|R(\varphi)| \neq 1$ величина Δ комплексна. Если, например,

$$u_i(0, x) = e^{-(1/2)(a+ib)x^2 + ikx \sin \varphi} \quad \text{и} \quad \Delta = \xi + i\eta, \quad (7.12)$$

то это означает (см. начало гл. 4) смещение амплитудного центра пучка на расстояние Δ_1 по оси x и смещение фазового центра пучка на Δ_2 , где

$$\Delta_1 = \frac{a\xi - b\eta}{a} \quad \text{и} \quad \Delta_2 = \frac{b\xi + a\eta}{b}, \quad (7.13)$$

и, кроме того, при $x = \Delta_1$ мы имеем

$$|u_r(0, \Delta_1 - \Delta)| = K |u_i(0, 0)|, \quad K = \exp\left(\frac{a^2 + b^2}{2a} \eta^2\right), \quad (7.14)$$

т. е. комплексное смещение Δ приводит к увеличению амплитуды пучка в K раз. Поскольку при $\varphi \approx \varphi_1$ (и $\varphi > \varphi_1$) по формуле (7.1) мы получаем

$$\Omega(\varphi) = 2 \frac{\sqrt{\varepsilon_0 \sin^2 \varphi - \varepsilon}}{\sqrt{\varepsilon_0 \cos \varphi}}, \quad \Omega'(\varphi) = \frac{2 \sqrt{\varepsilon_0} \sin \varphi}{\sqrt{\varepsilon_0 \sin^2 \varphi - \varepsilon}},$$

то согласно соотношению (7.11) при $\varphi = \varphi_1 + 0$ и $\omega = \omega_r$ комплексное смещение Δ равно

$$\Delta = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{k_r} \sqrt{\frac{2}{\delta \varepsilon}} (1 - i), \quad k_r = \frac{\omega_r}{c} \sqrt{\varepsilon_0}, \quad \delta \varepsilon = \frac{\beta^2}{\omega_r v \varepsilon_0} \quad (7.15)$$

и коэффициент усиления пучка равен

$$K = \exp \left[\frac{(a^2 + b^2) \operatorname{tg}^2 \varphi_1}{a k_r^2 \delta \varepsilon} \right], \quad (7.16)$$

т. е. он тем больше, чем меньше $\delta \varepsilon$. Однако это вовсе не значит, что при $\delta \varepsilon \rightarrow 0$ можно получить сколь угодно большой коэффициент усиления K и сколь угодно большое комплексное смещение Δ : дело в том, что формула (7.11), аналогичная формуле (3.3), применима не всегда. Для формулы (3.3) должно выполняться условие (3.9), аналогичное условие для формулы (7.11) имеет вид

$$\frac{1}{2} \Omega''(\varphi) \Delta \psi^2 \ll 1, \quad |\Delta \psi|^2 = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{k_0^2}, \quad (7.17)$$

где $\Delta \psi$ определяет угловую ширину пучка (7.12), подобно тому как $\Delta \omega = \sqrt{a^2 + b^2}$ определяет ширину частотной полосы, занятой импульсом с комплексной огибающей (3.18). Если учесть условие (7.17) и малость $\delta \varepsilon$, то окажется, что в пределах применимости формулы (7.16) всегда $K \approx 1$. Этот результат можно было предвидеть без вычислений: ведь неограниченную плоскую волну всегда можно мысленно разбить на ряд параллельных пучков, при отражении испытывающих смещение и складывающихся в отраженную плоскую волну. Ясно поэтому, что отражение каждого пучка должно происходить с тем же усилением, что и отражение плоской волны.

Таким образом, объяснить большое усиление при отражении конечной шириной пучка (см. ^{43б}) нельзя. По-видимому, на самом деле происходит не усиление при отражении, а усиление при прохождении: часть пучка проходит в активную среду, усиливается там с коэффициентом усиления порядка (7.8) и затем выходит обратно в первую среду благодаря отражению от неоднородностей. Усиление части пучка обусловлено тем, что в его разложении по плоским волнам всегда имеются такие волны, которые проходят в активную среду и усиливаются в ней. Дело обстоит так же, как в случае, изображенном на рис. 7: в то время как частоте ω_0 соответствует затухание, частотам ω , лежащим правее разреза, соответствует усиление, они порождают нарастающие побочные части, о которых говорилось в гл. 6.

Данные выше примеры относятся к квантовой электронике. В «классической» электронике, т. е. для электронных потоков и плазмы, возникают аналогичные проблемы, которые рассмотрены в цитированных ранее работах ³⁷⁻³⁹, ⁴⁴ и являются на первый взгляд более трудными, поскольку комплексные волновые числа k не имеют явного выражения, а для них выводится лишь характеристическое уравнение; если в данной системе взаимодействуют n волн, то это уравнение является алгебраическим уравнением n -й степени. Однако при введении малого параметра ³⁸, ⁴⁸ это уравнение упрощается до квадратного, т. е. взаимодействие сводится к парному. После этого

в каждой волне, возникающей в результате взаимодействия и имеющей функцию $h(\omega)$ уже в явном виде, можно применить изложенную выше общую теорию и, в частности, найти направление распространения. Этого исследования ⁴⁹ мы здесь не приводим, потому что на этом пути новых результатов (по сравнению со статьей ³⁸) пока не получено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вопросы, рассмотренные в данной статье, имеют долгую историю: основы волновой кинематики были заложены Гамильтоном (1839), Стоксом (1876) и Рэлеем (1877), основы энергетической кинематики — Н. А. Умовым (1874). Число дальнейших работ по этим вопросам воистину необъятно и перечислить их всех нельзя. Многочисленность работ объясняется тем, что распространением импульсов постоянно интересуются в самых разных областях физики и техники, но полного аналитического решения этой проблемы дать не удается, если не считать решением интегралы Фурье (4.9) или (6.4) вместе с рекомендацией рассчитывать их на цифровых вычислительных машинах. К сожалению, таких расчетов пока выполнено очень мало: даже в последние годы большинство авторов возлагают неоправданно большие надежды на аналитический аппарат, а если проводят численные расчеты, то их результаты часто должным образом не осмысливаются.

В этой связи следует отметить, что выведенные выше соотношения позволяют, как правило, лишь *понять* основные явления, происходящие при распространении импульсов, и *оценить* их в предельных случаях, не заменяя полного расчета, о котором шла речь выше. В особом положении находится «слон» — главная часть узкополосного импульса, для которой получены более простые выражения (3.5) — (3.8), пределы применимости которых уточнены, особенно в гл. 4 и 6.

Я благодарен В. Л. Гинзбургу за интерес к этому обзору и ценные советы. Я с признательностью вспоминаю критику В. А. Фока, относившуюся к смешению понятий «импульс» и «сигнал» в нашей первой работе с Е. С. Биргером ^{21а}.

Институт физических проблем АН СССР

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Я. Л. Ширман, Разрешение и сжатие сигналов, М., «Сов. радио», 1974.
2. A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 44 (10), 177 (1914).
3. L. Brillouin, ibid., S. 203.
4. H. G. Baerwald, ibid. 6, 295; 7, 731 (1930).
5. М. Элайсез, Ф. Гарсиа-Молинер, в кн. Физическая акустика, т. V, под ред. У. Мезона, М., «Мир», 1973 стр. 192.
6. А. Зоммерфельд, Оптика, М., ИЛ, 1953, § 22.
7. П. В. Блюх, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 7, 460 (1964).
8. А. Г. Литвак, В. И. Таланов, ibid. 10, 539 (1967).
9. J. R. Wait, Radio Sci. (J. Res. Nat. Bur. Stand) D69, 1387 (1965).
10. M. J. Lighthill, G. N. Whitham, Proc. Roy. Soc. A229, 281, 316 (1955).
11. Л. А. Островский, Радиотехн. и электрон. 10, 1175 (1965).
12. Alwyn Scott, Active and Nonlinear Propagation in Electronics, N.Y., J. Wiley, 1970.
13. Б. Б. Кадомцев, В. И. Карпман, УФН 103, 193 (1971).
14. P. Ehrenfest, Ann. d. Phys. 33, 1571 (1910) (имеется перевод в кн. П. Эренфеста «Относительность, кванты, статистика», М., «Наука», 1972, стр. 32).
15. В. А. Фок, Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн, М., «Сов. радио», 1970.
16. Н. Г. Денисов, ЖЭТФ 21, 1354 (1951).
17. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, М., «Наука», 1967.
18. K. G. Budden, Radio Waves in the Ionosphere, Cambridge, University Press. 1966.

19. Б. Н. Гершман, ЖТФ 22, 101 (1952).
D. G. Anderson, J. I. H. Askne, Proc. IEEE 62, 1518 (1974).
20. а) L. B. Felsen, IEEE Trans. Antennas and Propagation AP-18, 424, (1971).
б) К. А. Конног, L. B. Felsen, Proc. IEEE 62, 1586 (1974).
21. Е. С. Биргер, Л. А. Вайнштейн, а) Радиотехн. и электрон. 18, 449 (1973); б) ЖТФ 43, 2217 (1973); в) ЖТФ 46, 242 (1976).
22. P. Pleshko, I. Palócsz, Phys. Rev. Lett. 22, 1201 (1969).
23. J. L. Birman, M. J. Frankel, Optics Comm. 13, 303 (1975).
24. К. А. Барсуков, В. Л. Гинзбург, Изв. вузов, сер. «Радиофизика» 7, 1187 (1964).
25. Г. И. Терина, Радиотехн. и электрон. 17, 611 (1972).
26. L. Brillouin, in: Congrès Intern. d'Electricité. Comptes rendus de travaux de la première section, v. II, P., Gauthier-Villars, 1932, p. 739.
27. С. М. Рытов, ЖЭТФ 17, 930 (1947).
28. Л. А. Вайнштейн, ЖТФ 27, 2606 (1957); Электромагнитные волны, М., «Сов. радио» 1957, гл. VIII.
29. Г. Ламб, Гидродинамика, М.—Л., Гостехиздат, 1947, § 236, 237, 266 и т. д.
30. E. O. Schulz-Du Bois, Proc. IEEE 57, 1748 (1969).
31. Б. В. Булгаков, Колебания, М., Гостехиздат, 1954, § 9. 22.
32. И. С. Гоноровский, Основы радиотехники, М., Связьиздат, 1957, § 6.3.
33. J. Meixner, IRE Trans. AP-7, Spec. Suppl. S435 (1959).
34. L. A. Weinstein, Fale elektromagnetyczne, Warszawa, PAN, 1963, § 50.
35. Н. Г. Басов, Р. В. Амбарцумян, В. С. Зуев, П. Г. Крюков, В. С. Летохов, ЖЭТФ 50, 23 (1966).
36. П. Г. Крюков, В. С. Летохов, УФН 99, 169 (1969).
37. R. J. Briggs, Electron-Stream Interactions with Plasmas, The MIT Press. Cambridge, Mass, 1964.
38. А. И. Ахизер, Р. В. Половин, УФН 104, 185 (1971).
39. M. C. Steele, B. Vural, Wave Interactions in Solid State Plasmas, N.Y., McGraw-Hill, 1969, ch. 5.
40. Р. Пантел, Г. Путхоф, Основы квантовой электроники, М., «Мир», 1972.
41. В. Б. Штейншлейгер, Г. С. Мисежников, Радиотехн. и электрон. 5, 962 (1960).
42. Г. Н. Романов, С. С. Шахиджанов, Письма ЖЭТФ 16, 298 (1972).
43. А. А. Колоколов, а) ibid. 21, 660 (1975); б) Опт. и спектр. 38, 809 (1975).
44. Колебания сверхвысоких частот в плазме, ред. Г. А. Бернашевский и З. С. Чернов, М., ИЛ 1961, стр. 71.
Р. А. Стургоск, Phys. Rev. 112, 1488 (1958).
45. С. А. Лебедев, В. М. Волков, Б. Я. Коган, Опт. и спектр. 35, 976 (1973).
46. Б. Я. Коган, В. М. Волков, С. А. Лебедев, Письма ЖЭТФ 16, 144 (1972).
47. Л. М. Бреховских, Волны в слоистых средах, М., «Наука», 1973 (стр. 74 и след.), УФН 50, 539 (1953).
48. Р. В. Половин, ЖТФ 31, 1220 (1961).
49. Лекции по электронике СВЧ (3-я зимняя школа-семинар инженеров), кн. V, Саратов, Изд-во Сарат. ун-та 1974, стр. 76—86.

